RESEARCH REPORS

SUR DES SÉRIES INFINIES DE FONCTION DE BESSEL

KEIKO KOBAYASI et ÉI ITI TAKIZAWA

Institute d'Aèronautique et Sience d'Espace

(Reçu le 3 mars 1963)

Préliminaire

Pour considérer la propagation des ondes dans l'aile portante d'une aéroplane, nous avons traité de modèle d'une chaîne linéaire d'oscillateurs dans notre précédent article,[1] où nous avons insisté tout particulièrement sur l'importance de l'existence de la localisation des mouvements ondulatoirs.

Dans le présent article cependant, nous allons considérer le même cas d'une chaîne linéaire d'oscillateurs harmoniques, ayant pour but de fonder la mécanique statistique des phénomènes irréversible. En pareille circonstance, l'integration des équations de la mécanique une fois effectuée, on peut soumettre les conditions initiales à une distribution statistique et étudier ainsi l'évolution des fonctions de distribution. Dans le cas très simple considéré ailleurs, nous avons pu directement utiliser la solution des équations dynamiques pour une chaîne *infinie*, obtenue à partir des données initiales: solution indiquée par Schrödinger[2] et développée dans une série infinie de fonction de Bessel. Mais, au contraire, dans le cas d'une chaîne *finie*, il n'est pas si facile de soumettre cette solution analytique aux conditions bornées aux points terminus de la chaîne. Et chose encore difficile est de poursuivre analytiquement l'evolution de l'énergie ondulatoire d'une particle à l'autre. En d'autres mots, même si cette solution pour la chaîne finie était obtenu dans series infinies de fonction de Bessel, l'évolution des fonctions de corrélation ou des seconds moments statistiques au cours du temps ne serait pas facilement effectuée.

Dans le présent article nous démontrerons les formules qui s'utilisent pour étudier les phénomènes irréversibles. A partir de notre resultat, il n'est pas difficile de voir que les formules s'établissent tout de suite, lesquelles sont indiquées par Klein et Prigogine[3] dans leur travail sur la mécanique statistique des phénomènes irréversibles.

Proposition et Démonstration

Nous démontrons les formules suivantes:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{4n}(z)J_{4n+N}(z) = \frac{1}{2}\cos\frac{N}{4}\pi\cdot J_N(\sqrt{2}\,z) + \frac{1}{4}J_N(2z), \quad (\text{pour } N \neq 0) \tag{1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{4n+1}(z)J_{4n+1+N}(z) = \frac{1}{2}\sin\frac{N}{4}\pi\cdot J_N(\sqrt{2}z) - \frac{1}{4}J_N(2z), \text{ (pour } N \neq 0) \tag{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{4n+2}(z)J_{4n+2+N}(z) = -\frac{1}{2}\cos\frac{N}{4}\pi\cdot J_N(\sqrt{2}z) + \frac{1}{4}J_N(2z), \text{ (pour } N \neq 0) \tag{3}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{4n+3}(z)J_{4n+3+N}(z) = -\frac{1}{2}\sin\frac{N}{4}\pi\cdot J_N(\sqrt{2}z) - \frac{1}{4}J_N(2z), \text{ (pour } N \neq 0) \tag{4}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{J_{4n}(z)\}^2 = \frac{1}{2}J_0(\sqrt{2}z) + \frac{1}{4}J_0(2z) + \frac{1}{4}, \tag{5}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{J_{4n+1}(z)\}^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{J_{4n+3}(z)\}^2 = -\frac{1}{4}J_0(2z) + \frac{1}{4}, \tag{6}$$

et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{J_{4n+2}(z)\}^2 = -\frac{1}{2}J_0(\sqrt{2}z) + \frac{1}{4}J_0(2z) + \frac{1}{4}. \tag{7}$$

où $J_\nu(z)$ est fonction de Bessel d'ordre ν, et N un nombre intégral.

Nous allons considérer quatre expressions (1)$\sim$(4) séparément, et posons d'abord :

$$S_{4n} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{4n}(z)J_{4n+N}(z),$$

$$S_{4n+1} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{4n+1}(z)J_{4n+1+N}(z),$$

$$S_{4n+2} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{4n+2}(z)J_{4n+2+N}(z),$$

et

$$S_{4n+3} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{4n+3}(z)J_{4n+3+N}(z).$$

En utilisant des formules classiques (cf. Référence 4) p. 19), on a :

$$\begin{aligned} S_{4n} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{4n}(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\{(4n+N)\theta - z\sin\theta\}d\theta \\ &= \sum_n J_{4n}(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos 4n\theta\cdot\cos(N\theta - z\sin\theta)d\theta - \\ &\quad - \sum_n J_{4n}(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin 4n\theta\cdot\sin(N\theta - z\sin\theta)d\theta. \end{aligned}$$

En permutant la sommation et l'intégration, on a donc :

$$S_{4n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[J_0(z) + 2\{J_4(z)\cos 4\theta + J_8(z)\cos 8\theta + J_{12}(z)\cos 12\theta + \cdots\}]\times \times\cos(N\theta - z\sin\theta)d\theta. \tag{8}$$

Toute la même calculation conduit aussi à :

$$S_{4n+2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\{J_2(z)\ \cos\ 2\,\theta + J_6(z)\ \cos\ 6\,\theta + J_{10}(z)\ \cos\ 10\,\theta + \cdots\} \times$$
$$\times \cos\ (N\theta - z \sin\ \theta)\, d\theta. \qquad (9)$$

A partir de (8) et de (9), on calcule (cf. Référence 4) p. 22)

$$\begin{aligned} S_{4n} + S_{4n+2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\ (z\ \sin\ \theta)\cdot \cos\ (N\theta - z\ \sin\ \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\ N\theta + \cos\ (N\theta - 2\,z\ \sin\ \theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{2} J_N(0) + \frac{1}{2} J_N(2\,z) \qquad (10) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2} J_N(2\,z), & (\text{pour } N \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} J_0(2\,z), & (\text{pour } N = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_{4n} - S_{4n+2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\ (z \cos\ \theta)\cdot \cos\ (N\theta - z\ \sin\ \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\ \{N\theta - z(\sin\ \theta - \cos\ \theta)\} + \cos\ \{N\theta - z(\sin\ \theta + \cos\ \theta)\}] d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/4}^{2\pi-\pi/4} \cos\ \left\{N\left(\Theta + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\,z \sin\ \Theta\right\} d\Theta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_{\pi/4}^{2\pi+\pi/4} \cos\ \left\{N\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\,z\ \sin\ \Theta\right\} d\Theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \cos\ \frac{N}{4}\pi \cdot \left[\int_{-\pi/4}^{2\pi-\pi/4} \cos\ (N\Theta - \sqrt{2}\,z\ \sin\ \Theta)\cdot d\Theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/4}^{2\pi+\pi/4} \cos\ (N\Theta - \sqrt{2}\,z \sin\ \Theta) d\Theta \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \sin\ \frac{N}{4}\pi \cdot \left[\int_{-\pi/4}^{2\pi-\pi/4} \sin\ (N\Theta - \sqrt{2}\,z \sin\ \Theta)\, d\Theta - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\pi/4}^{2\pi+\pi/4} \sin\ (N\Theta - \sqrt{2}\,z \sin\ \Theta) d\Theta \right] \\ &= \cos\ \frac{N}{4}\pi \cdot J_N(\sqrt{2}\,z). \qquad (11) \end{aligned}$$

On a donc facilement les formules (1), (3), (5) et (7), d'après ce que l'on calcule la somme et la différence de (10) et (11).

De même, on trouve S_{4n+1} et S_{4n+3}.

On en déduit encore (cf. Référence 4) p. 22)

$$\begin{aligned} S_{4n+1} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin\ (z \cos\ \theta)\cdot \cos\ (N\theta - z \sin\ \theta)\, d\theta - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin\ (z \sin\ \theta)\cdot \sin\ (N\theta - z \sin\ \theta) d\theta, \qquad (12) \end{aligned}$$

et

$$S_{4n+3} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin(z\cos\theta)\cdot\cos(N\theta - z\sin\theta)\,d\theta - \\ -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin(z\sin\theta)\cdot\sin(N\theta - z\sin\theta)\,d\theta. \tag{13}$$

En vertu de (12) et de (13), on obtient

$$\begin{aligned} S_{4n+1} + S_{4n+3} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(z\sin\theta)\cdot\sin(N\theta - z\sin\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\cos N\theta - \cos(N\theta - 2z\sin\theta)]\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}J_N(0) - \frac{1}{2}J_N(2z) \qquad (14) \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}J_N(2z), & (\text{pour } N \neq 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}J_0(2z). & (\text{pour } N = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Tout aussi

$$\begin{aligned} S_{4n+1} - S_{4n+3} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(z\cos\theta)\cdot\cos(N\theta - z\sin\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\sin\{N\theta - z(\sin\theta - \cos\theta)\} - \sin\{N\theta - z(\sin\theta + \cos\theta)\}]\,d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/4}^{2\pi-\pi/4} \sin\left\{N\left(\Theta + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\,z\sin\Theta\right\}d\Theta - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\int_{\pi/4}^{2\pi+\pi/4} \sin\left\{N\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\,z\sin\Theta\right\}d\Theta \\ &= \frac{1}{4\pi}\cos\frac{N}{4}\pi\cdot\left[\int_{-\pi/4}^{2\pi-\pi/4} \sin(N\Theta - \sqrt{2}\,z\sin\Theta)\,d\Theta - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\pi/4}^{2\pi+\pi/4} \sin(N\Theta - \sqrt{2}\,z\sin\Theta)\,d\Theta\right] + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\sin\frac{N}{4}\pi\cdot\left[\int_{-\pi/4}^{2\pi-\pi/4} \cos(N\Theta - \sqrt{2}\,z\sin\Theta)\,d\Theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/4}^{2\pi+\pi/4} \cos(N\Theta - \sqrt{2}\,z\sin\Theta)\,d\Theta\right] \\ &= \sin\frac{N}{4}\pi\cdot J_N(\sqrt{2}\,z). \qquad (15) \end{aligned}$$

A partir de (14) et (15), on conclut enfin les formules à démontrer: (2), (4) et (6).

Nous notons ici que les résultats (10) et (14) sont exactement les mêmes formules données par Klein et Prigogine[3] dans leur travail. (cf. Référence 3) p. 1057 (3.5) et (3.6))

Ce travail a été favorisé par les subventions de la Fondation de Tòkai Gakuzyutu Syórei Kai et des Recherches Scientifiques du Ministère de l'Instruction Publique.

Références

1) É. I. Takizawa et K. Kobayasi: Memo. Fac. Engineering, Nagoya Univ. **14** (1962), 138.
2) E. Schrödinger: Annalen der Physik **44** (1914), 916.
3) G. Klein et I. Prigogine: Physica **19** (1953), 1053.
4) G. N. Watson: *Theory of Bessel Functions* (1944) Cambridge Univ. Press.