

# DIE ERZWUNGENEN SCHWINGUNGEN IN SERVOANORDNUNGEN MIT NICHTLINEARER REIBUNG

SENSHI KOBAYASHI und KUNIIHIKO ICHIKAWA

*Aeronautisches Institut*

(Eingegangen am 27. Feb. 1963)

## 1. Allgemeines

In dieser Abhandlung werden die die erzwungene Schwingung betreffenden Phänomene in der linearen Servoanordnung, bei der nur die Reibung nichtlinear auftritt theoretisch genau analysiert. Die nichtlineare Reibung besteht aus Coulombscher und statischer Reibungen. In die zwei Klassen, d.h. die einerlei Schwingung mit intermittierender Einstellung in einer halben Schwingungsdauer und die andere ohne diese, werden die erzwungenen Schwingungen in solch einem Systeme eingeteilt. Es scheint, dass die Untersuchungen,<sup>1)~3)</sup> die bisher in diesem Thema angestellt worden sind, meistens die letztere von den zweierlei Schwingungen behandelt haben und die erstere, auf die die Analysis in diesem Aufsatz Gewicht legt, unbekannt bleibt.

## 2. Grundlegende Verhältnisse zur erzwungenen Schwingung

Bild 1 zeigt das äquivalente Blockdiagramm einer Servoanordnung 2. Ordnung mit Eigenfrequenz  $\omega_n$ , die durch die Normierung von  $\tau = \omega_n t$  gewonnen wird.

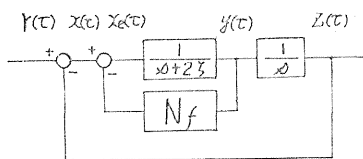


Bild 1

$r(\tau)$ ,  $x(\tau)$ ,  $x_e(\tau)$ ,  $y(\tau)$  und  $z(\tau)$  in diesem Bild stellen jeder das Eingangssignal, das Eingangsdrehmoment im Motor, das wirksame Drehmoment, die Geschwindigkeit der Drehschwingung und den Drehwinkel (Regelgrösse) des Motors dar.  $f(\tau)$  ist die Ausgangsgrösse des nichtlinearen Reibungselements  $N_f$ , deren Eigenschaft durch folgende Gleichung bestimmt wird.

$$f(\tau) = \pm F, \quad y(\tau) \geq 0; \quad f(\tau) = \pm \mu F, \quad y(\tau) = 0 \quad (1)$$

In einem solchen Systeme ergibt sich  $x(\tau)$  aus folgenden zweierlei Differentialgleichungen wechselweise in jeder Hälfte der Schwingungsdauer.

$$\ddot{x}(\tau) + 2\zeta\dot{x}(\tau) + x(\tau) = F = \ddot{y}(\tau) + 2\zeta\dot{y}(\tau) \quad (2)$$

Nun lässt man den Moment, wo  $y(\tau)$  null ist, die Ursprung der Zeitachse liegen und die Phase  $\varphi$  der Eingangsgrösse  $r(\tau) = R \sin(\omega\tau + \varphi)$ , die unbekannte Grösse. Dann kann man folgende Verhältnisse finden als Lösung der Gleichung (2) für die Anfangsbedingungen von  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = \omega R \cos \varphi$ .

$$x(\tau) = R \sin(\omega\tau + \varphi) - z(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \pi/\omega \quad (3)$$

$$z(\tau) = RA(\tau) \sin \varphi + RB(\tau) \cos \varphi + (x_0 - F)C(\tau) - F, \quad 0 \leq \tau \leq \pi/\omega \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} A(\tau) &= M \sin(\omega\tau + \alpha) + \frac{M}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\tau} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\tau + \beta) + \frac{e^{-\zeta\tau}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\tau + \gamma) \\ B(\tau) &= M \cos(\omega\tau + \alpha) + \frac{\omega M}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\tau} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\tau + \delta) \\ C(\tau) &= \frac{-e^{-\zeta\tau}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\tau + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} \frac{(1-\omega^2)}{2\zeta\omega}, \quad \beta = \tan^{-1} \frac{-\zeta(1+\omega^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}(1-\omega^2)}, \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \\ \delta &= \tan^{-1} \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 - 1 + \omega^2}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Drehungsgeschwindigkeit,  $y(\tau)$ , ist:

$$y(\tau) = \dot{z}(\tau) = R\dot{A}(\tau) \sin \varphi + R\dot{B}(\tau) \cos \varphi + (x_0 - F)\dot{C}(\tau) \quad (7)$$

### 3. Bedingung für die erzwungene Schwingung mit intermittierender Einstellung im nur Coulombsche Reibung enthaltenden Systeme

Bild 2 zeigt ein Beispiel der erzwungenen Schwingungsformen mit intermittierender Einstellung in verschiedenen Teilen des Systems. Wenn der absolute Wert des Drehmoments  $|x(\lambda\pi/\omega)|$  im

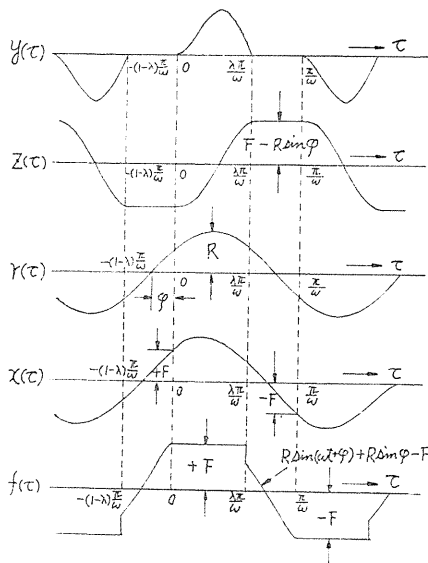


Bild 2

Moment  $\tau = \lambda\pi/\omega$ , wo  $y(\tau)$  wieder null wird, kleiner als  $F$  ist, bleibt die Drehung des Motors von jenem Moment bis zum Moment  $\tau = \pi/\omega$ , an dem  $|x(\pi/\omega)|$  gleich  $F$  wird, einstellen. Daraus folgen  $y(\tau) = 0$ ,  $z(\tau) = z(\lambda\pi/\omega) = z(\pi/\omega)$  und  $x(\tau) = f(\tau) = R \sin(\omega\tau + \varphi) - z(\lambda\pi/\omega)$  bei  $\lambda\pi/\omega \leq \tau \leq \pi/\omega$ , d.h.,  $f(\tau)$  hält sich gerade dem  $x(\tau)$  Gleichgewicht. Je kleiner sowohl die Eingangsgröße  $R$  als auch die Winkelfrequenz  $\omega$  werden, desto merkwürdiger wird diese Erscheinung weil sich  $x(\tau)$ , die Regelabweichung, mit Verkleinerung von  $\omega$  und  $R$  vermindert. Aus dem vorhergehenden Verhältnis wird folgende Bedingung deduziert, unter der die Schwingung durch ein Intervall von  $(1-\lambda)\pi/\omega$  in jeder Hälfte der Schwingungsdauer intermittierend einstellen muss.

$$\left. \begin{aligned} y(\lambda\pi/\omega) &= 0 \\ F &= -x(\pi/\omega) = R \sin \varphi + z(\lambda\pi/\omega) \\ |x(\tau)| &< F, \quad \lambda\pi/\omega \leq \tau < \pi/\omega \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir substituieren  $y(\lambda\pi/\omega)$  und  $z(\lambda\pi/\omega)$  in (8) durch diejenigen, die mit den Setzungen von  $x_0 = +F$  und  $\tau = \lambda\pi/\omega$  in (4) und (7) gewonnen werden.

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}(\lambda\pi/\omega) \sin \varphi = \dot{B}(\lambda\pi/\omega) \cos \varphi = 0 \\ R/F(A(\lambda\pi/\omega) + 1) \sin \varphi + R/FB(\lambda\pi/\omega) \cos \varphi = 2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\therefore \varphi = \tan^{-1} \dot{B}(\lambda\pi/\omega) / \dot{A}(\lambda\pi/\omega) \quad (10)$$

$$R/F = 2 / (A(\lambda\pi/\omega) + 1) \sin \varphi + B(\lambda\pi/\omega) \cos \varphi \quad (11)$$

#### 4. Eigene Gegenresonanzen im nur Coulombsche Reibung enthaltenden Systeme

Die erzwungenen Schwingungen in den verschiedenen Teilen gedachten Systemes können nach der symmetrischen Eigenschaft der nichtlinearen Reibung nur die harmonischen Komponenten der höheren ungeraden Ordnungen enthalten. Wenn irgend eine harmonische Komponente der erzwungenen Schwingung mit der Eigenschwingung des Systemes ohne Zähigkeitsreibung resoniert, könnte sich die fundamentale Komponente durchaus vermindern und die eigene Gegenresonanz erscheinen. Aus den Setzungen von  $\zeta = 0$  in (5), (6), (10) und (11) folgt:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\cos(\lambda\pi) - \cos(\lambda\pi/\omega)}{\sin(\lambda\pi) - \omega \sin(\lambda\pi/\omega)} \quad (12)$$

$$R/F = \frac{2(1 - \omega^2)}{\sin \varphi [(1 - \omega^2) + \cos(\lambda\pi) - \omega^2 \cos(\lambda\pi/\omega)] + \cos \varphi [\sin(\lambda\pi) - \omega \sin(\lambda\pi/\omega)]} \quad (13)$$

Man kann folgendes Verhältnis haben, unter dem sich die eigene Gegenresonanz dadurch erhebt, dass man  $R/F$  der Unendlichgrösse, d.h. den Nenner von (13) der Null, gleichmacht und  $\varphi$  mit Hilfe von (12) eliminiert.

$$\begin{aligned} [\sin(\lambda\pi) - \omega \sin(\lambda\pi/\omega)]^2 = [(1 - \omega^2) + \cos(\lambda\pi) - \omega^2 \cos(\lambda\pi/\omega)] \cdot \\ [\cos(\lambda\pi/\omega) - \cos(\lambda\pi)] \end{aligned} \quad (14)$$

Mit Bild 3 wird (14) illustriert. Nämlich befinden sich darin die unzähligen

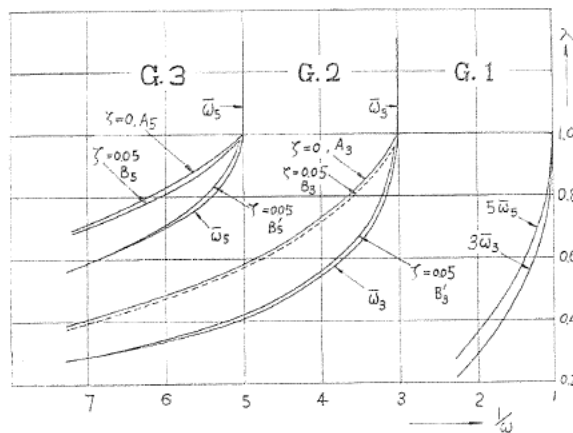


Bild 3

nichtlinearen eigenen Gegenresonanzfrequenzen  $\bar{\omega}_{2n-1}$  ( $n=2, 3, \dots$ ). In den Fällen von  $\lambda < 1$  d.h. der Schwingungen mit intermittierender Einstellung verändern sich wegen der Nichtlinearität  $\bar{\omega}_{2n-1}$  ( $n=2, 3, \dots$ ) je nach  $\lambda$ . Andererseits fixieren sich  $\bar{\omega}_{2n-1}$  an  $1/2n-1$  (die normierte Eigenwinkelfrequenz,  $\omega_1=1$ ) in den Fällen von  $\lambda=1$ , d.h. den Schwingungen ohne intermittierende Einstellung. Im allgemeinen sind  $(n-1)$  Gegenresonanzkurven auf dem Gebiete von  $n$ , das sich mit dem Winkelfrequenzgebiet von  $1/2n+1 < \omega < 1/2n-1$  identifiziert.

### 5. Sprungerscheinungen in der erzwungenen Schwingung mit intermittierender Einstellung

#### 5.1. Fall ohne Zähigkeitsreibung

Die  $R/F-\lambda$  Eigenschaften bei konstantem  $\omega$  lassen sich wie im Bild 4 (a) zeigen, berechnen. Auf dem Gebiete von  $n$  existieren  $(n-1)$  Werte von  $\lambda$ , die  $\lambda$  praktisch nicht erreichen könnte, wenn sich  $R/F$  auch unendlich verstärken liesse. Falls  $R/F$  von irgend einem grösseren Wert verkleinert wird, erfolgt auch die Sprungerscheinung bei konstantem  $\omega$  wie es im Bild gezeigt ist. Das Verhältnis, das  $\omega$  und  $\lambda$  an den Punkten des Absprunges gibt, wird, wie folgt, dadurch geführt, dass man  $\varphi$  in (12) betreffs  $\lambda$  differenziert und die Folge der Null gleichmacht.

$$1/2 (\omega + 1/\omega) \sin(\lambda\pi) \sin(\lambda\pi/\omega) + \cos(\lambda\pi) \cos(\lambda\pi/\omega) = 1 \quad (15)$$

Die Kurven  $A_{2n-1}$  ( $n=2, 3, \dots$ ) in Bild 3 ergeben sich in (15). Die Gebiete zwischen  $\bar{\omega}_{2n-1}$  und  $A_{2n-1}$  ( $n=2, 3, \dots$ ) sind die weitesten, auf denen die Sprunger-

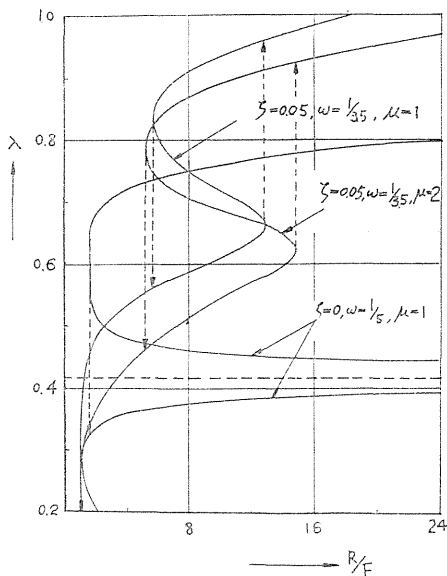


Bild 4 (a)

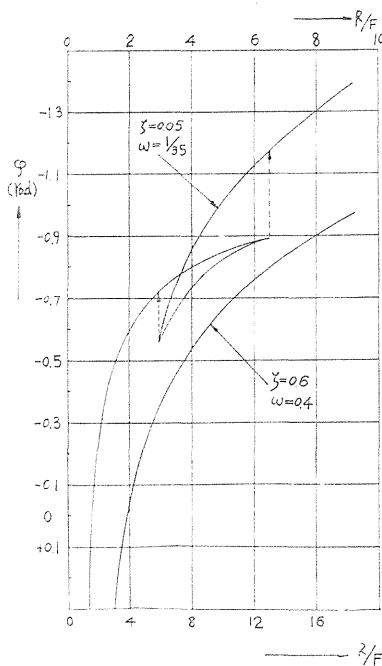


Bild 4 (b)

scheinungen in den Systemen zweiter Ordnung mit nur Coulombscher Reibung vorkommen können.

### 5.2. Fälle mit kleinerer Zähigkeitsreibung

Bild 4 (a) zeigt auch, dass die  $R/F-\lambda$  Eigenschaft auf dem Gebiete von 2 (im Falle von  $\zeta=0.05$ ) die einfache Sprungerscheinung mit sich bringt. Die  $(n-1)$ -fältige Sprungerscheinung mit der Hysterese trägt sich gewöhnlich auf dem Gebiete von  $n$  zu.

Es geschieht, dass sich die  $R/F-\varphi$  Eigenschaft bei konstantem  $\omega$  wie gewundene Schnur benimmt, der Sprungerscheinung in der  $R/F-\lambda$  Eigenschaft entsprechend (v g l. Bild 4 (b)). Bild 5 zeigt die  $\omega-\lambda$  Eigenschaften bei konstantem  $R/F$  mit vielfachen Sprungerscheinungen. Die Gebiete zwischen  $B_{2n-1}$  und  $B'_{2n-1}$  ( $n=2, 3, \dots$ ) in Bild 3 sind diejenigen, auf denen sich die Sprungerscheinungen im Falle von  $\zeta=0.05$  ereignen. Sie lassen sich berechnen, wie bei  $A_{2n-1}$  ( $n=2, 3, \dots$ ). In den Fällen mit grösserer Zähigkeitsreibung entsteht keine Sprungerscheinung mehr und die  $R/F-\lambda$  Eigenschaften sind stabil und monoton (v g l. Bild 4 (b)).

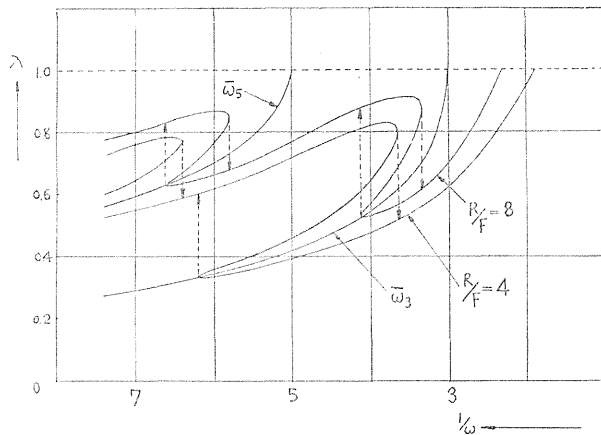


Bild 5

## 6. Einflüsse der statischen Reibung

Man kann folgende Bedingung für die erzwungene Schwingung mit intermittierender Einstellung in den Coulombsche und statische Reibungen enthaltenden Systemen haben, mit Hilfe von (8) und der Setzungen von  $x_0 = +\mu F$  und  $\tau = \lambda\pi/\omega$  in (4) und (7).

$$\left. \begin{aligned} R/F\dot{A}(\lambda\pi/\omega) \sin \varphi + R/F\dot{B}(\lambda\pi/\omega) \cos \varphi + (\mu - 1)\dot{C}(\lambda\pi/\omega) &= 0 \\ R/F(A(\lambda\pi/\omega) + 1) \sin \varphi + R/FB(\lambda\pi/\omega) \cos \varphi + (\mu - 1)C(\lambda\pi/\omega) &= \mu + 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wie in Bild 4 (a) und Bild 6 gezeigt, sind die  $R/F-\lambda$  Eigenschaften im jetzt betrachteten Falle hart und besitzen die Hysterese, dagegen sind sie weich und besitzen keine Hysterese im nur Coulombsche Reibung enthaltenden Falle.

Wie in Bild 7 mit den Kurven von C und D illustriert, befinden sich im

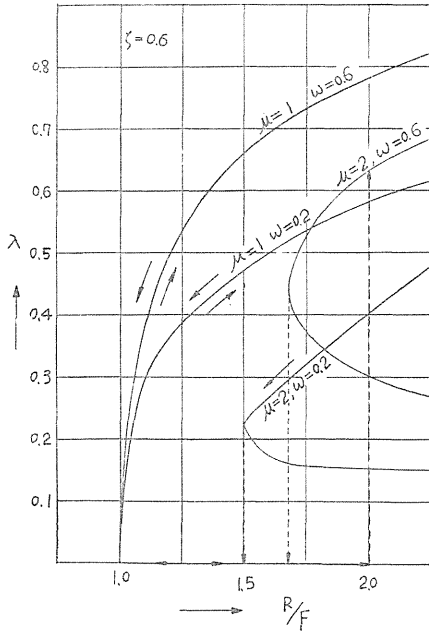


Bild 6

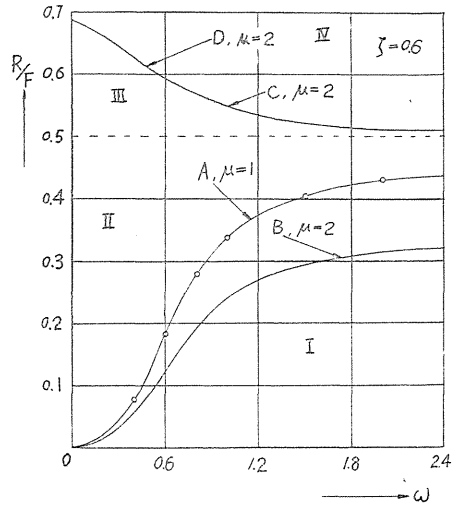


Bild 7

Fall von  $\mu > 1$  imfolgedessen die zwei Grenzen, an denen die Schwingungen, dem Zu- und Abnahmen von  $R/F$  entsprechend, vollständig einstellen. Kurve  $D$  verläuft von Frequenz abhängig. Die Gebiete III und IV über den Kurven  $C$  und  $D$  sind jeder diejenigen der vollkommenen Einstellung. Kurven  $A$  und  $B$  in Bild 7, die sich durch die Setzungen von  $\lambda = 1$  in (9) bzw. (16) berechnen lassen, zeigen jeder Beispiele der Verhältnisse zwischen  $R/F$  und  $\omega$  bei  $\mu = 1$  und  $\mu > 1$ , dass sich die Schwingungen mit intermittierender Einstellung auf den Gebieten oberhalb dieser Kurven bringen und nicht auf den Gebieten unterhalb dieser.

### 7. Erzwungene Schwingungen ohne intermittierende Einstellung

Die Bedingung für die oben betrachtete Schwingung ist:

$$x(\pi/\omega) = -x_0, \quad y(\pi/\omega) = 0 \tag{17}$$

Aus den Anwendungen oben erwähnter Bedingung auf (3), (4) und (7), folgt:

$$\begin{aligned} \dot{A}(\pi/\omega) \sin \varphi + \dot{B}(\pi/\omega) \cos \varphi &= -(x_0/F - 1) \dot{C}(\pi/\omega) F/R \\ (A(\pi/\omega) + 1) \sin \varphi + B(\pi/\omega) \cos \varphi &= [x_0/F(1 - C(\pi/\omega)) + (1 + C(\pi/\omega))] F/R \end{aligned} \tag{18}$$

Durch (18) lassen sich  $R/F$  und  $\varphi$ , die den Schwingungszustand mit der Anfangsbedingung von  $x(0) = x_0$  geben, berechnen.

### 8. Zusammenfassung

Die Bedingungen zur die erzwungenen Schwingungen mit intermittierender Einstellung und ohne sie werden in diesem Aufsätze genau deduziert. Zum ersten

Typus von den zweierlei Schwingungen befinden sich die eigenen Gegenresonanzen oder die vielfachen Sprungerscheinungen im Falle ohne Zähigkeitsreibung oder mit kleinerer. Die Gebiete, auf denen diese Erscheinungen vorkommen können, lassen sich auch festsetzen.

Aus der Untersuchung der Einflüsse, die von dem Mitvorhandensein der Coulombschen und statischen Reibungen herzurühren sind, ergibt sich, dass sich sonst die weiche  $R/F-\lambda$  Eigenschaft zu der harten verändert und folglich die Grenzen existieren, an denen die vollständige oder intermittierende Einstellung beginnt, sich zu ereignen.

#### Literatur

- 1) P. J. Den Hartog: Phil. Mag., vol **9**, 801 (1930).
- 2) J. Tou and P. M. Schultheiss: J. Appl. Phys., vol **24**, 1210 (1953).
- 3) P. K. Bohacek and F. B. Toteur: IRE Trans. on A. C., 222 (1961).