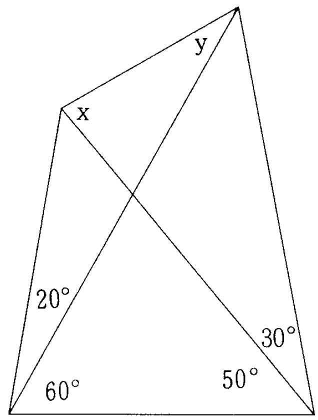
数　学　科

コンピューターを用いた初等幾何の問題の検証

高須　照夫　　杉山　光男　　冨田　　昇

既に，雑誌「数学セミナー」7－74のNOTE欄，研究集録「愛数」13号（1975），及び本校紀要第20集(1975)に発表した「辺と対角線のなす角がすべて10°の整数倍であるような四角形」…(A)　に関する残った資料をここに記録しておきたいと思う。それに先だってこの道楽をはじめた発端と経過の概略を書いてみよう。

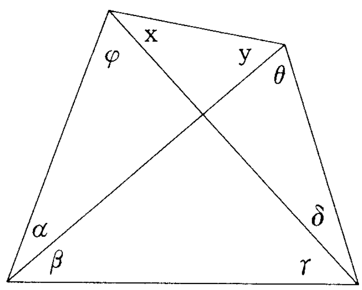
〔図１〕の四角形で角x，yの大きさを求めよ，という問題はかなり有名な問題らしく，いままでいろいろなところでお目にかかっている。x＝80°，y＝30°　であることを初等幾何的手法で示すのには，何度やってもすぐには思いつかないような補助線が必要である。そのむづかしさと，与えられた角も，求める角もきっちりした数値になるところがみそということであろう。



〔図１〕

ところが，ある生徒が，与えられた角の大きさを，同じ 10°の整数倍ではあるが少し変えた問題をもってきた。先生達が頭をよせ合って考え，分度器ではかって見当をつけてから証明しようとしてもどうしてもできないので，最後の手段としてコンピュータの助けを借りて，この場合は，x，y ともに半端な数値の角度であることがわかり，初等幾何的に求めることが不可能であることにおちついた。

せっかくプログラムを作ったついでに〔図１〕の類題をさがしはじめ (A) のすべてをしらべあげた。そして，円に内接するもの，１つの対角線について対称なもの（凧形），３頂点が他の１頂点から等距離にあるもの（これをこま形と名づけた）をのぞいて63種あることがわかったのである。これらをさがすのに用いた式は〔図２〕で，



〔図２〕

$$\sin\alpha\ \sin\gamma\ \sin\theta\ \sin x = \sin\beta\ \sin\delta\ \sin\varphi\ \sin y$$

がなり立つことから導びいた

$$\sin\alpha\ \sin\gamma\ \sin(\beta+\gamma+\delta)\sin x = \sin\beta\ \sin\delta\ \sin(\alpha+\beta+\gamma)\ \sin(\beta+\gamma-x) \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$y = \beta+\gamma-x$$

である。

上記の63種の四角形から〔図１〕の類題がそれ自身もふくめて

63× 4 ＝ 252 通りでき，これらをそれぞれ独立の問題として初等幾何的証明を手わけしてやってみた。どこかに正三角形を作るような補助線がしばしば役に立ったが，かなりの難問もあり，まだできないのもある。

次にこれらの四角形相互の関連については，正18角形の３つの対角線が同じ点で交わる場合をすべてさがし出し，そこで交わることを証明すれば，たばにして解決することができることに気づき，それを証明することもできた。また，式(1)はあとで

$$\tan x = \frac{\sin\beta\ \sin\delta\ \sin(\alpha+\beta+\gamma)\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\ \sin\gamma\ \sin(\beta+\gamma+\delta) + \sin\beta\ \sin\quad \sin(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\beta+\gamma)} \qquad \cdots\cdots(2)$$

と変形できることに気づき，これを用いれば今までにくらべてきわめて能率的であるので，今度は「辺と対角線のなす角度がすべて5°の整数倍であるような四角形」…(B) をさがし出すプログラムを作り，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ にあらゆる場合をあてはめ，xが整数度になる場合だけをうち出させることにした。olivetti P652 を用い，それこそ１年がかり（もちろんひまのあるとき，気のむいたときだけやって）かなりの無駄もあったが（円に内接するもの，凧形，

こま形もうち出すし，同じ四角形が四回ずつでてくるわけであるので）　全部をさがし出したつもりである。その数は 224 種類（円に内接するもの，凧形，こま形はのぞく，また，このうち63種は(A)である）であった。

これらをすべて並べてみても大して意味はなさそうであるので，これらを逆に用いて，正36角形の対角線のうち3本が集まるような点をすべて書き出すことにしておく。

記号		分点の間隔/36						所属する四角形		
								凧	こま	その他
1		6	6	6	6	6	6	1		
11		1	1	1	1	16	16	3	1	
12		2	2	2	2	14	14	3	1	
13		3	3	3	3	12	12	3	1	
14		4	4	4	4	10	10	3	1	
15		5	5	5	5	8	8	3	1	
16		7	7	7	7	4	4	3	1	
17		8	8	8	8	2	2	3	1	
21		1	1	2	2	15	15	3	3	
22		1	1	3	3	14	14	3	3	
23		1	1	4	4	13	13	3	3	
24		1	1	5	5	12	12	3	3	
25		1	1	6	6	11	11	3	3	
26		1	1	7	7	10	10	3	3	
27		1	1	8	8	9	9	3	3	
28		2	2	3	3	13	13	3	3	
29		2	2	4	4	12	12	3	3	
30		2	2	5	5	11	11	3	3	
31		2	2	6	6	10	10	3	3	
32		2	2	7	7	9	9	3	3	
33		3	3	4	4	11	11	3	3	
34		3	3	5	5	10	10	3	3	
35		3	3	6	6	9	9	3	3	
36		3	3	7	7	8	8	3	3	
37		4	4	5	5	9	9	3	3	
38		4	4	6	6	8	8	3	3	
39		5	5	6	6	7	7	3	3	
41	a	15	1	2	2	1	15	3		3
	b	1	2	15	15	2	1			
	c	2	15	1	1	15	2			
42	a	14	1	3	3	1	14	3		3
	b	1	3	14	14	3	1			
	c	3	14	1	1	14	3			
43	a	13	1	4	4	1	13	3		3
	b	1	4	13	13	4	1			
	c	4	13	1	1	13	4			

記号		分点の間隔/36						所属する四角形		
								凧	こま	その他
44	a	12	1	5	5	1	12	3		3
	b	1	5	12	12	5	1			
	c	5	12	1	1	12	5			
45	a	11	1	6	6	1	11	3		3
	b	1	6	11	11	6	1			
	c	6	11	1	1	11	6			
46	a	10	1	7	7	1	10	3		3
	b	1	7	10	10	7	1			
	c	7	10	1	1	10	7			
47	a	9	1	8	8	1	9	3		3
	b	1	8	9	9	8	1			
	c	8	9	1	1	9	8			
48	a	13	2	3	3	2	13	3		3
	b	2	3	13	13	3	2			
	c	3	13	2	2	13	3			
49	a	12	2	4	4	2	12	3		3
	b	2	4	12	12	4	2			
	c	4	12	2	2	12	4			
50	a	11	2	5	5	2	11	3		3
	b	2	5	11	11	5	2			
	c	5	11	2	2	11	5			
51	a	10	2	6	6	2	10	3		3
	b	2	6	10	10	6	2			
	c	6	10	2	2	10	6			
52	a	9	2	7	7	2	9	3		3
	b	2	7	9	9	7	2			
	c	7	9	2	2	9	7			
53	a	11	3	4	4	3	11	3		3
	b	3	4	11	11	4	3			
	c	4	11	3	3	11	4			
54	a	10	3	5	5	3	10	3		3
	b	3	5	10	10	5	3			
	c	5	10	3	3	10	5			
55	a	9	3	6	6	3	9	3		3
	b	3	6	9	9	6	3			
	c	6	9	3	3	9	6			

記号		分点の間隔/36						所属する四角形		
								凧	こま	その他
	a	8	3	7	7	3	8			
56	b	3	7	8	8	7	3	3		3
	c	7	8	3	3	8	7			
	a	9	4	5	5	4	9			
57	b	4	5	9	9	5	4	3		3
	c	5	9	4	4	9	5			
	a	8	4	6	6	4	8			
58	b	4	6	8	8	6	4	3		3
	c	6	8	4	4	8	6			
	a	7	5	6	6	5	7			
59	b	5	6	7	7	6	5	3		3
	c	6	7	5	5	7	6			
60	a	3	3	3	6	15	6			5
	b	3	3	6	3	6	15			
	a	2	2	2	6	20	4			
61	b	2	4	2	2	20	6			9
	c	2	6	2	4	20	2			
	a	2	2	4	8	14	6			
62	b	2	6	4	2	14	8			9
	c	2	8	4	6	14	2			
	a	2	2	4	6	14	8			
63	b	2	6	4	8	14	2			9
	c	2	8	4	2	14	6			
	a	2	4	4	6	16	4			
64	b	2	4	4	4	16	6			9
	c	2	6	4	4	16	4			
	a	2	4	6	8	12	4			
65	b	2	4	6	4	12	8			9
	c	2	8	6	4	12	4			
	a	2	4	8	6	10	6			
66	b	2	6	8	4	10	6			9
	c	2	6	8	6	10	4			
	a	1	2	4	6	19	4			
71	b	1	4	4	2	19	6			9
	c	1	6	4	4	19	2			

記号		分点の間隔/36						所属する四角形		
								凧	こま	その他
	a	1	2	4	4	19	6			
72	b	1	4	4	6	19	2			9
	c	1	6	4	2	19	4			
	a	1	2	5	6	17	5			
73	b	1	5	5	2	17	6			9
	c	1	6	5	5	17	2			
	a	1	2	5	5	17	6			
74	b	1	5	5	6	17	2			9
	c	1	6	5	2	17	5			
	a	1	2	6	7	15	5			
75	b	1	5	6	2	15	7			9
	c	1	7	6	5	15	2			
	a	1	2	6	5	15	7			
76	b	1	5	6	7	15	2			9
	c	1	7	6	2	15	5			
	a	1	3	8	7	13	4			
77	b	1	4	8	3	13	7			9
	c	1	7	8	4	13	3			
	a	1	3	8	4	13	7			
78	b	1	4	8	7	13	3			9
	c	1	7	8	3	13	4			
	a	1	3	10	6	11	5			
79	b	1	5	10	3	11	6			9
	c	1	6	10	5	11	3			
	a	1	3	10	5	11	6			
80	b	1	5	10	6	11	3			9
	c	1	6	10	3	11	5			
	a	1	1	5	10	13	6			
81	b	1	6	5	1	13	10			9
	c	1	10	5	6	13	1			
	a	1	1	5	6	13	10			
82	b	1	6	5	10	13	1			9
	c	1	10	5	1	13	6			

この表から(B)のうち，凧形は 136種，凧形でないこま形は64種，その他（これがはじめの目的の四角形であるが）224種あることがわかる。

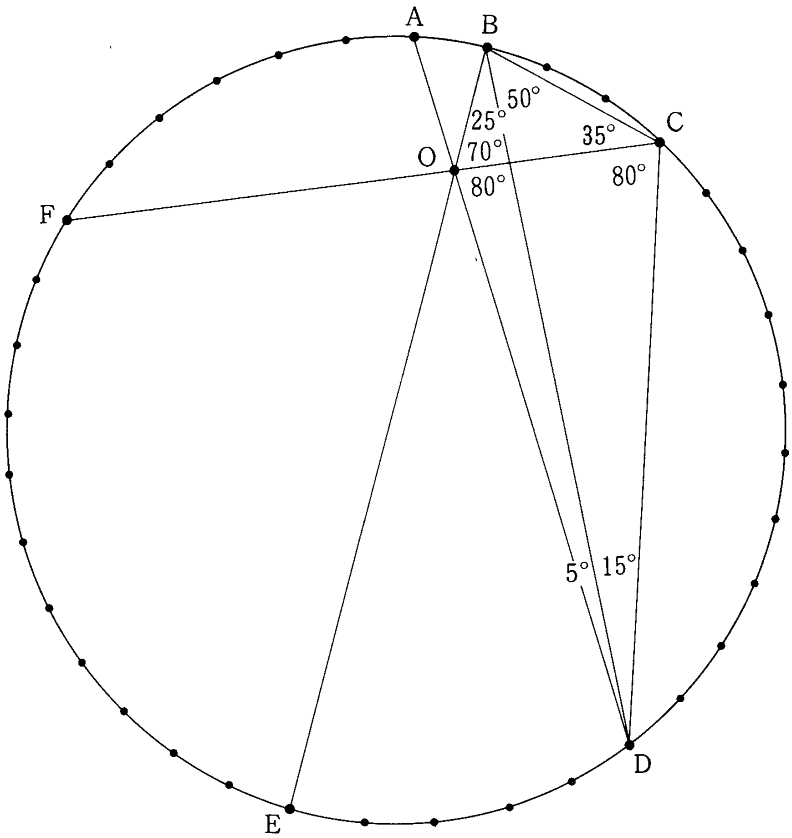
記号は通し番号でなく，同質のものをまとめ，そうでないものとの区別をわかりやすくした。

分点の間隔というのは，円周を36等分しその分点を6つとってその分点間の弧の長さの比を表のようにしたとき，2つおいた分点を結ぶ3本の弧が1点で交わることを意味する。したがってこの数字がすべて偶数であるときは所

属する四角形はすべて(A)である。所属する四角形の欄の数字は3つの弦が1点に交わるときできる(B)の四角形の種類の数を表わしている。

以下，具体例について説明する。たとえば№80のａ　では〔図3〕をかけば，所属する四角形がみつかるわけである。

すなわち分点の間隔が1. 3. 10. 5. 11. 6　であるので円周を36等分し，分点の1つAから仮に右まわりにこの数だけの間隔をあけて順に点 B. C. D. E. F をとる。すると，3つの弦 AD, BE ,CF が1点Oで交わるのである。このときできる6個の四角形，OABC, OBCD, OCDE, ODEF, OEFA, OFAB はいずれも(B)である。たとえば　四角形 OBCD では問題にしている角は図のように順に，80°, 70°, 25°, 50°, 35°, 80°, 15°, 5°　となる。この6個はすべて異なるものであり，№80のｂ, ｃ からもそれぞれ6個ずつ得られるが，2つずつ重複しているので №80 のグループで9個の四角形がみつかったことになるのである。



〔図　3〕

現在のところ，表の各場合について，3つの対角線がそれぞれ1点で交わることの初等幾何的証明はしてない。また，224 × 4 種数の〔図1〕の類題をそれぞれ独立の問題として全部証明してみようという気はいまのところおこらない。せっかくコンピューターがうち出してくれたので，捨ててしまうのも惜しく，結果を整理して記録にのこしておくことにしたまでである。