EINE NEUE NÄHERUNG ZUR LÖSUNG GEWISSER FUNKTIONALGLEICHUNGEN

ÉI ITI TAKIZAWA

Abteilung der Dynamik

(Eingegangen am 30, Mai 1953)

I. Reihenentwicklung einer Funktion und ein für gegenwärtige Approximation nötiger Satz.

Die Aufgabe, eine für alle x (unabhängende Veränderliche) eines Gebietes $\mathfrak{G}$ (z. B. $a \leqq x \leqq b$) gegebene Funktion $F(x)$ durch eine lineare Kombination von bekannten Funktionen, i.e. ein System der abzählbar unendlich vielen Funktionen $\{\psi_\lambda(x)\,;\ \lambda=0, 1, 2, 3, \ldots \infty\}$ möglichst gut darzustellen, lässt sich im Folgenden beschäftigen. Durch Reihenentwicklung nach diesem geordneten System $\{\psi_\lambda(x)\}$ wird ein System von Koeffizienten $\{c_\lambda\,;\ \lambda=0, 1, 2, 3, \ldots \infty\}$ so bestimmt, dass $F_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda \psi_\lambda(x)$ von $F(x)$ in $\mathfrak{G}$ *möglichst wenig* abweicht. Die genaue Bedeutung des „*wenigen Abweichens*" von $F(x)$ wird im allgemeinen auf eine der folgenden Arten dargestellt:

(a) Im Sinne der Methode der *Kleinsten Quadrate*, i.e. es soll für $^\forall\varepsilon>0$, gewisser grosser Zahl $N: n>^\exists N$ so existieren, dass

$$\int_{\mathfrak{G}} |\, F(x)-\sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda \psi_\lambda(x)\,|^2\, dx<\varepsilon,$$

besteht.

(b) Im Sinne der *gleichmässigen Approximation* (*Konvergenz*), i.e. es soll für $^\forall\varepsilon>0,\ n>^\exists N$,

$$\operatorname*{Max}_{x\in\mathfrak{G}} |\, F(x)-\sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda \psi_\lambda(x)\,|<0,$$

(c) Im Sinne der *gewöhnlichen Konvergenz* der Reihe, i.e. für $^\forall x \in \mathfrak{G}$

$$\lim_{x\to\infty}\Big(F(x)-\sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda \psi_\lambda(x)\Big)=0.$$

Es ist wohl bekanntlich, dass bei endlicher Gebiete $\mathfrak{G}$ die Möglichkeit der gleichmässigen Approximation (b) diejenige der mittleren Approximation (a) enthält. Ohne Beschädigung der Allgemeinheit genügt es uns nur, die im Endlichen gelegene Gebiete zu betrachten, da die ins unendliche reichende Gebiete in ganz die im Endlichen liegende transformiert werden können, wenn sämtliche Funktionen samt ihren Quadraten integrierbar bleiben.

Es soll ein normiertes orthogonales System $\{\varphi_\lambda(x)\,;\ \lambda=0, 1, 2, 3, \ldots\}$ mit den Entwicklungskoeffizienten $\{c_\lambda\,;\ \lambda=0, 1, 2, 3, \ldots\}$ von $F(x)$ im Gebiete $\mathfrak{G}$ *vollständig* sein. Deshalb besteht die „*Vollständigkeitsrelation*":

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^2=\|F\|^2,$$

wobei

$$\| F \|^2 = \int_{\mathfrak{G}} | F(x) |^2 dx,$$

ist. Daher tritt der wohl bekannte folgende Satz auf:

Die Behauptung, dass

$$F(x) = 0, \qquad \textit{im Gebiete } \mathfrak{G}, \tag{1}$$

besteht, ist hinreichend und notwendig, um das sämtliche Funktionalsystem:

$$\int_{\mathfrak{G}} \varphi_\lambda \cdot F(x) dx = 0, \qquad \text{für } \lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots \infty, \tag{2}$$

gleichzeitig sich zu verwirklichen, wenn $\{\varphi_\lambda(x);\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \infty\}$ *ein (orthogonales) vollständiges System sich bildet.*

In diesem Falle, beschäftigen wir uns daher grundsätzlich mit *stückweise stetigen* Funktionen $F(x)$, und wenn nötig, werden wir öfter von den betrachteten Funktionen $F(x)$, derart voraussetzen, dass sie *stückweise glatt* sind. Ferner, wenn nötig, nehmen wir an, dass eine gesuchte Funktion $y(x)$ in demselben Gebiete $\mathfrak{G}$ nicht nur *stückweise glatt* ist, sondern auch *stückweise stetigen* zweiten oder höheren Ableitungen besitzt, usw. oder auch $y \in L^n_{(\mathfrak{G})}$ für $n = 1$ und 2. Dabei könnte die Integration im Sinne der *Stieltjes*sche oder der *Lebesgue*sche gennommen werden.

II. Neues Approximationsverfahren.

Nun wollen wir eine neue Methode der Approximation zur Lösung gewisser Funktionalgleichung erläutern. Es soll im Gebiete $\mathfrak{G}$ von x eine *Funktionalgleichung:*

$$\mathfrak{D}(y, x) = 0, \tag{3}$$

betrachtet werden wobei $y = y(x)$ eine gesuchte Funktion von x ist. Die Funktionalgleichung (3) möge eine Differential-, Integral-, oder Differenzen-gleichung, usw. sein. Auch sei sie eine ihrer gemischten oder einige simultanen Gleichungen.

Es soll die *Nebenbedingung* (z.B. *Randbedingung* wie im Falle der Differentialgleichung):

$$\mathfrak{N}(y, x) = 0, \tag{4}$$

im Gebiete $\mathfrak{G}'$ auferlegt werden. Hier mögen (3) und (4) nichtlinear oder linear sein.

Aus dem Satz im vorliegenden Paragraphen, kommt die Folgende, dass unter der Bedingung der *Vollständigkeit* des Funktionalsystems $\{g_n(x);\ n=0, 1, 2, 3, \ldots \infty\}$ von $\mathfrak{D}(y, x)$ in $\mathfrak{G}$, das Zustandekommen von (3) und die Behauptung, dass das System

$$\int_{\mathfrak{G}} g_n(x) \cdot \mathfrak{D}(y(x), x) dx = 0, \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \infty, \tag{5}$$

besteht, miteinander äquivalent sind. In diesem Falle, wenn die genaue Lösung $y = y_0(x)$ von (3) mit der Lösung der simultanen Gleichungen (5) ganz übereinstimmt, kann die Aufsuchung nach der Lösung von (3) auf die Auflösung von dem Gleichungssysteme (5) zurückgeführt werden, und umgekehrt. Die Vollständigkeitsrelation nimmt schon an, dass $g_n(x)$ samt $F(x)$ zu den Funktionalklassen $L^1_{(\mathfrak{G})}$ und auch $L^2_{(\mathfrak{G})}$ gehört, wobei $L^p_{(\mathfrak{G})} = \left\{ {}^{\forall} f(x) \,;\, \int_{\mathfrak{G}} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$, ist.

Als die Approximation der Lösung von (3) wollen wir, anstatt (3) oder (5), die Lösung der endlich vielen simultanen Gleichungen (6) genau zu finden versuchen.

$$\int_{\mathfrak{G}} g_n(x) \cdot \mathfrak{D}(y(x), x) dx = 0, \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots, r, \tag{6}$$

mit einem *endlichen* ganzen r.

Dieses Verfahren könne vielleicht der *möglichst guten* Approximation entsprechen, vielleicht im Sinne der Methode der mitleren kleinsten Quadrate (a) oder der gleichmässigen Approximation (b) in § I.

Wenn nötig, wird die Nebenbedingung (4) also auf ähnliche Weise so behandelt, dass anstatt (4) wir (7) als eine Näherung von (4) untersuchen.

$$\int_{\mathfrak{G}'} h_n(x) \cdot \mathfrak{N}(y(x), x) dx = 0, \qquad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, s, \tag{7}$$

mit einem *endlichen* Teil (*s endlich*) eines orthogonolen *vollständigen* Systems $\{h_n(x);\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$.

Die drei Entwicklungsfunktionen $\{\varphi_n(x)\}$ von $y(x)$, $\{g_n(x)\}$ und $\{h_n(x)\}$ können *miteinander zu andren Funktionensystemen* gehören. Im Praktischen ist es bequem, derart zu wählen, dass das System $\{g_n(x)\}$, oder $\{h_n(x)\}$ als dasselbe System der normierten orthogonalen Funktionen, beziehungsweise genommen werden soll. Und die Vergleichsfunktion von $y(x)$ möge also dabei nach $\{g_n(x)\}$ oder $\{h_n(x)\}$ entwickelt werden. Die für die Nährungsrechnung passende Form soll zuweilen ein identisches System gewählt werden, i.e.

$$\{\varphi_n(x)\} = \{g_n(x)\} = \{h_n(x)\}. \tag{8}$$

Als ein spezieller Fall, wenn wir eine Wählung des Systems $\{g_n\}$ als $\{x^n\}$ vornehmen, so kommen wir in derselben Methode an, welche von Yamada[1)2)3)] zum erstenmal in 1946 veröffentlich gemacht hat. Die Randbedingung, die öfter sich in Elastizitätslehre erscheint, dass die gesammte nomale Kraft oder ein gesammter Drehmoment am Rande des festen Körpers verschwindet, entspricht einer Annäherung, dass statt (4) wir einen besonderen Fall: im $\{h_n(x)\} = \{x^n;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$, $h_0 = 1$ und $h_1 = x$, nehmen und andre Bedingungen $h_n = x^n$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$, vernachlässigen.

Die hier beschriebene Methode ist besonders geeignet brauchbar zu den gewissen Funktionalgleichungen, ohne Rücksicht auf die Eigenschaften, lineare oder nichtlineare, simultane oder nicht. Das Gleichungssystem (7) ist auch anwendbar, wenn die Nebenbedingung (4) nichtlinear ebenfalls linear ist.

Das Approximationsverfahren ist symmetrisch in bezug auf die Funktionalgleichung (3) und die Nebenbedingung (4). So können wir die Vergleichsfunktion derart wählen, dass $y(x)$ erstens (4) oder (7) genügt, und weiter gehen. Im Falle der Differentialgleichung ist es meistens geeignet, zu erfüllen (7) und wir suchen die Approximationsform von $y(x)$ unter den Gleichungen (6). Die Nebenbedingung möge also eine *gemischte* sein, wenn wir (7) auf dieselbe zu anwenden wunschen wollen. Die Genauigkeit der Lösung hängt eigentlich von der Auswahl der Vergleichsfunktion ab, wie es in *Ritz*schem Verfahren im irgendeinen Variationsprobleme gefunden wird.

Obwohl die Fehlerabschätzung bei unseren Methoden eher schwierig ist, doch ist die oben gegebene Methode bequem anwendbar für Lösung der Differential-, Integral-, und Differenzen-gleichung usw. Die Methode der Approximation, die hier eingebracht ist, vielleicht enthält das *Ritz*sche Verfahren als ein speziellen Fall, aber die Zusammenhang mit der Variationsrechnung ist noch nicht hier erklärt worden.

Wenn die lösende Gleichung eine von der linearen Form ist, ist es genügend, nur die simultanen algebraischen Gleichungen erster Ordnung mit vielen aber endlichen Verändlichen aufzulösen. Aber wenn sie nicht linear ist, müssen wir an dem Falle hineingebracht werden, dass wir uns mit der Auflösung der simultanen algebraischen Gleichung, im allgemeinen, von höherer Ordnung mit vielen unbekannten Verändlichen beschäftigen.

III. Einige Beispielen.

1) Klassische Wellengleichung.

Wir wollen uns mit der folgenden Differentailgleichung beschäftigen:

$$\mathfrak{D}(y(x,t),x,t) \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \tag{9}$$

mit Anfangsbedingung:

$$\text{an} \qquad t = -\pi, \quad \text{und} \quad t = +\pi; \quad y(x, -\pi) = y(x, +\pi) = A(x). \tag{10}$$

Wie es gewöhnlich ist, wollen wir die Form der Vergleichsfunktion annehmen:

$$y(x,t) = a_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) \cdot \cos nt + b_n(x) \cdot \sin nt), \tag{11}$$

$$\text{und} \qquad \{\varphi_n(t)\} = \{1, \ \cos t, \ \sin t, \ \cos 2t, \ \sin 2t, \ldots\},$$

welche so gewählt ist, dass (11) die Randbedingung (10) schon erfüllt hat.
So ist es

$$a_0(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = A(x).$$

Als $\{g_n(t)\}$ in (5) nehmen wir an:

$$\{g_n(t);\ n = 0, 1, 2, \ldots \infty\} = \\ = \{\cos nt \text{ und } \sin nt;\ n = 0, 1, 2, \ldots \infty\} = \{\varphi_n(t)\},$$

wie in (8). Die suchende Funktion sei im Bereich $\mathfrak{G} = [-\pi, +\pi]$ untergesucht werden.

So wird die Bedingung (5) geschrieben:

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, nt \cdot \mathfrak{D}(y(x,t),x,t)\,dt, \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \infty,$$

i.e.

$$0 = \begin{cases} -2\pi\mu^2 a_0'', \\ -\pi(n^2 a_n + \mu^2 a_n''), & \text{für } n \geqq 1, \\ -\pi(n^2 b_n + \mu^2 b_n''), \end{cases} \tag{12}$$

wobei ein Zeichen $'$ eine Differentiation in bezug auf x bedeutet.
Diese Lösung von (12) führt an demselben Resultate wie bei der gewöhnlichen Methode.

2) **Eine Differentialgleichung:**

$$\mathfrak{D}(y(x), x) \equiv y\frac{d^2y}{dx_2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y\frac{dy}{dx} = 0, \tag{13}$$

in $\mathfrak{G}$:

$$0 \leqq x < \infty.$$

Die Randbedingung lautet:

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0; & y(0) = 1, \\ x = \infty; & y(\infty) = 0. \end{array}\right\} \tag{14}$$

und

Es soll die Vergleichsfunktion für $y(x)$ angenommen werden:

$$y^2(x) = e^{-x} \cdot \{\alpha L_0(x) + \beta L_1(x) + \gamma L_2(x)\} \equiv e^{-x} \cdot \mathfrak{L}(x),$$

mit den normierten *Laguerre*schen Polynomen $\{L_n(x);\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$:

$$L_n(x) = 1 - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - \binom{n}{3}\frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Die Bedingung (14) besagt

$$\mathfrak{L}(0) = 1. \tag{15}$$

Die Anwendung des (6), mit $\{g_n(x)\} = \{L_n(x)\}$ führt schliesslich ein:

$$0 = \int_0^\infty L_0(x) \cdot \mathfrak{D}(y(x), x)dx, \tag{16}$$

$$0 = \int_0^\infty L_1(x) \cdot \mathfrak{D}(y(x), x)dx. \tag{17}$$

Aus (15), (16) und (17) folgt es sich beziehungsweise:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha + \beta + \gamma = 1, \\ \beta + 2\gamma = 3, \\ 4\alpha + \beta + 2\gamma = 4, \end{array}\right\} \tag{18}$$

und

mit dem passenden Gebrauch der Berücksichtigung auf die Orthogonalitätseigenschaften von $\{L_n(x)\}$.

Die Lösung von (18) wird gegeben:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = -\frac{3}{2}, \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{9}{4}.$$

Daher haben wir die Näherungsfunktionen der Lösung von (13) unter der Bedingung (14) genommen.

$$y^2(x) = e^{-x} \cdot \left\{\frac{1}{4}L_0(x) - \frac{3}{2}L_1(x) + \frac{9}{4}L_2(x)\right\},$$

in Potenzreihen

$$= e^{-x} \cdot \left\{1 - 3x + \frac{9}{8}x^2\right\}. \tag{19}$$

In anderer Seite, wird die exakte Lösung von (13) under Berücksichtigung der (14) gegeben:

$$y^2(x) = e^{-4x} = e^{-x} \cdot \left\{1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + \ldots\right\}. \tag{20}$$

Im Vergleich mit (19) und (20), folglich wird unsere Näherungslösung nicht so böse angesehen.

2′) Unter der identischen Gleichung mit derselben Bedingung, wollen wir approximieren $y(x)$ als

$$y^2(x) = e^{-x} \cdot \{\alpha L_0(x) + \beta L_1(x) + \gamma L_2(x) + \delta L_3(x)\} \equiv e^{-x} \cdot \mathfrak{M}(x). \tag{21}$$

Aus (14) haben wir

$$\mathfrak{M}(0) = 1,$$

und aus (6)

$$0 = \int_0^\infty L_0(x) \cdot \mathfrak{D}(y(x), x) dx,$$

$$0 = \int_0^\infty L_1(x) \cdot \mathfrak{D}(y(x), x) dx,$$

und

$$0 = \int_0^\infty L_2(x) \cdot \mathfrak{D}(y(x), x) dx,$$

i.e.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 1, \\ -\alpha \qquad + \gamma + 2\,\delta &= 2, \\ 3\,\beta + 2\,\gamma + \delta &= 0, \end{aligned}$$

und

$$3\,\alpha + 3\,\beta \qquad + \delta = 3.$$

Daher ist die gesuchte Näherungsfunktion (21)

$$\begin{aligned} y^2(x) &= e^{-x} \cdot \left\{ \frac{1}{4} L_0(x) + \frac{3}{16} L_1(x) - \frac{9}{8} L_2(x) + \frac{27}{16} L_3(x) \right\} \\ &= e^{-x} \cdot \left\{ 1 - 3\,x + \frac{63}{32} x^2 - \frac{9}{16} x^3 \right\}. \end{aligned}$$

3) Eine nichtlineare Gleichung:

$$\mathfrak{D}(y(x), x) \equiv y\frac{dy}{dx} - 2\,y + x = 0, \tag{22}$$

in

$$\mathfrak{G} = \{x;\ 0 \leqq x \leqq 0.5\},$$

und mit der Randbedingung

auch

$$\left. \begin{aligned} x = 0;\ & y(0) = 1, \\ x = 0;\ & \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 2. \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

Sei es

$$y(x) = \alpha P_0(2\,x) + \beta P_1(2\,x) + \gamma P_2(2\,x), \tag{24}$$

und

$$\{\varphi_n(x)\} = \{g_n(x)\} = \{P_n(2\,x);\ \ n = 0, 1, 2, \ldots\},$$

daher haben wir aus (6)

$$0 = 2\int_0^{0.5} P_n(2\,x) \cdot \mathfrak{D}(y(x), x)\, dx = \int_0^1 P_n(z) \cdot \mathfrak{D}\left(y\left(\frac{z}{2}\right), \frac{z}{2}\right) dz. \tag{25}$$

Aus (23) bekommen wir

$$y(0) = \alpha - \frac{\gamma}{2} = 1, \tag{26}$$

und

$$y'(0) = 2\beta = 2, \qquad \text{i.e.} \quad \beta = 1, \tag{27}$$

und für $n = 0$, (25) lautet

$$0 = \int_0^1 P_0(z) \cdot \mathfrak{D}\, dz = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - \frac{3}{4} - 2\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right). \tag{28}$$

Aus (26), (27) und (28) haben wir zwei Lösungen, wie gewöhnlich im Falle der nichtlinearen Gleichung.

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.97441, \\ \beta_1 &= 1.00000, \\ \gamma_1 &= -0.05118, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= -0.08552, \\ \beta_2 &= 1.00000, \\ \gamma_2 &= -2.17104. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Die Lösungen, in bezug auf (29) und (30), geben beziehungsweise,

$$y_{\mathrm{I}}(x) = 0.97441 + P_1(2x) - 0.05118\, P_2(2x), \tag{31}$$

und

$$y_{\mathrm{II}}(x) = -0.08552 + P_1(2x) - 2.17104\, P_2(2x). \tag{32}$$

Die numerischen Werten von (31) und (32) werden im Tafel 1 mit den exakten Werten[4] y_{exakt} gegeben.

TAFEL 1. Numerische Werte der Lösungen von (22)

x	y_{I}	y_{II}	y_{exakt} (Hidaka[4])
0.00	1.00000	1.00000	1.00000
0.05	1.09923	1.06743	1.09883
0.10	1.19693	1.06974	1.19557
0.15	1.29309	1.00691	1.29055
0.20	1.38772	0.87895	1.38402
0.25	1.48081	0.68586	1.47616
0.30	1.57236	0.42764	1.56713
0.35	1.66238	0.10429	1.65706
0.40	1.75087	−0.28420	1.74604
0.45	1.83782	−0.73781	—
0.50	1.92323	−1.25656	1.92154

Aus Tafel 1 können wir lernen, dass die Lösung (31) gut zur exakten Werten angenähert ist, eben in so einfachem Verfahren (28), indem (32) nicht so gutes Resultat gibt.

3′) Unter der identischen Gleichung und Bedingung, versuchen wir die Lösung in der From:

$$y(x) = \alpha P_0(2x) + \beta P_1(2x) + \gamma P_2(2x) + \delta P_3(2x). \tag{33}$$

Aus (23) werden wir zum Folgenden geführt:

$$y(0)=\alpha-\frac{\gamma}{2}=1, \tag{34}$$

$$y'(0)=2\left\{\beta-\frac{3}{2}\delta\right\}=2. \tag{35}$$

So haben wir für $n=0$ und 1 aus $\{P_n(2x)\}=\{g_n\}$ in (6),

$$0=\int_0^1 P_0(z)\cdot\mathfrak{D}\Big(y\Big(\frac{z}{2}\Big),\frac{z}{2}\Big)\,dz=\Big(3\alpha+\frac{5}{3}\beta-\frac{8}{3}\Big)^2-\frac{3}{4}-2\Big(\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{8}\Big), \tag{36}$$

und

$$\begin{aligned}0=\int_0^1 P_1(z)\cdot\mathfrak{D}\Big(y\Big(\frac{z}{2}\Big),\frac{z}{2}\Big)dz&=\Big(3\alpha+\frac{5}{3}\beta-\frac{8}{3}\Big)^2\\&-\Big\{\alpha^2+\frac{\beta^2}{3}+\frac{4}{5}(\alpha-1)^2+\frac{4}{63}(\beta-1)^2+\alpha\beta+\frac{\beta(\alpha-1)}{2}+\frac{(\beta-1)(\alpha-2)}{6}\Big\}\\&-\Big(\alpha+\frac{2}{3}\beta+\frac{\alpha-1}{2}\Big)+\frac{1}{6}.\end{aligned} \tag{37}$$

Die simultanen Gleichungen (34), (35) und (36), (37) von zweiter Ordnung gestatten die gesuchten Koeffizienten α, β, γ, und δ von y.

4) Wärmeleitungsgleichung.

$$\mathfrak{D}(y(x,t),x,t)\equiv\frac{\partial y}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0, \tag{38}$$

mit einer komplizierten nichtlinearen Randbedingung:

$$\left.\begin{aligned}y(0,t)&=y_0(0,t)\\ y(\varepsilon(t),t)&=0,\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

und

$$\varepsilon(0)=0,\qquad\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)_{x=\varepsilon}=a\frac{\partial\varepsilon}{\partial t},\qquad(\mathfrak{G}:0\leqq x\leqq\varepsilon) \tag{40}$$

welche die Fortpflanzung[5] der Gefrierfläche bedeuten.

Als $y(x)$ nahm Yamada[1] eine Näherung des Polynoms von den vierten Ordnung von x an, welche die verlangten Eigenschaften (39) und (40) hat. Und ferner wähltet er $\{g_n\}$ in (6) als

$$\{g_n(x)\}=\{x^n;\ \ n=0,1,2,\ldots\}=\{\varphi_n(x)\}.$$

In diesem Falle, anstatt seiner Auswahl der polynomen, wollen wir nehmen

$$y(x)=\sum_{\lambda=0}^{r}c_\lambda(t)\varphi_\lambda(x),\ (\lambda=0,1,2,\ldots,r,\qquad\text{mit } r \text{ endlich}) \tag{41}$$

und machen Gebrauch von

$$\{g_\lambda(x)\}=\{\varphi_\lambda(x)\},$$

und

$$\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)_{x=\varepsilon}=\sum_{\lambda=0}^{r}c_\lambda(t)\varphi'_\lambda(\varepsilon)=a\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Die in (41) sich erscheinenden Funktionen des Systems $\{\varphi_\lambda(x)\}$ mögen gut bei der *Hermitt*schen, oder *verallgemeinerten Laguerr*schen Polynomen angenähert werden, unter Berücksichtigung der Form der exakten Lösung, welche meistens sich in der Theorie der Wärmeleitung im unbegrenzten Körper vervorkommt, besitzend die mathematischen Eigenschaft der Lösung von der Form : $\int^{z} \exp[-z^2]\,dz$, i.e. das unvollständige Fehlerintegral.

5) **Grenzschichtsgleichung**[6] **in der Hydrodynamik:**

$$\mathfrak{D}(u(y,x),x,y) \equiv u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}dy - u_1\frac{du_1}{dx} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{42}$$

soll für

$$y = 0, \text{ und } y = \delta,$$

gelöst werden. Unseres Verfahren bedingt auch zu einer Verbesserung des Verfahrens von der *Kármánn-Paulhausen*schen Methode,[6] wie Yamada in seiner Methode schon erklärt hat.

6) **Einige Bemerkungen zur weiteren Anwendung.**

Diese Methode ist wahrscheinlich gut anwendbar zur Lösung von der *Schrödinger*sche Wellengleichung von meheren Elektronen. Die Elektronenkorrelation hat im allgemeinen einige nichtlinearen Termen in den Wellengleichung zur Erfolge. Und die herausgekommene nichtlineare Gleichung wird bei vielen Verfahren z. B. bei dem Variationsverfahren, und bei der von Tomonaga[7][8] eingebrachten Methode usw. Diese nichtlineare Gleichung wird auch bei Anwendung des *Yamada*schen Verfahrens besser gelöst werden, wie Oshida bemerkt hat.[9]

Die Verfassers erwähnte Verfahrungsmethode ist noch besser und passender anwendbar zum Eigenwertversuche[10] der Mehrteilchenprobleme in der Wellenmechanik, da nicht nur die Auswahl der orthogonalen *vollständigen* Systemen: $\{\varphi_\lambda\}$, $\{g_\lambda\}$ und $\{h_\lambda\}$, die als Systemen einander verschieden sein könnten, sondern auch in der Tat diese Systemen als die der Eigenfunktionen der die Korrelationstermen nicht habende, lineare Gleichung vorangenommen werden können.

IV. Zusammenfassung und einige Bemerkungen.

Eine neue Methode des Näherungsverfahrens zur gewissen Funktionalgleichung ist erläutert. Die Hauptidee von der jetzigen Abhandlung ist davon erklärt, dass:

I) Als eine Approximation der Lösung von (3) können wir (5) oder (6) anstatt (3) behandeln, und die Lösung möglichst genau zu versuchen präzisieren.

II) Die Nebenbedingung (4) kann auch von (7) genähert werden, wenn es nötig ist.

Im anderen Worte, mögen wir (6) anstatt (3) annehmen, und wenn nötig, mögen die Funktionalgleichungen (7) durch (4) ersetzt werden.

Die vollständigen Systemen der Entwicklungsfunktion: $\{\varphi_\lambda\}$, $\{g_\lambda\}$ und $\{h_\lambda\}$ mögen einander verschieden sein können. Aber wenn nötig, können die zwei oder alle dieser Funktionalsystemen auch identisch vorausgesetzt werden. Als besondere Fall nahm Yamada

$$\{g_n\} = \{x^n;\ n = 0, 1, 2, \ldots\} \text{ und } \{\varphi_\lambda\} = \{x^\lambda;\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots\}$$

in der Verfassers Methode, da ein System $\{x^n\}$ sich ein vollständiges bildet, welches in der mathematischen Statistik mit dem wohl bekannten Momentenproblem[11] der Verteilungsfunktion des Wahrscheinlichkeitsdichtes nahe zusammenhängend ist.

Seine Methode ist bequem, da die sich in (6) erscheinende Integration leicht integrierbar ist, aber sie hat eine Schwierigkeit von den Divergenz, wenn das Gebiet nicht begrenzt ist, oder das Erscheinen des unendlichen Integrationswertes im Gebiete auftritt. Die Verfassers Methode so wohl wie *Yamada*sche ist nicht nur im ein-dimensionalen Gebiete der Verändlichen, sondern auch zur im mehr-dimensinalen leicht anwendbar, unter der Auswahl des miteinander orthogonalen vollständigen Funktionalsystems in mehr-dimension, wie

$$\varphi_\lambda(x_1)\cdot\psi_\mu(x_2)\cdot\phi_\nu(x_3)\cdot\ldots,$$

mit $\{\varphi_\lambda\}$, $\{\psi_\mu\}$ und $\{\phi_\nu\}$, welche alle im eignem System orthogonal sind.

In diesem Falle, mögen die Determinanten, wie von der *Slater*schen Gestalt, welche von den Elementen φ_λ, ψ_μ und ϕ_ν, usw., gebildet werden, wahrscheinlich günstig anwendbar sein. Die komplexenwertigen Verändlichen, unabhängenden, ebenso wie abhängenden (i.e. gesuchten Funktionen), mögen auch willkommen bei unserer Methode, *mutatis mutandis.*

Die semikonvergenten oder asymptotischen Entwicklungen mögen auch von Gebrauch der (6) oder (7) präzisiert werden.

Betonend wird hier bemerkenswert gemacht werden, dass das Verfssers Verfahren auch günstige Anwendbarkeit zur Lösung gewisser nichtlinearen Funktionalgleichungen und Nebenbedingungen, so wohl wie der nichtlinearen Randwertaufgaben hat. Folglich mag das Näherungsverfahren besonderes weiteres Anwendungsfeld in der mathematischen Physik finden können.

Im Schlusse dieses Abhandlung, dankt der Verfasser herzlich Herrn Professor Z. Sakadi für seine manche Diskussionen, wertvollen Ratschläge und sein ständiges Wohlwollen.

Dieser Versuch ist finanziell von dem Wissenschaftlichen Forschungsgratifikation des Japanischen Unterrichtsministeriums untergehalten.

IV. Literaturenverzeichnisse und Bemerkungen.

1) H. Yamada: Report. Res. Inst. for Fluid Engineering, Kyûsyû Univ. **3** (1947), 29. (in Japanische).
2) H. Yamada: Report. Res. Inst. for Fluid Engineering, Kyûsyû Univ. **6** (1950), 87; auch *ditto* **4** (1948), 27; und **5** (1949), 1. (in Japanische).
3) H. Yamada: Report. Res. Inst. for Appl. Mech., Kyûsyû Univ. **1** (1952), 11.
4) K. Hidaka: *Numerische Integration* (in Japanische). Tôkyô, (1948), 3.-Aufl. Bd. I, §§61, 64, 69, 78, 81 und 89.
5) Riemann und Weber: *Differentialgleichungen der Physik.* Berlin, (1927), Bd. II, Kap. 6, §3.
K. Kawasimo: *Theorie der Wärmeleitung* (in Japanische). Tôkyô, (1941), Kap. 13, §100, s. 415.
6) S. Goldstein: *Modern Developement in Fluid Dynamics.* Oxford, (1940), Bd .I, §52 und §60.
7) S. Tomonaga: Prog. Theor. Phys. **5** (1950), 544.
8) G. Araki und T. Murai: Prog. Theor. Phys. 8 (1952), 639.
9) An der Versammlung der Japanischen Physikalischen Gesllschaft, gehaltet am 30. April in 1953, einbrachte Herr Prof. I. Oshida eine Vorlegung, das Yamadasche Verfahren sei geeignet brauchbar zum Mehrteilchenprobleme in der Wellenmechanik.
10) Der Verfasser hofft über diese Berechnungen noch an andrer Stelle zu veröffentlichen.
11) zum Beispiel, S. S. Wilks: *Mathematical Statistics.* Princeton, (1950), §2.76∼§2.81.