数　学　科

高校数学の新指導要領にみられる教材配列の多様性にかかわって考えられる基本事項の証明方法等について

高　須　照　夫

〈要旨〉高等学校数学の新しい指導要領によれば、全体の内容については現行とさほど変らないけれど、必修の数学Ⅰに続いて履習すべきことは、数学Ⅱ、代数・幾何、基礎解析、微分・積分、確率・統計　のように分けられ、基礎解析に続いて微分・積分　ということをのぞけば、その組合せや履習の順序はさまざまになることが予想される。現行の指導要領では、教科書により（特に数ⅡB）内容の配列にいく分の差異はみられるものの一つの基本事項の証明に必要な事項はそれ以前に学習されているように、それぞれの教科書ごとにまとめられているが、新しい指導要領による教科書では、そのような配慮がかなりむづかしいものになるのではないかと考えられる。新しい教科書では、その点をどのように扱うのであろうか楽しみにしながら、自分なりにいくつかの具体的問題に関して、主として現行の数ⅡBの教科書にある扱い方を比較して考えてみたいと思う。

Ⅰ　$f(\chi)=\chi^n$　（n：自然数）の微分

これは「数Ⅱ」と「基礎解析」で扱うことになっているが、証明は二項定理を用いるか数学的帰納法によるかのいずれかであろう。

1. 二項定理を用いる方法

（現行の数ⅡBでは）〔啓林館、数研、実教、東京書籍〕

$$f'(\chi)=\lim_{h\to 0}\frac{(\chi+h)^n-\chi^n}{h}$$

ところが $(\chi+h)^n=\chi^n+n\chi^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}\chi^{n-2}h^2+\cdots\cdots+h^n$

であるから

$$f'(\chi)=\lim_{h\to 0}\left\{n\chi^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\chi^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right\}=n\chi^{n-1}$$

ところが、二項定理は「確率統計」であつかい、場合によっては「基礎解析」の数列のところで数学的帰納法の例題としてあつかうことも考えられるが、いずれにしても「数Ⅱ」ではこの証明は使えそうにない。

2. 数学的帰納法による

〔学校図書、清水書院、三省堂、帝国書院〕

$f(\chi)=\chi^n\ \rightarrow\ f'(\chi)=n\chi^{n-1}$

$n=1$　のとき　$f(\chi)=\chi$

$$f'(\chi)=\lim_{h\to 0}\frac{\chi+h-\chi}{h}=1=1\cdot\chi^{1-1}$$

$n=k$　のとき成り立つとすれば

$f(\chi)=\chi^k\ \rightarrow\ f'(\chi)=kx^{k-1}$

$f(\chi)=\chi^{k+1}=\chi^k\cdot\chi$

$$\begin{aligned}f'(\chi)&=(\chi^k)'\chi+\chi^k\cdot(\chi)'\\&=k\chi^{k-1}\cdot\chi+\chi^k\cdot 1\\&=k\chi^k+\chi^k=(k+1)\chi^k\end{aligned}$$

ところがこれには数学的帰納法のほかに積の微分が必要であるが、それがでてくるのは新指導要領では「微分・積分」であり、「基礎解析」ですらこれは扱えないことになる。

それでは数Ⅱで χ^n の微分はどのように扱えばよいのか。

$f(\chi)=\chi^n$ の $\chi=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めることにして、

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\chi^n-a^n}{\chi-a}$$

ここで

$a\neq 0$ のとき

$$\frac{\chi^n-a^n}{\chi-a}=\chi^{n-1}+a\chi^{n-2}+\cdots+a^{n-2}\chi+a^{n-1}\quad(1)$$

であるから

$f'(a)=na^{n-1}$

$a=0$ のとき

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\chi^n}{\chi}=\lim_{x\to 0}\chi^{n-1}$$

$n\geqq 2$ のとき　0

$n=1$ のとき　$\lim_{x\to 0}\frac{\chi}{\chi}=1$

故に $f'(\chi)=n\chi^{n-1}$　（正確には $n=1$ のときの $f'(0)$ は例外）

さて(1)は

(ア)　等比数列の和〔数Ⅱ〕がこれ以前にやってあれば、右辺は $\chi\neq 0$ のときを考えてよいから、初項 χ^{n-1} 公比 $\frac{a}{\chi}$、項数 n の等比数列の和であるので、

$$\frac{\chi^{n-1}\left(1-\left(\frac{a}{\chi}\right)^n\right)}{1-\frac{a}{\chi}}=\frac{\chi^n\left(1-\frac{a^n}{\chi^n}\right)}{\chi-a}=\frac{\chi^n-a^n}{\chi-a}$$

と説明できる。

(イ) さもなければ、$n=4,\ 5$ あたりで具体的に割り算を実行して、$(\chi^4)'=4\chi^3,\ (\chi^5)'=5\chi^4$ までにしておいても実さいには役立つし、これの拡張は研究課題としておいてもよいのではなかろうか。χ^n-a^nを$\chi-a$で割る計算を一般的にやれないこともないとは思うが。

Ⅱ 三角関数の加法定理

これも「代数・幾何」と「基礎解析」の両方で扱うので、それなりの方法を考えておく必要がある。現行では、数ⅡBの行列のところで回転の合成として副産物的に扱っているが、行列が高校数学にとり入れられる以前は、証明も応用も本格的にやっていた。

さて「代数・幾何」では現行のように行列の応用として扱われ、「基礎解析」では、おそらく三角関数の微積分のお膳立てとしてある程度くわしく扱われるのではなかろうか。

行列を用いる方法もよく見ると現行の教科書に微妙な差異があるのでその点を考えてみたい。

1. 回転の1次変換の合成を用いる方法

まず回転の1次変換の作り方から

(ア) $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$、$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$、$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

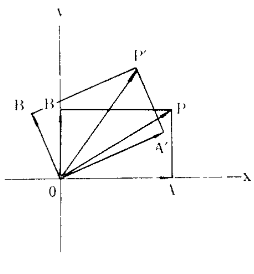
P, A, B をOのまわりにθだけ回転した点をP′, A′, B′ とし $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ とする。

$$\overrightarrow{OA}'=\begin{pmatrix}x\cos\theta\\x\sin\theta\end{pmatrix}、\quad \overrightarrow{OB}'=\begin{pmatrix}-y\sin\theta\\y\cos\theta\end{pmatrix} \qquad (2)$$

そして $\overrightarrow{OP}'=\overrightarrow{OA}'+\overrightarrow{OB}'$

であるので、

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\x\sin\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



〔学校図書〕

この方法は (2) の説明に無理はないか。$\chi>0,\ y>0$のときは$\chi,\ y$を動径と考えればよいが、そのでないときを考えると「(2)であるから…」では疑問が残る。

(イ) $\vec{u}=(x,\ y)$がOのまわりのθだけの回転fにより $\vec{u}'=(x',\ y')$ にうつったとすると

$$\vec{u}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2} \quad ただし\ \vec{e_1}=(1,0),\ \vec{e_2}=(0,1)$$

$$\vec{u}'=f(\vec{u})=f(x\vec{e_1}+y\vec{e_2})$$

$$=f(x\vec{e_1})+f(y\vec{e_2}) \qquad (3)$$

ところが $x\vec{e_1}=(x,\ 0)$， $y\vec{e_2}=(0,\ y)$ だからこれらをOのまわりにθだけ回転して

$$f(x\vec{e_1})=(x\cos\theta,\ x\sin\theta)$$

$$f(x\vec{e_2})=(-y\sin\theta,\ y\cos\theta) \qquad (4)$$

故に

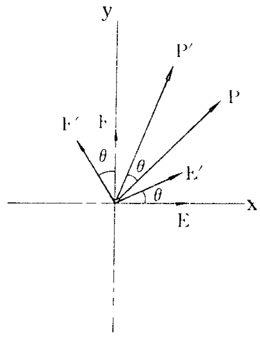
$$(x',\ y')=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$$

〔清水書院〕

(3)が1次変換について成り立つことがこの項の前に示してはあるが、この項では「回転が1次変換であることを示そう」ではじまっている。これはfが1次変換であることを仮定してやっていることにはならないだろうか。また、(4)は前の方法 (ア) 同様に無理がある。

それに対して次の方法が生徒に理解させやすいのではないか。

(ウ) 点P$(x,\ y)$を原点Oを中心としてθだけ回転させた点をP′$(x',\ y')$とする。



またE(1, 0), F(0, 1) をOのまわりにθだけ回転させるとそれぞれ E′$(\cos\theta, \sin\theta)$, F′$(-\sin\theta, \cos\theta)$ にうつる。

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OE}+y\overrightarrow{OF}$$

回転したあとも

$$\overrightarrow{OP}'=x\overrightarrow{OE}'+y\overrightarrow{OF}'$$

であるから

$$(x',\ y')=x(\cos\theta,\ \sin\theta)+y(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$
$$=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$$

故に $$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

〔数研，啓林〕

以上のような方法で、原点の回りのθだけの回転を表わす1次変換の行列が

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

であることが示されるので

$$R_\beta R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

一方

$$R_\beta R_\alpha=P_{\alpha+\beta}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & +\cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

これを比較して

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (5)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (6)$$

が同時に導かれることはどの教科書も同じである。

2. 行列を用いない方法

現行の数ⅡBの教科書にも行列を用いないで次のように加法定理を導いているものがあった。

(ア) 単位円 O：$x^2+y^2=1$ 上に2点 A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとれば $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$のなす角θは

$\theta=(\alpha-\beta)+2n\pi$ または$\theta=(\beta-\alpha)+2n\pi$ (n.整数)

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha) \qquad (7)$$

であるから

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta = \cos(\alpha-\beta)$

一方

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

これから余弦の加法定理

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (8)$$

がでる　　〔実教〕

β を $-\beta$ におきかえれば (5) が出る。また $\frac{\pi}{2}$ だけの操作により (6) も出る。

実教の教科書ではこのあと行列のところで回転を表わす1次変換の行列を逆に加法定理を用いて導いているのは面白い。すなわち

点 $P(x, y)$ と原点 O との距離が r、OP が一般角 α の動径であれば、

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha \qquad (9)$$

PのOのまわりの θ だけの回転による像を $P'(x', y')$ とすると

$OP' = r$ で OP' は $\alpha+\theta$ の動径であるから

$$x' = r\cos(\alpha+\theta), \quad y' = r\sin(\alpha+\theta)$$

加法定理と (9) より

$$x' = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta$$

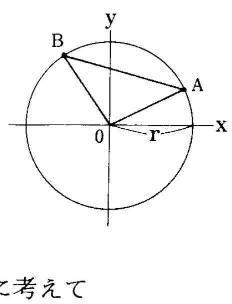
$$y' = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta$$

しかし、ここで用いたベクトルの内積は「代数・幾何」で扱っているので「代数・幾何」の前に「基礎解析」の三角関数をやる場合にはこの方法はやはり使えないことになる。

「基礎解析」でベクトルや行列を用いないで加法定理を導くのには2点間の距離と余弦定理を用いる次の方法が以前からよく用いられた。

(イ)　半径 r の円Oの周上に2点

$A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $B(r\cos\beta, r\sin\beta)$ をとる。



$$\begin{aligned} AB^2 &= (r\cos\alpha - r\cos\beta)^2 \\ &\quad + (r\sin\alpha - r\cos\beta)^2 \\ &= r^2\{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta \\ &\quad + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta\} \\ &= 2r^2 - 2r^2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

一方余弦定理によれば

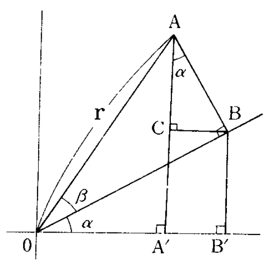
$$AB^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r\cos\angle AOB$$

$\angle AOB$ については (7) のように考えて

$$2r^2 - 2r^2\cos(\alpha-\beta) = 2r^2 - 2r^2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

これより (8) がでる。

ずっと以前はつぎの図による証明が教科書にのっていた。



まず $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ の場合

$r\sin(\alpha+\beta)$

$= AA' = AC + BB'$

$= AB\cos\alpha + OB\sin\alpha$

$= r\sin\beta\cos\alpha + r\cos\beta\sin\alpha$

これより (6) が出る。また

$r\cos(\alpha+\beta) = OA' = OB' - BC$ とすれば (5) も出る。

すべての α, β にまで拡張するのには、やはり α, β のそれぞれに $\pm\frac{\pi}{2}$ を順に別々に加えて行く方法で、厳密には数学的帰納法を用いて証明する必要がある。この方法は、式の形が直接図形と結びつくところは申し分ないが、一般化への拡張の段階で先生も生徒もうんざりした記憶がある。

Ⅲ　ベクトルの内積の成分表示

これは、「代数・幾何」だけであるのできして問題はなさそうであるが、現行の教科書では次の2種類の扱い方があった。平面のベクトルの場合のみ書いておく。

1.　余弦定理を用いる方法

ほとんどの教科書はこれである。〔三省堂、学校図書、啓林、数研、清水、東書、帝国書院など〕すなわち、

$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とすれば　$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\theta$ より

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

これより

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

この場合は内積の計算についての基本性質

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}), \quad (t\vec{a}, \vec{b}) = t(\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) \end{array}\right\} \quad (10)$$

などは成分を用いて証明している。

2.　余弦定理を用いない方法

これは〔実教〕の教科書に見られた。基本性質(10)は図を用いて証明しそのあと基本ベクトルを用いて

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}, \quad \vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$$

$$(\vec{e_1}, \vec{e_1}) = (\vec{e_2}, \vec{e_2}) = 1, \quad (\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 0$$

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}, b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) \\ &= a_1 b_1(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + a_1 b_2(\vec{e_1}, \vec{e_2}) + a_2 b_1(\vec{e_2}, \vec{e_1}) \\ &\quad + a_2 b_2(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

として証明する。

次にもう一つ

Ⅳ　点と直線（平面）との距離

これは扱うとすれば「数Ⅰ」の図形、「代数・幾何」の二次曲線、空間図形あたりであろうが、従来この公式は教科書では正式に扱ってない（要するに指導要領に示してない）場合が多いけれども問題を解くためには一度はどこかでやっておかないと困るという公式で

ある。現行の数ⅡＢでも扱い方はいろいろで、内積の成分表示の公式等と対等な待遇をあたえているもの、例題として例解を与えているもの。原点からの距離だけでとどめてあるもの、章末問題として分題式にヒントをつけて解かせようとしているもの、全くのせていないもの、などである。現行の数ⅡＢではいずれもベクトルの応用としてである。

1. 直線　$g : ax+by+c=0$ へ点 $P_1(x_1, y_1)$ からひいた垂線 P_1H の長さを h, g 上の一点を $P_0(x_0, y_0)$ とすると g は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

とかける。

$$\overrightarrow{P_0P_1}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0)=\vec{s}$$

とし、g と垂直なベクトル

$$\vec{n}=(a,\ b)$$

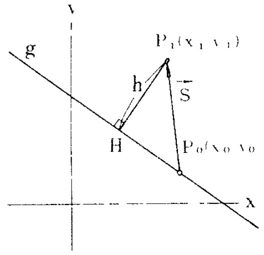
と $\vec{s}$ のつくる角を θ とすると

$$h=\left|\,|\vec{s}|\cos\theta\right|$$

ところが

$$(\vec{s}, \vec{n})=|\vec{s}||\vec{n}|\cos\theta$$

だから



$$h=\frac{|(\vec{s}, \vec{n})|}{|\vec{n}|}=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

（平面についても同様）　　〔啓林〕

2　平面 α の原点 O を通る法線 h と α の交点を H

$$OH=p \qquad (p \geqq 0) \quad とし$$

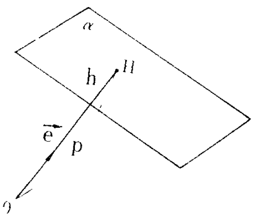
h に平行な単位ベクトル　$\vec{e}=(\ell, m, n)$ を $\overrightarrow{OH}$ と同じ向きにとる。α は $H(p\ell, pm, pn)$ を通り h に垂直だから、

$$\ell(x-p\ell)+m(y-pm)+n(z-pn)=0$$

$\ell^2+m^2+n^2=1$　であるから

$$\ell x+my+nz=p$$

これは原点からの距離が P で法線ベクトルの方向余弦が ℓ, m, n である平面の式（ヘッセの標準形）である。



一般に平面　$ax+by+cz=d$　$(d \geqq 0)$　は

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c}}z$$

$$=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c}}$$

とかけるので、原点と平面との距離が右辺である。

〔数研〕

3. 平面 $\alpha : ax+by+cz=d$ に原点 O から垂線 OP を下し、$P(x_0, y_0, z_0)$ とする。

$\overrightarrow{OP}$ は $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ に平行だから

$$\overrightarrow{OP}=(x_0, y_0, z_0)=k(a,\ b,\ c)$$

$$x_0=ka, \quad y_0=kb, \quad z_0=kc$$

これを　$ax_0+by_0+cz_0=d$　に代入すると

$$a(ka)+b(kb)+c(kc)=d$$

$$k(a^2+b^2+c^2)=d$$

よって

$$k=\frac{d}{a^2+b^2+c^2}=\frac{d}{|\vec{u}|^2}$$

故に

$$\overrightarrow{OP}=\frac{d}{|\vec{u}|^2}(a, b, c)$$

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\left(\frac{ad}{|\vec{u}|^2}\right)^2+\left(\frac{bd}{|\vec{u}|^2}\right)^2+\left(\frac{cd}{|\vec{u}|^2}\right)^2}$$

$$=\frac{|d|\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|\vec{u}|^2}=\frac{|d|}{|\vec{u}|}=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

が求まる。　　〔清水書院〕

4. 〔実教〕では第1章空間のベクトルと図形のところの章末問題Bで、次のように扱っている。

すなわち

点 P を通り、ベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面 α がある。点 A の α 上への正射影を H として

1）$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{HA})=|\overrightarrow{HA}|^2$　を示せ。

2）$HA=\dfrac{1}{|\vec{n}|}|(\overrightarrow{PA}, \vec{n})|$　を示せ。

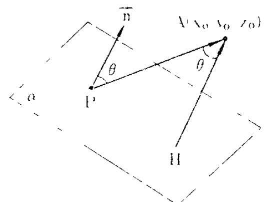
3）平面 α の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とし、点 A の座標を　(x_0, y_0, z_0)　とするとき、次を示せ。

$$HA=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

〈解〉としては、次のようにすればよい。

1）$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{HA})=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{HA}|\cos\theta$

$$=|\overrightarrow{HA}|^2$$



2）$(\overrightarrow{PA}, \vec{n})=|\overrightarrow{PA}||\vec{n}|\cos\theta$

$$=|\overrightarrow{HA}||\vec{n}|$$

3）$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおく、

$P(x_1, y_1, z_1)$ とすると

$$AH=\frac{1}{|\vec{n}|}|(\overrightarrow{PA}, \vec{n})| \quad , \quad \overrightarrow{PA}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$$

$ax_1+by_1+cz_1+d=0$　　なので

$$AH=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}|ax_0+by_0+cz_0-ax_1-by_1-cz_1|$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

（終）

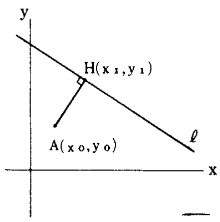
ベクトルを用いる方法でも上記のようにいろいろあるが、これによると点と直線の距離も点と平面との距離も同じようにできてつごうがよい。そして現行の教科書ではほゞ例外なくこの方法である。しかしベクト

ルの内積が使えない「数Ⅰ」の図形のところで扱う場合のことも考慮して、ベクトルを用いないいろいろの証明をここにメモさせてもらうことにする。ずっと以前生徒に宿題として集めた証明の略解である。

点と直線の距離

> 点A(x_0, y_0)から直線ℓ : $ax+by+c=0$ に下した垂線の足をH(x_1, y_1)とすると
>
> $$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ である。

$a=0$ or $b=0$ のときは明らかであるから以下 $ab\neq 0$ とする。



1. $x_1=x_0+at$, $y_1=y_0+bt$ がℓ上にあるので

$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0$

より $t=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$

$$AH^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=(at)^2+(bt)^2$$
$$=(a^2+b^2)t^2=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

2. Aを通りℓに垂直な直線は

$$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0) \qquad ①$$

これとℓとの交点を求めると

$$x_1=\frac{b^2x_0-aby_0-c}{a^2+b^2}, \quad y_1=\frac{a^2y_0-abx_0-c}{a^2+b^2}$$

$$AH^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2=\cdots=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

3. 2.の①上にH(x_1, y_1)があるので

$b(x_1-x_0)-a(y_1-y_1)=0$

一方ℓ上にHがあるので

$ax_1+by_1+c=0$　これを変形すると

$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+ax_1+by_1+c=0$

これら二式から x_1-x_0, y_1-y_0 について解くと

$$x_1-x_0=\frac{-a(ax_1+by_0+c)}{a^2+b^2}$$

$$y_1-y_0=\frac{-b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$$

$AH^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2=\cdots$

4 点Aが原点にうつるような平行移動によりℓは ℓ' : $ax+by+ax_0+by_0+c=0$ にうつるから

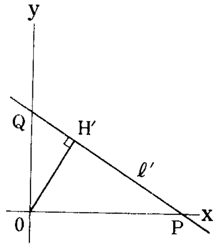
> 原点Oから直線ℓ' : $ax+by+C=0$ までの距離が
>
> $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である

を示せばよい

(ア) Oからℓ'への垂線 $y=\frac{b}{a}x$ とℓ'との交点H′は

$$H'\left(-\frac{aC}{a^2+b^2} \quad -\frac{bC}{a^2+b^2}\right)$$

故に $OH'^2=\frac{C^2}{a^2+b^2}$



(イ) ℓ'とx軸、y軸との交点をP, Qとすると

P$\left(-\frac{C}{a}, 0\right)$, Q$\left(0, -\frac{C}{b}\right)$

$PQ^2=\frac{C^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}$ これとOH′・PQ=OP・OQ

より $OH'=\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(ウ) OH′= p とするとℓ'の方程式は $x\cos\theta+y\sin\theta=p$

これと $ax+by=-C$ が一致するから

$\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{p}{-C}$ これより

$\cos\theta=\frac{ap}{-C}$, $\sin\theta=\frac{bp}{-C}$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より $p^2=\frac{C^2}{a^2+b^2}$

(エ) 円$x^2+y^2=r^2$ の接線で傾きmのものは

$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ これと $y=-\frac{a}{b}x-\frac{C}{b}$ とが一致するから、

$m=-\frac{a}{b}$, $-\frac{C}{b}=\pm r\sqrt{1+m^2}$

これよりmを消去してr ($r>0$)をきめると $r=\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5. ℓ上に点P(x, y)をとると $AP^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ これに

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ を代入して

$$AP^2=\frac{a^2+b^2}{b^2}\left(x-\frac{-aby_0+b^2x_0-ac}{a^2+b^2}\right)^2+\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

故にAPの最小値として $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を得る。

6. ℓ上に点Pをとると

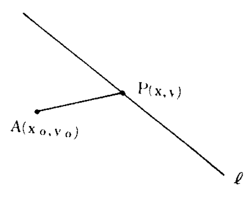
$AP^2=(x-x_0)+(y-y_0)^2$ だから

$AP^2\cdot(a^2+b^2)\geqq\{a(x-x_0)+b(y-y_0)\}^2$

（シュワルツの不等式）

$\therefore AP\geqq\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$(ax+by=-c)$



7.　Aを通りx軸、y軸に平行な直線がℓとB，Cで交わると

$$B\left(-\frac{by_0+c}{a},\ y_0\right),\ C\left(x_0,\ -\frac{ax_0+c}{b}\right)$$

$BC\cdot AH=AB\cdot AC$　より

$$AH^2=\left(\frac{AB\cdot AC}{BC}\right)^2=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

（４の(イ)と同じ考え方）

8.　直線$x=x_0$とℓとの交点$Q\left(x_0,\ -\frac{a}{b}x_0-\frac{c}{b}\right)$

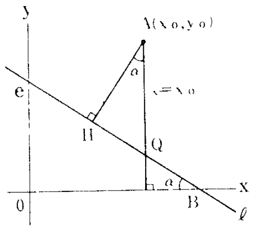
$$AQ=\left|y_0+\frac{a}{b}x_0+\frac{c}{b}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}$$

$\angle HAQ=\alpha$とおくと$AH=AQ\cos\alpha$

$$OB=\left|\frac{c}{a}\right|,\quad OC=\left|\frac{c}{b}\right|$$

$$BC=\frac{|c|\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$$

よって　$\cos\alpha=\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



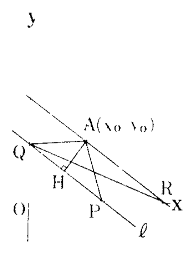
9.　$A(x_0,y_0)$　を中心とする円　$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$　とℓが接するようにrをきめる。代入してyを消去し、xについての２次方程式の判別式＝０より　$r=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

10.　ℓとx軸、y軸との交点は

$$P\left(-\frac{c}{a},\ 0\right),\ Q\left(0,-\frac{c}{b}\right)$$

Aを通りℓに平行な直線とx軸との交点は

$$R\left(\frac{ax_0+by_0}{a},\ 0\right)$$



$\triangle AQP=\triangle RQP$　より

$PR\cdot OQ=PQ\cdot AH$

$$PR=\frac{|ax_0+by_0+c|}{|a|},\quad OQ=\frac{|c|}{|b|},$$

$$PQ=\frac{|c|\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}\ より。$$

11.　中心A，半径rの円は

$x=x_0+r\cos\theta,\ y=y_0+r\sin\theta$　これがℓと共有点をもつことから

$$a(x_0+r\sin\theta)+b(y_0+r\sin\theta)+c=0$$

$$r(a\cos\theta+b\sin\theta)=-ax_0-by_0-c$$

$$r\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)=-ax_0-by_0-c$$

$r>0$ であるから　$r=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}\,|\sin(\theta+\alpha)|}$

これの最小値として求める。

以上いろいろ工夫がされているが、いずれもあまり簡単ではない。しかし結果はぜひ用いたい。いずれかの方法で示してから用いるがよかろうと思う。

さてはじめの方針とやゝそれた面もあるが、新しい指導要領により実施された場合、更に別の事項についても、そのつど、工夫がなされるべきであることを示したつもりである。