〔Ⅱ〕 物体の自由落下運動について

―― 万有引力の法則を教えて ――

松井　一幸

要　旨

質量mとMの２質点が、距離l_0離れて無重力状態に置かれている。最初静止していた両質点は、万有引力の法則に従って引き合うとする。この場合の経過時間tと、物体間の距離lの関係が、Newton 力学に基づいて計算されている。結果は、

$$t=\sqrt{\frac{\pi^2 l_0^3}{8G(m+M)}}\times f(y)$$

で与えられる。ここに、

$$f(y)=1+\frac{2}{\pi}\{\sqrt{y(1-y)}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{y}{1-y}}\},$$

$y=l/l_0$, $G=6.67\times10^{-11}\mathrm{Nm^2}/kg^2$でGは万有引力定数である。

この式の授業への応用例が述べられている。また、物体の自由落下運動に関するガリレオの法則の意味が再検討なされている。

1. 緒　言

運動量保存の法則を教える時、その応用例として、次のような問を生徒に出す。

問…「宇宙遊泳していた飛行士の命綱が切れてしまった。宇宙船と飛行士との間隔は、$l_0=5\ m$であった。飛行士は再び宇宙船へ帰れるであろうか。ただし、飛行士（質量$m_1=95kg$）は、質量$m_2=5\ kg$の金づちを手に持っていたとする。

このような問を出すと、生徒は真剣に考える。そして大抵正しく、「金づちを宇宙船と反対の方向へ投げれば、その反作用で帰れる。」と胸を張って答える。しかし、立て続けに、「それでは何秒後に帰れるだろうか。」と質問する。生徒は考え込む。運動量保存の法則を正しく理解している生徒は、各自計算を始める。しかしすぐ「反対方向に何m/sで金づちを投げたのですか。」と聞く。「$v_1=2\ m/s$で投げたとしよう。」というと、$0=m_1v_1+m_2v_2$より、$v_1=-\frac{m_2}{m_1}v_2$，$t=l_0/|v_1|=m_1l_0/(m_2v_2)=95\ kg\cdot5\ m/(5kg\cdot2\ m/s)=47.5\ s$と計算し、「約50秒後に宇宙船に戻れます。」と答えてくれる。

生徒の理解が遅ければ、正解に辿り着くまでに時間がかかるが、ヒントを少し与えるだけで、大抵正しい答に達することができる。

生徒がホッとしたところへ教師からさらに質問する。「金づちを持っていなかったら、もう帰れないのだろうか？」と。

生徒は、宇宙服か酸素ボンベを捨てなければならないと深刻に考える。金づちを捨てた時に必要とした時間から考えて、酸素ボンベを捨てても息を止めればなんとか帰れると納得するのである。（宇宙服を捨てたら大変!!）

その後、「何か質問はないか？」と聞くと、帰れた安心さが手伝ってか、もうこれ以上質問はしてこない。しかし、教える側としては、次のような質問が出たら大弱りするであろう。「先生、飛行士と宇宙船の間には、万有引力が働いてますね。その引力によって帰れるとしたら、どれくらいの時間を必要とするのですか？」

こんな時は、「重力というのは大変弱いから、ものすごく長い時間かかってしまうだろう。重力の効果は普通考えなくてもいいくらい小さいのだよ。」と逃げるのがおちである。しかし、正しくはどれくらい時間がかかるのだろう。

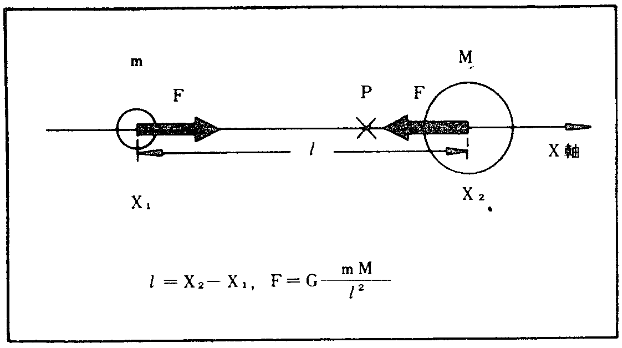
この解答は、物理Ⅱの重力のところでも勿論でてこないし、筆者は大学で演習も経験しなかった。筆者の知識では、厳密解を専門書でも見たことがない。誰かが既に計算していると思われるけれども、Newton 力学の範囲でこの問題を解いてみた。

本紀要では、この計算の紹介と、結果の授業への応用について述べてみたい。

得られた結果を分析していると、物体の自由落下運動に対するガリレオの法則、即ち、――物体の落下する速さは、落下する物体の質量によらない――と、一見対立する結論が得られた。この詳細について吟味してみたい。

2. 計算の方法

図１のように、質量m，Mの２物体がl離れ、万有引力で引き合って運動している場合を考える。時間$t=0$で、$l=l_0$とする。m，Mの座標をそれぞれ、x_1, x_2とする。x軸の右向きに正の方向をとると、$l=x_2-x_1$である。ここに、x_1，x_2，lは、tの関数である。



図－1　m、Mは2物体の質量。X_1、X_2は位置。Fは万有引力、Pは共通重心。物体間の距離$l = X_2 - X_1$、及びX_1、X_2は時間 t の関数。

物体mに対する運動方程式は、

$$\mathrm{m}\frac{d^2x_1}{dt^2} = G\frac{\mathrm{mM}}{(x_2-x_1)^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

物体Mに対する運動方程式は、

$$\mathrm{M}\frac{d^2x_2}{dt^2} = -G\frac{\mathrm{mM}}{(x_2-x_1)^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(1), (2)より $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{x_1}{\mathrm{M}} + \dfrac{x_2}{\mathrm{m}}\right) = 0$

この一般解は、

$$\frac{x_1}{\mathrm{M}} + \frac{x_2}{\mathrm{m}} = \alpha t + \beta$$

これは共通重心Pの運動をあらわす方程式である。両物体の共通重心は、x軸の原点に固定され、時間的に変化しないと考えると、$\alpha = \beta = 0$。このとき、

$$\frac{x_1}{\mathrm{M}} + \frac{x_2}{\mathrm{m}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

(2)に代入して、x_1を消去すると、

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{G\mathrm{m}^3}{(\mathrm{m}+\mathrm{M})^2} \times \frac{1}{x_2^2} = 0 \qquad (4)$$

(4)の微分方程式を解くために、両辺に$\dfrac{dx_2}{dt}$をかけて整理すると、$\dfrac{d}{dt}\left[\left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)^2 - \dfrac{A}{x_2}\right] = 0$

ここに、 $A = \dfrac{2G\mathrm{m}^3}{(\mathrm{m}+\mathrm{M})^2}$

このとき、$\left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)^2 - \dfrac{A}{x_2} = C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$

Cは積分定数。$t = 0$で、$x_2 = x_0$, $\dfrac{dx_2}{dt} = 0$とすると、$C = -\dfrac{A}{x_0}$。これを(5)に代入すると、

$$\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = A\frac{x_0 - x_2}{x_0 x_2}$$

図1より、Mはxの負の方向に運動することを考えると、$\dfrac{dx_2}{dt} < 0$。一方、$x_0 - x_2 \geqq 0$であることを考えると、

$$\frac{dx_2}{dt} = -\sqrt{\frac{A}{x_0}}\sqrt{\frac{x_0 - x_2}{x_2}}$$

この微分方程式は、初等的に解くことができる。$X = x_2/x_0$をパラメタとして用い、$t = 0$で$X = 1$に注意すると、厳密解として、

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2(\mathrm{m}+\mathrm{M})^2 x_0^3}{8G\mathrm{m}^3}} \times f(X)$$

$$f(X) = 1 + \frac{2}{\pi}\left\{\sqrt{X(1-X)} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{X}{1-X}}\right\}$$

を得る。

$t = 0$のとき$x_2 = x_0$、この時(3)より$x_1 = -\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}x_0$

故に、$l_0 = (x_2 - x_1)_{t=0} = x_0\left(1 + \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}\right)$ より、

$x_0 = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}+\mathrm{M}}l_0$を得る。これを上式に代入すると、

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2 l_0^3}{8G(\mathrm{m}+\mathrm{M})}}\, f(X) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

を得る。上式は、Mが共通重心Pに向かう運動の厳密解であるが、次に、物体間の距離 l の時間的変化を直接与える式を導こう。

$y = l/l_0$ をパラメタに用いると、$x_0 = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}+\mathrm{M}}l_0$，$x_2 = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}+\mathrm{M}}l$ より、$y = l/l_0 = \dfrac{x_2}{x_0} = X$を得る。従って$X = y$。従って、物体間の距離、$l = l_0 y$ を与える式は、(6)式において、Xを$y = l/l_0$と置きかえるだけで与えられる。

従って、厳密解は、

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2 l_0^3}{8G(\mathrm{m}+\mathrm{M})}}\, f(y) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

ここに、$f(y) = 1 + \dfrac{2}{\pi}\left\{\sqrt{y(1-y)} - \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}\right\}$, $y = l/l_0$

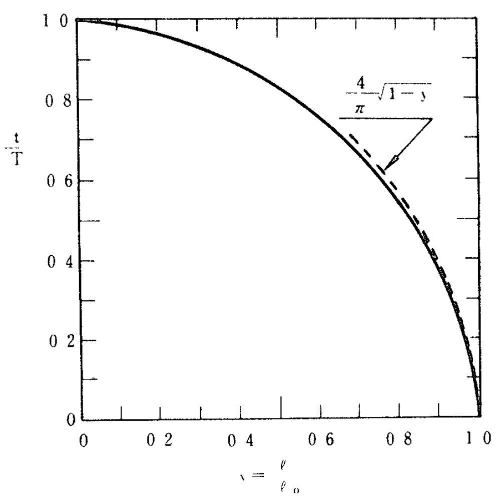
衝突するまでの時間Tは、(7)において、$y = 0$を与えるtで与えられる。このとき

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2 l_0^3}{8G(\mathrm{m}+\mathrm{M})}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

(8)を用いて(7)式をあらわすと、

$$\frac{t}{T} = f(y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

図2は、(9)をグラフ化したもので、任意の時刻における物体間の距離を与える。点線は、$y \approx 1$における近似式を描いたものである。



図－2　時刻 t における物体間の距離ℓ・ℓ_0は最初の2物体間の距離，Tは衝突時間。

3. 衝突時間Tの授業への応用

この段階で、緒言において質問が出ると大変困ると

述べていた衝突時間が正確に計算できるようになった。

宇宙船が$M=2000kg$、飛行士＋金づちが$m=m_1+m_2=100\ kg$、$l_0=5\ m$の場合にTを計算すると、

$$T=\sqrt{\frac{(3.14)^2\times(5m)^3}{8\times6.67\times10^{-11}N\cdot m^2/kg^2\times2100kg}}=9.2\,\text{hour}$$

やはり予想されていたように、金づちを捨てた場合よりも随分遅い。

(8)式を教えるにあたって、計算の詳細をプリントにして配ったが、プリントを見て、何故理系の者は数Ⅲ（特に微積）をしっかりと学ばねばならないかという精神が理解できたと思う。微分方程式を解く詳細が理解できなくとも、衝突時間が計算できることに感動する生徒も少なからず存在する。物理Ⅱの理系選択の生徒に数値を代入して答を出させることは、いい演習問題でもあろう。

さて(8)式の意味をもう少し掘り下げてみよう。変形すると、

$$\frac{l_0^3}{T^2}=\frac{8G(m+M)}{\pi^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

これは、物理Ⅱで学習する円運動する惑星に対するケプラーの法則

$$\frac{r^3}{T_0^2}=\frac{GM}{4\pi^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

と極めて形が似ている。この場合、rは、回転半径、T_0は一周に要する時間である。(11)式のMは正しくは（M＋m）と考えられるが、m≪Mであるため無視されている。さて、(11)のMを（M＋m），$r=l$とみなして、T_0とTを比較すると、$T=\frac{1}{4\sqrt{2}}T_0$を得る。この結果衝突時間は、一回転に要する時間の$\frac{1}{4\sqrt{2}}$と考えればよいことになる。これを用いると衝突時間Tの定性的な計算方法の例として、地球と太陽の場合なら、$T=\frac{365日}{4\sqrt{2}}\sim60日$、地球と月の場合なら$T=\frac{27日}{4\sqrt{2}}\sim5日$となる。このような考え方は生徒に対して説得力をもつようである。

4. 物体の自由落下運動は本当に質量に依存しないか

(8)式において、Mを地球の質量、mを落下物体の質量としよう。衝突時間Tは、mの大きさに依存する。これは、物体の落下速度は質量によらないとしたガリレオの法則に矛盾しないか？という素朴な疑問を投げかけた。

この疑問に答えるべく、(7)式を検討した。通常は、m≪Mであるからm＋M⇒Mとなり、実験にTの違いとしてかかることはまずない。それに、地球や落下物体は質点ではないから中心がぶつかることはありえない。従って、ガリレオの法則を検討するにあたり、落下物体の落ちはじめの運動の様子を調べる。

このためには、$y=1$の近傍で、$f(y)$を展開し、物体の落下距離$S=l_0(1-y)$と時間tの関係式を求めればよい。$y=1$の近傍では、$f(y)$は$\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y}$と近似できる。従って、このとき(7)式は、$t/T=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y}$。これにより、$S=l_0(1-y)=l_0\pi^2t^2/(16T^2)$。(8)を用いると、

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{GM}{l_0^2}\left(1+\frac{m}{M}\right)\right]t^2$$

となる。これと、等加速度運動の公式、$S=\frac{1}{2}gt^2$と比較すると、重力加速度gは、

$$g=\frac{GM}{l_0^2}\left(1+\frac{m}{M}\right)=9.8\,m/s^2\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

となる。ここに、$l_0=6.37\times10^6m$（地球の半径），$M=5.98\times10^{24}kg$（地球の質量）を用いた。この結果、

$$v=gt=\frac{GM}{l_0^2}\left(1+\frac{m}{M}\right)t=9.8\,m/s^2\left(1+\frac{m}{M}\right)t$$

となり、落下速度はmに依存する。mがMに比べて無視できないとき、落下速度は質量に依存する。即ち、質量が大きいほど速く落ちるという結論になる。これは正しいと考える。この結論は、ガリレオの法則に、厳密に言えば矛盾することになる。

しかし、ここでの結論は、質量の大きいものと小さいものを別々に落下させる場合（二体問題）に限定されている。大きいものと小さいものを同時に落下させる場合は、厳密に言えば三体問題であり、この場合にどちらが速く落ちるかは、ここでは簡単に結論を出すことはできない。高校物理Ⅰの教科書では、ガリレオの法則は、三体問題で、論理思考実験法を用いて説明されている場合が多い。（ガリレオ自身の手法でもある）。それ故、これが、厳密に正しいかどうかをさらに詳しく検討する必要がある。この問題は、一般相対性理論の基礎である「等価原理」ともかかわってくるので、興味ある面白い問題である。