地球に固定した座標系から見た物体の運動

鈴　木　一　悠

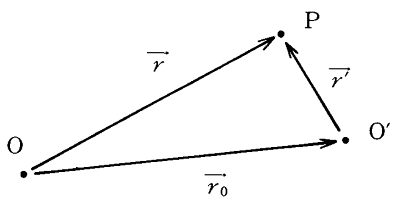
1 はじめに

地学の授業をしていると重力とかコリオリの力とか潮汐力とかいろいろな力が出てきます。いずれも理解の困難な力で、潮汐力など参考書の説明を読んでもよく分らず，授業で説明する折も，教科書に出ている説明を繰返すだけに終ったり，「よく分らない力ですね」と言うだけで終ってしまった経験も持っています。しかし地学を担当している者として「難しい，難しい」だけでは通らないし，また自分自身の興味のあることも手伝って，これらの力について考える機会が何度かありました。これらの力はこういう力なのだろうと考えているところを書いてみたいと思います。

2 座標系の設定

地学で扱う力は，ある物体が地表付近にある時にその物体に加わる力は何々かというように，物体が地表付近にある時を問題にしている場合が多いと思います。最初に書いた3つの力がいずれもそうで，物体が地表付近を動いているか止っているかしている時に現れる力です。さて言うまでもなく地球は，自転し且つ月と共に太陽の周りを公転しています。そこで座標系を2つ設定します。1つは太陽の中心を原点とした太陽系に固定して設定した座標系で回転しない座標系です（以後この座標系を便宜上静止系と呼ぶことにします)。もう1つは地球の中心を原点とし，地球に固定した座標系で静止系の中で二重に回転する座標系です（以後この座標系を回転系と呼ぶことにします。)静止系の原点，直交する3軸を順にO，X，Y，Zとし，回転系のそれらを順にO′，X′，Y′，Z′とします。

3 地表付近の物体の運動を表わす式



地表付近の物体PのO系に対する位置を $\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{e_3}$（$\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$は単位ベクトル)，O′のO系に対する位置を $\overrightarrow{r_0}=x_0\overrightarrow{e_1}+y_0\overrightarrow{e_2}+z_0\overrightarrow{e_3}$，PのO′系に対する位置を $\overrightarrow{r'}=x'\overrightarrow{e_1'}+y'\overrightarrow{e_2'}+z'\overrightarrow{e_3'}$（$\overrightarrow{e_1'}$, $\overrightarrow{e_2'}$, $\overrightarrow{e_3'}$ は単位ベクトル）とします。

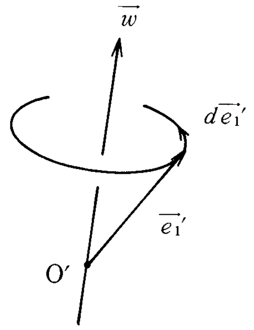
このとき，$\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}=\overrightarrow{r'}$ です。

両辺を時間で微分しますと

$$\left(\frac{dx}{dt}\overrightarrow{e_1}+\frac{dy}{dt}\overrightarrow{e_2}+\frac{dz}{dt}\overrightarrow{e_3}\right)-\left(\frac{dx_0}{dt}\overrightarrow{e_1}+\frac{dy_0}{dt}\overrightarrow{e_2}+\frac{dz_0}{dt}\overrightarrow{e_3}\right)$$
$$=\left(\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{e_1'}+\frac{dy'}{dt}\overrightarrow{e_2'}+\frac{dz'}{dt}\overrightarrow{e_3'}\right)+\left(x'\frac{d\overrightarrow{e_1'}}{dt}+y'\frac{d\overrightarrow{e_2'}}{dt}+z'\frac{d\overrightarrow{e_3'}}{dt}\right) \quad \cdots\cdots(1)$$

左辺の最初の(　)内の量は，PのO系に対する速度でこれを $\overrightarrow{v}$ と表わすことにします。同じように2番目の(　)内はO′のO系に対する速度でこれを $\overrightarrow{v_0}$ と表わすことに，右辺最初の(　)内はPのO′系に対する速度でこれを $\overrightarrow{v'}$ と表わすことにします。

右辺第2の(　)で $\frac{d\overrightarrow{e_1'}}{dt}$，$\frac{d\overrightarrow{e_2'}}{dt}$，$\frac{d\overrightarrow{e_3'}}{dt}$ は次のように表わすことができます。先に回転系の座標軸を定めるときO′を地球の中心に取ったのですから，O′は回転軸の上にあることになります。このときは，図に見るように



$$\frac{d\overrightarrow{e_1'}}{dt}=\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{e_1'}$$

同様に $\frac{d\overrightarrow{e_2'}}{dt}=\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{e_2'}$，$\frac{d\overrightarrow{e_3'}}{dt}=\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{e_3'}$ となります。ここに $\overrightarrow{w}$ は自転の角速度です。

そこで右辺第2の(　)は

$\overrightarrow{w}\times(x'\overrightarrow{e_1'}+y'\overrightarrow{e_2'}+z'\overrightarrow{e_3'})=\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{r'}$

と表わされることが分ります。

結局(1)式は $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v_0}=\overrightarrow{v'}+\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{r'}$ となります。

この式の両辺を再び時間で微分しますと

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{e_1}+\frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{e_2}+\frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{e_3}\right)-\left(\frac{d^2x_0{}^2}{dt^2}\overrightarrow{e_1}+\frac{d^2y_0{}^2}{dt^2}\overrightarrow{e_2}+\frac{d^2z_0{}^2}{dt^2}\overrightarrow{e_3}\right)$$
$$=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{e_1'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{e_2'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{e_3'}\right)+\overrightarrow{w}\times$$
$$\left(\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{e_1'}+\frac{dy'}{dt}\overrightarrow{e_2'}+\frac{dz'}{dt}\overrightarrow{e_3'}\right)+\frac{d\overrightarrow{w}}{dt}\times\overrightarrow{r'}+\overrightarrow{w}\times$$
$$(\overrightarrow{v'}+\overrightarrow{w'}\times\overrightarrow{r'})$$

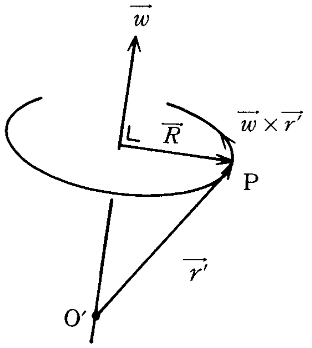
左辺最初の(　)はPのO系に対する加速度でこれを$\overrightarrow{a}$と，第2の(　)はO′のO系に対する加速度でこれを$\overrightarrow{a_0}$と，右辺最初の(　)はPのO′系に対する加速度でこれと$\overrightarrow{a'}$と，それぞれ表わすことにします。

すると上式は

$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{a_0}=\overrightarrow{a'}+2\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{v'}+\frac{d\overrightarrow{w}}{dt}\times\overrightarrow{r'}+\overrightarrow{w}\times(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{r'})\cdots\cdots(2)$$

となり，よく知られた関係が得られます。

上式で右辺最後の項は次のように書き直すことができます。



$$\overrightarrow{w}\times(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{r'})=-w^2\overrightarrow{R}$$

ただし$\overrightarrow{R}$はPの回転軸からの距離を表わすベクトルです。

(2)式を，$\overrightarrow{a'}$を求める形に直すと

$$\overrightarrow{a'}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{a_0}-2\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{v'}-\frac{d\overrightarrow{w}}{dt}\times\overrightarrow{r'}+w^2\overrightarrow{R}$$

さて両辺に物体の質量mを掛けますと

$$m\overrightarrow{a'}=\overrightarrow{\mathrm{F}}-m\overrightarrow{a_0}-2m\overrightarrow{a_0}\times\overrightarrow{v'}-m\frac{d\overrightarrow{w}}{dt}\times\overrightarrow{r'}+mw^2\overrightarrow{R}\cdots(3)$$

となります(右辺第1項で$m\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{F}}$と置きました)。これが，物体の運動を回転系から見たとき現れる加速度と加わっている力との関係です。右辺は第1項を除きすべて慣性の力で，地球が自転していたり公転していたりすることが原因で現れる力，また作用反作用の関係の成立たない力です。右辺をもう少し詳しく検討してみます。

(1)$\overrightarrow{\mathrm{F}}$

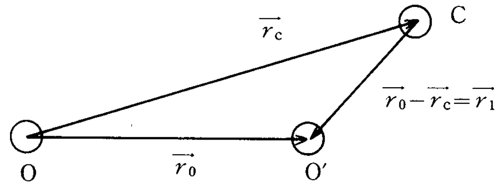
これは物体に加わっている作用反作用の関係の成立つ力で，地球からの引力，太陽からの引力，月からの引力，地球からの抗力，いま考えている物体とは異なる地表付近にある他の物体からの力などです。

(2)$-m\overrightarrow{a_0}$

これは地球の公転に基いて現れる力で，物体が地球表面付近の何所にあるかその位置によらない力です。地球の公転は複雑です。地球と月とは共通重心の周りを回り合いながら，太陽の周りを回っているからです。$-m\overrightarrow{a_0}$の力がどう表わされるかは，地球の全質量を地球の中心に集めた上で地球にどういう力が加わっているのかを考えることによって得られます。このとき地球に加わる力は，太陽からの引力および月からの引力です。太陽の質量，地球の質量，月の質量を順に$\mathrm{M_s}$，M，$\mathrm{M_c}$とし，月の中心Cの静止系に対する位置を$\overrightarrow{r_c}$としますと

$$\mathrm{M}\overrightarrow{a_0}=-\mathrm{G}\frac{\mathrm{MM_s}}{{r_0}^3}\overrightarrow{r_0}-\mathrm{G}\frac{\mathrm{MM_c}}{|\overrightarrow{r_0}-\overrightarrow{r_c}|^3}(\overrightarrow{r_0}-\overrightarrow{r_c})\quad\left(\begin{array}{l}\text{Gは万有引}\\\text{力定数}\end{array}\right)$$

$\overrightarrow{r_0}-\overrightarrow{r_c}=\overrightarrow{r_1}$とおきますと上式は



$$\mathrm{M}\overrightarrow{a_0}=-\mathrm{G}\frac{\mathrm{MM_s}}{{r_0}^3}\overrightarrow{r_0}-\mathrm{G}\frac{\mathrm{MM_c}}{{r_1}^3}\overrightarrow{r_1}$$

これから

$$-m\overrightarrow{a_0}=\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_s}}{{r_0}^3}\overrightarrow{r_0}+\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_c}}{{r_1}^3}\overrightarrow{r_1}$$

が得られます。

(3)$-2m\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{v'}$

有名なコリオリの力です。物体が回転系に対して動いている時に現れる力で，落下運動，海水の運動（海流），河水の運動などに現れます。

(4)$-m\dfrac{d\overrightarrow{w}}{dt}\times\overrightarrow{r'}$

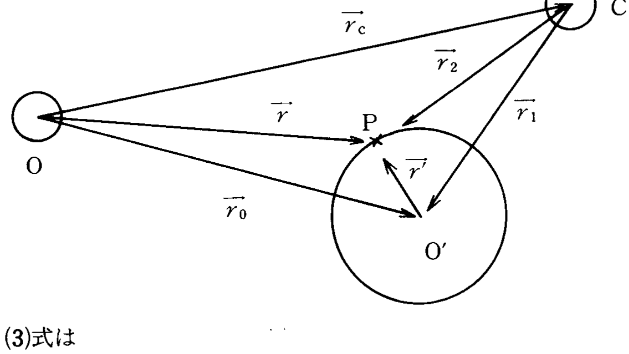
自転のスピードが変わるとか，自転軸の方向が変わるとかの時に現れる力で，地球の場合歳差運動（黄道の極の方向を軸として地軸が23.4度の2倍の角度を頂角とする円錐面上を動く）が観測されていますから，この力が現れることになります。

(5)$mw^2\overrightarrow{R}$

いわゆる（自転による）遠心力で，式に見る如く回転軸からの距離によって大きさが異なることが分ります。

4　地表で静止している物体に加わる力

物体が海水のような地表に静止した物体の場合



(3)式は

$$\mathrm{O}=\overrightarrow{\mathrm{F}}-m\overrightarrow{a_0}-m\frac{d\overrightarrow{w}}{dt}\times\overrightarrow{r'}+mw^2\overrightarrow{R}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

となります。ここで

$\overline{\mathrm{F}}$＝地球からの引力＋太陽からの引力＋月からの引力＋地表からの抗力

$$=-\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M}}{r'^3}\overrightarrow{r'}-\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_S}}{r^3}\overrightarrow{r}-\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_C}}{r_2{}^3}\overrightarrow{r_2}+\overline{\mathrm{N}}$$

（ただし$\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_c}=\overrightarrow{r_2}$）

$$-m\overrightarrow{a_0}=\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_S}}{r_3{}^3}\overrightarrow{r_0}+\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_C}}{r_1{}^3}\overrightarrow{r_1}$$

ですから(4)式は

$$\mathrm{O}=\left(-\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M}}{r'^3}\overrightarrow{r'}+mw^2\overrightarrow{R}\right)+\left(-\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_S}}{r^3}\overrightarrow{r}+\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_S}}{r_0{}^3}\overrightarrow{r_0}\right)$$
$$+\left(-\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_C}}{r_2{}^3}\overrightarrow{r_2}+\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M_C}}{r_1{}^3}\overrightarrow{r_1}\right)-m\frac{d\overrightarrow{w}}{dt}\times\overrightarrow{r'}+\overline{\mathrm{N}}\cdots(5)$$

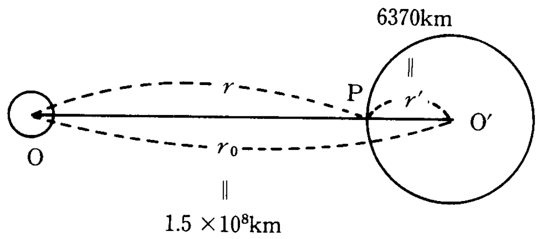
右辺最初の(　)内の量がいわゆる重力であり，第２の(　)が太陽からの潮汐力，第３の(　)が月からの潮汐力です。

ここで(5)式に現れたいろいろの力の大きさを比較してみます。

(1)重力

重力の大きさは，よく知られているように$m\times9.8[\mathrm{m/s^2}]$の程度です。

(2)太陽からの潮汐力



$$m\times\frac{\mathrm{GM_S}}{(r_0-r')^2}-m\times\frac{\mathrm{GM_S}}{r_0{}^2}$$

$$=m\times\frac{\mathrm{GM_S}}{r_0{}^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{r'}{r_0}\right)^2}-1\right]$$

$$\fallingdotseq m\times\frac{\mathrm{GM_S}}{r_0{}^2}\left[\frac{1}{1-\frac{2r'}{r_0}}-1\right]\fallingdotseq m\times\frac{\mathrm{GM_S}}{r_0{}^2}\left(1+\frac{2r'}{r_0}-1\right)=$$

$$=m\times\frac{\mathrm{GM_S}}{r_0{}^2}\times\frac{2r'}{r_0}=m\times r_0\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)^2\times\frac{2r'}{r_0}=m\times\frac{8\pi^2r'}{\mathrm{T}^2}$$

（Tは地球の公転周期）

$$=m\times\frac{8\pi^2\times6370\times10^3}{(365\times24\times3600)^2}[\mathrm{m/s^2}]=\mathrm{m}\times5\times10^{-7}[\mathrm{m/s^2}]$$

この程度の大きさになります。

(3)月からの潮汐力

太陽の場合と同様な計算をして

$$m\times\frac{\mathrm{GM_C}}{(r_1-r')^2}-m\times\frac{\mathrm{GM_C}}{r_1{}^2}\fallingdotseq m\times\frac{\mathrm{GM_C}}{r_1{}^2}\times\frac{2r'}{r_1}$$

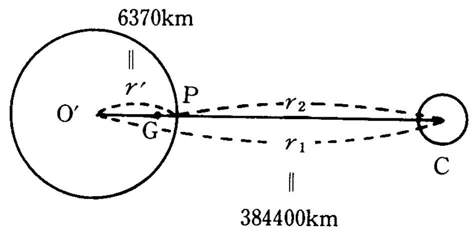
地球は月との共通重心G（O′G : GC＝1.00 : 81.31）の周りを27.32日程度で回転しているのですから，上の式の値は

$$m\times\frac{r_1}{82.31}\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)^2\times\frac{2r'}{r_1}=m\times\frac{8\pi^2r'}{82.31\mathrm{T}^2}=$$

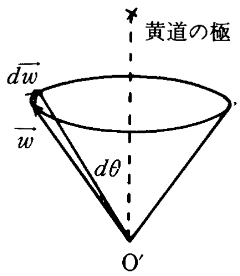
$$=m\times\frac{8\pi^2\times6370\times10^3}{82\times(27\times24\times3600)^2}[\mathrm{m/s^2}]$$

$$=m\times1\times10^{-6}[\mathrm{m/s^2}]$$

この程度の大きさになります。



(4)歳差運動に基く力



地軸は26000年程の周期で黄道の極の周りに回転するというのですから，θを地軸の回転角として

$\dfrac{dw}{dt}=w\dfrac{d\theta}{dt}$から

$$m\times\frac{2\pi}{24\times3600}\times\frac{2\pi}{26000\times365\times24\times3600}\times6370\times10^3=$$

$$=m\times3.5\times10^{-9}[\mathrm{m/s^2}]$$

この程度の大きさで，大変小さいことが分ります。

(5)抗力

(2)，(3)，(4)の検討から抗力の大きさは，重力の大きさに匹敵することが分ります。

5　自由落下する物体に加わる力

このときは(3)式で

$\overline{\mathrm{F}}$＝地球からの引力＋太陽からの引力＋月からの引力＋空気からの抗力

ですから，(3)式は

$m\overrightarrow{a'}$＝地球からの重力＋太陽からの潮汐力＋月からの潮汐力＋コリオリの力＋歳差運動に基く力＋空

気からの抗力

となります。コリオリの力の大きさは，$v'=100$[m/s]の場合

$$2m\times\frac{2\pi}{24\times3600}\times100[\mathrm{m/s^2}]=m\times3\times10^{-2}[\mathrm{m/s^2}]$$

の程度となり無視できない大きさとなります。

6 静止衛星に加わる力

静止衛星の高さ（地表36000km）では空気の抵抗は大変に小さいでしょうから，

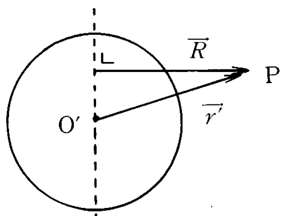
太陽からの潮汐力＝月からの潮汐力＝歳差運動に基く力＝空気からの抗力≒0

とおいて，(3)式より

$$\mathrm{O}=\text{地球からの重力}=-\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M}}{r'^3}\overrightarrow{r'}+mw^2\overrightarrow{R}$$

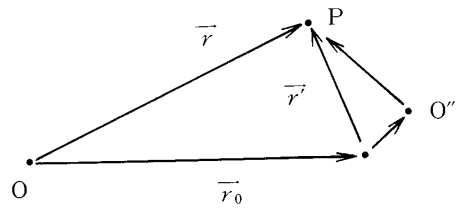
となります（コリオリの力はOです）。

この式が成立つのは$\overrightarrow{r'}=\overrightarrow{R}$のときしかありませんが，これは衛星が赤道上にあること（赤道上でないと実現しないこと）を示し，実際の衛星軌道をよく説明しています。



7 地球に固定した座標軸の設定の仕方について

先には地球に固定した座標軸を設定するとき，地球の中心を原点に取りました。しかし実際に地表で地表付近の物体の運動を調べるときには，原点を地表に取った方が都合がよいのは明きらかです。地表に原点を取っても地表に座標軸を固定する場合は，計算は省きますが，この新しい座標系から物体を見たときの速度，加速度は，先の地球の中心を原点とした時の速度，加速度と一致します。



(3)式は次のようになります。

$$m\overrightarrow{a''}=\overrightarrow{\mathrm{F}}-m\overrightarrow{a_0}-2m\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{v''}-m\frac{d\overrightarrow{w}}{dt}\times\overrightarrow{r'}+mw^2\overrightarrow{R}$$

O″は地表に取った原点，$\overrightarrow{v''}$は物体PのO″系に対する速度，$\overrightarrow{a''}$はPのO″系に対する加速度です。

8 おわりに

以上あまり具体的ではありませんでしたが，地球に固定した座標系から物体の運動を見たときに現れるいろいろな力について書きました。先に地学で扱う力学は，概ね物体が地表付近にある場合であるように書きましたが，実はそうではなくて遥か宇宙の彼方の問題までも地学担当者の守備すべき範囲とされています。最近は小学生までが「ブラックホールの中はどうなっているの」などと尋ねてきます。この問題について書かれた雑誌記事を読んでもちんぷんかんぷん。先の小学生の質問にも「さーてね」としか言いようがありません。しかしそれでは通らない時が直きに来そうです。ブラックホールの問題は一般相対論で扱う力学なのでしょうが，理解の困難なことはコリオリの力や潮汐力の比ではないでしょう。しかし簡単なところから頭の訓練をして，小学生の問いに分りやすく答えてゆけるようにしたいものだと考えています。