［Ⅱ］マイコンでデータ解析を行う力学台車の実験
——運動の第２法則をどこまで定量的におさえられるか——

松　井　一　幸

はじめに

ニュートンの運動の法則の理解は，物理にとって非常に大切なことである。この内容は，新教育課程では理科Ⅰ物理分野で取り扱われている。この法則の因果律を含めた物体の運動の様式に関する本質的理解は，高１レベルでは相当難しいと思われる。

著者は運動の法則に親しませるため力学台車を用いる実験を物理Ⅰの時以来ずっと継続させてきた。昨年度初めて理科Ⅰで実施したが，どこまで定量的に把握できるかということと，高１生が理解できるレベルで指導することを念頭において取り組んだ。

最近では一昔前と違って，実験に使用する市販の道具は，かなり工夫され，使い易いものになっている。実験の定量的理解も充分に可能になってきた。

力学台車の実験において，測定精度をあげる大きな役割を果たすものはタイマーの精巧さである。昔のカーボン紙による打点と違って，現在の放電タイマーは，動摩擦力を小さくし，運動物体への影響を極力小さくした上で，時間もかなり正確に計測できるようにした立派なものである。

測定データの解析も，マイコンの出現で容易に出来るようになった。加速度の算出が瞬時のうちに出来るようになると，授業での定量的指導が容易に行えるようになる。

このように，最新の道具を駆使し，台車実験の定量的指導を試みたので報告したい。生徒に対する教育効果は非常に満足すべきものであった。

１．実験の方法

図１に示す要領で実験を行った。用いた放電タイマーは，ヤガミＤＲ－６である。台車を引っ張る時はゴムひもを自然長71cmから９cm伸ばす状態で，同じ伸びになるようにして注意深く引っぱった。この時のゴムの本数と引く力の関係は図２のようになり，比例することを確かめた。ゴムひも１本当たりの引く力は49 gwである。

力学台車の後部に紙テープを固定し，打点した10打点毎の長さを分析することにより加速度を算出する。加速度が台車を引く力や台車の質量にどう関係するかを定量的に調べる。引く力はゴムひもの本数を変化させ，台車の質量は１冊１kg程度の本を数冊まで乗せることで変化させた。具体的には月刊雑誌トランジスタ技術を用いた。

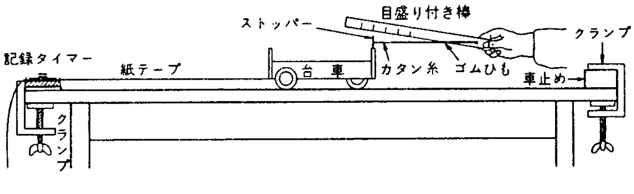


図１　力学台車の実験

２　データ解析，加速度計算の方法

いろいろな条件の下で得たデータを表１に示す。これらのデータから台車の加速度を計算するのであるが手順を述べよう。

(1) 記録タイマーによりテープに打点されたデータを10打点ずつ区切り始点からの長さを1/6 秒毎に測定する。この時の時間，位置を次のように書く。

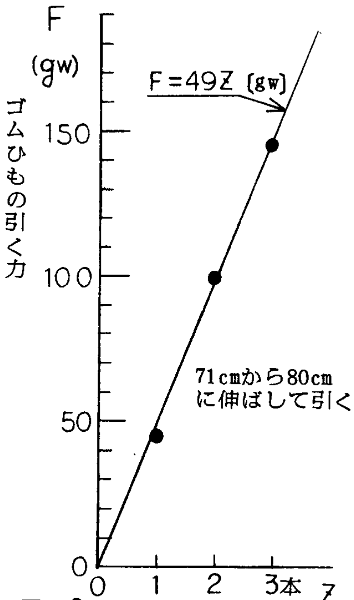
時間　$t_0, t_1, t_2, \cdots\cdots, t_i, \cdots\cdots, t_N$

位置　$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_i, \cdots\cdots, x_N$

データー解析　　表－1

データ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
台車の質量	台車のみ	台車のみ	台車のみ	台車のみ	台車のみ	台車＋１冊	台車＋２冊	台車＋３冊	台車＋４冊	台車＋５冊
質量	1.12kg	1.12	1.12	1.12	1.12	2.34	3.61	4.74	5.84	7.08
ゴム本数	１本	2	3	4	5	3	3	3	3	3
引く条件	自然長を71cmとし、80cmに伸ばした状態で引き続ける									
時間(s) 10打点毎	10打点毎の始点からのテープの長さ (mm)									
0s	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm
$\frac{1}{6}$	15	20.5	32.5	28.5	47.5	16	32	11	10	6.5
$\frac{2}{6}$	34.5	61.5	97	93	103.8	48	63.5	29	26	17
$\frac{3}{6}$	59	122	194	196	279	91.5	104	55	48	31.5
$\frac{4}{6}$	87.5	202	323	335	478.5	162	154.5	88	76	50
$\frac{5}{6}$	122.5	304	483.5	520	728	242	215	127	109	72
$\frac{6}{6}$	165	426.5	682	748.5	1040	340	248.5	173.5	148	98.5
$\frac{7}{6}$	214	571	925	1024.5	—	453.5	362.5	226	192	129
$\frac{8}{6}$	270	737.5	—	—	—	582	444	285	241.5	163
$\frac{9}{6}$	334	928	—	—	—	726.5	544.5	350	296	200
$\frac{10}{6}$	403	—	—	—	—	894	643	420	355	240
マイコン加速度	0.24 m/s^2	0.76	1.24	1.48	1.98	0.59	0.32	0.23	0.17	0.11

(2) このデータより時刻T_{i+1}における平均の早さV_{i+1}を次式により算出する。



図－2

$$T_{i+1}=\frac{t_i+t_{i+1}}{2}$$

$$V_{i+1}=\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}$$

従って速さについてのデータを得る。

時間　$T_1, T_2, T_3, \cdots\cdots, T_i, \cdots\cdots, T_N$

速さ　$V_1, V_2, V_3, \cdots\cdots, V_i, \cdots\cdots, V_N$

(3) 速さV_iのデータを時間T_iについてプロットすると実験条件の下では図3のような直線的に増加するグラフになる。（等加速度直線運動）

(4) データによく一致する直線を$V=V_0+at$とし，V_0及びaを最小自乗法で決定する。

［最小自乗法の説明］

図3におけるデータ（T_i，V_i）と直線$V=V_0+at$の最短距離h_iは次式で与えられる。

$$h_i=\frac{|V_i-aT_i-V_0|}{\sqrt{1+a^2}}$$

h_i の全てのデータにわたる自乗和をHとすると

$$H=\sum_i h_i^2=\frac{1}{1+a^2}\sum_i(V_i-aT_i-V_0)^2$$

となる。右辺の$D=\sum_i(V_i-aT_i-V_0)^2$を最小にするようにa，V_0を決めよう。極値の条件より

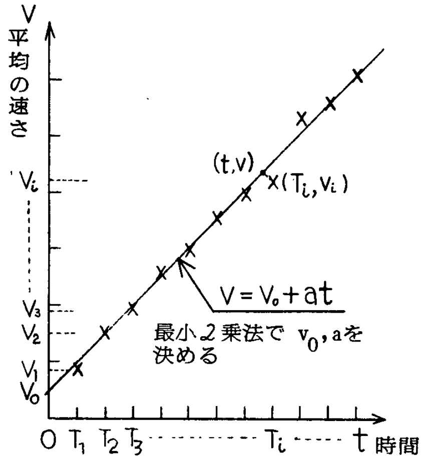
$$\frac{\partial D}{\partial a}=2\sum_i(aT_i^2+V_0T_i-V_iT_i)=0 \quad ①$$

$$\frac{\partial D}{\partial V_0}=2\sum_i(aT_i+V_0-V_i)=0 \quad ②$$

ここで$\langle T\rangle=\frac{\sum_i T_i}{N}$，$\langle T^2\rangle=\frac{\sum_i T_i^2}{N}$，$\langle V\rangle=\frac{\sum_i V_i}{N}$，$\langle VT\rangle=\frac{\sum_i V_iT_i}{N}$

とおく。NはV_i，T_iのデータの数である。①，②より加速度a，初速度V_0に対して次式を得る。

$$a=\frac{\langle VT\rangle-\langle V\rangle\langle T\rangle}{\langle T^2\rangle-\langle T\rangle^2} \qquad V_0=\frac{\langle V\rangle\langle T^2\rangle-\langle VT\rangle\langle T\rangle}{\langle T^2\rangle-\langle T\rangle^2} \quad ③$$



図－3

(5) 位置 $x_0, x_1, \cdots\cdots, x_N$,　をインプットするだけで③式に基づいて加速度aを算出する。

このプログラムを図4に示す。図5には表1におけるデータ3の実行例を示す。各加速度の結果は表1の最後に示してある。

図－4　　最小自乗法による加速度計算プログラム

```
10 REM ************************
20 REM *                      *
30 REM *     a NO KEISAN      *
35 REM *                      *
40 REM * (1984.7.11 K.MATSUI) *
45 REM *                      *
50 REM ************************
60 REM
70 DIM X$(100),X(100),V(100),T(100)
75 INPUT "Condition";A$:PRINT/P A$
80 PRINT N;" ";
90 INPUT "DATA X(mm)=";X$(N)
100 IF X$(N)="-" THEN N=N-1:GOTO 140
110 X(N)=VAL(X$(N))
120 N=N+1
130 GOTO 80
140 PRINT "Number  Time(sec) Place(mm)
145 PRINT/P "Number  Time(sec) Place(mm)
150 FOR Z=0 TO N
160 PRINT TAB(2);Z;TAB(8);Z;"*(1/6)";TAB(20);X(Z)
165 PRINT/P TAB(2);Z;TAB(8);Z;"*(1/6)";TAB(20);X(Z)
170 NEXT Z
175 PRINT
180 PRINT "Number  Time(sec) SPEED(m/s)
182 PRINT/P
185 PRINT/P "Number  Time(sec)      SPEED(m/s)
190 FOR Z=1 TO N
200 V(Z)=(X(Z)-X(Z-1))*6/1000
210 PRINT TAB(2);Z;TAB(8);Z-0.5;"*(1/6)";TAB(20);V(Z)
215 PRINT/P TAB(2);Z;TAB(8);Z-0.5;"*(1/6)";TAB(24);V(Z)
216 T(Z)=(Z-0.5)/6
220 NEXT Z
230 FOR Z=1 TO N
240 T1=T1+T(Z)
250 T2=T2+T(Z)*T(Z)
260 V1=V1+V(Z)
270 TV=TV+T(Z)*V(Z)
280 NEXT Z
290 A=(N*TV-T1*V1)/(N*T2-T1*T1)
295 PRINT:PRINT/P
300 PRINT "DATA No= ";N,"a=";A;"m/s2"
310 PRINT/P "DATA No= ";N,"a=";A;"m/s2"
```

実行例　　　　図−5

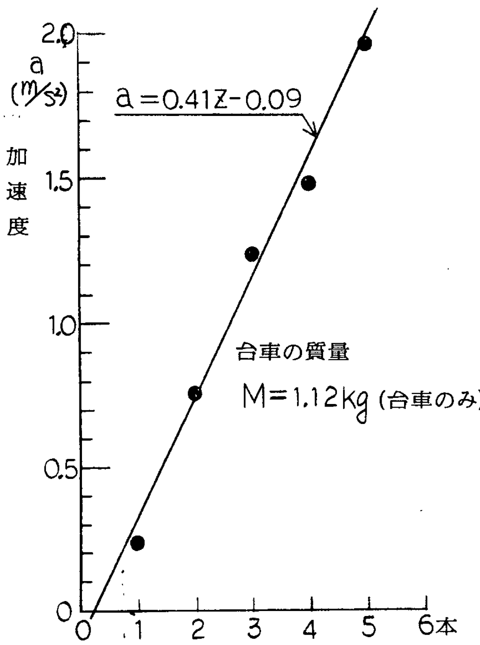
```
1.12kg GOMU 3 71cm-80cm
Number    Time(sec)  Place(mm)
  0        0*(1/6)    0
  1        1*(1/6)    32.5
  2        2*(1/6)    97
  3        3*(1/6)    194
  4        4*(1/6)    323
  5        5*(1/6)    483.5
  6        6*(1/6)    682
  7        7*(1/6)    925

Number    Time(sec)        SPEED(m/s)
  1        0.5*(1/6)         0.195
  2        1.5*(1/6)         0.387
  3        2.5*(1/6)         0.582
  4        3.5*(1/6)         0.774
  5        4.5*(1/6)         0.963
  6        5.5*(1/6)         1.191
  7        6.5*(1/6)         1.458

DATA No=  7            a= 1.2381429m/s2
```

3　実験結果

(1) 台車の加速度の引く力依存性……質量一定の場合

図6には2で得られた加速度のゴムひもの本数依存性を示してある。ゴムひもの本数とともに加速度が直線的に増加する結果を得た。直線は原点を通らず，ゴムひもの本数にして0.2 本のところを通過している。図6の実験式は，

$$a = 0.41z - 0.09\,[m/s^2] \qquad ④$$



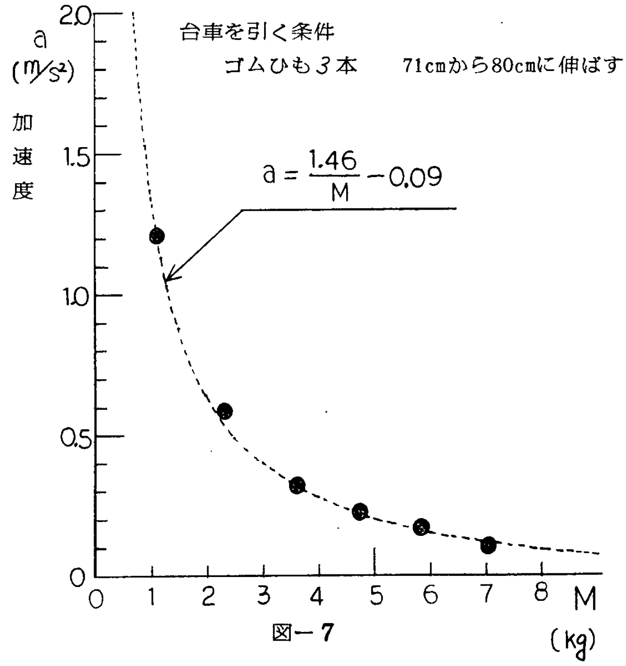
図−6

と書ける。ここにZはゴムひもの本数である。

(2) 台車の加速度の質量依存性……引く力一定の場合

図7に引く力が一定（ゴムひも3本）の場合の，加速度の質量（台車十本）依存性を示す。質量が大きくなる程加速度は小さくなるが，このグラフからは加速度が質量に反比例するかどうかは結論しにくい。図中に点線で実験式を示すと

$$a = \frac{1.46}{M} - 0.09\,[m/s^2] \qquad ⑤$$



図−7

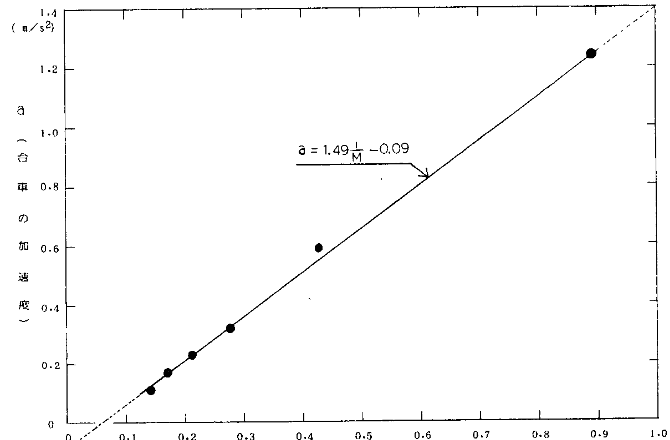
が比較的よい一致を示す。

加速度が質量にどのように依存するかを分かり易く示すには，図8に示すように，横軸を質量の逆数にとるとよい。この実験式はほぼ直線になり，

$$a = \frac{1.49}{M} - 0.09\,[m/s^2] \qquad ⑥$$

で与えられる。⑤式と係数が少し異なるが⑥式の方が実験式としては適当であるといえる。

この場合も加速度は質量に反比例せず第2項が現れる。



図−8

4　実験結果の考察

性能のよい記録タイマーを用い，マイコンでデータ解析を詳しく行った結果，台車の加速度のゴムひもで引く力依存性としては④式を，台車の質量依存性としては⑥式を得た。いずれも引く力や質量にそれぞれ比例，反比例という結果は得られなかった。ニュートンの運動の第２法則は間違っているのであろうか。実験や解析を精密にやり過ぎた為に出て来た誤差なのであろうか。

昨年度の理科Ⅰにおいてこの問題を生徒に提起してみたが，生徒自身からはなかなか正確な解答は得られなかった。

④，⑥式ともに第２項は$-0.09\,m/s^2$となり一致している。この一致は偶然なのであろうか。必然か。また負の加速度を生じさせる原因は何なのだろうか。④式で，Z＜0.22本とすると加速度は負になる。また，⑥式においてM＞16.6kgとする時も加速度は負になる。これは何を意味するのであろう。

台車の加速度は負になることはありえない。負とは引く方向と反対に加速することを意味するからである。引く力を弱くしたり質量を大きくしたりすると加速度が０になることの意味は何か。

答は摩擦力の存在である。ニュートンの第２法則で宣言されている「力に比例する」力とは外力の総和を意味する。従って引く力ではないのである。

高１生対象の理科Ⅰで，加速度が外力の総和に比例するということの真の意味を理解させることは非常に難しいことであるが，これまで述べてきたような方法で問題提起し，考えさせるのも一法であろう。

摩擦力の定量的な内容を教えていない段階で力学台車の実験が行われるのが常であるが，ここで示したように，逆の順序で教えるのも価値のある教授法であろう。

さて，摩擦力や運動方程式について完全に理解できている立場から，④式，⑥式の意味について考察してみよう。ゴムひもの引く力をF，動摩擦力を$f=\mu' Mg$とする。ここに，μ'は動摩擦係数，Mは台車の質量，gは重力加速度である。この時，台車の運動方程式は，

$$Ma = F - f = F - \mu' Mg$$

となる。これをaについて解くと，

$$a = \frac{F}{M} - \mu' g \qquad ⑦$$

を得る。

④，⑥式の第２項が共に$-0.09\,m/s^2$であるのは偶然の一致や誤差によるものではなく，$-\mu' g$　という物理的意味を持っていたのである。これより力学台車と床の動摩擦係数μ'の値を評価すると，

$$\mu' = 0.009$$

となる。（$g = 9.8\ m/s^2$ であるから）

一方図２より，$F=49\,gw$／本×Ｚ。ここで$1gw = 9.8\times10^{-3}$Ｎであることを用いると，F＝0.48N／本×Ｚとなる。従って⑦式は

$$a = \frac{0.48}{M}\,Z - 0.09\,[m/s^2] \qquad ⑧$$

となる。M＝1.12kgの時⑧は，$a = 0.43\,Z - 0.09\,[m/s^2]$となり，Ｚ＝３の時は，$a = 1.44\,\frac{1}{M} - 0.09\,[m/s^2]$となり，ほぼ５％の誤差の範囲で④式，⑥式に一致する。

以上のように動摩擦力を考察し，運動方程式を解くことにより，全てのデータがコンシステントに説明できることが分かった。

5　ニュートンの運動の法則の持つ意味

実験結果を考察するところで，外力の総和の考え方の重要性を強調したが，運動の法則を指導する際には教師がしっかりと認識しておくべきことが他にもある。それは運動の法則それ自体が因果律を表すということである。単に加速度は外力の総和に比例し，質量に反比例するという指導だけでは不充分である。正しくは，「物体にはたらく外力の総和が０でなければ，そのことが原因で，物体には，外力の総和に比例し，質量に反比例する加速度が結果として生じる。」と伝えなければ正確でないであろう。その結果，運動方程式を立てる際には，外力としては，その物体にはたらく力の総和を考えればよいという簡単な指導原理が成り立つのである。

筆者は，運動方程式の使い方の指導においては，質量×加速度（結果）を常に左辺に，外力の総和（原因）を常に右辺に書けと注意している。電磁気におけるマックスウェルの方程式も同じように表記されるからである。因果関係（運動の仕方）に対する理解が深まると運動方程式の立て方は，筆者の経験においては，急速に上達するようである。

最初に述べたように運動の法則に対する理解，親しみは物理学全体にとって非常に大切なことである。少しでも親しみが増すようにと努力した本報告が読者の方々の参考になればこの上ない喜びである。