高校数学の教材配列の多様性に対する各教科書の対処の仕方について

高　須　照　夫

＜要旨＞新指導要領が発表され教科書がまだ発行されていない1980年の時点で，「高校数学の新指導要領にみられる教材配列の多様性にかかわって考えられる基本事項の証明方法等について」という文を紀要第２５集に書いたことに続いて，多くの教科書が出そろった今，各教科書に，当時問題にした点がどのように扱ってあるかを調べてみた。その結果を整理してみたいと思う。

［１］ $y = x^n$（n：自然数）の導関数［基礎解析］

（二項定理は「確率・統計」を履修する以前には使えない。「基礎解析」では積の微分を扱わないので数学的帰納法が使えない。）

(1)　n＝1,2,3,4 の場合を問または例で示したのみ。
　三省，数研（新），池田

(2)　本文ではn＝1,2,3,4 の場合を示し，発展学習の形で一般に証明をしている。
　啓林，学研，学図，第一

(3)　本文で一般の証明がしてある。
　帝国，教出，数研

(4)　問題として証明をさせるようにしている。
　旺文

［証明方法］

<1> $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}$ を示し，それを用いる。

(ｱ)　初項 a^{n-1}，公比 $\dfrac{b}{a}$ の等比数列の和として。
　帝国，第一，教出，数研，旺文

(ｲ) $S_n=a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}$ とおき
　$aS_n-bS_n=a^n-b^n$ から求める。
　学図

(ｳ) $a-b\overline{)a^n \qquad -b^n}$ として割算をする。
　学研

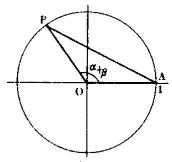
<2>　$(a+b)^n=a^n+C_1a^{n-1}b+C_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdot$
　とおくとき，$C_1=n$ であることを数学的帰納法で証明し，それを用いる。
　啓林

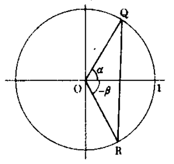
［２］三角関数加法定理の証明［基礎解析］

（前指導要領のもとでは行列のところで回転の合成として副産物的に扱うのが普通であったが，「代数・幾何」に先だって「基礎解析」に入る場合を考慮して，行列が高校数学にとり入れられる以前のような数多くの証明が見られた。）

［証明方法］

<1>　単位円を用いる。

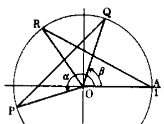




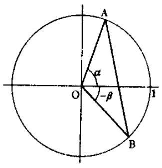
(ｱ)　右の図でA(1,0)，
$P(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$，
$Q(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$R(\cos\beta,\ -\sin\beta)$
として，$AP^2=QR^2$ より
$\{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)$
$=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$

$=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$

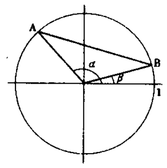
よって
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
　啓林，学研



(ｲ)　右の図で $A(1,0)$, $P(\cos\alpha,\ \sin\beta)$
$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$, $R(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta))$
として $AR^2=PQ^2$ より
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
を導く。
　教出，学図，池田，数研

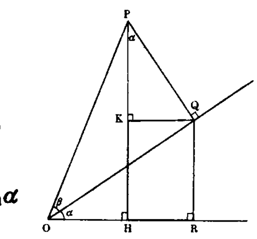


(ｳ)　右の図で $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $B(\cos\beta,\ -\sin\beta)$
とすると
$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$
一方余弦定理より
$AB^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha+\beta)$
これから $\cos(\alpha+\beta)$ の公式を導く。
　第一



(ｴ)　右の図で $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $B(\cos\beta,\ \sin\beta)$
として，上と同様 AB^2 の値を
２点間の距離の公式と余弦定理で表して　$\cos(\alpha-\beta)$　の公式を導く。
　旺文

<2>　その他の方法



(ｱ)　右の図で，$OP=1$ として
$PH=OP\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$
一方　$PH=PK+KH=PK+QR$
$=PQ\cos\alpha+OQ\sin\alpha$
$=OP\sin\beta\cos\alpha+OP\cos\beta\sin\alpha$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

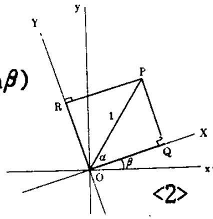
また　OH=OR−HR=OR−KQ

として $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ を導く。

「ここでは，$\alpha,\beta,\alpha+\beta$ がどのような角でも成り立つことを証明したが，α,β がどのような角でも成り立つ」と補足し，証明はしてない。

帝国

(イ)　右図で$P(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$



$Q(OQ\cos\beta, OQ\sin\beta)=(\cos\alpha\cos\beta,\ \cos\alpha\sin\beta)$

$R(OR\cos(\beta+90°),\ OR\sin(\beta+90°))$

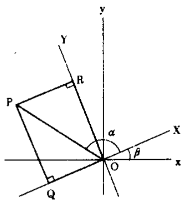
$=(-OR\sin\beta, OR\cos\beta)$

$=(-\sin\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\cos\beta)$

QR の中点と OP の中点は一致するから

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{2}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{2}$$

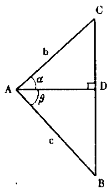
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2}=\frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{2}$$



下図のときにも同様に成り立つので α,β の任意の値で成り立つ

三省

(ウ)　右図で，α, β が鋭角のとき



△ABC=△ADC+△ABD だから

$$\frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}AD.DC+\frac{1}{2}AD.BD$$

$$=\frac{1}{2}c\cos\beta\sin\alpha+\frac{1}{2}b\cos\alpha c\sin\beta$$

これより $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

この公式は α,β が鋭角のときにかぎらず一般に成り立つ。

数研（新）

[3] 回転の行列とその前後 [代数・幾何]

（数学Ⅰでは鈍角の三角比までしかやってないので，基礎解析がやってない場合には一般の回転に先だってここで一般角まで拡張しなければならない。一方従来は加法定理の証明はここに限られていたが，新しい教科書ではどうであろうか。）

○回転の行列を導くに先だって，一般角の三角関数が

(1)　やってある。(60分法で)

数研，啓林，学図，帝国，池田

(2)　やってない。

第一，旺文，学研，教出，東書，三省

○回転の合成として加法定理に

(1)　ふれている。

啓林，学図，帝国，第一，旺文，教出，東書
数研

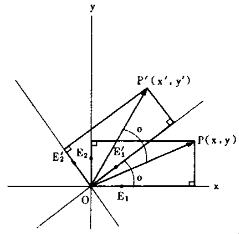
(2)　ふれていない。

学研，池田，三省

[回転の行列の導き方]

<1>　右図で $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OE_1}+y\overrightarrow{OE_2}$

$\overrightarrow{OP'}=x\overrightarrow{OE_1'}+y\overrightarrow{OE_2'}$



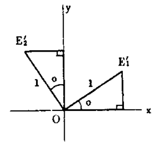
故に

$$\overrightarrow{OE_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OE_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OE_1'}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OE_2'}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



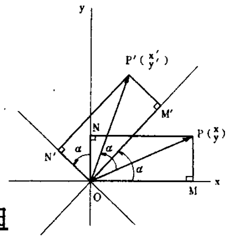
啓林，学図，帝国，第一，旺文，三省

<2>　右図で

$$\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM'}=\begin{pmatrix}x\cos\alpha\\x\sin\alpha\end{pmatrix},\ \overrightarrow{ON'}=\begin{pmatrix}-y\sin\alpha\\y\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{ON'}$$



故に

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\alpha-y\sin\alpha\\x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

学研，教出，数研，東書，池田

[4] 点と直線の距離 [数学Ⅰ]

（この公式はベクトルを用いて証明すると簡潔であるが，そうでないと1年生には難かしい。しかしぜひ必要な公式である。各教科書はどのように扱うのだろうか。）

(1)　全く扱わない

三省（改）

(2)　具体例のみ（垂線の足を求めて）

旺文，旺文（改），第一（新）

(3)　発展学習で一般的証明

池田，啓林，三省

(4)　本文で一般的証明

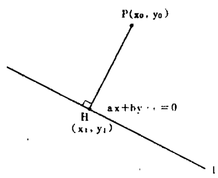
東書，学研，帝国，大日本，教出，数研，
数研（新），第一，学図

[証明方法]

$P(x_0, y_0)$ から $\ell: ax+by+c=0$ への垂線の足を $H(x_1, y_1)$ とする。（$ab\neq0$ のときだけを書く）

<1>　ℓ の傾きが $-\dfrac{a}{b}$ だから

PH の傾きは $\dfrac{b}{a}$



よって $\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{b}{a}$ である。

$\dfrac{x_1-x_0}{a}=\dfrac{y_1-y_0}{b}=k$ とおくと

$x_1=ak+x_0,\ y_1=bk+y_0$ が ℓ 上にあるので

$a(ak+x_0)+b(bk+y_0)+c=0$ より

$$k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b_2}$$

$$PH^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=a^2k^2+b^2k^2=(a^2+b^2)k^2$$

これより

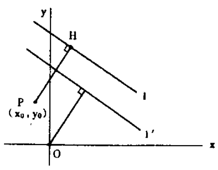
$$PH^2=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

よって $PH^2=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

池田，東書，学研，啓林，数研（新），三省

<2> 原点0からℓへの垂線 $y=\dfrac{b}{a}x$

とℓとの交点は$\left(\dfrac{-ac}{a^2+b^2},\ \dfrac{-bc}{a^2+b^2}\right)$



であるから，0からℓへの距離は $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

次に0から ℓ'：$a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0$ すなわち，$ax+by+ax_0+by_0+c=0$ への距離を求めれば，これがPHに等しい。

教出，第一

<3> $ax_1+by_1+c=0$ すなわち

$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+ax_0+by_0+c=0$ と

$b(x_1-x_0)-a(y_1-y_0)=0$ より

$$x_1-x_0=\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2},$$

$$y_1-y_0=-\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$$

帝国

<4> ℓ：$ax+by+c=0$ と PH：$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$ の交点を求めると

$$x_1=\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2},\ y_1=\frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}$$

これから x_1-x_0，y_1-y_0 を求める。

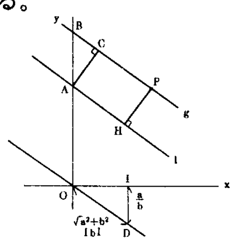
学図

<5> Pを通りlに平行な直線を

g：$y-y_0=-\dfrac{a}{b}(x-x_0)$

とする。ℓ，gがy軸と交わる点を A，B とすると，

$A\left(0,\ -\dfrac{c}{b}\right)$，$B\left(0,\ y_0+\dfrac{a}{b}x_0\right)$



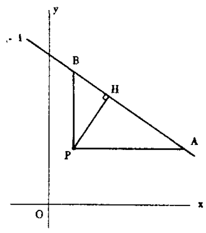
故に $AB=\left|y_0+\dfrac{a}{b}x_0+\dfrac{c}{b}\right|=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}$

Aよりgへの垂線の足をCとすると

$PH=CA=AB\times\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$であることを，0を通り$\ell$に平行な直線 $y=-\dfrac{a}{b}x$ 上のx座標が1である点Dを用いて，三角形の相似から説明

大日本

<6> Pを通り，x軸，y軸に平行な直線がℓとA，Bで交わるとき



$A\left(-\dfrac{c+by_0}{a},\ y_0\right)$，$B\left(x_0,\ -\dfrac{c+ax_0}{b}\right)$

である。よって，

$$PA=\left|x_0+\frac{c+by_0}{a}\right|=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{a}\right|$$

$$PB=\left|y_0+\frac{c+ax_0}{b}\right|=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right|$$

よって

$$AB^2=PA^2+PB^2=(ax_0+by_0+c)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$AB=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}|ax_0+by_0+c|$$

$$PH=\frac{PA\cdot PB}{AB}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

数研

［5］点と直線・点と平面の距離［代数・幾何］

（この公式の証明はベクトルの応用としても興味深いし，きれいにできる。教科書での扱い方は変化に富んでいた。）

(1) 全く扱わない。

学研，大日本

(2) 点と直線の距離を証明し，点と平面の距離は，同様な方法で，というだけで結果を示す。

東書

(3) 点と直線の距離を証明し，点と平面の距離の証明は練習問題としている。

旺文，学図

(4) 点と直線の距離も，点と平面の距離も別々に証明している。

啓林

(5) 原点0と平面との距離を証明し，点と平面の距離の証明は練習問題にまわしている。

池田

(6) 点と平面の距離の証明があり，点と直線の方はなし。

帝国

(7) 原点0と平面の距離の証明のみ。

数研，三省

(8) 点と平面の距離を具体例で示し，一般の公式もこれと同様な方法で導かれる，としてある。

数研（新）

(9) 点と平面の距離を具体例で示し，発展学習の形で点と平面の距離の公式を導く。

第一

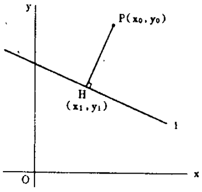
(10) 点と平面の距離の証明をして，点と直線の距離についても成り立つ，としている。

教出

［証明方法］

1．点と直線の距離

点 P(x_0, y_0) から $\ell: ax+by+c=0$ への垂線の足を H(x_1, y_1) とする



<1> $\vec{n}=(a, b)$ は $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(x_1-x_0, y_1-y_0)$ と平行である。したがって，

$|\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$ すなわち，

$|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)|=\sqrt{a^2+b^2}|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$

$$|\mathrm{PH}|=\frac{|ax_1+by_1-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ (ax_1+bx_1=-c)$$

東書，啓林，学図，旺文，数出

2．原点と平面の距離

原点 $O(0,0,0)$ から平面 $\alpha: ax+by+cz+d=0$ への垂線の足をHとする。

<1> $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k(a,b,c)$ で，H(ka,kb,kc) が α 上にあるから $(a^2+b^2+c^2)k+d=0$ より $k=\dfrac{-d}{a^2+b^2+c^2}$

$$\mathrm{OH}^2=k^2a^2+k^2b^2+k^2c^2=k^2(a^2+b^2+c^2)=\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}$$

よって $\mathrm{OH}=\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

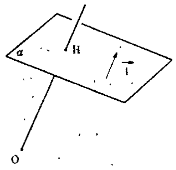
池田

<2> $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}=(\ell,m,n)$

OH$=p$ とすると，$\ell^2+m^2+n^2=1, p>0$ で，

H$(p\ell, pm, pn)$ だから，

Hを通り，OHに垂直な平面の方程式は



$\ell(x-p\ell)+m(y-pm)+n(z-pn)=0$

すなわち

$\ell x+my+nz=p(\ell^2+m^2+n^2)=P$

さて，平面 $\alpha: ax+by+cz=d, (d>0)$ とすると

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

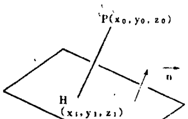
故にOHの長さは $\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

数研，第一（ヘッセの標準形という用語）

三省（平面の高さという用語）

3．点と平面の距離

P(x_0, y_0, z_0)から平面$\alpha: ax+by+cz+d=0$ への垂線の足を H(x_1, y_1, z_1) すると，



<1> $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ と $\vec{n}=(a,b,c)$ が平行だから

$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}||\vec{n}|$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}.\vec{n}=a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)$

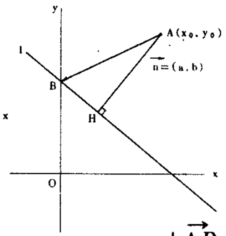
$=ax_1+by_1+cz_1+d-(ax_0+by_0+cz_0+d)$

よって $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

帝国，数出，啓林

（補）$\vec{a}$ の $\vec{b}$ への正射影の長さは $\dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ であることを用いると，次のような方法もある。

◎A(x_0, y_0) から直線 $\ell: ax+by+c=0$ への垂線の足をHとする。と y 軸との交点をBとすると，



B$\left(0, -\dfrac{c}{b}\right)$ だから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(-x_0, -\dfrac{c}{b}-y_0\right)$

ℓ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a, b)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の $\vec{n}$ への正射影の長さAHは

$$\mathrm{AH}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|-ax_1-c-by_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◎A(x_0, y_0, z_0) から平面 $\alpha: ax+by+cz+d=0$ への垂線の足をHとする。α と z 軸との交点をB（α と z 軸が交わらないときは他の座標軸との交点を用いてもよい。）とすると，B$\left(0, -\dfrac{d}{c}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(-x_0, -y_0-\frac{d}{c}-z_0\right)$$

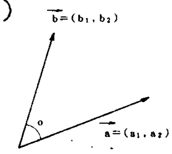
α の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,b,c)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の $\vec{n}$ への正射影の長さ AH は

$$\mathrm{AH}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|-ax_0-by_0-d-cz_0|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

［6］ベクトルの内積の扱い方［代数・幾何］

（これは他の科目の教材との関連でなく，何を定義として何を証明するかの順序に興味がある。）



① $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

② $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

③ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ などの計算方則の取扱い順序

（平面，空間について別々にやってあるが，一つの教科書については，どれも同じ順序である。三省だけは，空間のところでまとめて内積を扱っている。）

(1) ①（定義） ②（余弦定理で証明） ③（成分を用いた計算）の順序

旺文，啓林，池田，東書，帝国，数研（新），第一

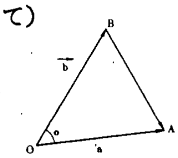
(2) ①（定義） ③（図形で証明） ②（基本ベクトルを用いた計算）の順序

学研，数出

(3) ②（定義） ③（成分を用いた計算） ①（一致することを示す。）

学図，三省

［証明方法］（平面ベクトルの場合について）



<1> ①→②

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(b_1, b_2)$

$\mathrm{BA}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$

$-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

故に $2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2$

$=2a_1b_1+2a_2b_2$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

<2>　②→③（分配法則のみを示す）

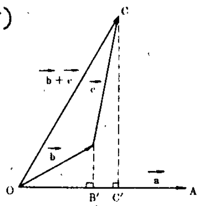
$\vec{c}=(c_1,c_2)$ として，$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,b_2+c_2)$ だから

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)$

$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$

$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

<3>　①→③（分配法則のみを示す）



$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}'$

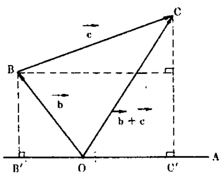
$\vec{a}\cdot\vec{c}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{B'C'}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}'$

ところが符号も考えに入れて

$\mathrm{OC}'=\mathrm{OB}'+\mathrm{B'C'}$

であるから



$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}'$

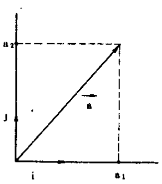
$=\mathrm{OA}\cdot(\mathrm{OB}'+\mathrm{B'C'})$

$=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}'+\mathrm{OA}\cdot\mathrm{B'C'}$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

（教出は上の図だけ，学研は下の図もあった。空間ベクトルの内積については，学研は問の形で分配法則などの証明をのせ，教出は平面のときと同様に成り立つとしてあったけれど，分配法則の証明を図形ですることは空間図形の場合には平面の場合とちがって，３つのベクトルが同一平面上にないので，大へんやりにくい。教出の「平面のときと同様に成り立つ」というのは法則が同様に成り立つというのであって同じような証明ができるというのではなさそうである。）

<4>　③→②



$\vec{i}=(1,0),\vec{j}=(0,1)$ とする

$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j},\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$

とおくと分配法則などが成り立つので

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})$

$=(a_1\vec{i})\cdot(b_1\vec{i})+(a_1\vec{i})\cdot(b_2\vec{j})$

$+(a_2\vec{j})\cdot(b_1\vec{i})+(a_2\vec{j})\cdot(b_2\vec{j})$

$=a_1b_1\vec{i}\cdot\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\cdot\vec{j}+a_2b_1\vec{j}\cdot\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\cdot\vec{j}$

$=a_1b_1+a_2b_2$

<5>　②，③→①

(ｱ)まず，$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2=a_1^2+a_2^2=|\vec{a}|^2$

よって

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}$

$-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

一方余弦定理により

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

<u>学図</u>

(ｲ)　$\vec{a}\perp\vec{b} \rightleftarrows |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$

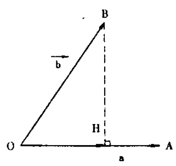
$\rightleftarrows a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2=(a_1-b_1)^2$

$+(a_2-b_2)^2$

$\rightleftarrows a_1b_1+a_2b_2=\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

（垂直条件）

次に右図で



$\vec{a}\perp\vec{\mathrm{HB}}$ より $\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{HB}}=0$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{\mathrm{OH}})=0$

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{OH}}$

$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}$　，$\vec{\mathrm{OH}}=|\vec{b}|\cos\theta\vec{e}$

（$\vec{e}$ は $\vec{a}$ 方向の単位ベクトル）

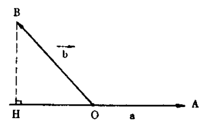
とかけるので

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{OH}}=(|\vec{a}|\vec{e})\cdot(|\vec{b}|\cos\theta\vec{e})$

$=|\vec{a}||\vec{b}|$

$\times\cos\theta(\vec{e}\cdot\vec{e})$

$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



<u>三省</u>

以上，予想したように，問題の箇所については各教科書とも，かなりの工夫や配慮がなされていることがよくわかった。大して役に立つことでもないが，折角調査したので，メモとして残しておくことにした。