数学科

教材研究へのコンピュータの利用
ー気軽に使える数式処理・UBASICー

福谷　　敏

【抄録】１つの数学の問題にもその裏には数学の世界が広がっていることがある。普段は時間がなくて素通りしてしまうところである。今や、コンピュータの助けを借りると本質的に「数学をする」ことが人間の仕事とできる。長時間かかるようなシュミレーションや計算量の多い式変形などはコンピュータに任せることも気軽にできる。

【キーワード】教材研究、シュミレーション、数式処理、手軽、プログラム、UBASIC

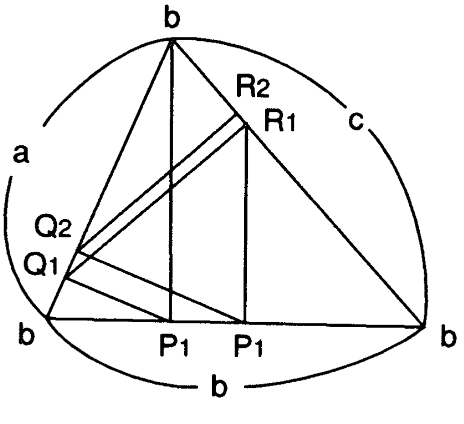
１．はじめに

実質10行程度のプログラムでシミュレーションができる。問題を数式に乗せれば、数式処理ソフトが計算を手伝ってくれる。コンピュータのおかげで、問題の面白さ不思議さを実感し追求することが、手軽にできる時代が来た。

こんな「教材研究の楽しみ」の実況をレポートする。1994年度豊橋技術科学大学の入試問題の改題を扱った。これは、1994年度愛知県大学入試懇談会のために用意したプログラムが、端緒であたった。実際、シミュレーションを見てみると、次々に疑問が湧いてくる。計算を数式処理ソフトに任せながら、「追求」していく形態の教材研究が体験できた。

木田先生の作られた多倍長精度 BASIC「UBASIC」と電卓感覚で使える数式処理ソフト「DERIVE（SEC 出版)」を用いている。

２．問題について



問題$\frac{\pi}{2}$

図のような三辺の長さ a、b、c の三角形 ABC において、頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を P_1 とする。P_1 から辺 AB に下した垂線の足を Q_1, Q_1 から辺 CA への垂線の足を R_1, R_1 から辺 BC への垂線の足を P_2 とする。このような操作を操り返すと、辺 BC 上に点 P_1, P_2, …, Pn…が定まる。$\overrightarrow{BPn}=x_n\overrightarrow{BC}$ とするとき、数列 $\{x_n\}$ について次の問に答えよ。

（１）数列 $\{x_n\}$ は収束するか否か答えよ。

（２）$\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

以下の説明のために、点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ などと表すこととする。

元の入試問題では、正三角形のみを対象にしていた。

３．10行プログラムを作る

問題の感じをつかむために、短い UBASIC のプログラムをつくる。

仕様

底辺の２頂を（－１、０)、（１、０）とする三角形を表示し、もう１点の頂点（x、y）（$-1.5<x<1.5$、$0<y<2$）を入力する。例えば、正三角形のときは、０、$\sqrt{3}$ と入力する。あとは問題の順に垂線を下ごしていく操作を図形上で表示する。また、その値を順次左端の方に表示する。

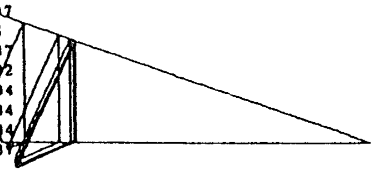
工夫

アイデアは、DERIVE で、あらかじめ、正射影の足を求める公式を作っておいたのを利用したことである（140行、150行目)。原理は簡単だが、人間技では大変である。

UBASICによるプログラム

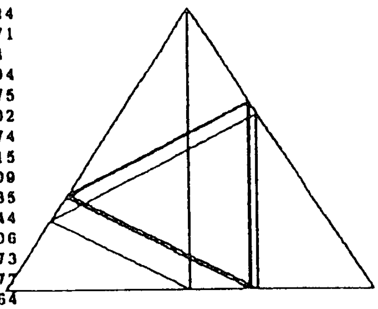
```
20  cls 3:Sp=-0.5:Ep=2.5
30  view (100,16)-(499,399),1
    :window (Sp,Sp)-(Ep,Ep)
40  dim X(3),Y(3)
50  input "x,y (-1.5<x<1.5, 0<y<2)"
    :Xx,Yy
60  X(0)=0:Y(0)=2:X(1)=2:Y(1)=2
    :X(2)=1+Xx:Y(2)=2-Yy
70  line (X(0),Y(0))-(X(1),Y(1)),7
80  line (X(1),Y(1))-(X(2),Y(2)),7
90  line (X(2),Y(2))-(X(0),Y(0)),7
100 S=X(2):T=Y(2):pset (S,T)
110 for I=0 to 45:for COUNT=0 to 50000
    :next COUNT
120 Hen1=(-I+2)@3:Hen2=(-I+1)@3
130 W=X(Hen1):Z=Y(Hen1)
    :U=X(Hen2):V=Y(Hen2)
140 X=(U*Z^2-Z*(T*(U-W)+V*(U+W))
     +S*(U-W)^2+V*(T*(U-W)+V*W))
     /(Z^2-2*V*Z+U^2-2*U*W+V^2+W^2)
150 Y=(T*Z^2-Z*(S*(U-W)+2*T*V-U*(U-W))
     +V*(S*(U-W)+T*V-W*(U-W)))
     /(Z^2-2*V*Z+U^2-2*U*W+V^2+W^2)
160 line (S,T)-(X,Y),(I@4+3)
170 if I@3=0 then print X/2
180 S=X:T=Y
190 next I
200 end
```

```
x,y (-1.5<x<1.5, 0<y<2)? -1.5,1
-0.25
 0.0603448275862068965
 0.1566587395957193816
 0.1865492640124846356
 0.1958256336590407489
 0.1987045089976333358
 0.19995979504475413 8
 0.1999752260009611179
 0.1999612770347810365
 0.199987982528035494
 0 1999962704307351532
 0.1999988425502626337
 0.1999996407914608173
 0.1999998885214878307
 0.1999999654032220364
 0 1999999892630683887
 0 1999999966678488102
 0.1999999989658841134
 0 1999999996790674834
 0.1999999999004002594
 0.1999999999690897337
OK
```



4．シュミレーションを見る

```
x,y (-1.5<x<1.5, 0<y<2)? 0,SQRT(3)
 0.5
 0.6875
 0.6640625
 0.6669921875
 0.6666259765625
 0.6666717529296874999
 0.6666660308837890624
 0.6666667461395263671
 0.666666650732559204
 0.6666666679084300994
 0.6666666665114462375
 0.6666666666860692202
 0.6666666666642413474
 0.6666666666669698315
 0.6666666666666287709
 0.6666666666666714035
 0.6666666666666660744
 0.6666666666666667406
 0.6666666666666666573
 0.6666666666666666677
 0.6666666666666666664
OK
```



実行結果と触答

正三角形の場合は、画面左の数値で、問題自体の答も予想がつく。一般の場合も収束するらしいことが実感できる。

問題自体は、隣接２項間の漸化式で決まる数列の極限として解ける。

ここで、収束を確認すればよい。対応する隣接２項間の式

$$x_n+_1=\cos A\cos B\cos Cx_n+\cdots$$

を見る。x_n の係数に三つの角の余弦の積 $\cos A\cos B\cos C$ が出てくるので絶対値が１未満となり、明らかに収束する。余弦定理を用いて、cos を三辺の関数と定義し直せば、次も数式処理ですぐ求められる。

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

誤解し易い点

この実例では、垂線達はやがて一つの三角形を繰り返す。これは、コンピュータの有数値による。実際に、数学的にはあくまでも極限の図形であるので、生徒に見せるときは誤解をまねかない注意が要りそうな所である。

新たな疑問

繰り返しの操作をみることができる。一般の三角形でも、収束することが実感できる。さらに垂線の作る図形はある三角形に急速に近づくことがわかる。この垂線たちが作る極限の図形である三角形について検討する。

5．DERIVEで極限三角形を

極限三角形

一般の三角形の頂点から順に垂線を問題のように下ろしていったとき極限としてできる三角形（極限三角形と呼ぶことにする）は、元の三角形の辺（またはその延長線上）に頂点があり、元の三角形と相似であり、元の三角形を90度回転したものになっている。

また、極限三角形について、対応する辺の長さを比較することにより、相似比を求める。余弦定理を用いれば、数式処理 DERIVE で求めることができる。

相似比

極限三角形の相似比は

$$\frac{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}}{a^2+b^2+c^2}$$

となる。

一般化して解く

次に、相似回転の中心を求めたい。

テーマは、「元の三角形 ABC を極限の三角形 A′ B′ C′ にうつす相似回転の中心の位置を調べる」ことである。計算で、行列計算か複素数の計算を利用すると便利である。実際には、相似比と回転角が判っているので、一つの線分に着目すれば強引にやってもできる（授業でやれるならこの方法）。

しかし、「三点の対応を具体的な形で示し」、それで決まる「アフィン変換」の「不動点を求める」という、一般的な問題にして解く、この方法は、明快で分かりやすいが、数式処理がなければやる気が起こらない。

もちろん、平面内の三つのベクトルであるので一次関係があるが、アフィン変換（$f: \vec{x} \to A\vec{x}+\vec{c}$、ただし、$A$ は正則２次正方行列、$\vec{c}$ は定数ベクトル、の形の平面の変換）については、次の都合の良い、線形性に近い性質がある（このことは、計算に気を取られないので、自然に気づいてしまう）。

「アフィン変換fに対して $\alpha+\beta+\gamma=1$ が成り立つなら、つねに、

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z}) = \alpha f(\vec{x})+\beta f(\vec{y})+\gamma f(\vec{z})$$

が成立する」

まず具体的な対応は

$(\vec{a'}, \vec{b'}, \vec{c'}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$$\begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & 0 & \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+b^2-c^2}{a^22+b^2+c^2} & 0 \\ 0 & \frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}$$

不動点の位置ベクトルを

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$　$(\alpha+\beta+\gamma=1)$

とおく。すると、求める $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ は、次の行列

$$\begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & 0 & \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2} & 0 \\ 0 & \frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}$$

の固有値１に関する固有ベクトルで、$\alpha+\beta+\gamma=1$ を満たすものである。

３次正方行列の固有値１に対応する固有ベクトル空間を求めるのは DERIVE ならすぐできる。少しだけ一般化して、DERRIVE を動かす。実行画面は以下の通りである。要約すると、行列 $\begin{pmatrix} 1-s & 0 & u \\ s & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-u \end{pmatrix}$ の固有値１に対する固有ベクトルが６：で与えられる。ただし@１は不定元を表す。

1：　s：=

2：　t：=

3：　u：=

4：　``M´´：= $\begin{pmatrix} 1-s & 0 & u \\ s & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-u \end{pmatrix}$

5：　EXACT_EIGENVECTOR（``M´´, 1)

6：　$\left(\times 1=@1\times 2=\frac{@1\ s}{t}\times 3=\frac{@1'\ s}{u}\right)$

この結果から次が導かれる。

相似回転の中心

元の三角形ABCを極限の三角形 A′ B′ C″ にうつす相似回転を考えると、その中心の位置ベクトルは、

$$\frac{a^{-2}\vec{a}+b^{-2}\vec{b}+c^{-2}\vec{c}}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}$$

６．元の問題の垂線の部分を一般化

問題 θ

「問題$\frac{\pi}{2}$」の垂線（角$\frac{\pi}{2}$）の代わりに、一般の角 θ で対辺に線を下ろすことに変えた問題を「問題 θ」と名づける。

UBASICのシュレーションは140行目.150行目の公式をDERIVEを用いて複雑な公式に変えればよい。

しかし、その結果はかなり異なるところが出てくる。正三角形に限っても、角θによっては、収束するのは（$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$）のときのみである。したがって、極限の三角形自体は存在しないこともある。しかし、一般の場合でも、相似回転の中心を求める方は原理的には同じ方法で考えられる。残りの話は機会があれば述べたい。

7．終わりに

簡単なシミュレーションから自然に湧いてくる疑問に易しく答えられることを述べてきた。数式処理という杖と問題を実感するソフトが手に入ったことで、ずいぶん楽しく教材研究ができる。特に、煩雑な計算から解放されると、数学に集中でき、疑問そのものと格闘できる。しかし、重要な課題は、どのように、生徒にも同様の体験、すなわち実感しながら、数学と格闘させていくか、である。とりあえず、われわれ数学教師にまで、こういうソフトが手にはいるようになったことは朗報であると思う。

また、この問題そのものについては、愛知県立明和高等学校の兵藤先生が詳しく検討されている。ここでは、コンピューターを使って簡単にできることを取り上げた。