数学科

生徒の大学数学への挑戦から、教材研究の楽しみ
応援の楽しみ、数学文化と雰囲気

福　谷　　　敏

【抄録】　本校生徒が名大理学部数理学科の高校生継続講座に参加した。この講座では最終的に生徒のオリジナルな問題意識で作成するレポートを課している。３人の生徒は、教科内容では進度などでハンディを追っていたが、のびのびと附属の生徒らしく取り組んでくれた。ここでは、応援の楽しみ、数学文化の案内、挑戦する雰囲気を作り、という数学教師としてのやりがいを感じた経験を述べたい。また、実質的な教科内容での高大の連携を体験することができたとも言える。

【キーワード】

1　はじめに

99年度の名古屋大学の高校生向け「名古屋大学数学継続講座(数学アゴラ)」に本校の生徒が参加した。７月の合宿から始まり、３月25日（土曜日）の自由研究レポート発表会・修了証書授与式で終わる主に第２第４土曜日に継続的に開かれる講座で、主に数理科学に興味を持つ意欲的な高校生を対象としたものである。本校から、広い意味での数学に興味のある４名が参加した。最終のハードルである研究レポートを完成させ修了したのは３名であった。ここでは、この３人の生徒を見守り応援する機会に体験できたことを報告する。この体験から、我々が教えているレベルの数学のすぐ近くで、生徒の「生き生きとした疑問」から、いろいろな挑戦的にものを考える経験が生徒も、教員も、できることを実感した。

このような公開講座は生徒の自主的で自由な発想や試行錯誤の過程を体験してもらうのが目標である。しかし、一方で、生徒に意識されない「周りの数学文化」の部分と、「疑問の連鎖を促す場」を作ることが大切になる。

特に、現行カリキュラムの「現地調達主義（悪く言うと泥縄）は、周りの文化のレベルに依存する」という事実に改めて気づくことができた。この「陰ながら、周りの文化レベルや雰囲気」を担当する応援はあるが非常にやりがいのある楽しい経験となった。この経験の簡単な報告をここでは行いたい。見守り応援する側から見ても、楽しい「教材研究」であった。

３人の自由研究レポートの取りかかりの問題は次の通りである。

Oくん　「平原の３つ（または４つ、５つ）の町を結ぶもっとも短い道は？」

Sくん　「大気のＣＯ２循環を、地球科学では、どうやって数学にし、記述し、予想するのか？」

Sさん　「クラスに１人の頻度でいる姓を調べたとき、たくさんクラスを調べたときどんな法則が見つかるか？」

ここでは、紙面と時間の都合で最初の発表者であったＯくんの場合の事例を中心に報告したい。

2　「数学アゴラ(広場)」と高校教員のサポート

名古屋大学理学部数理学科・同大大学院多元数理研究科が1994年より、毎年、高校生を対象に現代数学の継続講座「数学アゴラ（広場）」として開催してきたものである。大学レベルの数学に触れると言うだけでなく、自らのテーマを見つけて考える学問研究の基本に触れるのが大きな目的となっており、受講者には自由研究レポートの提出が課せれる。

応募資格は「愛知県、岐阜県および三重県に在住する国立、公立または私立の高等学校の第２学年および第３学年の生徒で、名古屋大学に通学が可能な者」とされ、応募者には「筆記（小論文）及び面接を行う。選考に当たっては、大学レベルの数学教育に触れる資質と意欲を持つ者を優先する」となっている。

趣旨から、「生徒自身の自発的な活動」を目指しているので、生徒たちの現地調達主義の手助けや考える場の設定などが応援することとしては、我が校の場合３点であった。

基礎知識の現地調達　基礎科学を志す高校生の標準的

な数学的知識を補う。ハンディをカバーし、参加者としての必要な予備知識を与える。生徒が考えていく過程で必要となる基礎知識は証明等をつけてコンパクトに説明する。

検討の場を作る　徹底的に自分で考える手助けをする。特に、時間配分のアドバイス、考えたり発表したり協議する場の設定、必要となる数学上の相談にのる。高校の授業等でも、考えたことを発表し意見を求めた。証明のアイデア等の最終的なポイントはこの段階で鮮明になったことも多い。

実験助手的サポート　生徒が必要とする電卓的なもの（本校にはMathematiaが視聴覚のパソコンに入っている３人とも利用）、実験装置の作り方の相談に乗る。

第１の点では、理系進学者がいる高校としては、１年生の数学の単位が４単位と例外的に少ない。４人の生徒は、参加前に、この講座の担当の大学の先生と連絡をとり、必要な予備知識を数回の集中的な説明で補った。

また、問題自体が適度に手強いことが、生徒はなかなか深い発想を促がす。必要な高校レベルの基礎知識は最低必要である。生徒の数学的教養や技量が十分で、高校レベルの数学の応援が必要がない場合、全面的に大学に任せるというのも良い選択肢と思われる。幸か不幸か、本校からは、この継続講座でも、「数理科学を専攻する可能性の高い生徒」ではなく、「数学を専門の中で利用者になって欲しい生徒」が参加を希望した。数学的な教養や技量では応援する態勢も必要であった。参加希望の４人の生徒は、本校の総合学習の実践もあり、意欲・発表の能力・思考の点では十分なものを持っていた。応援する側として次のように考えて援助した。

第２・３の点では

- 生徒の持っている問題意識をはっきりさせるのを手伝う。いろいろな形で、数学の問題として文章の形をするよう促す。
- 実験を助ける。特に、計算や数式処理ソフトの利用を手伝う。計算やコンピュータに引きずられることのないように、利用目的や必要な機能を要求させ、技術的なところは手伝う。
- 相談の途中、生徒が要求する場合、数学的教養は出来るだけ簡潔・論理的に解説する。ごく基本的な知識の不足はその場で補う（レクチャーする）。背景や関連する幅広い数学的内容を応援する側も独自に考えておく。ただし、生徒の到達点は、予想しないようにする。
- 生徒が「自身の頭で考える」ことが目標である。決して、結論は教えない。生徒の考えたこと、アイデアや証明につきあう。また、他の生徒の前での問題の説明・討論の機会を与える。いずれもセミナー型のやりとりの場を作ることを心がける。

「教えない」という覚悟をしていると、高校教員の教材研究にちょうどいいレベルの問題意識を与えてくれる。そのものの背景をさぐる必要もあり、教員の側でも自然に「教材研究」してしまうが、それはそれとして丁寧に行っておく。しかし、「生徒自身が考える」のを待ちつづけることが一番大切であった。しかも、そうしていると生徒は「予想以上の考え、予想と違う切り口」を出してくれる。以下は、「自由研究レポート」を作った３人の事例を見ていく。彼らは、継続講座（数学アゴラ）で、半年間の講義も受けておりその内容もレポートに反映してくるのであるが、講義の内容はここでは省略しておく。また、レポート自体は別の報告集にまとめられる。

3　Ｏくんの事例

3.1　Ｏくんの問題

Ｏくんは数Ⅲを選択してる文系生徒で、語学数学を利用した国際関係・経済経営系の進路を模索している。理系科目のセンスが優れている。彼の自由研究発表のときの題は「最大・最小」となっていたが、数学教師からすると「極値問題」という題がふさわしい。取り上げた問題は、

> 問題 n　「平原の n 個の町をすべて結ぶもっとも短い道（折れ線）はどのように引けばよいか？（$n=3$、４、５、…の場合）」とくに、$n=3$ の場合、もう少し具体的に「平原に３つの町ＡＢＣがある。もう一つの地点Ｐを考える。このＡＰ、ＢＰ、ＣＰの距離の和を最短にするＰを求めよ。」点Ｐの幾何的な特徴と作図法を求めよ。

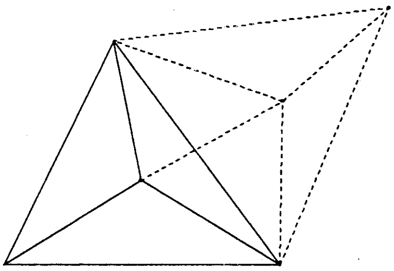
であった。これ自身は、$n \geqq 4$ のときには、最小値そのものは、とても難しい。すこし妥協して、少し道をずらして考えた場合の最小の距離（つまり極小の距離）となる道を見つける方法を考えることにした。また、この問題に本格的に取り組んだのは、沖縄研究旅行から帰った11月半ばからであった。

彼の問題へのアプローチで彼の独自性は次のような点であった。問題を実感する方法を考えること、後で述べる「120度の原理」を中学流の典型な方法で理解した後、もう少し動的な推論（難しく言うと変分的な攻め型）で分かり易い説明をつける。これを応用して

「４つ」「５つ」の場合も「最短の道の特徴を説明」することであった。また、レポート提出後、本校の生徒たちと検討用の発表の段階で作図法まで到達することができた。筆者は最後の作図法（$n=3$の場合）はこの機会に初めて教えられた。また、最初の中学流の補助線による解法のみ解説を行ったが、それ以外の援助は、基本的な問題の説明や実験の手伝いに限った。ほとんど、この問題の本質的なことは、Ｏ君自身が自分の頭で切り開いていった。

3．2　Ｏくんの問題への筆者の教養

「３つ」の場合は、中学（初等幾何の研究的な問題）と大学の教科書（微分法の問題たとえば高木貞治「解析概論」の第２章の最後の問題）に載っている演習問題である。中学の解き方は、天才的な補助線（下図の破線）を引くのだが、



これに関して、筆者は、日本数学コンクールでは、「補助線が決定的なものかどうか？」を問う問題の採点を担当したこともあった。このとき大学の恩師と担当し、「補助線の見つけ方や高校生が納得できる他の方法」を探す作業を行った。大学生の典型的な解き方は、座標平面上で考え、距離の和を２変数の関数の極値の問題として扱うのがふつうである。また、石鹸膜の現象を関連があることが知られている。蜂の巣の形や密集したシャボン玉の形にも関係がある雰囲気は承知していた。

3．3　第１の取り組み　問題の実感

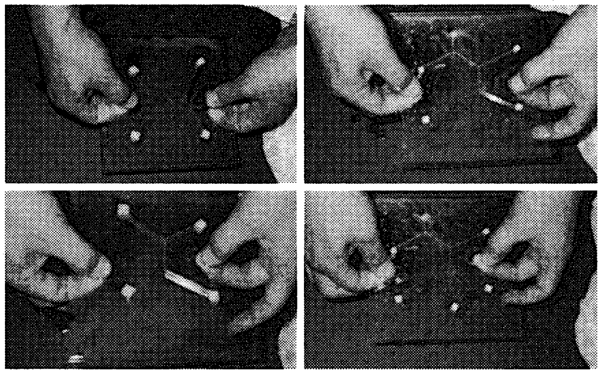
まず、この問題の前に練習として、最古の最大最小問題と言われるつぎの問題（中１の難しい問題）から復習した。これは、昨年夏の課題として考えたものである。

> 問題１　平面に直線lがある。直線で分けられた領域の片側に異なる２点Ａ、Ｂがある。また、直線l上の動点Ｐがある。ＡＰとＢＰとの距離が最小になる点Ｐを求めよ。作図法も答えよ。

これの解は、たとえば、直線lに関するＡの対称点をＡ’として、直線Ａ’Ｂと直線lの交点が求める点となる。点の決め方が分かると作図法は中１でできる。この問題が載っている最古の問題集はあのヘロンのものとされる。その本の題は、「鏡」であったそうである。この問題を中学生に解かせるとはじめは、ＡＢの垂直二等分線と直線lの交点とする者が少なからずいる。このとき、アドバイスはまさに「lを鏡とみる」であり、光の「最短を選ぶ」という性質のおかげで、この問題の答えはこの光線の反射の「物理現象」にある。入射角と反射角が等しい点と特徴づけられる。

問題の実感　石鹸膜が答えをくれる

Ｏくんが、この問題を理解し、また、解を予測実感するために大きく２つの方法で「実験？」を行った。１つ目の方法は、この解を記述する「物理現象」にある。シャボン玉遊びの要領で実験は休みの日に教官室の洗面台で行った。透明なアクリル２枚、洗面器、円柱上に裁断した消しゴム（頂点として使う）と石鹸（洗濯のり少々）を準備し、問題を石鹸膜の表面張力で解決させる。のりを入れすぎて膜の移動速度が遅すぎたりして、反省点はあったが、最小のルートを求めて、石鹸膜が変化していく様子を観察し、写真にとった。$n=3, 4, 5, 6$でまちの位置関係をいろいろ変えてみて、たとえば、石鹸膜の最初の張り方で、近づく状態が変化し、最大最小というより、極値を求めて変化することの感じがつかめた。また、120度の原理が見え隠れしている。さらに、$n \geqq 4$の場合、「極小の状態が複数ある」ことも、驚きを感じながらつかめた。



問題の実感　２つめ　基盤モデルでの数値実験

もう一つより数学に近づくため、Ｏくんは、基盤の上の点だけを使う「格子点モデル」で数値実験した。主に、$n=3$の場合、３点ＡＢＣも動点Ｄも基盤の点を利用し、道の距離を全部計算して比較し、「**極小値**を取る点」を探すのである。また、上のシャボン玉の場合との比較も込めて、実験のまねとして、「ある点からＤが出発し、隣接する格子点のうち道のりがもっとも短くなるところへ移動しながら、**極小値**を求めさまよう」方法を楽しんでみた。この場合は、ふつうの電卓

では、計算が大変なので、数式処理ソフト「Mathematica」を計算の道具として利用法については現地調達方式で応援をした。このような発想を、計算の大変さであきらめていることが多い。ソフトに振り回されずに割り切って使うことができた。

また、$A(0,\ 100)$, $B(100,\ 0)$, $C(50,\ 100)$ とし、D を（0, 100）から出発させる実験の結果が次の図である。最終的な座標は $D(50,\ 29)$ となることは、実験を50ステップ行うと分かる。もちろん、(0, 100), (100, 0) (0, 100) の101×101個の動点 D について、A, B, C からの距離の和をすべて求めて表示し最大値をとる点を探す方法はＯくんは採用しなかった。結果として石鹸膜をまねる方法で極小値を求める（必要条件でせまる）方がとりつきやすかった。

3. 4　$n=3$ の場合のアプローチ

失敗だったかも知れないのは、典型的証明法を筆者はＯくんに説明してしまった。この方法の補助線は一種天才的なので教えてしまったことである。この補助線の必然性については日本数学コンクールで問題として出題されたこともある。しかし、AD の長さを固定するというアイデアで考えて、次の問題のあることを見抜いた。

> 問題２　平面に円 C がある。円の外側の領域に異なる２点Ａ、Ｂがある。また、円 C 上の動転Ｐがある。ＡＰとＢＰとの距離が最小になる点Ｐを求めよ。

これは、結果からいうと、「問題１」の直線「l」を「円 C」に変更したものになる。Ｏくんは、証明では苦しんだ結果、接線を考え、最小になる点Ｐにおける円の接戦が問題１の状態にならなければいけないことに気づいた。微分の考え、すなわち円の一部を接線で近似するという物理・微分的な考えかたができた。この「問題２」の解は「角ＡＰＯと角ＢＰＯが等しい（ただし、円の中心をＯとする」）ことである。

「問題２」が解けると、「問題３」の場合、最小（極小）の場合があるとすると、Ｃを中心とする円を考えて、角を中心の円を考えると角ＡＰＣと角ＢＰＣが等しいことも分かる。よって、120度ずつになることが分かる。元々の三角形ＡＢＣが120度以上の角を含む鈍角三角形の場合は例外となるがこの時点で大筋で「120度」が本質的なことが分かる。すなわち、「問題３」の前半部分に対する解は、「$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA$ を満たす点 D となる。ただし、120度を超える鈍角三角形の時は、D は鈍角の頂点に一致する。」となる。

Ｏくんは、さらに「問題３」の後半部分、すなわち、そのような作図法について、中学の「円周角の定理」に戻るアイデアで答えられた。すなわち、一般の三角形の場合、辺「２頂点を通る円のうち中心が三角形の外側にあり、中心角が120度の円が３つできる。この３円の交点（実際は２円でよい）が求める D」となる。

3. 5　n が４以上の場合の極小解の性質

上のことからすぐに次の本質にたどり着いた。「問題 n,（$n\geqq 4$）」の前半部分が「一般の凸多角形で、しかも、極小値を求める」なら、「凸多角形の全部の頂点を結ぶ折れ線でどの部分かをとっても連結でなくなるもので、かつ分岐点からは三つ又に分かれその角度は120度となる」という状態となる。正確に言うと、折れ線の頂点の角度は120度で、例外的に凸多角形の元の頂点で折れ曲がる場合がありうるのは $n=3$ の場合と同じである。ここまでは、比較的順調に時間の進行とともに証明できていった。

筆者も予想を大きくは超えないレベルで、Ｏくんの考えを応援できた。Ｏくんはいろいろなことを教えてくれた。説明を受ける筆者にとってなるほどと理解できることの連続だった。

しかし、ここから先は筆者にとっても、考えたことのない、全くの未知の領域であった。具体的には、２つの困難な問題に阻まれる。この２つは、完全に分離できない問題であるが、n =4, 5, 6の場合のシャボン玉の例を見ると極小解は幾つもあることに気づく。また、そのような道の形が１つ決まったとして、それをどう正解に作図するかも問題ということで、

> 問題 n 極小解の列挙　「問題 n,（$n\geqq 4$）」の極小の解すべて見つける方法？具体的に、頂点を無駄なく結ぶ折れ線で、おれる角度すべてが120度となる図形が何種類あるか。

これができれば、すべての場合の長さを比較して「最小」も求まる訳である。こちらの問題の難しさは、$n=4$ で正方形を考えると回転対称性を無視すると１通りになるが、$N=6$ のときの、実験では、最初の膜の張り方から極小状態に移動していく膜の様子はもっとずっと多様になる。

> 問題 n 作図法　「問題 n,（$n\geqq 4$）」の極小の解を見つけたときの作図法？

ということになる。こちらの方は、石鹸膜の実験が大きく影響している。実験結果の極小の状態をフリーハンドで描いた後、正確に作図する方法を考えたいということである。これは、石鹸膜の実験のときからの、Ｏくんの問題意識であった。

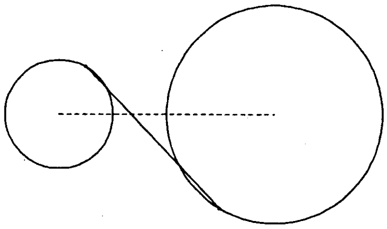
ここのあたりで、時間が考える時間かかり始める。

まず、$n=4$ の場合で考えた。このころ、レポートの締め切りも迫ってきた。Oくんの最終問題は

> 問題 n 作図法 「問題 n,（$n \geqq 4$）」の極小の解を見つけたときの作図法

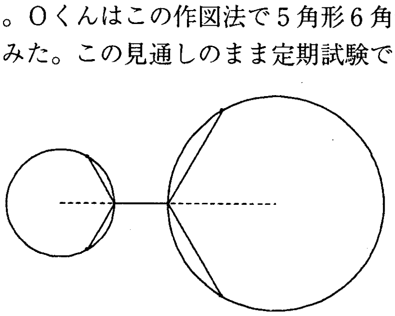
具体的には、石鹸膜でみた $n=4$, 5, 6あたりの作図法であった。レポート自体の現行はこのころ書き始めた。原稿作成とこの最終問題を抱えて、学年末試験に臨むこととなった。最初のアイデアは $n=4$ のとき、つかんだと感じ、学年末テストに臨んだ。そのアイデアは

> ミスリード問題 共有点を持たない２円のそれぞれに動点P，Qがある。ＰＱが最小になる動点p，Qを作図せよ。

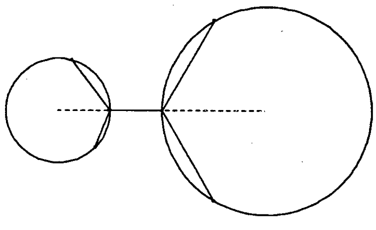


であった。この問題自体の２つの円の中心を結ぶ線分の交点が求める２点となる。実は、２円では元の問題に応用できず、「円」を「楕円」に変えなければ $n=4$ のときの解は得られない（楕円の性質はまだ習っていないし、それを知っても簡単な問題ではない）。とりあえずこの時点で、「正しいと感じていた作図法」は「$n=4$ の場合、一般の４角形 $ABCD$ が与えられたとする。極小解は２のとおり考えられる。

たとえば、A, B をとおり、四角形側にある弧の中心角が120度となる円を引く。C, D をとおり、四角形側にある弧の中心角が120度となる円を引く。この２円と中心線の交点をそれぞれ P, Q とする。極小の道は、AP BP PQ CQ DQ の５つの線分をつなげたものとなる。」と誤った見通しをたてた。この「誤った作図法」の例が以下の図である。この場合は結果的には偶然正しい。Oくんはこの作図法で５角形６角形まで作図をしてみた。この見通しのまま定期試験で中断した。

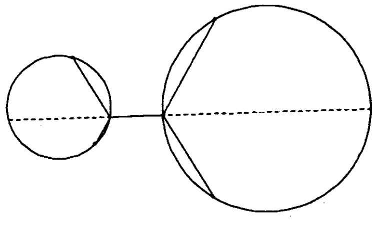


試験後は「作図法を考えること」と「今までできたことの整理」を行った。数学の授業で前半部分の問題意識やアイデアを解説してもらう機会を持った。一般の生徒に聞いてもらった。また講座では、レポートの要点に加え、できたと思った $n \geqq 4$ の場合の作図法を説明してもらった。「できそうだの」部分は証明をつけようと考えている間にOくん本人が違和感を自分で感じ、ギャップを理解し、再度挑戦ということになった。$n \geqq 4$ の場合の作図法は、筆者にとっても未知のものであった。正解が生徒や教師の能力で解ける作図法であるかどうかも不安になりながらこの検討を楽しむことができた。後で振り返ると、上の「誤った作図法」は、元の図形の形が対称性が強いので偶然正解となる。上の例で、四角形をもう少しいびつに変える例を載せる。ここでは、分度器で測ると120度が測定できない。



ここから、数日集中的に検討し、例を考えながら極小解の「正しい作図法」に到達できた。これは、中学校の「円周角の定理」に帰着するとてもすっきりした説明もつく方法である。作図法は「$n=4$ の場合、一般の４角形 $ABCD$ が与えられたとする。極小解は２とおり考えられる。

たとえば、A, B をとおり、四角形側にある弧の中心角が120度となる円を引く。また A, B を両端とする**優弧の中点**を X とする。C, D をとおり、四角形側にある弧の中心角が120度となる円を引く。またC，Dを両端とする**優弧の中点**を Y とする。２点 X, Y を結んだ線分と円との交点 P, Q とする。極小の道は、AP BP PQ CQ DQ の５つの線分をつなげたものとなる。」なお、A, B を両端とする**優弧の中点は円の中心を重心とし、**A, B **を頂点とする正三角形のもう一つの頂点**でもある。



この時点で、**石鹸膜が作った答えを数学的に再構成できる**ようになった。ここが感動の瞬間であり、満足して考えるのを中断した地点になった。つきあった者としても「なかなかOくんやりましたね」と息をつけた。

4　終わりに

生徒が力を発揮する場所で、応援できるのが教師の喜びだと思う。しかも、「数学」という個人の利益から離れた純粋な知的な挑戦を応援でき、生徒がどんどん進んでいくのを見るのは幸せな経験である。

数学（教材研究）としてみても、Oくんの挑戦につきあって、今まで、筆者が全く知らなかった「作図法」まで到達することができた。また、途中の紆余が生徒の「数学をする」とても良い機会になったと思う。このような地味な応援の中で、教員として楽しい経験をする事ができた。あと２人の生徒についても全く違う数学的内容の応援ができた。そのとき、学ぶことのできたことも機会があれば、述べたいと思う。Oくんの問題は、石鹸膜実験で見つけた極小解を数学的に検討し、作図法を与えるところまであった。その先の「極小解の列挙の問題」と「すべての場合の作図法」の完全な知識はレベル的には既知のものである可能性は高いと思うがどうやって調べたらよいかというところで中断している。

機会を与えてくれた「アゴラ」の関係の先生に感謝したい。特に、日本数学会の理事長をされた数学者である浪川教授が一人一人に激励し、建設的な指摘をされてたこと自体に感謝したい。また、我々送り出す側の教員にも、大いに刺激となった。このような機会を継続されることを強く期待する。

時間と紙面の関係で発表順が後の２人の応援の楽しい経験は掲載できないのが､残念である。機会を見て、報告できればと考えている。