数学科

正則連分数のn（３）次元への一拡張
高校数学教材試作の楽しみの例

福　谷　　　敏

【概要】　高校数学の総合化する古典的教材として、F．クラインの連分数の幾何的説明は魅力的である。
ここでは、連分数の空間での類似物「３次元連分数」に拡張を試みる。「アルゴリズムとして、空間内の平面を整数係数の一次方程式で近似する方法はないのか」と質問されたことが直接のきっかけとなっている。このことから、空間ベクトル・行列・整数問題・数列と極限の総合教材になりそうなことをここで紹介する。このおもちゃ的教材のイメージは「朝顔のつるが非常に長い直線に巻き付いている」といった素朴なものからの連想である。ここでは、この教材の数学的な骨格を簡潔に説明する。

【キーワード】　３次元連分数　数学総合教材　空間　整数係数行列　近似　数列　収束

１．数学的概要

正則連分数は射影直線の点を整数比の分数で近似するシステムと考えられる。たとえば、

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

とπの正則連分数展開が続く、４項目で打ち切って近似値として使っても、誤差は2.7×10^{-7}程度である。

３次元の自然な拡張が考えよう。近似の早さや表示の一意性が減ずるという弱点はあるが、面白い近似であることを説明する。ここでは実射影平面の点を整数係数の３連比の点列で近似するシステムを与える。言い替えると、３次元空間の原点を通る直線が与えられたとき、その直線に近づいていく空間の格子点列を構成する方法を与える。

２．発見の手がかり

連分数展開の拡張を考えるアイデアは次の３つの正整数の最大公約数を求める方法にある。
互除法のまねを行列を使って表示してみる。

注１　73，30，７の最大公約数を次のように求めることができる。

$73 = 2\times30 + 1\times7\times + 6$
$30 = 4\times7 + 0\times6 + 2$
$7 = 1\times6 + 0\times2 + 1$
$6 = 3\times2 + 0\times1 + 0$
$2 = 2\times1 + 0\times0 + 0$

以上により最大公約数は１となる。これを行列を用いて表す。

$$\begin{pmatrix}73\\30\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\7\\6\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\6\\2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

各行列の行列式は-1なので、逆行列を掛けることで、不定方程式$73x+30y+7z=1$の一つの解も求められる。

３．行列積と連比の列の収束定理

この操作を定式化しよう。正則連分数の収束に対応する事実を３(n)次元で考えたことになる。

定義１　文字成分の行列の列

$$\left\{\begin{pmatrix}a(i)&b(i)&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}_{i=0}^{\infty}$$

を、文字係数の連比行列の列とよぶ（各々の行列を$M(i)$、成分を$M(i)(k,\ l)$と表す）。

また係数として、整数を扱う場合は有限個のiを除いて、$a(i)>0,\ b(i)\geqq0$を仮定する（この場合は単に（正則）連比行列の列とよぶ）。

このとき、$P(i):=\prod_0^i M(i)$とし、この行列の列を順に、$\vec{v}(i)$, $\vec{v}'(i)$, $\vec{v}''(i)$と表し、また、それぞれの連比を$\tilde{v}(i)$, $\tilde{v}'(i)$, $\tilde{v}''(i)$と表す。特に、$\tilde{v}(i)$を第i近似連比とよぶ。

$\vec{v}P(i+1)=M(i+1)P(i)$の成分を比較する。

補題1

$$\vec{v}(i+1)=a(i+1)\vec{v}(i)+\vec{v}'(i)$$
$$\vec{v}'(i+1)=b(i+1)\vec{v}(i)+\vec{v}''(i)$$
$$\vec{v}''(i+1)=\vec{v}(i)$$

ここで，$\vec{v}$だけの漸化式に直すと

補題2　$\vec{v}(i+1)$

$$=a(i+1)\vec{v}(i)+b(i)\vec{v}(i-1)+\vec{v}(i-2)$$

注2　ここで、考えている空間をpqr空間と考えて、方程式$r=1$で決まる平面を射影平面の1つの局所地図として、考える。また、ベクトル$\vec{v}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$に対応する点も$\tilde{v}$と表せば、$\tilde{v}=\frac{1}{r}\vec{v}$となる。

補題3　$\det(\vec{v}(i+1), \vec{v}(i), \vec{v}(i-1))=\pm 1$

この補題の系として次のことが言える。直接収束には関係しないが、近似の良さを主張している。

補題4　原点Oと$\vec{v}(i+1)$, $\vec{v}(i)$, $\vec{v}(i-1)$）に対応する3点を頂点とする3角錘の内部には格子点は含まれていない。

内部に格子点があるとするとその格子点および原点とあと$\vec{v}(i+1)$, $\vec{v}(i)$, $\vec{v}(i-1)$）の2つからできる平行六面体の体積が1になる。原点と$\vec{v}(i+1)$, $\vec{v}(i)$, $\vec{v}(i-1)$）からできる平行六面体が1を越えるがこれは補題3に反する。

補題5　$\det(\tilde{v}(i+1), \tilde{v}(i), \tilde{v}(i-1))$

$$=\pm\frac{1}{r(i+1)\ r(i)\ r(i-1)}$$

ただし、$r(i)$はベクトル$\vec{v}(i)$の第3成分とする。

補題6　$\tilde{v}(i+1), \tilde{v}(i), \tilde{v}(i-1)$を頂点とする3角形は$\left|\frac{1}{2\,r(i+1)\,r(i)\,r(i-1)}\right|$であり、単調に面積0の図形に縮小していく。

面積は大体$\frac{1}{r^3}$のオーダーで0に収束する（従って、2点間の長さの方は、今回きちんと示せないが、その平方根、つまり$\frac{1}{r^{3/2}}$と期待される)。しかし、まだ、1点に収束するとはいえない。線分も可能性としてはある。

補題7　$\tilde{v}(i+1)$

$$=a(i+1)r_{i+1}\tilde{v}(i+1)+b(i)r_i\tilde{v}(i)$$
$$+r_{i+1}\tilde{v}(i+1)\qquad a(i+1)r_{i+1}>r_{i-1}$$

が成り立つ。

この式から、3角形の極限図形が線分ではありえないことが示される。また収束の様子は$\tilde{v}(i)$たちが渦を巻くように極限の点に近づくことも分かる。以上をまとめると次の定理が成り立つ。

定理1　任意の連比行列の列について、$\tilde{v}(i)$の第i近似連比は収束する。

注意　この記事では、行列を正則連分数の拡張となる特定の形の行列のみに扱ったが、行列積自体やベクトルの列を射影空間の点列に対応させると考えるのなら、逆に収束定理が成り立つような場合も自然に定義できる。一般連分数の拡張をすることも可能である。□

4．連比の整数連比展開と収束定理

この節では、「数の正則連分数展開」に対応するものを、3次元の場合「3連比の整数連比展開」として平行して類似物を作っていく。

定義2　ここでは、次の方法で連比$\alpha(0):\alpha(1):\alpha(2)$に対し次の手続きで整数係数3次正方行列を順次定める：

$$\begin{pmatrix} a(i) \\ a(i+1) \\ a(i+2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(i) & b(i) & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(i+1) \\ a(i+2) \\ a(i+3) \end{pmatrix}$$

ただし、$a(i)=[a(i)/a(i+1)]$, $b(i)=[(a(i)-a(i)\alpha(i+1))/\alpha(i+2)]$と決める。できた整数行列の列を、元のベクトルに対応する連比行列の列とよぶ(記号[ ]は整数部分を取り出すガウス記号である)。

この行列の列について、前節の行列積や近似連比などを考える場合も，簡単に、もとの「この連比展開の行列積」などといういいかたをすることにする。ただし、有限の長さで続けられなくなるときは、有限の長さの近似連比とよぶ。そうでないとき無限の長さの近似連比とよぶ。

注意2　変数でこのことを実行すると、正則連分数の話になる。□

補題8　任意のベクトルの近似連比は、長さが無限なら、有限個のiを除いて$\alpha(i)$は正数で単調減少する。

定理2　任意のベクトルの近似連比は、長さが無限なら、元のベクトルの連比に収束する。

5．計算1　実数連比の整数比近似

もともとの疑問である無理数の連比の整数連比での近似について、どのくらいの精度が得られるか例を挙げてみる。

例　連比$\pi:e:1$に対し、ベクトル$(\pi, e, 1)$に対応する行列の列は、初めの6項を書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

となり。行列積を順次計算した結果も初めの6項は

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&2&1\\2&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}6&1&2\\5&1&2\\2&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}7&2&6\\6&2&5\\2&1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}9&13&7\\8&11&6\\3&4&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}22&16&9\\19&14&8\\7&5&3\end{pmatrix}$$

近似連比は順に1：1：0, 2：2：1, 6：5：2, 7：6：2, 9：8：3, 22：19：7 さらに第11近似連比は2130：1843：678となる。

注意元の連比π：e：1は小数第10位まで表すと3.141592654：2.718281828：1となる。

第6 近似連比22：19：7も小数第10位まで表すと3.142857143：2.714285714：1となり、第11近似連比も小数第10位まで表すと3.14159292：2.718289086：1となる。これは、2つの数の同時に考えた誤差は（上の証明で期待される第3成分の－1.5乗の誤差）$678^{-1.5}=5.66\cdots\times10^{-5}$に比べても1桁小さい。普通の連分数の場合ほど劇的ではないが、2つの数字を同時に同程度のよい近似ができていることが観察される。□

例　連比$\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$に対し、ベクトル（$\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 1）

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}3&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&5&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

に対応する行列の列は、初めの6項を書くと

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5&1&1\\4&1&1\\3&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}16&1&5\\13&1&4\\9&1&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}33&5&16\\27&4&13\\19&3&9\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}38&181&33\\31&148&27\\22&104&19\end{pmatrix}$$

となり。行列積のはじめの6項は

近似連比は順に1：1：0, 1：1：1, 5：4：3, 16：13：9, 33：27：19, 38：31：22 さらに第11近似連比は31073：25371：17940となる。

注意　元の連比$\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$は小数第10位まで表すと1.732050808：1.414213562：1となる。

第6 近似連比38：31：22も小数第10位まで表すと1.727272727：1.409090909：1となり、第11近似連比31073：25371：17940も小数第10位まで表すと1.732051282：1.414214047：1となる。これは、2つの数の同時に考えた誤差は（上の証明で期待される第3成分の－1.5乗の誤差）$17940^{-1.5}=4.16\cdots\times10^{-7}$にかなり近い。

6．計算2　有限連比展開の長さ

以下2つの節では、正則連分数の整数論的性質の類似を実験してみる。

行列積の記法を冗長なので、今後（この節の次節で）行列の列に対しての（1, 1）及び（1, 2）成分を並べた列で略記する。例えば、

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\ \ 0}&1\\1\ \ 0&0\\0\ \ 1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\boxed{2\ \ 1}&1\\1\ \ 0&0\\0\ \ 1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\boxed{2\ \ 0}&1\\1\ \ 0&0\\0\ \ 1&0\end{pmatrix},$$

の代わりに［(1, 0)，(2, 1)，(2, 0)］と表すものとする。

命題1　ベクトル$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$の連比展開の長さが有限である必要かつ十分な条件はZα＋Zβ＋ZγがZ加群として1次元であることである。

証明　十分であることは、第1節で説明した互除法そのものである。また、逆は、有限長で終わったとして行列積を用いた式で書いてみると、各行列の行列式が－1より可逆なので明きらか。▮

$\boxed{\text{予想}}$　広義減少する3つの正整数の成分からなるベクトル${}^t\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$の連比展開の長さ$l$とする。また，数列$\{f_n\}$を，$f_{-2}=0$, $f_{-1}=0$, $f_0=1$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-3}$とする。このとき、$\alpha<f_n$ならば$l<n$が成立する。

$\boxed{\text{予想の根拠}}$　$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$に前から$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$を繰り返した$n$回かけたものが長さ$n$の連分数展開を持つ「大体」最小の第1成分を持つベクトルである。この形の連比展開の第一成分を定める数列がf_nなので、元のベクトル$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$の連比展開の長さが$n$以上なら$\alpha\geqq f_n$

よって対偶を考えると結論が得られる。「大体」はくせ者である。途中に2成分の等しいベクトルが出てくる上の議論は怪しくなるのでもう少し考える必要がある。

注意　$f_0=1$, $f_2=1$, $f_3=2$, $f_4=3$, $f_4=4$, $f_5=6$, $f_7=9$, $f_8=13$, $f_9=19$, $f_{10}=28$

以上の予想は下で示す数値実験とはかなりあうのであるが、次の＊印のついた部分の「大体」の例外の場

合を示している。しかし、予想の不等式自体は実験した範囲では結果は正しい。

すっきりした連比展開の長さについて定理は今後の問題である。

例

連比	連比展開	長さ
1：1：1	(1,0),(1,0)	2
2：1：1	(2,0),(1,0)	2
2：2：1	(1,0),(2,0)	2
3：1：1	(3,0),(1,0)	2
3：2：1	(1,1),(2,0)	2
3：2：2	(1,0),(1,0),(2,0)	3
3：3：1	(1,0),(3,0)	2
3：3：2	(1,0),(1,0),(2,1),(0,1)	4*
4：1：1	(4,0),(1,0)	2
4：2：1	(2,0),(2,0)	2
4：2：2	(2,0),(1,0)	2
4：3：1	(1,1),(3,0)	2
4：3：2	(1,0),(1,0),(2,0)	3
4：3：3	(1,0),(1,0),(3,0)	3
4：4：1	(1,0),(4,0)	2
4：4：2	(1,0),(2,0)	2
4：4：3	(1,0),(1,0),(3,1),(0,1)	4*
4：4：4	(1,0),(1,0)	2

7．計算3　循環連比展開と単数

正則連分数の類推から実3次の無理数で循環する連比展開が予想される。実験の前に簡単な行列の性質から次の命題が得られる。

命題2　ベクトル$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$の近似連比が、循環するなら，体Q($\alpha/\gamma$，$\beta/\gamma$)はQ上高々3次拡大である。

証明　循環するなら、循環する部分をくくりだす。すると、$k\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ Mは可逆な整数係数3次正方行列、kは実数の形で表せる。ここで、$\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$は$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$を可逆な整数係数3次正方行列で変換したものである。言い換えるとkは行列Mの固有値となり、α/γ、β/γは体はQ(k)に含まれる。また、α/γ、β/γは、α/γ、β/γの分数式であわらせるので命題は示された。

例　連比$2^{\frac{2}{3}}$：$2^{\frac{1}{3}}$：1の正則連比展開は

(1,0),(1,0),(3,0),(1,3),(14,0),
(1,0),(1,0),(5,0),(3,0),(1,0),(2,0),(2,0),(1,0),
(2,0),(2,0),(1,3),(5,2),(2,2),(7,1),(1,2),(15,0),
(1,0),(1,0),(5,0),(3,0),(1,0),(2,0),(2,0),(1,0),
(2,0),(2,0),(1,3),(5,2),(2,2),(7,1),(1,2),(15,0),
…

(1,0),(1,0),(5,0),(3,0),(1,0),(2,0),(2,0),(1,0),
(2,0),(2,0),(1,3),(5,2),(2,2),(7,1),(1,2),(15,0)
が循環部分である。

2の3乗根の代わりに3，4，…と実験を試みたが5の3乗根の場合を見てみる。

例　連比$5^{\frac{2}{3}}$：$5^{\frac{1}{3}}$：1の正則連比展開は

(1,1),(1,3),(4,2),
(3,1),(8,1),(3,2),(5,0),(2,0),(1,0),(2,0),(5,2),
(3,1),(8,1),(3,2),(5,0),(2,0),(1,0),(2,0),(5,2),
…

この場合は
(3,1),(8,1),(3,2),(5,0),(2,0),(1,0),(2,0),(5,2),
が循環部分である。この部分の計算を正直に辿ると、対応する行列積の固有値$14\times 5^{(2/3)}+24\times 5^{(1/3)}+41$が自然に求まる。これは、3次体Q($5^{(1/3)}$)の基本単数というものになっていることも観察できる。偶然かどうかはわからない。

8．おわりに

このような素朴な計算から、前の2つの節でみた実験結果がえられた。背後にあるものが分かったらと考えている。行列の教材として、出発したが、少し広がった所まで足を延ばした気がする。一方でまとめ切れていないのも事実である。生徒にも教師にも与えられたテーマを考え抜く時間が必要な気がする。表面的なつきあいをしていた背後にこのような世界があった教材（この場合3次の行列）に申し訳なしと思う。生徒と「思考の術」を磨く授業の背景として、浅薄な他人の知識の切り売りにならによう「教科」「教職」について研修していきたい。また、このような紙面を提供していただいた研究部の先生に感謝したい。