数学科

2001年度新教科群・自然科学と数学

数学と新教科の関わり

渡　辺　武　志

【抄録】　新教科群は高校１、２年生を対象とした学校特設科目であり、詳細は①に記述されている。新教科群は既存の教科と既存の教科をつなぐもの、教科と教科の融合、教科と総合学習の融合など既存の教科ではできない柔軟な授業ができる科目である。2001年度の新教科は数学、社会、理科の教科３人で１クラスを１、２展開もしくは３展開に分けて高校１年生を対象に「自然と科学」の授業をした。数学が新教科に対してかかわるための目標は、他教科との融合・教養数学の探求である。2001年度は新教科初年度であり、この教科の課題は「ｉ）他教科との融合をどうするか。ii）数学の内容をより本質にせまる形でどこまで授業ができるか。」である。ここでは、実際に行った授業の詳細を述べる。（全13回・平成2001年度前期）

【キーワード】　パイナップルとフィボナッチ数　黄金数　暗号

１．フィボナッチ数

１．１　パイナップルとフィボナッチ数

教官３人（山田、石川、渡辺及び本校卒業生・田中安代さん（農学博士）による合同授業）

植物を観察すると葉の付き方、植物の実の構造など、不思議なパターンがあることがわかる。ここでは、パイナップルのダイヤモンド型の模様や、松かさの鱗片に注目し、その螺旋模様についてその規則性を探る。

必要な数学の知識

$$3, 15, 4, -9, \cdots$$

のように数を一列に並べたものを**数列**といい、数列を作っている各数を数列の項という。また数列の項は最初から順に第１項、第２項、第３項、…といい、第 n 番目の項を第 n 項という。

数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

について第 n 項はその前の２数の和（但し、第１項、第２項は１となる。）このような各数の項の数を**フィボナッチ数**といいこの数列を**フィボナッチ数列**と呼ぶ。パイナップルや松かさの実の表面には鱗状の模様があり、これらの列数は、植物の遺伝子に関係していて、植物の成長の仕方や強度を損なうことのない数となり、その数はフィボナッチ数１，２，３，５，８，13，21…になることがきわめて多い。

授業では自然界でさまざまなフィボナッチ数を見つけることができる。

注意事項

①：高校１年生（４月当初）は数列の定義から解説し、フィボナッチ数の概要を授業の後半（まとめ）で行った。

②：植物の成長過程などで植物の強度にフィボナッチ数１，２，３，５，８，13，21…が関係しているが、**常にこの数値と一致しているとは限らない**ことを強調した。（いろいろなWebページを見ると一致するかのようなことが書いているが、それは間違いであることにもふれておく。）

生徒の感想

生徒：「数列（フィボナッチ数）ってよくわからなかったけど、身近なものでよく見ると、数列（フィボナッチ数）ってものがあって、私たちが知ることができておもしろかた。今度パイナップルを食べるとき、是非家族に教えてあげなきゃ！

生徒：「すべてとはいえないけれど葉や芽の付き方には規則性がある」ということを学び、私は改めて自然界は未知の世界であると実感した。日常何気なくふれている身近なものからこんな授業が受けられるとは思わなかった。

この授業について

他教科の融合に関して数学は接点が少ない教科である。さらに高校１年生の知識までの内容による授業は難しい。ここでは植物の規則性について数学を絡めて話を行った。（数列は１年生後半で学習）しかし教科の

融合としてはまだ薄い。さらにこの文献についてホームページで調べてみると、自然現象での影響をうけ、常に規則性が成り立つとは限らないことなど、正確な知識を身につけるのにはかなり勉強しなければならない。次年度では教科の融合が深くできたので、このことをまた紹介する。**この授業で活用したプリントと生徒の観察を掲載する（資料）**

2．フィボナッチ数列、黄金比、連分数

2．1　漸化式で定義されたフィボナッチ数列

・数列を一般的に表すには、第１項をa_1、第２項をa_2、第３項をa_3、…第n項をa_n、として次のように書く。

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$$

これを数列$\{a_n\}$と略記することがある。a_nを数列の一般項という。

（練習）数列２，４，８，16，…の一般項を定めよ。

・数列$\{a_n\}$が次の条件を満たしているとする。

１．$a_1 = 1$,　　２．$a_{n+1} = a_n + n$

（練習）1．をもとにして2．において$n=1, 2, 3\cdots$としたとき、第５項までの値を求めよ。

上の式のように、数列の各項はその前の項から順に**ただ１通りに定まる。**よって数列$\{a_n\}$は上の条件１．２．によって定義される。上の式２．のように、数列の各項をその前の項から順に、ただ１通りに定める規則を示す等式を漸化式という。

（問）フィボナッチ数列$\{F_n\}$は漸化式でどのように定義されるか

（答）

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$,　$F_1 = 1$,　$F_2 = 1$　（$n \geqq 3$）

（問）フィボナッチ数列$\{F_n\}$の一般項を求めよ。

（答）

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right\}^n - \left\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right\}^n\right]$$

・フィボナッチ数から黄金比、連分数と話をつなげるためには漸化式で定義されたフィボナッチ数列を用いる必要があるため、今回の話となった。数列に関

（資料）

新教科群　「自然と科学」　　**2001．4．23**

“自然の中の数列を見つける”

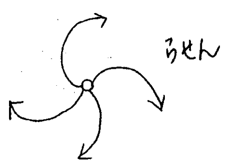
（1）実習１：マツボックリの観察

①スケッチ

②並び方の規則性

右 13

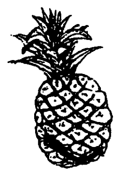
左 8



（2）コシダ、マツ、パイナップルの観察

右 13

左 8

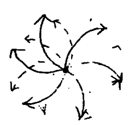


<フィボナッチの数列>

1、1、2、3、5、8、13、21、34、……

（3）自然の中の規則性を見つける

野外に出て葉のつき方、芽のつき方などの規則性を見つけて記録してください。



右、13

左、21

<感想>

自然の中のうずまきで、フィボナッチの数列があることを知ってびっくりしました。その他の自然の中の数学的な規則に興味をもちました。

1年（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

する知識が生徒に殆ど皆無だったので、基礎知識を身につけることに時間をさいた。

・生徒はフィボナッチ数列の漸化式による定義はうまくできた。しかし、最後の条件（$n \geqq 3$）の設定は初めての経験でなかなか難しいようだった。

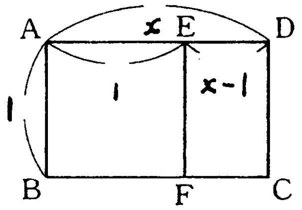
・フィボナッチ数列の一般項は無理数の範囲まで許せば、直接の式が得られることを生徒の何人かは文献を調べてその証明を与えた。

2．2　黄金比

長方形から正方形を切り取って残った長方形がもとの長方形と相似になっているとき、長方形の縦と横の長さの比を**黄金比**という。

（問）図のように長方形があって（縦の長さ＜横の長さ）縦の長さを1とすると横の長さは$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$となることを示せ。

（ヒント）図より、$1 : x = (x-1) : 1$を利用する。



（黄金比に関する数、$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$を黄金数と呼ぶことがある）

黄金比は、美と調和を表すものとして美術、工芸、建築などに利用されている。もっとも身近なものでは、最近使われなくなったテレホンカード、名刺、正五角形における辺に対する対角線の比などにあらわれる。（カードなどをもっている生徒には調べてもらう）

2．3　フィボナッチ数列と黄金数$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

（復習）漸化式で定義されたフィボナッチ数列

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \ F_1 = 1,\ \ F_2 = 1 \quad (n \geqq 3)$

について、第10項までの値を求めよ。

この数列は自然数1，2，3，…，n，…の各各に実数が1つずつ対応したそれらを順に並べた数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$$

を無限数列といい、記号$\{a_n\}$で表す。また、数列$\{a_n\}$に現れる各数を項といい、n番目の項a_nを一般項という。

（練習）フィボナッチ数列$\{F_n\}$について連続する2つのF_nの比

$$\frac{F_2}{F_1},\quad \frac{F_3}{F_2},\quad \frac{F_4}{F_3},\quad \frac{F_5}{F_4},$$

の値を求めよ。

上記の値は$\dfrac{F_2}{F_1}=1$，$\dfrac{F_3}{F_2}=2$，$\dfrac{F_4}{F_3}=1.5$，$\dfrac{F_5}{F_4}=1.66$ …，$\dfrac{F_6}{F_5}=1.6$，$\dfrac{F_7}{F_6}=1.625$となってこれらを継続することによって、

$$\textbf{黄金数}\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

に限りなく近づく。

ここで、数列$\{a_n\}$において、項の番号nを限りなく大きくするとき、a_nが一定の値αに限りなく近づく場合、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

とかき、αを数列$\{a_n\}$の**極限値**という。

この定義を使えば、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と書ける。

注意：この授業では、高校1年生に対して、漸化式や数列の極限の概念などを定義することで、生徒がしっかりと内容を理解してくれるかどうかが大変気になった。しかし、実際に授業をしてみると黄金数$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$と黄金比との関連性に生徒が非常に興味をもち、かなりの生徒が数列の極限の概念を理解してくれたことが印象に残った。

2．4　連分数と黄金数$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

連分数というのは,

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cfrac{b_4}{a_5 + \cdots}}}}$$

のような形の式のことである。

ここでは分子が1となるような形

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cdots}}}}$$

のみを扱う。

（練習）$1+\dfrac{1}{1}$，　$1+\dfrac{1}{1}$，　$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$の値を求めよ。

これらの値は漸化式で定義されたフィボナッチ数列

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \ F_1 = 1,\ \ F_2 = 1 \quad (n \geqq 3)$と関係があって、

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{F_2}{F_1},\ \ 1+\frac{1}{1} = \frac{2}{1} = \frac{F_3}{F_2},\ \ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2} = \frac{F_4}{F_3}$$

となり、さらに続けていくと、

$$\frac{5}{3}=\frac{F_5}{F_4},\qquad \frac{8}{5}=\frac{F_6}{F_5}$$

ついには、

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

となる。(なぜか)

(練習) $\frac{7}{4}$を連分数展開せよ
答:

$$\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}=1+\cfrac{1}{\frac{4}{3}}=1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

連分数の計算について上の計算式の場合、
$7=1\times4+3,\quad 4=1\times3+1,\quad 3=3\times1+0$
の計算過程で導かれている。この計算過程は2つの自然数の最大公約数を求める方法でEuclidの互除法という。この方法は必ず有限回で終了するから

有理数の連分数展開は有限である

ことがわかる。(逆にこのような有限連分数は有理数に等しい)
(宿題) 実数$\sqrt{3}$の連分数展開を求めよ。
実際に、有理数は2通りに有限連分数展開され、無理数はただ1通りに無限連分数展開される。
(有理数が2通りに連分数展開される例)

$$\frac{7}{4}=1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

$$\frac{7}{4}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{1}}}$$

特に、二次無理数は循環連分数に展開される

(注意) 連分数は近似分数を求めたり、格子点に関する結果を与えてくれる。特に、二次無理数の連分数展開から、二元二次不定方程式なども解法に重要な役割を果たす。

・生徒にとって連分数は初めてでとまどいをもっていたようであるが、既約分数の連分数展開では一所懸命計算をしている姿が印象的であった。

この授業について

連分数は生徒にとって新しい概念で、既約分数を連分数展開の計算からEuclidの互除法まで話しをしたかったが、じっさいにはなかなか難しい。

この分野は無理数の連分数展開にでてくる項の規則性など、さまざまなおもしろい内容が豊富に含まれており、この部分をまっすぐに授業をすると、かなりおもしろい話がたくさんできると思う。

3．ＤＮＡ抽出実験

教官2人（石川、渡辺）による合同授業
鳥のレバーを用いて、ＤＮＡを抽出実与する。

実験方法は次の通り。

(要約)

①200mℓのビーカーに水を入れ湯煎の準備をする。
②鳥のレバーを100g、1％トリプシン水溶液を100mℓ、クラッシュアイス100gをミキサーに入れて、1分間連続運転で粉砕する。これを各班に40mℓずつ配る。
③飽和食塩水を等量（それまでの全量に対して）加えて軽く混ぜる。
④ビーカーに移した後、100℃で5分湯煎する。
⑤手で触れるようになったら4枚重ねのガーゼで濾過する。
⑥ろ液をよく冷やして、冷エタノールを静かにいれ、ガラス棒で静かにかき混ぜる。エタノールはあらかじめ氷冷しておく。加える量は、溶液の2,3倍体積。入れすぎても全く問題ない。ＤＮＡは繊維状になるので、ガラス棒にまきついてくる。この段階では多くの不純物がふくまれている。
⑦巻き取ったものを別のビーカーに入れ、食塩水を20mℓから30mℓ程度加えてよく溶かす。このときも、不純物の混入はあまり気にせず、収量を多くするようにする。巻き取ったときについたエタノールはなるべく取り除く。エタノールが残っていると食塩水にとけないので、巻き取ったものが最後に消えてしまうことになる。そして、よく溶かす。
⑧再び湯煎し、このときやさしくかき混ぜること。
⑨濾過する。(熱いうちに濾過すること)
⑩ろ液をよく冷やしてから、冷エタノールを静かに入れ、ガラス棒で静かにかき混ぜる。

最後にＤＮＡを調べることで、ＤＮＡの塩基配列から暗号解読に至る話（構造遺伝子の塩基配列の規則性について）をした。

この授業について

この授業では暗号の準備段階として人ゲノムについて（ＤＮＡからの暗号解読）の話をした。

数学的な暗号にふれる前にＤＮＡの抽出実験を行うことで遠い目標ではあるがじかに作業をし、暗号の勉強への準備段階とすることが目標である。

4 暗号

4．1　暗号・写像の概念

情報の交換などで第三者にそれが知られないようにするためなど、対象となる情報を秘密にする技術や方法を**暗号**という。

もとになる文章を**平文**といい、暗号化した文章を**暗文**という。

通信例は次のようになる。

本人・原文から暗文

・あおいうえ　から　15234

・今日の新教科は暗号　から　今新は教暗日の科号

相手に送信すると、相手は暗文を平文に直す

相手・暗文から平文

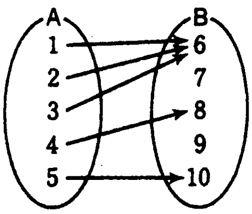
・15234　から　あおいうえ

・今新は教暗日の科号　から　今日の新教科は暗号

高校生に対する基礎知識

ものの集まりを**集合**といい、その集合に含まれる1つ1つをその集合の**要素**という。

（例）A=｛1，2，3，4，5｝　B=｛6，7，8，9．10｝



・一般に、2つの集合A，Bにおいて、ある対応によって、Aのどの要素にもBの要素が1つずつ対応しているとき、この対応を**AからBへの写像**といい、記号fなどを用いて、

$$f：\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$$

と書き表す。

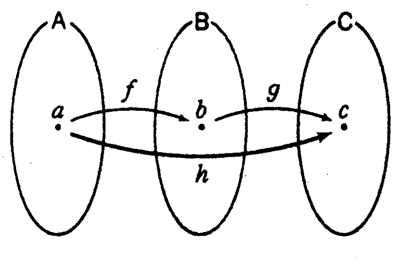
・写像$f：\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$について集合Aを$f$の定義域といい、Aの要素$a$に対応するBの要素を$f(a)$と書いて、これを$f$の$a$による像または$f$の$a$における値という。また、値全体の集合$\{f(a) \mid a \in \mathrm{A}\}$を写像$f$の値域という。

・定義域と値域が、ともに数の集合である写像を関数という。

・集合A，B，Cと写像$f：\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$，$g：\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$に対して

$$f：\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{C}$$

を2 つの写像f，gの合成写像といって$g \circ f$とかく。



4．2　暗号系（簡単なやりとり）

P：平文（plaintext）の集合、**C**：暗文（ciphertext）の集合、**K**：鍵の集合、**E**：組み立て関数の集合、**D**：翻訳関数の集合、このとき、その組

$$\mathrm{S}=(\mathrm{P},\ \mathrm{C},\ \mathrm{K},\ \mathrm{E},\ \mathrm{F})$$

を暗号系という。

$\mathrm{E}=\{\mathrm{E}_k \mid k \in \mathrm{K}\}$、$\mathrm{E}_k：\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{C}$但し$k \in \mathrm{K}$

$\mathrm{D}=\{\mathrm{D}_k \mid k \in \mathrm{K}\}$、$\mathrm{D}_k：\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{P}$但し$k \in \mathrm{K}$

但し、P，Cは長さが有限な記号列の集合である。この2つの有限集合が互いに等しい数の元を含むときは、P＝Cと仮定することが多い。また、

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{E}_k(m))=m \qquad \text{任意の } m \in \mathrm{P}$$

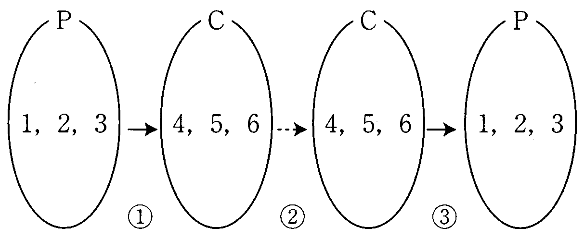
このとき、E_kは単射、D_kは全射となる。（単射や全射は名前のみ与えています。）

（例）二人一組になって、一方が平文（数値）を暗号化しそれを友人に送る。もう一方が暗号化された文章（数値）を解読する。（実際には写像の集合などの概念は難しい。）

$$\mathrm{P}=\{1,2,3\}、\mathrm{C}=\{4,5,6\}，\mathrm{K}=\{3\}$$

$\mathrm{E}=\{\mathrm{E}_3(x)=x+3\}$，$\mathrm{D}=\{\mathrm{D}_3(x)=x-3\}$

他に転置式暗号、換字式暗号などがある。



紙を渡す

（練習）二人1組になって上の例より平文、暗文、暗号化、復号化など、暗号系を作成し、やりとりを行え

（注意）紙を使ったやりとりを行う。手順として、

①：暗号化する生徒はPの要素を決定し、鍵Kと暗号化関数、復号化関数Cも決定する。

②：暗文と復号化関数を相手生徒に紙に書いて渡す。

③：復号化する生徒は②の紙を使って復号化する。

（感想）：この授業では暗号解読を紙のやりとりで行った。生徒はこのような作業が数学では関数にあたることが非常に不思議に感じたようだが、携帯電話に

よるメールの暗号化及び復号化などその仕組みのいったんにふれることができたと感じて楽しそうであった。

4. 3　ＲＳＡ暗号への準備・合同式、Euler関数

前節での生徒のやりとりは大変簡単で暗号の作り方も鍵も秘密にすることでなりたっているが（厳密には他の要素もある)、平文とそれに対応する暗文の組を手に入れれば、簡単に解読（翻訳関数を決定）される。ここでは平文とそれに対応する暗文の組を手に入れても翻訳関数は決定不可能（計算によって）であり、入手した暗文から対応する平文を決定することが体系的に実行不可能であるような暗号を構成するための準備をする。

・整数a, bに対して$a-b$が自然数mで割り切れるときmを**法として合同**といって

$$a \equiv b \pmod{m}$$

とかく。

合同式は

$$a \equiv a \pmod{m}$$

$a \equiv b \pmod{m}$ ならば $b \equiv a \pmod{m}$

$a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$ ならば

$$a \equiv c \pmod{m}$$

となり、同一の法を有す合同式は加法、減法、乗法に関する限り、等式と同様に取り扱いができる。

$a \equiv a' \pmod{m}$　$b \equiv b' \pmod{m}$ ならば

$a \pm b \equiv a' \pm b' \pmod{m}$, $ab \equiv a'b' \pmod{m}$

Euler 関数

自然数nに対して、1, 2, 3, …, nの中でnと互いに素な数の個数を

$$\varphi(n)$$

と表し、$\varphi(n)$をオイラー関数と呼ぶ。

（注意）２つの整数a, bの最大公約数が１のとき、a, bを互いに素という。

（練習）$\varphi(5)$, $\varphi(6)$, $\varphi(p)$（但しpは素数）を求めよ。

（答え）　$\varphi(5)=4$, $\varphi(6)=2$

$$\varphi(p)=p-1$$

ここから次のような事実（Eulerの定理）がある。

・自然数nに対して1, 2, 3, …, nの中でnと互いに素な数の個数を$\varphi(n)$とすると、aとnが互いに素になるような整数aに対して、

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{m}$$

となる。特にnが素数pのとき、$\varphi(p)=p-1$より、

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

4. 4　ＲＳＡ暗号の要旨

この暗号は暗号の作り方は公開されていて、鍵のみを秘密にするもので公開鍵暗号が使われている。公開鍵暗号については別紙を参照することにして、ＲＳＡ暗号を紹介する。この暗号は大きな自然数の素因数分解は一般に非常に難しく、このことが公開鍵暗号を実現している。

$\mathbf{N}=pq$（素数p, qは非公開）

P：平文（400桁以下の自然数でＮと互いに素な集合）

C：暗文（400桁以下の自然数でＮと互いに素な集合）

上の数を元にして、$i \in \mathrm{I}$の公開鍵$\{e_i, \mathrm{N}\}$、秘密鍵d_iを以下のように作る。

$\mathbf{K}=\{(e_i, d_i) \mid i \in \mathrm{I}\}$

e_i：$\mathbf{L}=\varphi(pq)=(p-1)(q-1)$と互いに素な自然数、$e_i>1$

d_i：$e_i d_i \equiv 1 \pmod{\mathrm{L}}$となるような$di$

d_iが存在するのは、e_iとＬが互いに素であることによる。

Eulerの定理より任意の$m \in \mathbf{P}$に対して、

$$m^{\mathrm{L}}=m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{\mathrm{N}}$$

が成り立つことに注意して、

$$\mathbf{E}_i: \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{C} \qquad \mathbf{D}_i: \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{C}$$
$$m \longmapsto m^{ei} \qquad c \longmapsto c^{di}$$

よって、$m^{eidi}=m^{1+t\mathrm{L}} \equiv m \pmod{\mathrm{N}}$（$m \in \mathbf{P}$, t：自然数）

ゆえに、任意の$m \in \mathbf{P}$, $c \in \mathbf{C}$に対して、

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{E}_i(m)) \equiv m \pmod{\mathrm{N}}$$
$$\mathbf{E}_i(\mathbf{D}_i(c)) \equiv c \pmod{\mathrm{N}}$$

おおきな(400桁程度の）自然数**N**の素因数分解は一般に難しく、$i \in \mathrm{I}$さんの鍵として$\{ei, \mathbf{N}\}$を公開鍵にしても、それをとく鍵$\{di\}$のＮの素因数分解がわからない限りもとめられない。

この暗号系は素数p, qを知っている管理者がいて、送信者あるいは受信者が直接あるいは間接的に$i \in \mathrm{I}$さんの鍵の組$\{ei, \mathbf{N}\}$を作成分配する。

（例）

$p=19$　$q=23$　$\mathbf{N}=pq=437$　$\mathrm{L}=\varphi(pq)=396$

$\mathbf{M}=\mathbf{C}=\{1, 2, 3, \cdots 436\}$（但しＮと互いに素）

$i \in \mathrm{I}$さんの鍵の組$\{ei, \mathrm{N}\}$、秘密鍵$\{di\}$を$ei=13$、$di=61$として、$m=2$を送信する。

・（例）　$m=2$のとき、

$\mathbf{E}_i$：　$2 \longmapsto 2^{13} \equiv 326 \pmod{437}$

$\mathbf{D}_i$：$326 \longmapsto 326^{61}=$(154桁の数) $\equiv 2 \pmod{437}$

注意：暗号の授業を行うときに、実際に関数、写像の話をすると、生徒はかなりこんらんする。授業をするときには紙に書いて、受け渡しをするなど、目に見えてわかりやすい形で助言をするとうまくいく。

5．和算と算額

教官３人による合同授業（歴史と数学）

和算は江戸時代に日本で育った数学で江戸時代以前は、西洋の知識の導入が殆ど制限されていたために、中国の算術書やそろばんを使った解析的なものが多かった。論証は導入されず、独自に数学の文化が育った。当時、数学にふれるための１つの手段として、和算書を通じて学んだ。また、数学愛好者が和算の１つの表現である算額を掲げたこと（神社仏閣に、数学の絵馬をあげる）によって、数学文化が広がった。また、この時代の有名な和算家に関孝和などがいる。(資料参照)

最近和算に関して、新たな発見があったようである。（注意）生徒は九九が奈良時代からあることをほとんど知らないことが印象的であった。実際に江戸時代に出版されている本から簡単な１次方程式を使った文章題を生徒は楽しそうに解いていた。

とくに身近な形で問題が出題されていることに驚きを感じていたようだった。2002年度の新教科ではエジプト時代からローマ、ギリシャ、インドのそれぞれの時代の歴史と数学を新教科での授業として６時間ほど行った。これらもまとめる予定である。

資料

・万葉集

（１）　言伝者三々二田八酢四小九毛心 中二我念羽奈九二

（２）　若草乃新手枕乎巻始而夜哉将間二八十一不在国

（１）　数字をそのまま利用した歌：口で言えばこともなげに耳に聞こえるものですが激しく心の中ではわたしは思っているのです．(2581番)

（２）　九九を利用した歌：新妻の手枕しはじめてから夜離れをしようか憎くはない

・和学書のひとつ
「算法闕擬抄」

東いぬい打廻二方，並ニ八拾壱間有．いぬいの方廣を問．ひつし申の方廣を問．又東方間問何程．東ひつし申打廻ニ方並ニ七拾弐間有．予答云，坪数四百八十六坪，東方四拾五間，乾方三十六間，坤方二十七間．

角Ｃが直角の直角三角形ABCにおいて，$a+c=81$，$b+c=72$ の時，各辺の長さを求めよ（図1.28）．　答　a(乾) $=36$，b(坤) $=27$，c(東) $=45$，$S=486$

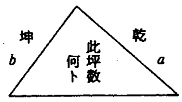


図1.28

盗人，橋の下ニテ布をぬす人毎に八端つつわくるは五たん不足，七端毎分レ時拾たん餘と云，ぬす人数何程布数何程と問．答云，盗人拾五人，布数百拾五端．

盗人が橋の下で盗品を分けている．幅1mで長さ N mの盗品を盗人 x 人が8mずつ分けると5m不足し，7mずつ分けると10m余るという．N と x を求めよ．

答　$x=15$ 人，$N=115$ m

図

写真12　福島県田村郡三春町狐田厳島神社の格子天井に明治18年に描かれた数学の問題．右端には通常の花鳥風月が描かれている．赤，青，白と鮮やかな色で着色されている．この写真は床に仰向けになり撮影した．大きさは各格子が40 cm×40 cmである．

6．参考文献・終わりに

章ごとに引用・参考させていただいた文献は次の通り。

1：自然にひそむ数のミステリーNewton別冊、P92,P93
2：（科学と通信における）数論（上）
M. R. シュレーダー著、平野浩太郎、野村孝徳共訳 コロナ杜（1995）
4：暗号理論と代数学　澤田秀樹著、海文堂（1997）P89-P92,P128-P131
5：（例題で知る）日本の数学と算額、深川英俊著　森北出版（1998）P21

その他

①「高大の連携」を生かした「青年期のキャリア形成」平成13年度文部科学省研究開発学校研究開発実施報告書（平成13年度教育学部附属中学・高等学校P33-P42）
・初等整数論講義　（第２版）高木貞治（1971）
・（改訂版、高等学校）新編・数学Ａ　（数研出版）
・（改訂版、高等学校）数学Ⅲ（数研出版）
・（新訂、中学校）数学３年（啓林館）

研究会発表等：
・全附連高等学校部会教育研究大会数学分科会（2001．10）
・名城大学数学教育研究会（2002．1）
・名大附属学校研究協議会（2002．2）

おわりに

数学の興味を引かせる教養的な数学や、極限などの概念をまっすぐに扱った本はいつの時代にもたくさん出版されている。しかし、今回の新教科のように、それをじっさいに半年間授業を行い、なおかつ「教科の融合」をもめざした授業は、はじめての試みであろうと思われる。しかし、まだ初年度でもあり、教科間の融合はかなり薄いので2002年度はさらにそれを深めている。

この内容を２つの研究会で発表したとき、さまざまなご助言をいただいた。一番多かったのはもっと１つの内容について深い授業を行ったほうが良いのではないかと言う意見、数学と他教科の融合の必要性についての意見など、私にとって、いろいろと参考になる意見がでてきた。平成14年度は、今回の授業内容なども参考にして、さらに精進していきたいと考えている。もし、この授業内容を参考に、少しでも授業に使用していただけたならばその実践報告を是非、渡辺まで知らせて欲しいと思います。

授業内容についてはこの13回の授業を通じて、フィボナッチ数、黄金数などできるだけ関連づけた項目にしたため、いつもの数学とちがい生徒が非常にいきいきとした目をしていたことが印象的でした。今後の数学教育の未来に大切なことは、今回のように教科書にもながれをもたすことで、生徒の興味をひきよせる教材内容にするべきと思われます。また、今後の課題として、

・より深い教科の融合
・暗号などの専門的な内容をできるだけ予備知識の少ない形で伝え、生徒に考えさせる
・高大の連携

についての取り組みが2002年度の新教科で実施をしています。取り組み終了後、またまとめたいと思います。