数学科

辺と対角線のなす角がすべて円の2n等分角になる四角形について
中学図形問題の教材研究：円分多項式を用いた代数的判定法の発見

福谷　敏

【抄録】「辺と対角線のなす角がすべて１０°の整数倍である特殊な四角形」をめぐる中学幾何の「四角形の角の問題」の難問（例として，ラングレイの問題）が多くある。この特殊な四角形をすべて扱うことのできる代数的方法を発見したので報告する。ここでは,「１０°の整数倍」を「円の２ｎ等分角の整数倍」に拡張し,「辺と対角線のなす角がすべて２ｎ等分の整数倍である特殊な四角形」($n = 18$ のときが１０°の場合）に適用できる方法を得た。

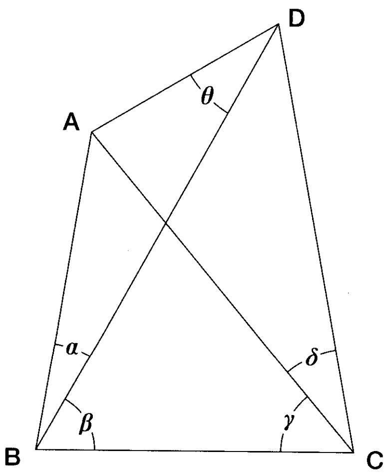
本質的に「正ｎ角形の頂点からなる特殊な六角形（あとで「高須の六角形」と名付ける）」の分類に帰着する。これを，円分多項式を利用して実行するのが本稿のアイディアである。多項式の割り算（円分体の数の計算）を利用し，近似計算の不確かさも克服する代数的なアルゴリズムが発見できた。

【キーワード】　ラングレイの問題　四角形の角の問題　「１０°の整数倍」「円の２ｎ分角」
高須の六角形　円分多項式　多項式の割り算

1　問題の設定の経緯

初等幾何は，論理と直感の総合の訓練として適当な教材を多く提供している。その一方で，非常に特殊な事情が隠れている有名な難問に悩まされることも多い。次の角度の問題も有名なそのような問題の代表と思われる。

問題０：下の図で、角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を与えたとき，θ を求めよ。



この問題は，角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を具体的に与えるごとに，解法に工夫を要する中学数学の難問となりうる。また，角度 θ は，きりのいい数の角で表示できるものとならなければならない。

ラングレイの問題として，知られているのが，角 $\alpha = 20°, \beta = 60°, \gamma = 50°, \delta = 30°$ の場合である。

ラングレイの問題は，巧妙な（あまり自然にみえない）補助線を引くことで，中学２年生でも解くことができる。このような補助線の例として，辺 CD 上に点 E を，$\angle \mathrm{CBE} = 20°$ となるようにとり，他の頂点と結ぶものをとる方法がある。

この問いを初めて聞いたときの，高校数学教師としては，三角比で解決済みの問題の原理的に易しい問題と考えていた。無理に初等幾何的解法という制約をつけるから難しいだけと考えていた。もちろん，面倒なルーチン計算に耐える根気は必要である。

実際，解いてみる。

まず，相似で不変な性質なので，初めから $\mathrm{BC} = 1$ としてかまわない。$\triangle \mathrm{ABC}, \triangle \mathrm{BCD}$ について，正弦定理を用いて,

$$\mathrm{AB} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}, \quad \mathrm{BD} = \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}$$

と辺 AB,BD を角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の関数として表す。

$\triangle$ABD について，$\angle \mathrm{ADB} = \theta, \angle \mathrm{DAB} = \pi - \theta - \alpha$ について，正弦定理を用いると，次の関係式が得られる。

$$\sin\gamma\sin(\beta+\gamma+\delta)\sin(\theta+\alpha)$$
$$= \sin(\gamma+\delta)\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\theta, \qquad (*)$$

また，角 θ は角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の関数と表したいなら，準備として AD を余弦定理より，

$$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\mathrm{AB}\ \mathrm{BD}\cos\alpha}$$

と４角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の関数と表示しておき，正弦定理または余弦定理を用いて，

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\mathrm{AB}\sin\alpha}{\mathrm{AD}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AD}\,\mathrm{BD}}\right) \qquad (**)$$

となる。

また，sin の関係式から加法定理を用いて，$\sin\theta$, $\cos\theta$ の一次方程式から，$\theta =$

$$\arctan\left(\frac{\sin\alpha\sin\gamma\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \cos\alpha\sin\gamma\sin(\beta+\gamma+\delta)}\right)$$

という表示をうる。

$\theta =$ を４角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の関数ととらえる３つの方法が得られた。三角形の角 $0 < \theta < \pi$ を扱うので余弦の逆三角関数を用いる $(**)$ のが，定義域を考えると基本的である。他の２つの表示にも一長一短がある。

以上により，高校の数学の問題として，**問題**は**解析的には**十分な解答が得られると考えた。

ここで，θ の３つの表示のどれかに，角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の具体的な角を代入すればいい。４つの変数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に任意の角を与えれば θ の値も求まるはずである。

コンピュータを用いるとラングレイの問題では，
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (20°, 60°, 50°, 30°)$ とすると
$\theta = 30.0000000000\cdots°$ と計算される。

角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ すべて１０°の整数倍で与えたとき θ を計算することも可能である。辺 BA, CD を延長して，辺 BC で囲まれる三角形が鋭角の場合すべてを数式処理ソフトを用いて計算させると，直ぐに結論をだす。以下の表は，順に調べたときの１部分である。２つ目の例がラングレイの問題となる。

α	β	γ	δ	θ
20°	60°	50°	20°	50.000000°
20°	60°	50°	30°	30.000000°
20°	60°	50°	40°	17.877987°
20°	60°	60°	10°	94.882489°

θ が「角が１０°の整数倍」となるものも近似的ではあるが，確信を持って予想できる。例えば、ラングレイの問題の次は $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (20°, 60°, 60°, 20°)$ のとき，$60.00000\cdots°$，その次は $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (20°, 60°, 70°, 10°)$ のとき，$70.00000\cdots°$ というような答えが返される。

しかし，$30.00000\cdots°$ が本当に 30° と結論できるかと問い返してみる。非常に精密であるが，近似である。ここで，ラングレイの問題の場合に，厳密に示すには改めて，加法定理などを利用して，30° が関係式 $(*)$ を満たし，また，関係式の両辺の三角関数のグラフと特徴などから解があってもただ一つであることを示して証明することになる。この等式のチェックも加法定理（式 $(**)$ を利用するなら根号の代数的計算）を利用しなければならない。結局，各場合に詰め問題は **代数的・整数論的な意味で解くこと**に帰することに気づく。ここが，本稿の出発点である。

この点をはっきりさせるため，「中学数学での意味で解く」ことを意識して「問題」を書き直す。

> **問題（ n ）**　角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をすべて円の $2n$ 分角（ $2\pi/(2\times n)$ の整数倍）で与えたとき θ も円の $2n$ 分角（$2\pi/(2\times n)$ の整数倍）となるかどうか判定し，そうならその値を求めよ。

つまり，解である θ がどのような集合に入るかも指定した上で解けるか否かを問題にする。

$n = 18$ の場合は，初めの問題「角が 10°（$= 2\pi/(2\times 18)$）の整数倍」である条件のもとで解くことになる。

「角が 10°（$= 2\pi/(2\times 18)$）の整数倍」**問題**$(n = 18)$ と出会った当初，上の方法で，数式処理プログラムを動かした。小数以下第１０位の誤差を許して，「10° の整数倍である場合」を拾いあげてみた。この分類は，この誤差の問題を除くと，数分から数時間の数式処理ソフトの稼働で全種類の近似解や θ が「10° の整数倍である場合」の候補を洗い出した。ラングレイの問題と同様に，加法定理や根号計算が易しい場

合は，厳密に整数倍であることが確認できたが，統一的な方法は見つからなかった。

我々は，最終的に「近似」も避け，補助線の状況もある程度理解できる統一的な方法に達することができるかが問題であった。

この問題について，本校を退職された柳田先生から本校の紀要（１９７５年）に先行研究（高須氏他）の結果があることを教えて頂いた。問題 18 について，「辺と対角線のなす角がすべて 10° の整数倍である特殊な四角形」という報告が載っている。数値計算による方法で，教育現場でコンピュータが使われ始めた１９７０年代に，とその膨大な例を整理するために，初等幾何の性質を根拠として，円に内接した正 18 角形の頂点を使った「特殊な六角形」（あとで高須の六角形と定義する）を分類に書き直し整理している。また，前節で説明した「近似」の問題は，洗い出した個々の場合に初等幾何の証明をそれぞれ工夫して与え，大変な労力でラングレイの類題をすべて解くことになる。

しかし，我々は「円に内接する特殊な六角形の分類」を直接攻撃することで，代数的な数の議論を用いて，近似の壁を破ることができた。当初の「問題 $n=2,4,6,\ldots,18,\cdots 60$」はすべて解決できた。ここでは，

１）「10° の整数倍」の代わりに「円の $2n$ 等分角の整数倍」に拡張したかたちで定式化できたこと，

２）数値の誤差の出ない多項式の割り算という代数的なアルゴリズムを発見したこと，

３）n が 60 までの自然数の場合，「高須の六角形」は現在の普通のパソコンを用いて数時間の計算ですべて分類できたこと，

４）「整数度」の場合について，$n=180$ の場合，最小の内角が１度である「高須の六角形」の分類で，約 2000 時間かかり完了したが，すべての分類は現在進行中であること，

を報告する。

核心は，初等幾何と三角比の条件の変わりに，「複素数平面の単位円」で解釈し，計算は「数値計算」にかえて「円分多項式による割り算」で代数的に処理したところである。

2　円分多項式を利用した解法

まず，ラングレイの問題について，「複素数平面の単位円」と「円分多項式による割り算」を利用した方法の考え方を説明する。

利用する性質１：複素数平面の単位円上の異なる６点（点を表す複素数）を $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$ とする。異なる３つの直線 p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3 が一点で交わる条件は

$$p_1q_1(p_2+q_2-p_3-q_3)+p_2q_2(p_3+q_3-p_1-q_1)+p_3q_3(p_1+q_1-p_2-q_2)=0$$

である。

証明は，複素数平面の直線の式と３直線が一点で会する条件を行列式が零になる条件で置き換えて導き出せる。また，複素数平面の偏角や絶対値の性質を利用すれば幾何的にも導くことができる。

「円分多項式の割り算」というのは，「円分多項式」の知識が用いて，次のように述べることができる（代数学の教科書参照，例えば，服部昭著「現代代数学」）。$n=18$ に限れば、複素数を習った高校生にも、以下の方法は、個別に証明しながら解かせることもできる。

利用する性質２：１の n 乗根を $\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とおく。このとき，ζ を解とする有理数係数既約多項式 $\Phi_n(X)$（首位の係数は１とする）とおく。これは，n 等分円分多項式といわれるもので，次数はオイラー関数を用いて $\phi(n)$ と表される。　このとき，任意の ζ の有理数係数多項式で表される量 $\sum_{k=0}^{m} a_k\zeta^k$ は，円分方程式で表される関係式 $\Phi_n(\zeta)=0$ を利用して，ある有理数係数 b_k　$(k=1,2,\cdots,\phi(n))$ を用いてただ一通りに $\sum_{k=0}^{\phi(n)} b_k\zeta^k$ と表示できる。

大学で体論の初歩を学んだ人なら

「体 $\mathbf{Q}[\zeta]$ と体 $\mathbf{Q}[X]/\Phi_n(X)$ は，ζ を X の同値類に対応させることで同型になる。」

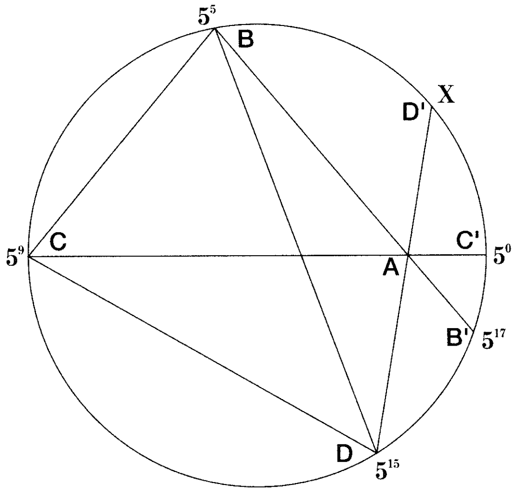
と言い換えた方が簡単だろう。

以上の準備で，ラングレイの問題を例にとって，我々のアイディアを説明しよう。

頂点 B, C, D の外接円 (半径１としても一般性を

失わない）を考える。この円を複素平面上の単位円と考える。点 A はこの円の内部にある。このとき，CA を延長して円と再び交わる点を C' と呼ぶことにする。同様に B', D' を定める。C' を複素数平面の 1 となるとしてもよい。$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ とおく（実際は $n = 18$）。円周角の定理によって，中心角を考えると，

$C'(\zeta^0)$,$B(\zeta^5)$, $C(\zeta^9)$, $D(\zeta^{15})$,$B'(\zeta^{17})$ となり，このとき，D' を表す複素数 X が $\zeta^k(k = 1,2,3,4,5)$ の形で表示できるかが問題となる（下図を参照)。



まず,「性質１」から，条件は

$X\zeta^{15}(\zeta^5 + \zeta^{17} - \zeta^0 - \zeta^9) + \zeta^5\zeta^{17}(\zeta^0 + \zeta^9 - X - \zeta^{15}) + \zeta^9\zeta^0(X + \zeta^{15} - \zeta^5 - \zeta^{17}) = 0$

また，ζ は，$\zeta^{18} = 1, \zeta^9 = -1$ をみたすが，既約な方程式は $\Phi_{18}(\zeta) = \zeta^6 - \zeta^3 + 1 = 0$ である。最後のものが，円分方程式である。「性質２」の内容は ζ の多項式は，みな ζ の５次以下の多項式で表示できるということである。上の条件式は

$(-\zeta^5 - \zeta^4 + \zeta^2 - 1)X + (\zeta^3 + \zeta^2 - \zeta - 1) = 0$

と整理できる。左辺に $X = \zeta^1$ を代入すると，$-\zeta^5 + \zeta^3 - \zeta^2 - 2\zeta$ となり，条件を満たさない。次に，左辺に $X = \zeta^2$ を代入すると見事に 0 となり解となる（X の一次方程式なので解はこれだけ)。もとのラングレイの問題でいうと $5\pi/18 - \theta = 2\pi/18$ が分かったことになり，$\theta = 3\pi/18 = 30°$ が導かれる。この解法は非常に一般性がある。

3　高須の六角形

前節の例題で，元の四角形の問題を，単位円上の正 n 角形 ($n = 18$) の６頂点からなる特別な六角形があるか否かを問う問題に置き換えたアイディアが核心であった。この特別な六角形に名前をつけておこう。

定義：凸六角形（以下簡単に六角形と呼ぶ）の対角線のうち，この六角形を２つの四角形に分けるものをこの論文では仮に「中対角線」と呼ぶこととする。単位円上の正ｎ角形の６頂点からなる六角形について，その３本の「中対角線」が１点で交わるとき「高須の六角形」呼ぶことにする。

定理：「辺と対角線のなす角がすべて $2\pi/2n$ の整数倍である特殊な四角形」は次のいずれかである：

１）「正ｎ角形の４頂点からなる四角形」。

２）「正ｎ角形の６点からなる高須の六角形に埋め込まれる。すなわち六角形の連続した３つの頂点と両端を通る中対角線で囲まれた四角形」。

証明は比較的易しい。

証明：「辺と対角線のなす角がすべて $2\pi/2n$ の整数倍である特殊な四角形」があるとする。この四角形が円に内接するとき，円周角の定理より，１）の場合となる。１）でないときは，この四角形の頂点のうち３頂点を通る円Ｃを考える。３頂点（順に P_1, P_2, P_3 とする）をうまくとると他の頂点（Ａとする）が円の内部にあるようにできる。直線 AP_i と円Ｃの交点で P_i と異なる点を Q_i とする。円に内接する六角形 $\{P_1P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$ ができるが円周角の定理より正ｎ角形の頂点のうちの６点となることが分かる。また P_iQ_i は中対角線で，１点 A で交わるので高須の六角形となる。

逆に，１）２）の場合，条件を満たす四角形となる。

従って,「ｎを指定したときの元の四角形の問題」で解けるものは，正ｎ角形の４頂点からなる四角形か，６頂点からなる「六角形」のうち「高須の六角形」に埋め込まれたものであることが分かった。我々の，ｎを指定したとき,「高須の六角形」をすべて見つけだせば,「辺と対角線のなす角がすべて $2\pi/2n$ の整数倍である特殊な四角形」をすべてとりだすことができる。

特に，角が $10°$（$1°$）の整数倍のものは $n = 18$（$n = 180$）の場合になる。

「高須の六角形」について，現在の筆者のコンピュータで短時間の稼働で $n=60$ まで分類できる。以下の続く次節で $n=60$ までの「高須の六角形」の分類結果の一部を記述する。また，次々節では，実際に使用した数式処理プログラム MATHMATICA のプログラムを載せる。

4　円分多項式を利用した分類

$n=18$ の場合の高須の六角形の分類

型番号	代表元	同値類個数
1	{0, 1, 2, 3, 4, 11}	6
2	{0, 1, 2, 3, 5, 15}	12
3	{0, 1, 2, 4, 5, 8}	12
4	{0, 1, 2, 4, 6, 12}	12
5	{0, 1, 2, 4, 7, 14}	12
6	{0, 1, 2, 4, 8, 15}	12
7	{0, 1, 2, 4, 10, 16}	6
8	{0, 1, 2, 5, 6, 8}	12
9	{0, 1, 2, 5, 7, 11}	12
10	{0, 1, 2, 5, 8, 13}	12
11	{0, 1, 2, 5, 10, 15}	6
12	{0, 1, 2, 6, 8, 11}	12
13	{0, 1, 2, 6, 10, 14}	6
14	{0, 1, 2, 7, 10, 13}	6
15	{0, 1, 2, 8, 10, 12}	6
16	{0, 1, 2, 9, 10, 11}	3
17	{0, 1, 3, 5, 6, 12}	6
18	{0, 1, 3, 5, 7, 15}	12
19	{0, 1, 3, 5, 8, 16}	12
20	{0, 1, 3, 6, 7, 11}	12
21	{0, 1, 3, 6, 8, 14}	12
22	{0, 1, 3, 6, 10, 16}	12
23	{0, 1, 3, 7, 8, 11}	12
24	{0, 1, 3, 7, 10, 15}	12
25	{0, 1, 3, 8, 11, 15}	12
26	{0, 1, 3, 9, 10, 12}	6
27	{0, 1, 3, 9, 11, 14}	12
28	{0, 1, 3, 11, 13, 15}	12
29	{0, 1, 4, 7, 8, 13}	6
30	{0, 1, 4, 8, 10, 15}	12
31	{0, 1, 4, 9, 10, 13}	6
32	{0, 1, 5, 9, 10, 14}	3
33	{0, 2, 4, 6, 8, 13}	6
34	{0, 2, 4, 7, 10, 14}	12
35	{0, 2, 4, 7, 11, 15}	6
36	{0, 2, 4, 8, 11, 14}	6
37	{0, 2, 4, 9, 11, 13}	3
38	{0, 2, 5, 8, 10, 14}	6
39	{0, 2, 5, 9, 11, 14}	6
40	{0, 3, 6, 9, 12, 15}	1

3行目の数字は，回転や折り返しを無視しないと中心角の間隔のパターンがいくつあるかを表している。

n を指定したときの，代表元の表示方法を説明する。複素数平面で単位円上の1の n 乗根たちからなる正 n 角形の頂点を利用して表示する。例えば，上の $n=18$ の場合なら，第22行目の $0,1,3,9,10,16$ は，頂点が $\zeta^0,\zeta^1,\zeta^3,\zeta^6,\zeta^{10},\zeta^{16}$（ただし，$\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$）となる六角形を表す。前々節のラングレイの問題を解くときの六角形 $C'D'BCDB'$ は $\zeta^0,\zeta^2,\zeta^5,\zeta^9,\zeta^{15},\zeta^{17}$ となる六角形が出てきたが，これは，$2\frac{2\pi}{18}$ だけ回転したものであることが分かる。したがって，ラングレイの問題は22行目の六角形に帰着される。同様にして,「辺と対角線のなす角がすべて $2\pi/2n$ の整数倍である特殊な四角形」はこの４０個のどれかに帰着される。

また，ラングレイの問題の四角形は頂点 D, A, B の外接円を利用すると27行目の六角形に帰着される。また，最初に示した「中学の解き方」の補助線を引くとき用いた巧妙な E はこの六角形の外接円の中心であった。こうすると，補助線の秘密も見えてくる。

$n=6$ の場合は自明な正六角形１個

$n=8$ の場合

型番号	代表元	同値類個数
1	{0,1,2,3,4,6}	6
2	{0,1,2,4,5,6}	3

自明でない最初の例である，この１型でも，$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(22.5°,22.5°,90°,45°)$ のラングレイの類題ができる。

$n=10$ の場合

型番号	代表元	同値類個数
1	{0, 1, 2, 3, 4, 7}	6
2	{0, 1, 2, 4, 6, 8}	6
3	{0, 1, 2, 5, 6, 7}	3
4	{0, 1, 3, 5, 6, 8}	3

$n=12$ の場合

型番号	代表元	同値類個数
1	{0, 1, 2, 3, 4, 8}	6
2	{0, 1, 2, 3, 5, 10}	6
3	{0, 1, 2, 4, 5, 7}	12
4	{0, 1, 2, 4, 6, 9}	12
5	{0, 1, 2, 4, 7, 10}	6
6	{0, 1, 2, 5, 7, 9}	6
7	{0, 1, 2, 6, 7, 10}	3
8	{0, 1, 3, 5, 6, 9}	6
9	{0, 1, 3, 6, 7, 9}	6
10	{0, 2, 4, 6, 8, 10}	1

紙面の関係で載せられないが $n=60$ までは、24時間以内の計算で調べられる。たとえば $n=36$ は高須の六角形は166型（種類）存在し、簡単に列挙できる。

5　数式処理　分類プログラム

実際に「高須の六角形」の分類に使った数式処理 MATHEMATICA 分類プログラムは基本的に３つの部分からなる。ここでは，$n=36$ の場合を用いて説明する。

まず第一の文は，判定する関数を定義して，正36角形の頂点を虱潰しに高須の六角形を選び出す部分である。判定の所に円分多項式（従って円分体）による割り算を利用している。

```
In[1]  poly=36 ;
In[2] hantei[poly][n1_, n2_, n3_, n4_, n5_] :=
   PolynomialRemainder[
     Expand[x^0 x^n3 (x^n1 + x^n4 - x^n5 - x^n2) +
         x^n1 x^n4 (x^n2 + x^n5 - x^0 - x^n3)+
         x^n2 x^n5 (x^n3 + x^0 - x^n1 - x^n4)],
     Cyclotomic[poly, x], x]
In[3] k=0;
      For[n1=1,n1<poly-4,
   For[n2=n1+1,n2<poly-3,
For[n3=n2+1,n3<poly-2,
 For[n4=n3+1,n4<poly-1,
  For[n5=n4+1,n5<poly,
{
       If[hantei[poly][n1,n2,n3,n4,n5]==0,
{k++,solu[poly][k]={0,n1,n2,n3,n4,n5},
Print[{k "kata",solu[poly][k]}]}]
}
     ;n5++]; n4++]; n3++]; n2++]; n1++]
In[4] l[poly]=Table[solu[poly][i],{i,1,k}];
```

ここまでで，高須の六角形の内複素数平面での１を含むものはすべて見つけだすので，稼働時間の大半がこの部分で使われる。ここで，見つけた結果全体を集合と見なして，次のステップでこの集合を，さらに，回転や折り返した同じものを同値類に分ける作業をする。

```
In[5] <<DiscreteMath`Combinatorica`

In[6] frot[{a1_,a2_,a3_,a4_,a5_,a6_}]:=
      {a2-a2,a3-a2,a4-a2,a5-a2,a6-a2,poly-a2}

In[7] auxdata=l[poly];
In[8] count=0;
      For[i=1,auxdata!={},{
     tmpdata=auxdata[[1]],
     auxjuzuorbit=Union[
      Table[Nest[frot,tmpdata,k],{k,0,5}],
          Table[
             Nest[frot,Reverse[tmpdata[[6]]-tmpdata],k],
             {k,0,5}]
                       ],
     juzuorbit[poly][i]=auxjuzuorbit,
    Print[i "kata",auxjuzuorbit,Length[auxjuzuorbit]],
auxdata=Complement[auxdata,auxjuzuorbit],
count++
                        };
   i++];
```

さらに，対応する同値類の代表を単位円上で図示する命令が次の部分である。

```
In[9]  fcossin[n_]:={Cos[n 2  Pi/poly],Sin[n 2 Pi/poly]}
In[10] plot6pol[{n0_,n1_,n2_,n3_,n4_,n5_}]:=
       Show[Graphics[{GrayLevel[0.5],Thickness[0.001],
        Line[ Transpose[fcossin[{n0,n1,n2,n3,n4,n5,n0}]]],
        Circle[{0,0},1]}],
       AspectRatio->Automatic]
In[11] For[i=1,i<count+1,plot6pol[( juzuorbit[poly][i][[1]
       i++]
```

以上によって分類し，その六角形をすべて図示できる。

また，$poly=36$ の 36 の代わりに好きな数字にしてみると，いろいろな円分角について，分類が時間の許す限り実行できる。

6　まとめと今後の課題

「ラングレイの問題」は，生徒の素直なセンスを養うのにふさわしくない例と筆者は感じていた。しかし，裏側にこのような美しい円分体の代数学的な背景があることが分かった。ここでの考察により，ラングレイの問題の類題は，教師にとっては機械的に解くアルゴリズムのある問題となった。また，補助線の秘密も，問題の難しさも理解が深まった。教材研究のテーマとして，価値が高いものであった。このような問題の安直な使い方は教師として避けなければならぬ場面もある。しかし，現実にある難問にどう建設的・教育的な意味をつけたり，とくに知的好奇心を養うような素材にできるかは，我々の教材研究の目的になると確信した。

また，本稿の内容自体では，今後，計算をどこまで実行するか。また，n を固定したとき，「解けない」例を，もう少し深く考え「どの程度解けないのか」を代数的にはっきりさせたい。複素数平面の単位円上の代数的で，１のべき根でないものの様子も深く理解できそうである。時間をかけ考えてみたいことが多く残った。