

2002 年度博士論文

均質化理論によるセル状固体の
微視的座屈と巨視的局所化の解析

名古屋大学大学院工学研究科
マイクロシステム工学専攻

奥村 大

名古屋大学図書



11441358

目 次

第1章 緒 論	1
1.1 研究背景	1
1.1.1 セル状固体	1
1.1.2 微視的座屈と巨視的局所化の実験	2
1.1.3 従来の解析方法	5
1.2 本研究の取り組み	8
1.3 本論文の構成	9
記号一覧	11
第2章 有限変形の均質化理論	17
2.1 はじめに	17
2.2 基礎式	18
2.2.1 微視的關係式	19
2.2.2 巨視的変数	21
2.2.3 巨視的応力速度の關係式(2.14)の導出	22
2.3 均質化理論	23
2.3.1 仮想仕事の原理	23
2.3.2 均質化方程式	24
2.3.3 基本解	25
2.3.4 物質客観性原理の検討	26
2.4 まとめ	28

第 3 章 微視的分岐条件	29
3.1 はじめに	29
3.2 微視的対称分岐条件	30
3.2.1 微視的対称分岐条件の導出	30
3.2.2 $\langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle$ が任意の値となる証明	33
3.3 微視的分岐条件	35
3.3.1 単純分岐の場合	35
3.3.2 多重分岐の場合	38
3.4 まとめ	39
第 4 章 均質化理論を用いた微視的分岐の解析方法	41
4.1 はじめに	41
4.2 有限要素法による離散化	41
4.2.1 擾乱変位速度方程式	41
4.2.2 微視的分岐条件	43
4.3 解析手順	44
4.4 まとめ	45
第 5 章 正六角形弾性ハニカム面の面内座屈モード解析	47
5.1 はじめに	47
5.2 解析条件・方法	48
5.2.1 負荷条件	49
5.2.2 セル壁の材料特性	49
5.2.3 セル集合	50
5.2.4 有限要素分割	50
5.3 解析結果	51
5.3.1 座屈荷重と分岐の多重度	51

5.3.2	座屈モード	54
5.3.3	微視的分岐条件の検討	59
5.4	まとめ	62
第6章	正六角形弾性ハニカムの面内座屈後解析	65
6.1	はじめに	65
6.2	座屈モード	66
6.3	等二軸圧縮座屈後解析	68
6.3.1	拘束と負荷条件	68
6.3.2	解析結果	70
6.4	二軸圧縮座屈後解析	73
6.5	巨視的不安定	77
6.5.1	巨視的不安定条件	78
6.5.2	面内における巨視的不安定条件	78
6.5.3	解析結果	80
6.6	まとめ	82
第7章	正六角形弾塑性ハニカムの面内座屈解析	83
7.1	はじめに	83
7.2	解析条件・方法	85
7.2.1	負荷条件	85
7.2.2	材料特性	85
7.2.3	セル集合	87
7.2.4	解析方法	87
7.3	解析結果	89
7.3.1	微視的分岐点	89
7.3.2	微視的分岐モード	90
7.3.3	微視的分岐後挙動	92

7.3.4 巨視的不安定条件との関係	94
7.4 まとめ	94
第8章 結 論	95
付録 A 有限要素解析	97
A.1 B_L と B_{NL}	97
A.2 C と T	100
A.3 ペナルティ法	102
A.4 アイソパラメトリック要素	104
付録 B 微視的分岐点と座屈モードの解析方法	107
B.1 微視的分岐点の探索方法	107
B.2 独立な座屈モードを求めるための拘束	108
B.3 花状座屈モードと巨視的応力・ひずみ状態	109
付録 C サブストラクチャ法を用いた解析方法	111
参 考 文 献	113

第 1 章

緒 論

1.1 研究背景

1.1.1 セル状固体

セル状固体とは，セルの稜および面を構成する支柱または平板の相互につなが合わされたネットワークからなる構造体のことである[1]．このような物質は自然界に多く見られ，木材やコルク，スポンジ，珊瑚などがその例である．人類はこうした天然のセル状固体を何世紀にもわたって利用してきた．エジプトのピラミッドからは少なくとも 5000 年以前に作られた木製品が発見されているし，ローマ時代にはワインびんの栓としてコルクが用いられていた．コルクやスポンジを自作の顕微鏡で観察した Hooke は，これらがセルを基本単位として構成されていることをはじめて発見した．そして彼の著作 *Micrographia*[2] 中の詳細なスケッチからもわかるように，セル状固体の微視構造は，コルクのようなハチの巣状の非常に高い規則性を持つものから，スポンジのような不規則な 3 次元ネットワークを持つものまで多様性に富んでいる．

近年，人類はみずからセル状固体をつくりだすに至った．これらは体積中に多くの気孔を有し，固体材料と比べて高比剛性・強度で衝撃吸収性にも優れており，日常生活から航空宇宙分野の最先端に至るまで幅広く利用されている[1]．紙やポリマー，金属から作られる，ハチの巣状の 2 次元的なセル状固体はハニカムと呼ばれる．これら

は、安価なドアから宇宙航空用部材に至るさまざまな分野でサンドイッチパネルのコア材として利用されており、とりわけアルミニウムハニカムは宇宙船アポロ11号の着地時の緩衝材として用いられた[1]。3次元的なセル状固体はフォームと呼ばれ、高分子を発泡化してつくられるポリマーフォームは、クッション材や梱包材、衝撃吸収材として身近なところで利用されている。今日では金属を発泡化する技術も確立され、商業的にアルミニウムやニッケルのフォームが生産されるようになった[3]。これらは安価でかつ成形性も良いので、工業材料としての使用が期待されている。

こうした背景から、ハニカムやフォームといったセル状固体の力学的特性を知ることが望まれている。しかしながら、セル状固体の力学的特性は、微視構造の変形特性の影響を受けるから、固体材料の場合に比べて複雑になる[1,3]。この中でも特に複雑なものは、微視構造の座屈を伴う圧縮変形特性である。

1.1.2 微視的座屈と巨視的局所化の実験

セル状固体に圧縮負荷を加えると、セル壁あるいはセル辺に座屈が生じ、セル形状は複雑に変化する。この座屈は微視構造の座屈であるから微視的座屈と呼ばれ、この微視的座屈が発生すると、セル状固体は急激に剛性を失い最終的に崩壊する。したがって、微視的座屈挙動を調べることはセル状固体の圧縮強度を評価する上で重要となり、これまでに多くの実験による観察が行われている[1,3-24]。

Gibsonら[1,4,6]は、正六角形ゴムハニカム(図1.1(a))の面内単軸および二軸圧縮の実験を行い、微視的座屈が生じると微視構造には規則的な座屈モードが現れることを観察した(図1.1(b),(c))。これらの座屈モードは、微視構造を構成するセル壁の座屈が複雑に組み合わさって生じており、図1.1(b)の単軸圧縮座屈モードと図1.1(c)の二軸圧縮座屈モードで大きく異なる。また、Papka-Kyriakides[9,15]は図1.2(a)に示される高分子の円筒ハニカムに対して同様な実験を行い、Gibsonらの結果と同様にして、図1.2(b),(c),(d)に示されるように、複雑な座屈モードが現れることを観察した。特に、等二軸圧縮で生じる図1.2(d)の座屈モードは、その幾何学的形状から花状座屈モードと呼ばれ[25-27]、Chung-Waas[13,20,23]によっても観察されている。

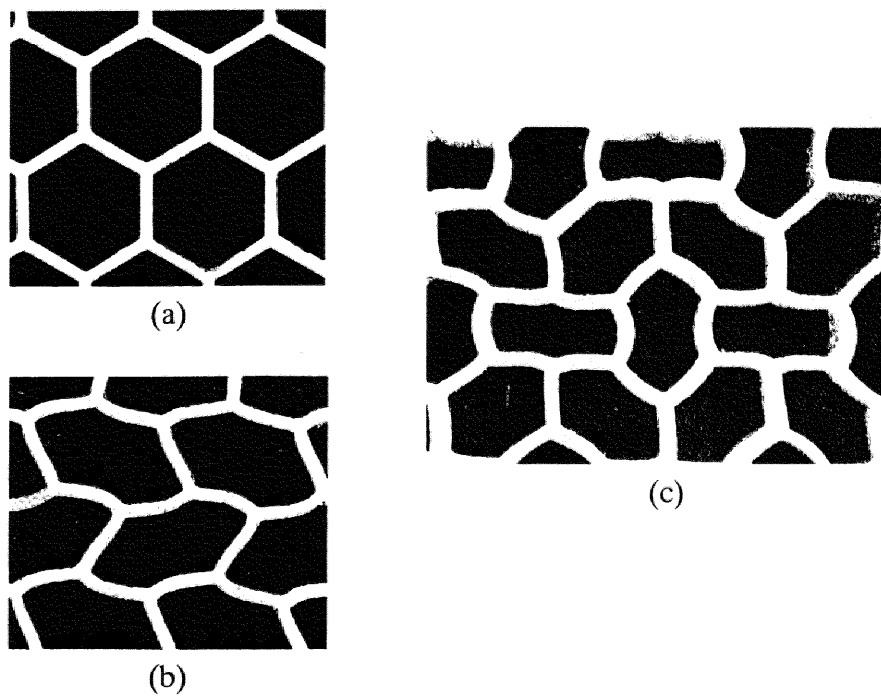


Fig. 1.1 Buckling mode of hexagonal rubber honeycombs[1,4,6], (a) undeformed, (b) uniaxial compression, (c) biaxial compression.

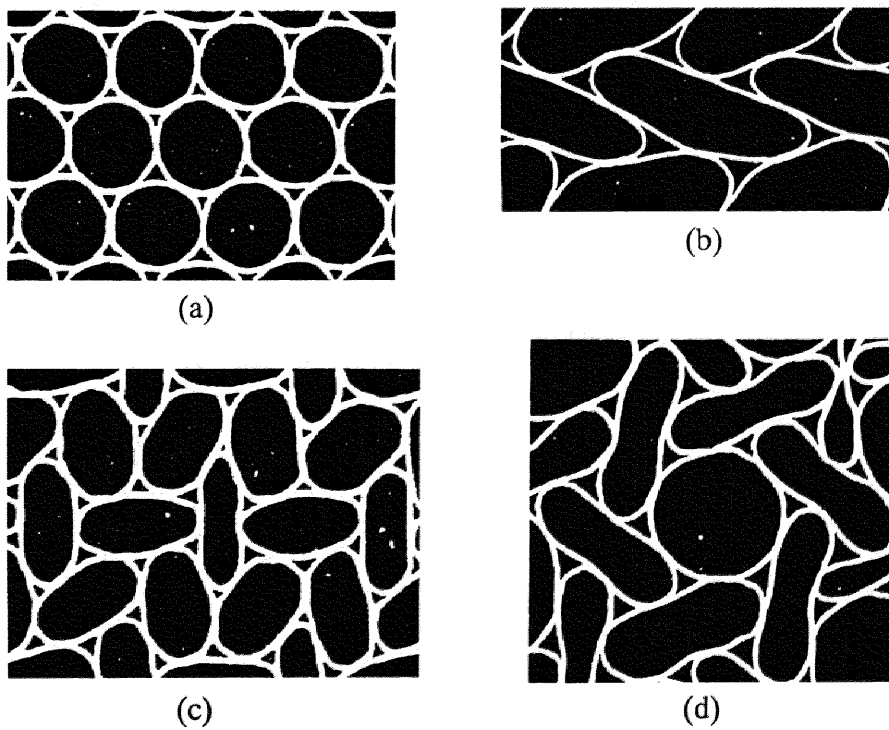


Fig. 1.2 Buckling mode of circular polycarbonate honeycombs[9,15], (a) undeformed, (b) uniaxial compression, (c) biaxial compression, (d) equi-biaxial compression.

さらに、これらの実験[9,13,15,20]では、微視的座屈が局所的に進行することが観察されている。例えば、Papka-Kyriakides[9,15]の単軸圧縮では、図 1.2 (b)の座屈モードが現れた後、図 1.3 (a)のように微視的座屈が局所的に進行するようになる。また、図 1.3 (b)は、Zhu-Mills[19]の六角形高分子ハニカム単軸圧縮の実験結果である。このような微視的座屈の局所的な進展は、アルミニウムハニカムや金属フォームの実験[3,5,7,8,10-12,14,16-18,21,22,24]でも同様に観察されており、固体材料の局所化現象に似ているものの、微視的座屈の関与する点が異なる。以後、このようなセル状固体における微視的座屈の局所化を巨視的局所化と呼ぶ。

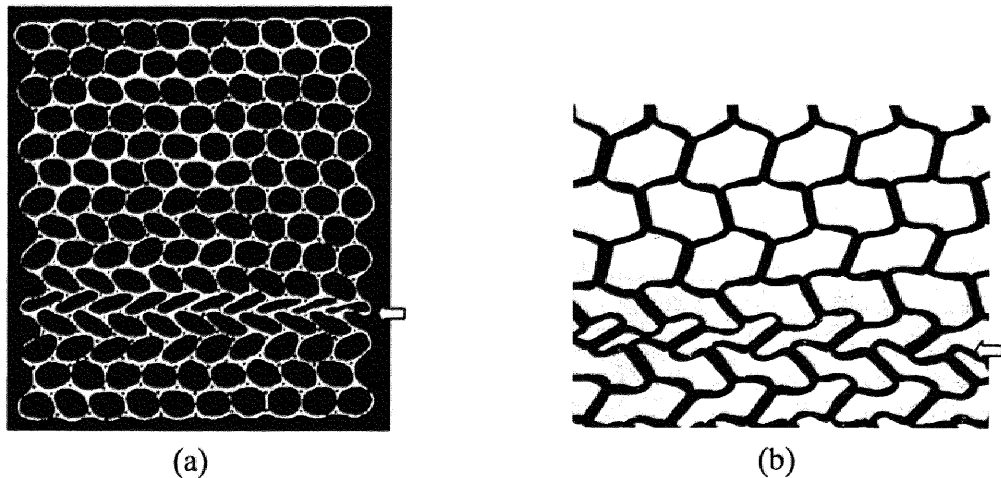


Fig. 1.3 Macroscopic localization under uniaxial compression, (a) circular polycarbonate honeycombs[9,15], (b) hexagonal polymer honeycombs[19].

1.1.3 従来の解析方法

微視的座屈や巨視的局所化を調べるために、次のような方法で研究が行われている：

- (1) 規則的な座屈モードが現れる場合に、微視構造を弾性はり構造体と見なして、Eulerの座屈荷重を用いて座屈強度を調べる方法[4-6,19,28,29].
- (2) 有限要素法を用いて微視構造全体の解析を行い、変形挙動を調べる方法[7,9,10,20,30-32].
- (3) 均質化理論を用いて微視的分岐と巨視的不安定という異なる2つの尺度から検討を行う方法[33-39].

この節では、これらの研究の現状と問題点について述べる。

最初に、Eulerの座屈荷重を用いて座屈強度を調べる方法とは、弾性はり構造体の座屈解析法[40,41]を応用したものであり、実験で現れる座屈モードを参考にして、はり部材両端に作用するモーメントを求め、これを基に Eulerの座屈荷重から、その構造体の座屈強度を求める手法のことである。Gibsonら[4,6]は、正六角形ゴムハニカムに生じる2種類の座屈モード(図 1.1 (b), (c))に対してそれぞれ座屈強度を求め、実験結果と比較することにより、その妥当性を確認した。他にも、単純なセル構造を有するハニカムやフォームに対してこの手法は適用され、実験結果との比較が行われている[5,19,28,29]。この手法は、あらかじめ生じる座屈モードさえわかっているならば、比較的単純に座屈強度を導出することができる利点がある。しかし、座屈モードが未知の場合や巨視的局所化が生じる場合、微視構造が複雑な場合には適用することができず、応用範囲には限界がある。

つづいて、有限要素法を用いて解析する方法とは、微視構造全体にわたって有限要素分割を行い、汎用の有限要素解析ソフトを用いて全体の変形挙動を調べる手法のことである。この方法は、Eulerの座屈荷重を用いる方法と異なり、事前に実験結果を参考にする必要がなく、微視構造が複雑な場合でも適用可能であることから応用範囲は広く、初期不整を用いる方法[7,9,10,20,30,31]と分岐理論に基づく方法[32]がある。

初期不整を用いる方法とは、座屈や局所化といった分岐現象に対して、分岐理論に基づく特別な取り扱いをせず、初期不整の影響を利用して自然に分岐後の解析を行う

方法のことである。Papka-Kyriakides[7,9,10,30]は、セル形状に含まれる初期不整に着目して、高分子の円筒ハニカムやアルミニウムハニカムの解析を行い、図 1.2 (d)に示される花状座屈モードや図 1.3 (a)に示される巨視的局所化の発生を再現することに成功した。さらに、Chung-Waas[31]は、初期不整を用いて円筒ハニカムの動的な微視的座屈挙動の解析を行い、実験結果[23]との比較を行っている。この方法は、通常の有限要素解析ソフトを用いることができ、材料の非線形性や非可逆性も考慮することができるから非常に実用的である。しかしながら、初期不整の与え方によって解析結果は変化し一意性がなく、実験結果との再現性を確認することはできても、座屈モードの発生や巨視的局所化の進展に関する系統的な解釈を行うことはできない。

これに対して、分岐理論に基づく方法とは、初期不整を用いずに、分岐理論に従って分岐点の探索や分岐点での解析を行う方法のことであり、Guo-Gibson[32]は、正六角形弾性ハニカムに対して ABAQUS の座屈固有値解析[42]を用いて座屈モードの解析を行った。彼らは、セルの欠損が正六角形弾性ハニカムの座屈強度に及ぼす影響を調べるため、欠損のない場合とある場合を解析し、欠損のない場合には、実験結果と同様にして規則的な座屈モード(単軸圧縮では図 1.1 (b), 二軸圧縮では図 1.1 (c))が現れることを確認した。また、欠損のある場合には、規則的な座屈モードは現れず、欠損個所を基点として巨視的局所化に似た座屈モードが現れることを示しており、こうした分岐理論に基づいて座屈モードを調べる方法は、初期不整を用いた解析と異なり、一意的に微視的座屈や巨視的局所化の現象を評価することができる。さらに、群論的分岐理論[43,44]によれば、分岐は対称性の喪失に起因して生じ、分岐の多重性と生じる座屈モードの間には密接な関係があるとされており、分岐の多重性を検討すれば座屈モードの系統的な解釈ができると考えられる。しかしながら、Guo-Gibson の解析[32]では分岐の多重性について検討しておらず、単軸圧縮と二軸圧縮で座屈モードが変化する理由について明らかにされていない。

なお、上述のような有限要素法を用いた解析[7,9,10,20,30-32]では、解析領域に有限体を考え、その境界端面に一様な変位もしくは分布荷重を負荷条件として与えて変形挙動を調べる。このとき、解析結果には微視構造の力学的特性のほかに境界条件の影響[24,45]が含まれた形で現れ、どちらが主要な原因となって微視的座屈や巨視的局所

化が生じているかを判別することは一般に困難である。したがって、微視構造が本質的に有する特徴を調べるためには、境界条件の影響を排除できる周期境界条件を用いることが望ましい。

周期境界条件を利用して、微視構造を有する材料の特性を評価する手法として均質化理論がある。均質化理論は微視構造の周期性を基に構築されており、周期単位の解析を行うことによって、数学的厳密に巨視的材料特性のみならず微視的な力学的応答を調べることができる。また、周期単位の解析には一般に有限要素法を用いるので、どのような微視構造に対しても適用可能であり汎用性が高い。

均質化理論に基づき、微視的分岐と巨視的不安定という2つの尺度から周期材料の安定性を評価する手法において、微視的分岐とは微視構造の分岐のことであり、巨視的不安定とは周期材料の巨視的接線係数の楕円性が失われることである。はじめに、Abeyaratne-Triantafyllidis[33]が、弾性円孔板に生じる巨視的なせん断帯に対して、巨視的接線係数の楕円性の喪失[46,47]を用いた巨視的不安定の検討を行い、微視構造の材料が安定であっても巨視的不安定が生じ得ることを示した。この研究では、巨視的不安定と微視的座屈との整合性が明らかではなかったが、Triantafyllidis-Maker[34]は、一軸負荷を受ける長繊維強化複合材料の微視的分岐挙動をフーリエ級数に基づき解析的に調べることで、その波長が無限大になるような特別な微視的座屈が巨視的不安定に対応することを発見した。これを受けてGeymonatら[35]は、非線形弾性材料で構成される周期材料の微視的分岐と巨視的不安定を Γ 収束論[48]に基づいて議論し、微視的分岐点での擾乱変位場がBloch波[49]で表されること、また、この波長が無限に長い場合が巨視的不安定の生じる場合に一致することを示した。

Geymonatら[35]の理論によれば、巨視的不安定が生じるときには、セル数の依存性を有する波動的な微視的分岐が生じることになり、このような微視的分岐は巨視的局所化に進展することが予想される。Triantafyllidis-Schraad[37]は面内二軸圧縮を受けるアルミニウムハニカムに対して、Bloch波を利用した第一微視的分岐点の解析を行い、Bloch波の波数を調べることにより巨視的安定性を議論した。この解析では、分岐モードの解析が行われていないのに対して、Laroussiら[38]は、3次元弾性セル状固体の座屈強度を解析し、微視的分岐点のセル数依存性を検討するとともに、巨視的不安定

に対応する微視的分岐点では、巨視的不安定がせん断型に対応する分岐モードが現れること示した。また、Mieheら[39]の非線形弾性材料で構成される長繊維強化複合材料の解析においても、Laroussiらの解析[38]と同様にして、せん断型の巨視的不安定の発生が確認されている。ただし、図 1.3 に示したような巨視的局所化が進展するためには、圧縮型の分岐モードが生じる必要があると考えられる。しかし、これまでにこうした圧縮型の分岐モードや分岐後の巨視的局所化の進展に関する解析結果は報告されていない。

図 1.3 に示すような巨視的局所化は、高分子ハニカムや金属フォームの場合[3,5,7-22,24]に観察されており、巨視的局所化を調べるためには材料の非可逆的な振舞いを考慮する必要があると考えられる。ところが、上述のような分岐モードや分岐後の挙動を調べるための理論構築[35,39]は、いずれも初期配置を参照するような全 Lagrange 形式であり、ポテンシャルを有する超弾性体に対して適用されているが、弾塑性のような変形履歴を有する材料には適用されていない。これまでに、弾塑性変形を考慮した更新 Lagrange 形式での均質化理論には、Agah-Tehrani[50]や寺田ら[51,52]の研究がある。しかしながら、更新 Lagrange 形式を用いて、微視的分岐までを考慮した理論構築はこれまでのところ行われていない。

1.2 本研究の取り組み

そこで本研究では、更新 Lagrange 形式での均質化理論における分岐理論の構築を第一の目的として、この理論を用いて正六角形ハニカムの面内座屈解析を行い、複雑な座屈モードが現れるメカニズムや、微視的分岐が巨視的局所化に進展するときの検討を行う。このため、まず周期材料が巨視的に一様変形している場合を考え、更新 Lagrange 形式での均質化理論の構築を行う。ここでは、従来の理論[50-53]と異なり、物質客観性の原理[54]が満足される形の均質化方程式の導出を行う。つづいて、得られた均質化方程式に対して微視的分岐の検討を行い、更新 Lagrange 形式の均質化理論

における微視的分岐条件を導出する。それから、これらの理論を基に、正六角形弾性ハニカムの面内座屈に対して分岐の多重性に着目した解析を行い、座屈モードが複雑になるメカニズムを明らかにする。また、正六角形弾塑性ハニカムに対しても解析を行い、セル数依存性を有する波動的な微視的分岐を調べるとともに、巨視的不安定との整合性を議論して、微視的分岐から巨視的局所化に至る過程を検討する。

1.3 本論文の構成

本論文は、次のように構成されている。

第2章では、更新 Lagrange 形式に基づく均質化理論の構築を行う。このため、周期材料が巨視的に一様変形している場合を考え、周期材料の内部に分布する状態量は単位セルの集合に対して周期性[48]を有しているとする。このとき、変位速度を巨視的一様成分とそこからのずれ(擾乱)成分に分離し、さらに、セル集合内での体積平均をとることで巨視的変数の導入を行い、これらの関係式を不均質体に関する仮想仕事の原理[55-58]に代入することで均質化方程式を導く。また、本研究で導かれた均質化方程式が物質客観性の原理[54]を満足するかどうかの検討を行う。

第3章では、第2章で導いた更新 Lagrange 形式の均質化理論において、微視的分岐が生じる場合を考え、微視的分岐条件の導出を行う。このため、まず構造物の対称分岐座屈[43,59,60]を参考にして、擾乱変位速度場に生じる固有解が符号の入替えに対して巨視的に等価性を有するとして、周期材料が微視的に対称分岐座屈する条件を検討する。つづいて、微視的分岐の対称性を仮定することなく、一般的な微視的分岐条件を導く。

第4章では、第2章と第3章で導いた主要な結果を、微視的分岐が生じる場合と生じない場合に分けて有限要素法に基づく離散化を行い、その解析手順について説明する。

第5章では、第4章で示した解析手順に従って、面内二軸圧縮を加えたときに正六

角形弾性ハニカムに生じる微視的座屈挙動の有限要素解析を行う。ここでは4つの単位セルの集合に対して微視的分岐点と座屈モードの解析を行い、微視的分岐点での分岐の多重度に着目して、複雑な座屈モードの発生に関するメカニズムを検討する。また、生じる座屈モードに対して微視的分岐条件の成否を確かめる。

第6章では、第5章で得られた座屈モードを用いて、面内二軸圧縮を受ける正六角形弾性ハニカムの座屈後の解析を行う。一般に多重分岐点では座屈モードは一意的に定まらないため、座屈後に安定に進展する座屈モードの検討が必要となる。このため、特定の座屈モードが安定に進展するような拘束を課して座屈後の解析を行い、内部エネルギーを比較することで安定な座屈モードの特定を行う。また、巨視的不安定についても調べ、巨視的局所化に関する検討を行う。

第7章では、正六角形弾塑性ハニカムの面内単軸圧縮の解析を行い、微視的座屈と巨視的不安定の観点から巨視的局所化の発生について検討を行う。このため、微視的分岐点での座屈モードの波動性とセル数依存性を調べるとともに、この微視的座屈と巨視的不安定との整合性を議論し、分岐後の解析により微視的分岐点から巨視的局所化に至る過程を検討する。このような解析を行うため、 2×2 個の単位セルの集合をサブユニットと考え、サブストラクチャ法を用いて $2M \times 2N$ のセル集合の解析を行う。

最後の第8章では、本論文の結論を述べる。

記号一覧

第2章

\mathcal{B}	周期的内部構造を有する無限体
Y	単位セル
kY	k 個の単位セル Y の集合
Γ	kY の境界
t	時間
x_i	Y や kY に対する直交座標
$(\cdot)_{,i}, \partial/\partial x_i$	座標 x_i に関する微分
$(\dot{\cdot})$	物質導関数
σ_{ij}	Cauchy 応力
$\dot{\pi}_{ij}$	公称応力速度
\dot{s}_{ij}	Truesdell 応力速度
$\dot{\sigma}_{ij}$	Cauchy 応力速度
\dot{u}_i	変位速度
$\dot{\varepsilon}_{kl}$	ひずみ速度
c_{ijkl}	剛性
\dot{u}_i^0	巨視的変位速度
\dot{u}_i^*	擾乱変位速度
$\dot{\varepsilon}_{ij}^0$	巨視的ひずみ速度
$\dot{\omega}_{ij}^0$	巨視的スピン
$\dot{\varepsilon}_{ij}^*$	擾乱ひずみ速度

\dot{c}_i^0	剛体並進速度
$\langle \# \rangle$	状態量 $\#$ のセル集合 kY に関する体積平均
$ kY $	kY の体積
Σ_{ij}	巨視的 Cauchy 応力
$\dot{\Pi}_{ij}$	巨視的公称応力速度
\dot{S}_{ij}	巨視的 Truesdell 応力速度
$\dot{\Sigma}_{ij}$	巨視的 Cauchy 応力速度
n_j	境界 Γ の外向き単位法線
$\delta \dot{u}_i$	変位速度 \dot{u}_i の変分
$\delta \dot{u}_i^0$	巨視的変位速度 \dot{u}_i^0 の変分
$\delta \dot{u}_i^*$	擾乱変位速度 \dot{u}_i^* の変分
δ_{ij}	Kronecker のデルタ
$\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^0$	巨視的ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ の変分
$\delta \dot{\omega}_{ij}^0$	巨視的スピン $\dot{\omega}_{ij}^0$ の変分
χ_i^k	特性解
C_{ijkl}^H, L_{ijkl}^H	巨視的剛性
$\tilde{\chi}_i^k$	物質客観性を満足しない χ_i^k

第 3 章

$\phi_i, \phi_i^{(k)}$	非自明解, 固有解, 座屈モード, 分岐モード
$v^{(k)}$	定数
Y_1, Y_2	単位セル Y 内の各相
$c_{ijkl}^{(1)}, c_{ijkl}^{(2)}$	単位セル Y 内の各相の剛性
Δ	二相を含む微小領域
Γ_Δ	微小領域 Δ の境界
Δ_1, Δ_2	$\Delta_1 = Y_1 \cap \Delta, \Delta_2 = Y_2 \cap \Delta$ を満足する領域

$\Gamma_{\Delta}^{\#}$	Δ_1 と Δ_2 の界面
$n_i^{\#}$	界面 $\Gamma_{\Delta}^{\#}$ での単位法線
\hat{t}	ある時刻
$\dot{u}_i^{*(1)}$	基本解
$\dot{u}_i^{*(2)}$	分岐解
$\Delta \dot{u}_i^*$	基本解と分岐解の差($\dot{u}_i^{*(2)} - \dot{u}_i^{*(1)}$)
$\hat{\chi}_i^k$	時刻 \hat{t} での χ_i^k

第 4 章

K	接線剛性マトリックス
\dot{u}^*	節点擾乱変位速度ベクトル
ϵ^0	ϵ_{ij}^0 を表すベクトル
N	節点力マトリックス
$()^T$	転置記号
B_L	線形ひずみ-変位マトリックス
B_{NL}	非線形ひずみ-変位マトリックス
C	c_{ijpq} を表すマトリックス
T	$\delta_{ip} \sigma_{jq}$ を表すマトリックス
χ	χ_i^k を表すマトリックス
λ	ペナルティ数
P_{kY}	拘束マトリックス
ϕ	ϕ_i を表す節点ベクトル

第 5 章

θ	初期状態における x_1 軸とセル壁間の角度
γ	応力比
$\dot{\bar{e}}_{ij}$	相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度
c_{ijkl}^e	等方 Hooke 弾性体の剛性
E	セル壁のヤング率
ν	セル壁のポアソン比
$\dot{\omega}_{ij}$	スピン
w	セル壁厚さ
ℓ	セル壁長さ
m	微視的分岐の多重度
$\phi^{(90)}$	$\theta = 90^\circ$ に生じるモード I
$\phi^{(-30)}, \phi^{(30)}$	$\theta = \pm 30^\circ$ に生じるモード I
ϕ_{\max}	ϕ_i の大きさの最大値 ($= \max(\sqrt{\phi_i \phi_i})$)
$\tilde{\phi}_i$	正規化した座屈モード ϕ_i
\dot{u}_{\max}^*	\dot{u}_i^* の大きさの最大値 ($= \max(\sqrt{\dot{u}_i^* \dot{u}_i^*})$)
$\tilde{\dot{u}}_i^*$	正規化した擾乱変位速度 \dot{u}_i^*
R	直交条件を確認するための値

第 6 章

U	内部エネルギー
\dot{U}	内部エネルギー U の変化率
ε_{ij}^0	巨視的ひずみ
γ_ε	ひずみ比

γ_{Σ}	応力比
n_i	法線ベクトル
A_{ik}	アコースティックテンソル
m_i	方向ベクトル
ψ_n	n_i と x_1 軸との間の角
ψ_m	m_i と x_1 軸との間の角
U_i	変位
F_i	荷重
L_1	ハニカム平板の横方向長さ
L_2	ハニカム平板の縦方向長さ

第 7 章

p_1, p_2	正六角形ハニカムの周期性に関する基本単位ベクトル
c_{ijkl}^{ep}	J_2 流れ則に基づく等方弾塑性体の剛性
σ	単軸引張における真応力
ε^p	単軸引張における対数ひずみの塑性成分
ε_0, σ_0	材料パラメータ

付録 A

N_i	形状関数
B_L^i, B_{NL}^i	形状関数 N_i に関する B_L, B_{NL}
C^{ep}	J_2 流れ則に基づく等方弾塑性体の剛性マトリックス
C^e	等方 Hooke 弾性体の剛性マトリックス
C^p	C^{ep} に関する塑性成分の剛性マトリックス

r	t_{ij}^o から s_{ij} に構成式を変換するためのマトリックス
G	横弾性係数
σ'_{ij}	偏差応力
H'	硬化係数
$\bar{\sigma}$	相当応力
f	降伏条件式
α	$f = 0$ のとき $\alpha = 1$, $f < 0$ のとき $\alpha = 0$ を満たす値
N	総節点数
${}^{(j)}\dot{\mathbf{u}}^*$	j 番目の節点における $\dot{\mathbf{u}}^*$ の節点ベクトル
n_q^+, n_q^-	周期性を満足すべき節点の組合せ
\mathbf{P}_q	各節点の組合せに対する拘束マトリックス
\mathbf{O}	3×3 の零行列
\mathbf{I}	3×3 の単位行列
(ξ, η)	局所座標

付録 B

$\kappa^{(k)}$	接線剛性マトリックス \mathbf{K} の固有値
\mathbf{L}	接線剛性マトリックス \mathbf{K} の下三角行列
\mathbf{D}	接線剛性マトリックス \mathbf{K} の対角行列

付録 C

$()^b$	剛性方程式の境界成分
$()'$	剛性方程式の境界以外の成分

第 2 章

有限変形の均質化理論^[26,61]

2.1 はじめに

1970年代に応用数学者によって理論展開された均質化理論^[62-65]は、理論としての整合性や数値解析における汎用性の高さから、工学の分野において、線形弾性問題だけでなく非線形問題に対しても積極的に適用されている。線形弾性問題として Lénéら^[66-68]や Guedes-Kikuchi^[69]によって紹介された均質化理論は、Suquet^[57,58]によって弾塑性問題への適用を検討され、 J_2 変形理論に基づく弾塑性問題の均質化理論が、Jansson^[70,71]や Swan^[72,73]らによって構築された。最近では移動硬化を考慮した研究^[74]も行われている。クリープや粘塑性といった時間依存変形問題は、まずラプラス変換を用いて線形粘弾性や定常クリープの場合が解析された^[64,75,76]。これに対して、Wu-Ohno^[77]や Ohno ら^[78]は、時間依存の特性関数を導入することで、より一般的な時間依存変形問題の均質化理論を構築した。同様な研究として、数値解析の便宜性を意識した Michel ら^[79]の研究も上げられる。つづいて、有限変形の弾塑性問題への適用が Agah-Tehrani^[50]や寺田ら^[51,52]によって行われ、他にも有限変形の均質化理論は、Abeyaratne-Triantafyllidis^[33]や Geymonat ら^[35]、高野ら^[53]、岡田ら^[80]、石原-野口^[81]、Miche ら^[39]によって研究された。また、これ以外の研究として、ポロノイセル有限要素法を利用した弾塑性解析^[82,83]や、結晶すべりを考慮した多結晶金属の研究^[84,85]、固有ひずみの解析解を利用した弾塑性解析^[86]、ひずみ勾配依存性を考慮した研究

[87,88]などがあり，大野[89]や寺田[90]により詳しく紹介されている。

上述のように，有限変形の均質化理論もすでいくつかの研究で議論されており，基準にする状態の違いから全 Lagrange 形式[35,39,81]と更新 Lagrange 形式[33,50-53,80]の理論がある。材料の構成式の形によって2つの形式は使い分けられ，構成式が変形履歴を有し速度形で表されるような場合には更新 Lagrange 形式が用いられる。ここで，有限変形の構成式には物質客観性の原理[54]が課されるが，更新 Lagrange 形式の均質化理論では，これまでのところ物質客観性の原理の満足される形の理論構築がなされていない。

そこで本章では，更新 Lagrange 形式に基づく均質化理論の構築を行い，物質客観性の原理の成否についての検討を行う。このため，周期材料が巨視的に一様変形している場合を考え，周期材料内部に分布する状態量は， k 個の単位セル Y の集合を kY として， kY 毎に繰返される周期性[48]を有しているとする。また，変位速度を巨視的一様成分とそこからのずれ(擾乱)成分に分離して，セル集合内での体積平均をとることで巨視的変数の導入を行う。これらの関係式を不均質体に関する仮想仕事の原理[55-58]に代入することで均質化方程式を導き，この均質化方程式に対して物質客観性の原理の成否について検討する。なお，本論文では，特に断らない限り総和規約を用いることとする。

2.2 基礎式

周期的内部構造を有する無限体 \mathcal{B} を考え， \mathcal{B} には物体力は作用しておらず，巨視的に一様変形しているとして，その変形挙動を更新 Lagrange 形式で解析する。 \mathcal{B} の単位セルを Y とするとき， \mathcal{B} に巨視的負荷を与えると，微視的変形は Y 毎に周期性を持って生じるが，微視的分岐が起きると微視的変形の周期単位は一般に大きくなる[48]。このような変形挙動を解析するため， k 個の Y からなるセル集合 kY を考え，(図 2.1)，その境界を Γ とする。 kY を周期とする空間的変化を kY 周期的変化と呼ぶことこ

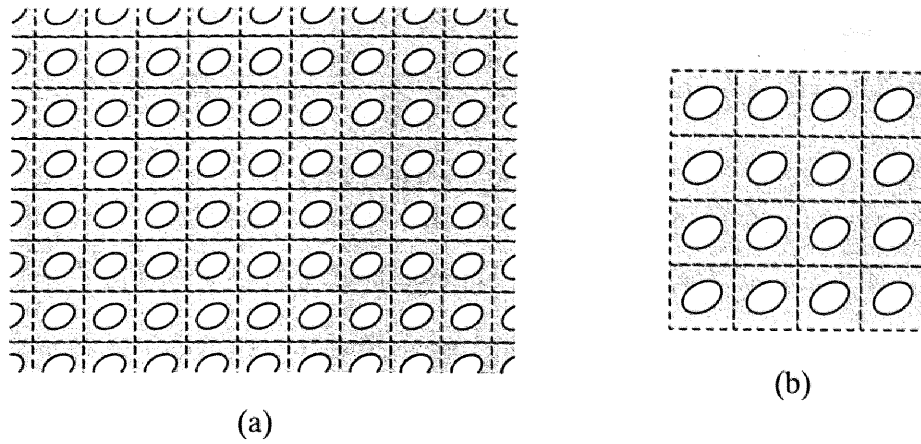


Fig. 2.1 Internal structure of periodic material, (a) infinite body \mathcal{B} , (b) periodical unit satisfied with kY -periodicity condition (illustration is 4×4 cells).

とにする. なお, 時間 t での kY に対して直交座標 x_i ($i = 1, 2, 3$) を設け, 今後, ベクトルおよびテンソルはこの座標に関する成分で表し, $(\cdot)_i$ は座標 x_i に関する微分を, また $(\dot{\cdot})$ は物質導関数を表すものとする.

2.2.1 微視的關係式

セル集合 kY 内の Cauchy 応力の分布を $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ と表す. ここで太字 \mathbf{x} は座標 x_i の関数であることを示す. このとき, 応力の釣合方程式は

$$\sigma_{ji,j} = 0 \quad (2.1)$$

と書ける. また, 更新 Lagrange 形式での公称応力速度を π_{ij} とすれば, 速度形での応力の釣合方程式は

$$\dot{\pi}_{ji,j} = 0 \quad (2.2)$$

と表される. さらに, Truesdell 応力速度を \dot{s}_{ij} , Cauchy 応力を σ_{ij} とすると, 次式が成り立つ.

$$\dot{\pi}_{ji} = \dot{s}_{ji} + \sigma_{jk} \dot{u}_{i,k} = \dot{\sigma}_{ji} + \sigma_{ji} \dot{u}_{k,k} - \sigma_{ik} \dot{u}_{j,k} \quad (2.3)$$

ここで \dot{u}_i は変位速度を示す.

\mathcal{B} の各構成相はそれぞれ歪弾性材料からなり, その構成式は微視的に

$$\dot{s}_{ij}(\mathbf{x}, t) = c_{ijkl}(\mathbf{x}, t) \dot{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

と表されたとする. ここで $\dot{\varepsilon}_{kl}$ は, 更新 Lagrange 形式でのひずみ速度を示し,

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{k,l} + \dot{u}_{l,k}) \quad (2.5)$$

と定義される. また c_{ijkl} は, 剛性を表し, 条件

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij} \quad (2.6)$$

を満足するものとする.

\mathcal{B} の内部変形は kY 周期性を有するとする. このとき変形速度 \dot{u}_i は, 次式のように巨視的成分と kY 周期的な擾乱成分 \dot{u}_i^* に分離でき,

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^0 + \dot{u}_i^* \quad (2.7)$$

と書ける. 本研究のように巨視的一様変形を考え, 更新 Lagrange 形式で解析するとき, \dot{u}_i^0 は巨視的ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^0(t)$ と巨視的スピン $\dot{\omega}_{ij}^0(t)$ ならびに剛体並進速度 $\dot{c}_i^0(t)$ を用いて

$$\dot{u}_i^0(\mathbf{x}, t) = [\dot{\varepsilon}_{ij}^0(t) + \dot{\omega}_{ij}^0(t)] x_j + \dot{c}_i^0(t) \quad (2.8)$$

と表すことができる. このとき, 式(2.5), (2.7), (2.8)より, ひずみ速度場は次式のよ
うに表される.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \dot{\varepsilon}_{ij}^0(t) + \dot{\varepsilon}_{ij}^*(\mathbf{x}, t) \quad (2.9)$$

ここで,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^0 = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^0 + \dot{u}_{j,i}^0) \quad (2.10)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*) \quad (2.11)$$

である。なお、 ε_{ij}^0 は \mathcal{B} 内で一様であるが、擾乱ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ の分布は、擾乱変位速度 \dot{u}_i^* と同じく kY 周期性を有する。

2.2.2 巨視的変数

巨視的変数を導入するため、セル集合 kY に関する体積平均を

$$\langle \# \rangle = \frac{1}{|kY|} \int_{kY} \# dY \quad (2.12)$$

と定義する。ここで $|kY|$ は kY の体積を表す。

まず、式(2.9)に上式を適用し、式(2.11)を代入した後に発散定理と \dot{u}_i^* の kY 周期性を用いると次式が示される[64]。

$$\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle = \dot{\varepsilon}_{ij}^0, \quad \langle \dot{u}_{i,j} \rangle = \dot{u}_{i,j}^0 \quad (2.13a,b)$$

したがって、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ が巨視的ひずみ速度、 $\dot{u}_{i,j}^0$ が巨視的変位速度勾配を表す。

次に、微視的応力速度の関係式(2.3)に式(2.12)を適用すると、次式のような巨視的応力速度の関係式を示すことができる(次節 2.2.3 参照)。

$$\dot{\Pi}_{ji} = \dot{S}_{ji} + \Sigma_{jk} \dot{u}_{i,k}^0 = \dot{\Sigma}_{ji} + \Sigma_{ji} \dot{u}_{k,k}^0 - \Sigma_{ik} \dot{u}_{j,k}^0 \quad (2.14)$$

ここで、 Σ_{ij} 、 \dot{S}_{ij} および $\dot{\Pi}_{ij}$ は、それぞれ

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad \dot{\Pi}_{ij} = \langle \dot{\pi}_{ij} \rangle, \quad \dot{S}_{ij} = \langle \dot{s}_{ij} \rangle \quad (2.15a,b,c)$$

と定義される。式(2.14)を微視的関係式(2.3)と比較すると、両者は完全に同じ形をしていることがわかる。したがって、上式により定義される巨視的な応力および応力速度は、微視/巨視的整合性を有すると言える。なお、式(2.14)において $\dot{\Sigma}_{ij} \neq \langle \dot{\sigma}_{ij} \rangle$ であることに注意する。

2.2.3 巨視的応力速度の関係式(2.14)の導出

式(2.3)に体積平均式(2.12)を適用し、定義式(2.15b)と(2.15c)を用いると

$$\dot{\Pi}_{ji} = \dot{S}_{ji} + \langle \sigma_{jk} \dot{u}_{i,k} \rangle = \langle \dot{\sigma}_{ji} + \sigma_{ji} \dot{u}_{k,k} \rangle - \langle \sigma_{ik} \dot{u}_{j,k} \rangle \quad (2.16)$$

となる。また、式(2.15a)の物質導関数を取り、 $d|kY|/dt = \dot{u}_{m,m}^0 |kY|$ に注意すると、

$$\dot{S}_{ji} = \langle \dot{\sigma}_{ji} + \sigma_{ji} \dot{u}_{k,k} \rangle - \langle \sigma_{ji} \rangle \dot{u}_{k,k}^0 \quad (2.17)$$

が示される。さらに式(2.7)より、

$$\langle \sigma_{jk} \dot{u}_{i,k} \rangle = \langle \sigma_{jk} \rangle \dot{u}_{i,k}^0 + \langle \sigma_{jk} \dot{u}_{i,k}^* \rangle \quad (2.18)$$

となり、上式の右辺第2項は部分積分と発散定理を用いると次式が示される。

$$\int_{kY} \sigma_{jk} \dot{u}_{i,k}^* dY = \int_{\Gamma} \sigma_{jk} n_k \dot{u}_i^* d\Gamma - \int_{kY} \sigma_{jk,k} \dot{u}_i^* dY \quad (2.19)$$

ここで n_j は、境界 Γ の外向き単位法線を示す。この式の右辺第1項は $\sigma_{jk} n_k$ の反 kY 周期性と \dot{u}_i^* の kY 周期性により零となり、また第2項は釣合式(2.1)により消失するから、

$$\langle \sigma_{jk} \dot{u}_{i,k}^* \rangle = 0 \quad (2.20)$$

が成り立つ。したがって、式(2.17)、(2.18)および(2.20)を用いると、式(2.16)は巨視的応力速度の関係式(2.14)となる。

2.3 均質化理論

この節では、前節で述べた基礎式に基づいて、周期材料が巨視的に一様変形している場合の仮想仕事の原理を有限変形で議論する。それから、この原理を用いて均質化方程式を導く。また、導いた均質化方程式について物質客観性の原理の成否について検討する。

2.3.1 仮想仕事の原理

微小変形での周期材料に対する仮想仕事の原理は、Hill[55,56]の示唆に基づいてSuquet[57,58]が示している。この原理は、有限変形の場合に更新 Lagrange 形式で次のように導くことができる。

擾乱変位速度場 $\dot{u}_i^*(x, t)$ の任意の変分を $\delta\dot{u}_i^*(x, t)$ とすると、釣合方程式(2.2)は、部分積分と発散定理を用いることにより、弱形式

$$\int_{kY} \dot{\pi}_{ji} \delta\dot{u}_{i,j}^* dY - \int_{\Gamma} n_j \dot{\pi}_{ji} \delta\dot{u}_i^* d\Gamma = 0 \quad (2.21)$$

に変換できる。上式の境界積分項は、 $\delta\dot{u}_i^*$ の kY 周期性と $n_j \dot{\pi}_{ji}$ の反 kY 周期性により零となる。したがって、上式は

$$\int_{kY} \dot{\pi}_{ji} \delta\dot{u}_{i,j}^* dY = 0 \quad (2.22)$$

となるから、式(2.7)と式(2.15b)を用いれば、式(2.12)の関係より次式が導かれる。

$$\langle \dot{\pi}_{ji} \delta\dot{u}_{i,j} \rangle = \dot{\Pi}_{ji} \delta\dot{u}_{i,j}^0 \quad (2.23)$$

ここで $\delta\dot{u}_i$ と $\delta\dot{u}_i^0$ は、それぞれ \dot{u}_i と \dot{u}_i^0 の変分を表し、

$$\langle \delta \dot{u}_{i,j} \rangle = \delta \dot{u}_{i,j}^0 \quad (2.24)$$

を満足する.

式(2.23)の左辺と右辺は, それぞれ更新 Lagrange 形式での微視的仮想仕事率の体積平均および巨視的仮想仕事率を表すから, 式(2.23)は仮想仕事の原理として次のように解釈できる. すなわち, 釣合式(2.2)と微視/巨視関係式(2.15b)を満足する応力速度場 $\pi_{ji}(x,t)$ に対して, 式(2.24)を満たす任意の仮想変位速度場 $\delta \dot{u}_i(x,t)$ を考えると, 巨視的仮想仕事率は微視的仮想仕事率の体積平均に等しい.

2.3.2 均質化方程式

式(2.23)に式(2.3), (2.4), (2.5)および(2.7)を代入し, 整理すると,

$$\left[\dot{\Pi}_{ji} - \langle (c_{ijkl} + \delta_{ik} \sigma_{jl})(\dot{u}_{k,l}^0 + \dot{u}_{k,l}^*) \rangle \right] \delta \dot{u}_{i,j}^0 - \langle (c_{ijkl} + \delta_{ik} \sigma_{jl})(\dot{u}_{k,l}^0 + \dot{u}_{k,l}^*) \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = 0 \quad (2.25)$$

となる. ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタを表す. 上式において, $\delta \dot{u}_{i,j}^0$ は $\delta \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \delta \dot{\omega}_{ij}^0$ に等しく任意の値を取るから, 次式が成り立たなければならない.

$$\dot{\Pi}_{ji} = \langle (c_{ijkl} + \delta_{ik} \sigma_{jl})(\dot{u}_{k,l}^0 + \dot{u}_{k,l}^*) \rangle \quad (2.26)$$

$$\langle (c_{ijkl} + \delta_{ik} \sigma_{jl})(\dot{u}_{k,l}^0 + \dot{u}_{k,l}^*) \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = 0 \quad (2.27)$$

ここで $\delta \dot{u}_i^*$ は kY 周期性を満足する任意の速度場である.

さて, 式(2.20)の関係は, 次式の形でも同様に成立する.

$$\langle \sigma_{ji} \delta \dot{u}_{k,j}^* \rangle = 0 \quad (2.28)$$

この結果, 式(2.26)は式(2.14), (2.15)および(2.20)に注意すると

$$\dot{S}_{ij} = \langle c_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl}^0 + \dot{\epsilon}_{kl}^*) \rangle \quad (2.29)$$

に帰着することが示され, また式(2.27)は式(2.28)より

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip}\sigma_{jq})\dot{u}_{p,q}^* \delta\dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\dot{\varepsilon}_{kl}^0 \langle c_{ijkl} \delta\dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (2.30)$$

となる. 式(2.29)と(2.30)が均質化方程式であるが, 式(2.29)は微視的構成式(2.4)の, セル集合 kY に関する体積平均にほかならない. 一方, 式(2.30)は, 現時刻 t での kY 内の微視的応力分布 $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ が既知であるとして, 巨視的ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{kl}^0$ に対する擾乱変位速度場 $\dot{u}_i^*(\mathbf{x}, t)$ を決定する境界値問題である.

2.3.3 基本解

式(2.30)を解くことにより, $\dot{u}_i^*(\mathbf{x}, t)$ が一意的に求められるとする. このとき $\dot{u}_i^*(\mathbf{x}, t)$ は, 式(2.30)からわかるように $\dot{\varepsilon}_{kl}^0$ と線形関係にあるから, 微小変形の場合[62-69]と同じく

$$\dot{u}_i^* = \chi_i^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}^0 \quad (2.31)$$

と書ける. ここで χ_i^{kl} は, 境界値問題

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip}\sigma_{jq})\chi_{p,q}^{kl} \delta\dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\langle c_{ijkl} \delta\dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (2.32)$$

の解を示し, $\chi_i^{kl} = \chi_i^{lk}$ を満たす.

式(2.31)が成り立つとき, 巨視的構成式(2.29)は

$$\dot{S}_{ij} = C_{ijkl}^H \dot{\varepsilon}_{kl}^0 \quad (2.33)$$

となる. ここで,

$$C_{ijkl}^H = \langle c_{ijkl} + c_{ijpq} \chi_{p,q}^{kl} \rangle \quad (2.34)$$

であり, C_{ijkl}^H は c_{ijkl} と同じ対称性を有する. すなわち, 式(2.32)において, $\delta\dot{u}_i^*$ は任意の kY 周期関数であるから, $\delta\dot{u}_i^* = \chi_i^{mn}$ を代入することで,

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip}\sigma_{jq})\chi_{p,q}^{kl} \chi_{i,j}^{mn} \rangle = -\langle c_{ijkl} \chi_{i,j}^{mn} \rangle \quad (2.35)$$

となり, 式(2.6)より $\langle c_{ijkl} \chi_{i,j}^{mn} \rangle = \langle c_{klmj} \chi_{i,j}^{mn} \rangle$ であるから, 式(2.34)に式(2.35)の関係を適用す

ると,

$$C_{ijkl}^H = \left\langle c_{ijkl} - (c_{pqrs} + \delta_{pr}\sigma_{qs})\chi_{p,q}^{ij}\chi_{r,s}^{kl} \right\rangle \quad (2.36)$$

となる. これより, 式(2.36)において $\chi_i^{kl} = \chi_i^{lk}$ であるから,

$$C_{ijkl}^H = C_{jikl}^H = C_{ijlk}^H = C_{klij}^H \quad (2.37)$$

となる.

このとき, $\dot{\Pi}_{ij}$ は式(2.14)と(2.33)より, 次のように表される.

$$\dot{\Pi}_{ji} = L_{ijkl}^H \dot{u}_{k,l}^0 \quad (2.38)$$

ここで,

$$L_{ijkl}^H = C_{ijkl}^H + \delta_{ik}\Sigma_{jl} \quad (2.39)$$

であり, $L_{ijkl}^H = L_{klij}^H$ が成り立つ. なお, L_{ijkl}^H が楕円性を失うと, 巨視的不安定が生じる [46,47].

2.3.4 物質客観性原理の検討

式(2.27)は, 式(2.28)を用いると式(2.30)となるが, 単純に変形すると

$$\left\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip}\sigma_{jq})\dot{u}_{p,q}^* \delta\dot{u}_{i,j}^* \right\rangle = -\dot{u}_{k,l}^0 \left\langle (c_{ijkl} + \delta_{ik}\sigma_{jl})\delta\dot{u}_{i,j}^* \right\rangle \quad (2.40)$$

となる. このとき $\dot{u}_i^*(x, t)$ は, 境界値問題

$$\left\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip}\sigma_{jq})\tilde{\chi}_{p,q}^{kl} \delta\dot{u}_{i,j}^* \right\rangle = -\left\langle (c_{ijkl} + \delta_{ik}\sigma_{jl})\delta\dot{u}_{i,j}^* \right\rangle \quad (2.41)$$

の解 $\tilde{\chi}_i^{kl}$ ($\neq \tilde{\chi}_i^{lk}$) を用いて, 次式のように表される.

$$\dot{u}_i^* = \tilde{\chi}_i^{kl} \dot{u}_{k,l}^0 \quad (2.42)$$

さらに \dot{S}_{ij} は, 上式と式(2.4), (2.9), (2.11)および(2.15c)から,

$$\dot{S}_{ij} = \langle c_{ijkl} + c_{ijpq} \tilde{\chi}_{p,q}^{kl} \rangle \dot{u}_{k,l}^0 \quad (2.43)$$

となる。

式(2.42)と(2.43)が、更新ラグランジュ形式による従来の結果[33,50-53]である。しかし式(3.42)と(3.43)では、 $\dot{u}_{k,l}^0 = \dot{\epsilon}_{kl}^0 + \dot{\omega}_{kl}^0$ であるから、巨視的スピン $\dot{\omega}_{kl}^0$ によって形式上 \dot{u}_i^* および \dot{S}_{ij} が生じ得ることになり、物質客観性の原理[54]が陽には満足されない。これに対して本研究で導いた式(2.31)と(2.33)では、 $\dot{\omega}_{kl}^0$ が現れないから、物質客観性の原理が陽に満足される。

なお、擾乱変位速度 \dot{u}_i^* は式(2.31)に示したように巨視的スピン $\dot{\omega}_{kl}^0$ の影響を受けないが、現時点までに生じた擾乱変位は、物質点の座標の変化

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t (\dot{u}_i^0 + \dot{u}_i^*) dt \quad (2.44)$$

を介して、式(2.8)により $\dot{\omega}_{ij}^0$ とともに回転する。

2.4 ま と め

この章では，周期材料が巨視的一様変形している場合を考え，更新 Lagrange 形式の均質化理論の構築を行った．まず，セル集合 kY に対して体積平均を取ることで巨視的変数の導出を行い，巨視的応力速度の関係式(2.14)が微視的な応力速度の関係式(2.3)と同じ形で表されることを示した．つづいて，周期材料が巨視的一様変形を受ける場合の仮想仕事の原理を増分形で示すとともに，この原理に基づいて均質化方程式の導出を行った．さらには，ここで導かれた均質化方程式が物質客観性の原理を陽に満足することを示した．

第3章

微視的分岐条件^[26,61,91]

3.1 はじめに

分岐座屈問題は、Euler が長柱の弾性座屈問題に対して行った研究に始まり、これまでに数多くの研究が行われている。構造系の分岐座屈現象に対する研究が、Timoshenko-Gere[40] や Bazant-Cedelon[41] によって行われ、一般安定理論として、Koiter[92] や Britvec[93], Thompson-Hunt[60] の研究がある。また、材料の非線形・非可逆性に着目した理論構築が Hill[94] によって行われ、材料のくびれやせん断帯といった材料不安定挙動の有限要素解析[95-97] も行われるようになってきている。しかし、周期材料の分岐座屈は巨視的負荷のもとで生じる微視的座屈であるから、巨視的変形と微視的変形という2種類の変形に関係するという点で通常の構造物の座屈問題とは異なる。有限変形の均質化理論においては、全 Lagrange 形式の場合[35,39] に微視的分岐は議論されているものの、更新 Lagrange 形式の場合に微視的分岐について議論した研究は見当たらない。

本章では、第2章で導いた更新 Lagrange 形式の均質化理論に対して微視的分岐が生じる場合を検討し、微視的分岐点で成立する条件の導出を行う。このため、まず構造物の対称分岐座屈を参考にして、擾乱変位速度場に生じる固有解が符号の入替えに対して巨視的に等価性を有する場合を考え、周期材料が微視的に対称分岐座屈する条件を検討する。つづいて、微視的分岐の対称性を仮定することなく、一般的な微視的分

岐条件を導く.

3.2 微視的対称分岐条件

第2章で示した式(2.31)によると, 擾乱変位速度場 $\dot{u}_i^*(x, t)$ は巨視的ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kl}^0$ と線形関係にあるが, この一意的関係式は座屈点では成立しない. この節では, 巨視的一様変形のもとでの微視的対称分岐について述べるとともに, このような座屈が生じる際に成立する条件を均質化方程式(2.29)および(2.30)より導く.

3.2.1 微視的対称分岐条件の導出

微視的対称分岐の例を図 3.1 に示す. この図は微視的座屈により状態(a)が状態(b)および(c)の2通りに変わる様子を表す. これら2通りの微視的状态変化における擾乱変位速度場は, 互いに符号が異なるが, 状態(b)および(c)が巨視的に等価であることは周期性より明らかである. したがってこの場合, 座屈点で生じる擾乱変位速度の符号を変えても, 巨視的状态の変化には影響しない. そこで一般的に, 「微視的対称分岐点では, 擾乱変位速度が自発的に \mathcal{D} 内に生じるが, この自発的速度場の符号を変えても巨視的状态の変化には影響を及ぼさない.」とする.

上述のような対称性が満足されるならば, 座屈点では \dot{u}_i^* の符号に依らず式(2.29)と(2.30)が成立するから, これらの式に加えて次式が成り立つ.

$$\dot{S}_{ij} = \langle c_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl}^0 - \dot{\epsilon}_{kl}^*) \rangle \quad (3.1)$$

$$-\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \dot{u}_{p,q}^* \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\dot{\epsilon}_{kl}^0 \langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (3.2)$$

このとき, 式(2.29)と(3.1)を相互に加減することにより,

$$\dot{S}_{ij} = \langle c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^0 \rangle \quad (3.3)$$

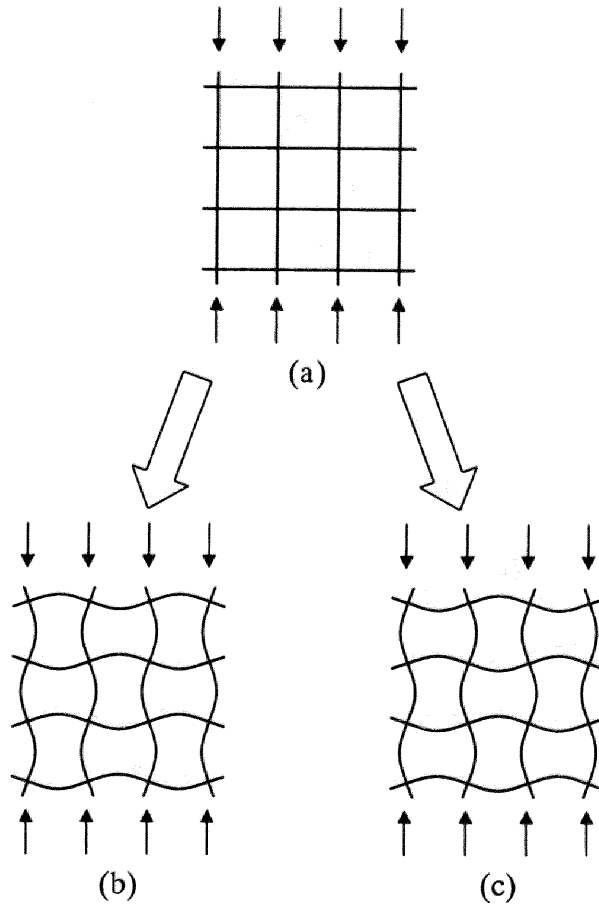


Fig. 3.1 Schematic illustration of microscopic symmetric bifurcation.

$$\langle c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^* \rangle = 0 \quad (3.4)$$

を得る. 同じく式(2.30)と(3.2)より, 次式が任意の変分 $\delta \dot{u}_i^*$ に対して成り立つことになる.

$$\dot{\epsilon}_{kl}^0 \langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = 0 \quad (3.5)$$

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \dot{u}_{p,q}^* \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = 0 \quad (3.6)$$

セル状固体のような多相材料に対しては, $\langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle$ が任意の値を取り得るから(次節 3.2.2 参照), 式(3.5)は

$$\dot{\epsilon}_{kl}^0 = 0 \quad (3.7)$$

に帰着する。このとき、式(3.3)は

$$\dot{S}_{ij} = 0 \quad (3.8)$$

となる。

したがって、微視的対称分岐点では、式(3.4)、(3.6)、(3.7)および(3.8)が成り立つ。つまり、微視的対称分岐が生じるとすると、分岐点での自発的擾乱変位速度場は式(3.6)の非自明解によって与えられ、しかもその速度場は、剛性場 $c_{ijkl}(\mathbf{x}, t)$ との直交条件式(3.4)を満足するとともに巨視的ひずみおよび巨視的応力の変化を伴わないことになる。

上述の結果より、次のように言える。ある時点で式(3.6)が非自明解 $\phi_i(\mathbf{x})$ を有し、しかもこの解による擾乱変位速度場とその符号を変えた速度場、すなわち $\phi_i(\mathbf{x})$ と $-\phi_i(\mathbf{x})$ が巨視的に等価であることを確認できたとする。このとき、微視的対称分岐が生じることになり、 $\phi_i(\mathbf{x})$ はその分岐点での自発的擾乱変位速度場を表すから、 $\phi_i(\mathbf{x})$ は式(3.4)、つまり

$$\langle c_{ijkl} \phi_{k,l} \rangle = 0 \quad (3.9)$$

を満たす。また分岐点では、式(3.7)および(3.8)が成り立つから、巨視的ひずみおよび巨視的応力の変化は生じない。

式(3.6)の非自明解として m 個の独立な解 $\phi_i^{(k)}(\mathbf{x})$ ($k = 1, 2, \dots, m$) が存在する場合は、それらの線形結合

$$\phi_i = \sum_{k=1}^m v^{(k)} \phi_i^{(k)}(\mathbf{x}) \quad (3.10)$$

に対して同様に微視的対称分岐を検討できる。ここで $v^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) は定数である。すなわち、上式による自発的擾乱変位速度場とその符号を変えた速度場が巨視的に等価であることを確かめられれば、微視的対称分岐が生じることになるから、式

(3.4)により，分岐点で

$$\sum_{k=1}^m v^{(k)} \langle c_{ijpq} \phi_{p,q}^{(k)} \rangle = 0 \quad (3.11)$$

が成り立つ．また式(3.7)と(3.8)により，式(3.10)による自発的擾乱変位速度場は巨視的ひずみおよび巨視的応力の変化を伴わずに生じる．

なお，対称分岐モードと対称分岐モードの重ね合わせによって非対称分岐モードが生じることがある[98]．このため，式(3.6)が多重解を有する場合，各非自明解に対して符号の入れ替えにより微視的対称性を確かめられても，式(3.10)の結合解が微視的対称性を満足するとは限らない．したがって，式(3.10)の結合解を考える場合，その結合解に対して微視的対称性を検討する必要がある．

3.2.2 $\langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle$ が任意の値となる証明

$\delta \dot{u}_i^*$ に対しては kY 周期性が課せられる．このため， $\langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{k,l}^* \rangle$ がつねに任意の値を取るとは限らない．事実， c_{ijkl} がセル集合 kY 内で一様分布すれば，次に示すように $\langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{k,l}^* \rangle = 0$ となる．すなわち，

$$\int_{kY} c_{ijkl} \delta \dot{u}_{k,l}^* dY = \int_{\Gamma} c_{ijkl} n_i \delta \dot{u}_k^* d\Gamma - \int_{kY} c_{ijkl,l} \delta \dot{u}_k^* dY \quad (3.12)$$

が成り立ち，この式の右辺第1項は kY 周期性により零となり，また第2項は c_{ijkl} が一様分布すれば消失する．

しかし，多相材料に対しては， $\langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{k,l}^* \rangle$ が任意の値を取り得る．このことを示すため，単位セル Y が図 3.2 に示すように Y_1 および Y_2 の二相からなる場合を考え，これら二相の微視的構成式がそれぞれ

$$\dot{s}_{ij} = c_{ijkl}^{(1)} \dot{\epsilon}_{kl}, \quad \dot{s}_{ij} = c_{ijkl}^{(2)} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.13a, b)$$

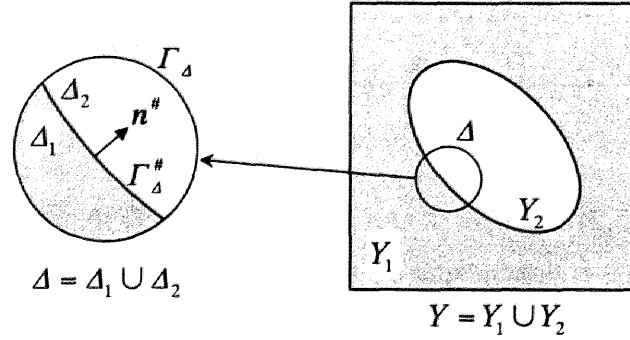


Fig. 3.2 Region Δ comprising a part of Y_1 and Y_2 in unit cell Y .

と表されるとする. いま, 二相 Y_1, Y_2 にまたがる領域 Δ を取り, Δ の境界を Γ_Δ とする. また, $\Delta_1 = Y_1 \cap \Delta, \Delta_2 = Y_2 \cap \Delta$ とし, Δ_1 と Δ_2 の界面を $\Gamma_\Delta^\#$ とする (図 3.2). さらに, $\delta \dot{u}_i^*$ として Δ 内では非零であるが, Γ_Δ 上では零である場を考える. すなわち,

$$\delta \dot{u}_i^* \neq 0 \text{ in } \Delta, \quad \delta \dot{u}_i^* = 0 \text{ on } \Gamma_\Delta \quad (3.14a, b)$$

さて, 領域 Δ は微小であるとして, $c_{ijkl}^{(1)}$ と $c_{ijkl}^{(2)}$ はそれぞれ Δ_1, Δ_2 内で一定であるとする. このとき,

$$\int_\Delta c_{ijkl} \delta \dot{u}_{k,j}^* dY = c_{ijkl}^{(1)} \int_{\Delta_1} \delta \dot{u}_{k,j}^* dY + c_{ijkl}^{(2)} \int_{\Delta_2} \delta \dot{u}_{k,j}^* dY = [c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}] \int_{\Gamma_\Delta^\#} n_i^\# \delta \dot{u}_k^* d\Gamma \quad (3.15)$$

が成り立つ. ここで $n_i^\#$ は, 図 3.2 に示すように界面 $\Gamma_\Delta^\#$ に立てた法線である. 領域 Δ 内における $n_i^\#$ の方向変化が無視できれば, 上式は

$$\int_\Delta c_{ijkl} \delta \dot{u}_{k,j}^* dY = [c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}] n_i^\# \int_{\Gamma_\Delta^\#} \delta \dot{u}_k^* d\Gamma \quad (3.16)$$

となる. この式において, $n_i^\# \int_{\Gamma_\Delta^\#} \delta \dot{u}_k^* d\Gamma$ は界面 $\Gamma_\Delta^\#$ に関する法線および接線方向変形速度を表す. したがって上式は, $c_{ijkl}^{(1)} \neq c_{ijkl}^{(2)}$ ならば, これらの変形速度に対応する応力を

領域 Δ 内に任意に発生させ得ることを意味するから、上述のような領域 Δ を Y 内に適切に取れば、 $\int_Y c_{ijkl} \delta \dot{u}_{k,l}^* dY$ が任意の値を取ることになる。これらは、多相材料の場合に成立する関係であるから、周期単位を Y から kY にしても同様に成り立つ。

3.3 微視的分岐条件

本節では、対称分岐の仮定を用いずに、ある時刻 \hat{t} で境界値問題(2.30)の解に分岐が生じる問題を考え、前節よりも一般的に微視的分岐条件について検討する。

3.3.1 単純分岐の場合

まず、単純分岐の場合を考える。議論を簡単にするため、とりあえず巨視的ひずみの時間履歴が規定されているとする。

このとき、時刻 \hat{t} での巨視的ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{kl}^0(\hat{t})$ に対して基本解 $\dot{u}_i^{*(1)}$ のほかに分岐解 $\dot{u}_i^{*(2)}$ が存在するならば、次の二つの式が同時に成り立つ。

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \dot{u}_{p,q}^{*(1)} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\dot{\varepsilon}_{kl}^0(\hat{t}) \langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (3.17)$$

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \dot{u}_{p,q}^{*(2)} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\dot{\varepsilon}_{kl}^0(\hat{t}) \langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (3.18)$$

したがって、分岐解と基本解の差 $\Delta \dot{u}_i^* (= \dot{u}_i^{*(2)} - \dot{u}_i^{*(1)})$ は、境界値問題

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \Delta \dot{u}_{p,q}^* \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = 0 \quad (3.19)$$

の固有解となるから、この固有解を ϕ_i とすると次のように書ける。

$$\dot{u}_i^{*(2)} - \dot{u}_i^{*(1)} = \phi_i \quad (3.20)$$

基本解 $\dot{u}_i^{*(1)}$ に関しては、式(2.31)と(2.32)が次式のように成り立つ。

$$\dot{u}_i^{*(1)} = \hat{\chi}_i^{kl} \dot{\epsilon}_{kl}^0(\hat{t}) \quad (3.21)$$

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \hat{\chi}_{p,q}^{kl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = - \langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (3.22)$$

ここで $\hat{\chi}_i^{kl}$ は、時刻 \hat{t} での χ_i^{kl} を示し、分岐点での特解として式(3.22)を満たす。この結果、式(3.20)と(3.21)により、分岐解 $\dot{u}_i^{*(2)}$ は、

$$\dot{u}_i^{*(2)} = \hat{\chi}_i^{kl} \dot{\epsilon}_{kl}^0(\hat{t}) + \phi_i \quad (3.23)$$

と表される。

固有解 $\phi_i (= \Delta \dot{u}_i^*)$ は任意の kY 周期速度場 $\delta \dot{u}_i^*$ に対して式(3.19)を満たす。そこで、 $\delta \dot{u}_i^* = \hat{\chi}_i^{kl}$ ととれば、次式が成り立つ。

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \phi_{p,q} \hat{\chi}_{i,j}^{kl} \rangle = 0 \quad (3.24)$$

また、式(3.22)も任意の kY 周期速度場 $\delta \dot{u}_i^*$ に対して成立するから、この式において $\delta \dot{u}_i^* = \phi_i$ と選ぶと

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \hat{\chi}_{p,q}^{kl} \phi_{i,j} \rangle = - \langle c_{ijkl} \phi_{i,j} \rangle \quad (3.25)$$

となる。したがって、次式が成り立つ。

$$\langle c_{ijkl} \phi_{i,j} \rangle = 0 \quad (3.26)$$

上式は、固有解 ϕ_i による自発的ひずみ速度場が微視的剛性 c_{ijkl} の分布と直交することを意味する。

式(3.23)を式(2.29)に代入し、式(3.26)を用いると、微視的分岐点での巨視的応力変化は次式のように表され、自発的擾乱変位速度 ϕ_i の影響をまったく受けないこと、つまり基本解(2.33)、(2.34)に従うことが示される。

$$\dot{S}_{ij}(\hat{t}) = C_{ijkl}^H(\hat{t}) \dot{\epsilon}_{kl}^0(\hat{t}) \quad (3.27)$$

ここで

$$C_{ijkl}^H(\hat{t}) = \langle c_{ijkl} + c_{ijpq} \hat{\chi}_{p,q}^k \rangle \quad (3.28)$$

である.

上に述べた理論展開は、巨視的応力の時間履歴が規定される場合も有効である. この場合も、考える時刻 \hat{t} で巨視的不安定が生じなければ、時刻 \hat{t} での巨視的ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kl}^0(\hat{t})$ は一意的に定められるから、式(3.17)~(3.28)はそのまま成立する. この結果として、時刻 \hat{t} で式(3.19)が固有解 ϕ_i を有しても、式(2.39)と(3.27)からわかるように時刻 \hat{t} における L_{ijkl}^H の楕円性の消失（巨視的不安定の生起）には影響しないから、式(3.17)~(3.28)の前提条件である $\dot{\epsilon}_{kl}^0(\hat{t})$ の一意性は損なわれない.

以上の結果は、次のようにまとめられる. \dot{u}_i^* に関する境界値問題(2.30)の解に分岐が生じるためには、式(3.19)が kY 周期固有解 ϕ_i を有し、かつ ϕ_i は c_{ijkl} との直交条件(3.26)を満足する必要がある. この条件が成り立つとき、 \dot{u}_i^* には式(3.23)のように自発的成分 ϕ_i が現れるが、 ϕ_i は kY 周期性と直交条件(3.26)を満たすから、巨視的ひずみおよび巨視的応力の変化に影響することなく生じる. この結果、微視的分岐点での巨視的な応力速度とひずみ速度は、式(3.27), (3.28)で表されるように基本解(2.33), (2.34)に従うことになり、固有解 ϕ_i には依存しない.

さて、式(3.19)で $\delta \dot{u}_i^* = \Delta \dot{u}_i^*$ と取り、対偶を考えると、次式がすべての kY 周期速度場 $\Delta \dot{u}_i^*$ に対して成り立つことが、微視的分岐が生じないための十分条件であることがわかる.

$$\langle (c_{ijkl} + \delta_{ik} \sigma_{jl}) \Delta \dot{u}_{i,j}^* \Delta \dot{u}_{k,l}^* \rangle > 0 \quad (3.29)$$

上式は、 $\Delta \pi_{ji}^* = (c_{ijkl} + \delta_{ik} \sigma_{jl}) \Delta \dot{u}_{k,l}^*$ と置くと $\langle \Delta \pi_{ji}^* \Delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle > 0$ となる. この式は、 $\Delta \dot{u}_i^*$ の kY 周期性を除けば、弾塑性構造物における解の一意性の十分条件として Hill[94]が示した式と同じ形である.

3.3.2 多重分岐の場合

式(3.19)を満足する独立な固有解が、次式のように m 個存在するとする。

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \phi_{p,q}^{(r)} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = 0, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (3.30)$$

このとき、分岐解と基本解の差 $\dot{u}_i^{*(2)} - \dot{u}_i^{*(1)}$ は、固有解 $\phi_i^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, m$) の線形結合となる。すなわち、

$$\dot{u}_i^{*(2)} - \dot{u}_i^{*(1)} = \sum_{r=1}^m v^{(r)} \phi_i^{(r)} \quad (3.31)$$

ここで $v^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, m$) は定数である。基本解 $\dot{u}_i^{*(1)}$ に関しては、単純分岐の場合と同じく式(3.21)のように書ける。したがって分岐解 $\dot{u}_i^{*(2)}$ は、

$$\dot{u}_i^{*(2)} = \hat{\chi}_i^{kl} \dot{e}_{kl}^0(\hat{t}) + \sum_{r=1}^m v^{(r)} \phi_i^{(r)} \quad (3.32)$$

と表される。

式(3.30)は、任意の kY 周期速度場 $\delta \dot{u}_i^*$ を $\delta \dot{u}_i^* = \hat{\chi}_i^{kl}$ と取ることにより、次式となる。

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \phi_{p,q}^{(r)} \hat{\chi}_{i,j}^{kl} \rangle = 0, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (3.33)$$

また、式(3.22)において $\delta \dot{u}_i^*$ を $\delta \dot{u}_i^* = \phi_i^{(r)}$ と選べば、

$$\langle (c_{ijpq} + \delta_{ip} \sigma_{jq}) \hat{\chi}_{p,q}^{kl} \phi_{i,j}^{(r)} \rangle = -\langle c_{ijkl} \phi_{i,j}^{(r)} \rangle, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (3.34)$$

となる。したがって、次式が成り立つ。

$$\langle c_{ijkl} \phi_{i,j}^{(r)} \rangle = 0, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (3.35)$$

この結果、式(3.19)が複数の独立な固有解を有する場合には、各固有解と c_{ijkl} との直交条件(3.35)が微視的分岐点での必要条件として成立することになる。また、式(3.32)を式(2.29)に代入し、式(3.35)を用いると、多重分岐点での巨視的変化は式(3.27), (3.28)の

ように表され、固有解の影響をまったく受けないことも示される。

3.4 まとめ

本章では、第2章で導いた更新 Lagrange 形式の均質化理論に対して微視的分岐が生じる場合を考え、微視的分岐条件の導出を行った。この結果として、微視的対称分岐の仮定を用いて導いた微視的対称分岐条件は、一般的な検討により導かれた微視的分岐条件と同じ条件を示した。すなわち、微視的分岐点では、巨視的な対称性に関わらず固有解は常に微視的剛性との直交条件を満足し、固有解の発生によって巨視的状态は変化しない。また、この条件は単純分岐だけでなく多重分岐の場合でも同様に満足することを示した。

第 4 章

均質化理論を用いた微視的分岐の解析方法^[25,26]

4.1 はじめに

第 2 章と第 3 章では、有限変形の均質化理論として更新 Lagrange 形式に基づく理論構築と、その枠組みにおける微視的分岐条件の導出を行った。この章では、これまでの主要な結果を有限要素法[99-103]により離散化するとともに、その解析手順を示す。このためまず、境界値問題(2.32)の離散化を行い一意的な解が生じる場合の関係式を示す。また、微視的分岐が生じる場合についても同様に離散化を行い、最後にこれらを用いた解析手順を示す。ただし、有限要素法による離散化自体はすでによく知られているから、その説明は必要最小限に留め、付録 A に補足する。

4.2 有限要素法による離散化

4.2.1 擾乱変位速度方程式

式(2.30)は、有限要素法により離散化すると、

$$K\dot{u} = -N\epsilon^0 \quad (4.1)$$

となる。ここで、 $\dot{\mathbf{u}}^*$ は kY 周期性を有する節点擾乱変位速度ベクトルを示し、また $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$ は $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ を表すベクトルで、転置記号を $()^T$ として $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = [\dot{\varepsilon}_{11}^0 \quad \dot{\varepsilon}_{22}^0 \quad \dot{\varepsilon}_{33}^0 \quad \dot{\varepsilon}_{12}^0 \quad \dot{\varepsilon}_{23}^0 \quad \dot{\varepsilon}_{31}^0]^T$ と表される。さらに \mathbf{K} と \mathbf{N} は、それぞれ接線剛性および節点力を示し、一般的には次式のように定義される。

$$\mathbf{K} = \int_{kY} (\mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{T} \mathbf{B}_{NL}) dY \quad (4.2)$$

$$\mathbf{N} = \int_{kY} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} dY \quad (4.3)$$

上式の \mathbf{B}_L と \mathbf{B}_{NL} はいわゆる線形および非線形ひずみ-変位マトリックスを示し、 \mathbf{C} と \mathbf{T} はそれぞれ c_{ijpq} および $\delta_{ip} \sigma_{jq}$ を表すマトリックスである(付録 A 参照)。なお、式(4.2)による接線剛性マトリックス \mathbf{K} は、対称であるから $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ を満たす。

上述のように離散化すると、もし

$$\det(\mathbf{K}) \neq 0 \quad (4.4)$$

ならば、 $\dot{\mathbf{u}}^*$ は式(4.1)より次式のように求められる。

$$\dot{\mathbf{u}}^* = \boldsymbol{\chi} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \quad (4.5)$$

ここで、 $\boldsymbol{\chi} = [\chi^{11} \quad \chi^{22} \quad \chi^{33} \quad \chi^{12} \quad \chi^{23} \quad \chi^{31}]$ であり、 $\boldsymbol{\chi}$ は式(3.32)の離散形、すなわち次式を満足する kY 周期解である。

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\chi} = -\mathbf{N} \quad (4.6)$$

本解析では、式(4.1)、(4.6)の境界値問題の解である $\dot{\mathbf{u}}^*$ や $\boldsymbol{\chi}$ が kY 周期境界条件を満足するようにペナルティ法を用いて境界条件を課した。このとき、接線剛性マトリックス \mathbf{K} は、

$$\mathbf{K} = \int_{kY} (\mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{T} \mathbf{B}_{NL}) dY + \lambda \mathbf{P}_{kY}^T \mathbf{P}_{kY} \quad (4.7)$$

と表され, λ はペナルティ数, P_{kY} は kY 周期境界条件に基づく拘束マトリックスである(付録 A.3 参照).

4.2.2 微視的分岐条件

次式が成り立てば, \hat{u} は式(4.1)より一意的には求められない.

$$\det(K) = 0 \quad (4.8)$$

このときの固有解 ϕ は, 第3章で行った一般的な議論からわかるように式(3.30)の離散形

$$K\phi = 0 \quad (4.9)$$

を満足する非自明解として表される.

いま, 上式を満足する m 個の独立な非自明解 $\phi^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) が存在するとし, その線形結合を

$$\phi = \sum_{i=1}^m v^{(i)} \phi^{(i)} \quad (4.10)$$

とするとき, 微視的分岐点で満足される直交条件式(3.35)は

$$N^T \phi = 0 \quad (4.11)$$

と表される. なお, 第3章で議論したように, 微視的分岐点において分岐解 ϕ の発生は巨視的状态変化を伴わない.

式(4.10)は, 節点力マトリックス N と固有解 ϕ が直交する条件となり, こうした直交条件は, 従来の構造物の分岐座屈解析においても成立することが知られており [59,60,104], 本理論による分岐条件は従来の結果と整合している.

4.3 解析手順

ここでは、更新 Lagrange 形式の均質化理論に基づく微視的分岐の解析手順を示す。ただし、巨視的負荷あるいは巨視的変形の時間履歴が規定されており、簡単のため巨視的回転および剛体的並進はないものとする。このとき、境界値問題(3.30)に分岐が生じない場合 ($\det(\mathbf{K}) \neq 0$) と生じる場合 ($\det(\mathbf{K}) = 0$) に分けて、解析を次のように増分的に進める(微視的分岐点の判定方法は付録 B.1 を参照)。

【 $\det(\mathbf{K}) \neq 0$ の場合】

- (1) 式(4.6)より $\boldsymbol{\chi}$ を求める。
- (2) (1) で得られた $\boldsymbol{\chi}$ を用いて、式(2.34)の関係から巨視的接線係数 C_{ijkl}^H を求める。
- (3) 式(2.14)を用いて、巨視的応力速度 $\dot{\Sigma}_{ij}$ および巨視的ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ の未知成分を決定する。
- (4) 式(2.3)～(2.11)と式(2.31)により各節点で \dot{u}_i を、また各積分点で $\dot{\sigma}_{ij}$ を求める。
- (5) (3), (4) で得られた値より、巨視的状態量 Σ_{ij} や ε_{ij}^0 、微視的状态量 u_i や σ_{ij} の値を更新する。

【 $\det(\mathbf{K}) = 0$ の場合】

- (1) 式(4.9)を満足する固有解 $\boldsymbol{\phi}$ を求める。
- (2) 第3章で示したように、固有解 $\boldsymbol{\phi}$ の発生は巨視的状态変化を伴わない。このことから、弾性材料の場合は、 v を微小量として $\dot{u}^* = v\boldsymbol{\phi}$ による u_i および σ_{ij} の変化を求め、それらの値を更新することにより、分岐経路への誘導を行う。また、弾塑性材料の場合には、線形比較体[94,116]の考え方にに基づき、基本解と分岐解の両者の比を調整することで負荷から除荷への転化を防いだ。

4.4 まとめ

この章では、第2章と第3章で導いた更新 Lagrange 形式の均質化理論と、それに基づく微視的分岐条件について有限要素法を用いた解析方法を示した。このため、境界値問題(2.32)と微視的分岐条件を有限要素法により離散表示した。ここで、微視的分岐時に成立する直交条件の離散形(4.11)は、従来の構造物の分岐座屈解析においても成立することが知られており、本理論による分岐条件は従来の結果との整合性が示された。つづいて、微視的分岐が生じる場合と生じない場合に分けて、その解析手順を示した。

第 5 章

正六角形弾性ハニカムの面内座屈モード解析

[25,26]

5.1 はじめに

ハニカムに面内圧縮負荷を加えると微視的座屈が生じ、負荷条件によって異なる座屈モードが発生する[1,4-7,9,10,13,15,20,23]。正六角形弾性ハニカムの面内単軸圧縮では、セル壁が座屈することによって、図 1.1 (b)に示されるように負荷軸方向に二種類の異なるセル変形が現れる[1,4,6]。また、面内二軸圧縮では図 1.1 (c)に示されるように4つのセルを集合として座屈モードが現れる[1,6]。さらに、円筒高分子ハニカムの面内等二軸圧縮では図 1.2 (d)に示されるような花状の座屈モードが現れる[15,20,23]。こうした、複雑な座屈モードの発生は、セル構造全体を有限要素分割して有限要素解析を行うことで、再現性が確認されている[7,9,10,13,20,30-32]。しかしながら、微視的座屈によって、二軸モードや花状モードといった複雑な座屈モードが現れるメカニズムについては明らかにされていない。

そこで本章では、正六角形弾性ハニカムの面内二軸圧縮負荷による微視的座屈を、第4章で示した解析手順に従って有限要素法により解析する。これより、分岐の多重度に着目した検討を行い、二軸圧縮下の六角形ハニカムに複雑な座屈モードが現れるメカニズムを解明する。また、第3章で検討した微視的分岐条件の妥当性についても調べる。

5.2 解析条件・方法

第2章と第3章の理論を用いて、図5.1に示すような正六角形弾性ハニカム面の面内での微視的座屈問題を解析する。このため、 x_1 および x_2 座標軸を面内に、また x_3 座標軸をセル軸方向に取る。また、図5.1の正六角形ハニカムには無限体を考え、Papka-Kyriakides[7,9,10,30], Chung-Waas[13,20,31]やChenら[105,106]の解析のように初期不整を与えない。セル壁の3つの方向は、 θ を初期状態における x_1 軸とセル壁間の角度として、 $\theta = \pm 30^\circ, 90^\circ$ と表すことにする。

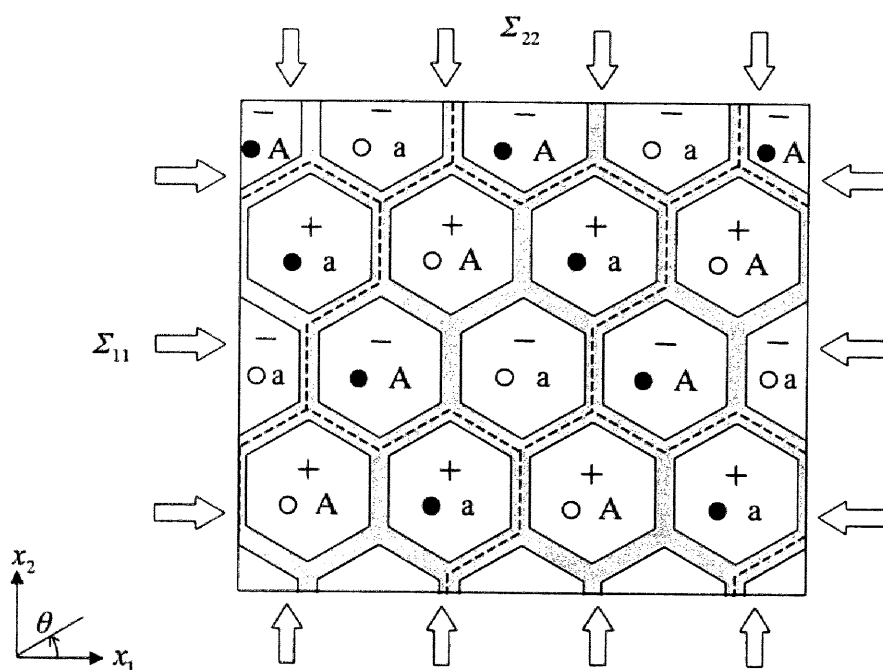


Fig. 5.1 Periodical unit of analysis of in-plane biaxial buckling of hexagonal honeycombs.

5.2.1 負荷条件

正六角形弾性ハニカムは，巨視的 Cauchy 応力の面内垂直成分 Σ_{11} と Σ_{22} が一定の比であるような面内圧縮負荷を受けるとする．すなわち，

$$\dot{\Sigma}_{22}/\dot{\Sigma}_{11} = \gamma, \quad \Sigma_{33} = 0, \quad \Sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (5.1)$$

ここで γ は応力比を示し，一定である．

5.2.2 セル壁の材料特性

第2章と第3章の理論は，亜弾性の微視的構成式(2.4)に基づくから弾塑性変形に対して有効であるが，本章では弾性のセル壁を想定する．このため，相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\overset{\circ}{\tau}_{ij}$ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ の間に等方な線形関係

$$\overset{\circ}{\tau}_{ij} = c_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} \quad (5.2)$$

が成り立つとする．ここで c_{ijkl}^e は，等方 Hooke 弾性体の剛性テンソルを示し，ヤング率 E とポアソン比 ν を用いて，

$$c_{ijkl}^e = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} \right) \quad (5.3)$$

と表される．ここで，スピンを $\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i})$ として， $\overset{\circ}{\tau}_{ij}$ は次のように定義される [99-102]．

$$\overset{\circ}{\tau}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\dot{u}_{k,k} - \dot{\omega}_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\dot{\omega}_{kj} \quad (5.4)$$

このとき，構成式(2.4)の剛性テンソル c_{ijkl} は，

$$c_{ijkl} = c_{ijkl}^e - \frac{1}{2}(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\sigma_{jl} + \delta_{il}\sigma_{jk}) \quad (5.5)$$

と表される．

本解析では、材料定数のヤング率 E で Cauchy 応力を無次元化し、ポアソン比 ν を 0.3 とする。

5.2.3 セル集合

二軸圧縮負荷を受ける正六角形弾性ハニカム(図 5.1)は、微視的座屈点までは全セルが同様に変形するが、微視的座屈が生じるとこのような周期性は成立しなくなる。例えば x_2 方向の単軸圧縮では、図 1.1 (b)に示すように、 x_2 方向に二種類のセル変形状態が交互するようになる。そこで二軸圧縮負荷では、3つのセル壁方向のそれぞれに二種類のセル変形状態が交互するような座屈モードが生じるとすれば(図 5.1 の記号+と-、○と●、A と a)、図 5.1 に破線で示すように4種類のセル(+○A, +●a, -●A, -○a)の集合が周期単位となる。そこで、この4つのセルの集合を kY に取ることにする。なお、このようなセル集合は、最初に斉木ら[107]により用いられた。

5.2.4 有限要素分割

正六角形ハニカムはセル軸方向(すなわち x_3 方向)に無限に長く、面内座屈が生じても、微視的変形はセル軸方向には一様であるとする。このとき、仮に擾乱変位速度のセル軸方向成分が面内座屈により生じるとしても、微視的変形のセル軸方向への一様性、すなわち $\partial u_i / \partial x_3 = 0$ ($i = 1, 2, 3$) を用いれば、2次元要素分割により解析が可能である。このような準3次元の均質化問題の有限要素解析プログラムは、すでに微小変形の場合に開発されており[78,108,109]、本研究で使用したプログラムはそれらを拡張したものである。

セル集合 kY の2次元要素分割を図 5.2 に示す。セル壁厚さ w とセル壁長さ l の比 w/l は 0.1 であり、節点数は 1,729、要素数は 1,248 である。使用した要素は4節点のアイソパラメトリック要素(付録 A.4 参照)であり、各節点に x_1 , x_2 , x_3 方向の節点値を割り当てることにより、上述のような準3次元問題を解く。

式(4.6)と式(4.9)よりそれぞれ χ および ϕ を求める際の境界条件は、 kY 周期条件であ

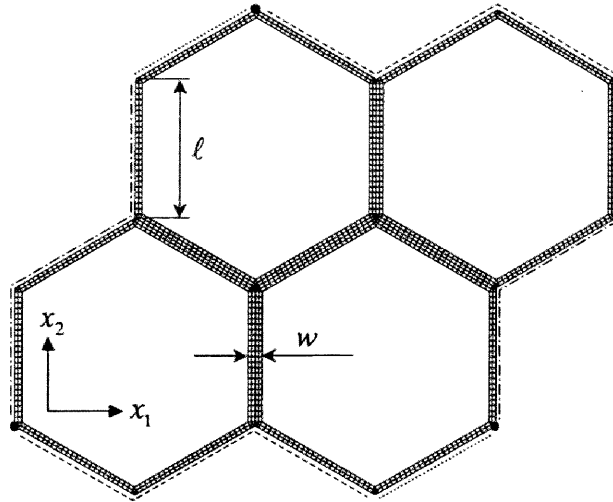


Fig. 5.2 Finite element mesh of periodical unit of hexagonal honeycomb ($w/\ell = 0.1$; 1,729 nodes; 1,248 elements); chain, dashed and dotted lines indicate three periodic pairs of boundary sides, and small solid circles designate the nodal points with $\dot{u}_i^* = 0$.

る。図 5.2 の一点鎖線，破線および点線は， kY 周期境界条件が課せられるべき境界辺のペアを示す。なお図 5.2 の中の・は，擾乱変位速度 \dot{u}_i^* を零に設定した節点を示す。このような節点は 3 つあり，そのいずれか 1 点で \dot{u}_i^* を零にすれば周期境界条件により他の 2 点でも $\dot{u}_i^* = 0$ となる。

5.3 解析結果

5.3.1 座屈荷重と分岐の多重度

正六角形弾性ハニカムの微視的座屈解析をいくつかの応力比 γ に対して行ったところ，図 5.3 に示す巨視的応力状態で微視的分岐条件が満足された。このときの座屈

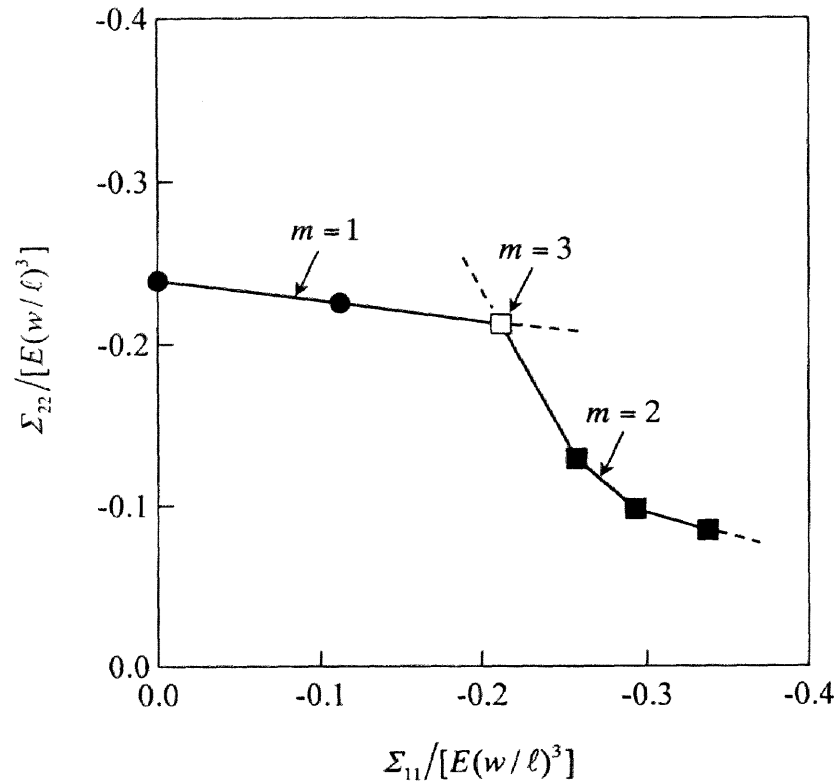


Fig. 5.3 Macroscopic stress states at microscopic buckling points, and the multiplicity of bifurcation, m .

応力は、セル壁をヤング率 E の弾性長柱とみなせば $E(w/\ell)^3$ に比例するから [1,4,6], 図 5.3 の縦軸と横軸の巨視的応力は $E(w/\ell)^3$ によって無次元化してある。

図 5.3 において m の値は、分岐点での K の零固有値数 (付録 B.1 参照) を表しており、 $\gamma = 2, \infty$ のとき $m = 1$ (単純分岐点), $\gamma = 1/4, 1/3, 1/2$ のとき $m = 2$ (二重分岐点), $\gamma = 1$ のとき $m = 3$ (三重分岐点) となった。 m は座屈モードの多重度を表すから、これら 3 ケースでは異なるモードの座屈が生じると予想される。 事実、正六角形ゴムハニカムに関する Gibson-Ashby の実験結果 [1] を見ると、 $1 < \gamma \leq \infty$ と $0 < \gamma < 1$ の場合には座屈モードが異なっており、本解析で $m = 2$ となった $0 < \gamma < 1$ の場合には、単軸圧縮の場合と比べて複雑な座屈モードが観察されている。そこで次節では、 $m = 1, 2, 3$ の各場合について座屈モードを詳細に検討することにする。

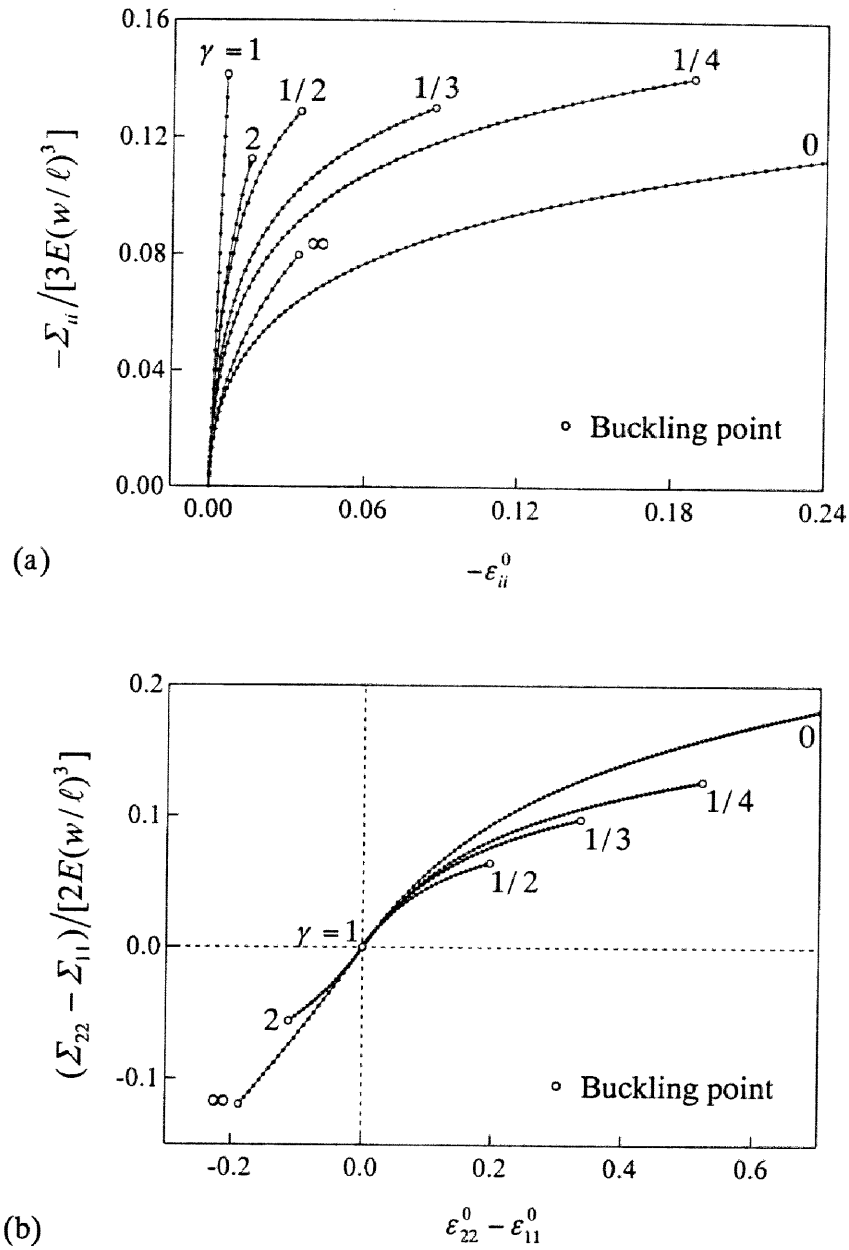


Fig. 5.4 Macroscopic stress-strain relations; (a) volumetric response, (b) in-plane maximum shear response; ε_{11}^0 and ε_{22}^0 are macroscopic logarithmic strains, and small dots designate the points of data computed incrementally.

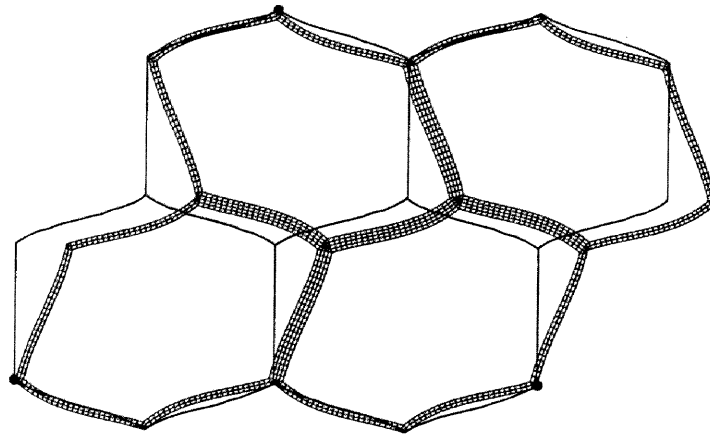


Fig. 5.5 Buckling mode of periodical unit under uniaxial compression in x_2 direction.

なお、図 5.3 に示した本解析結果は、上述の Gibson- Ashby の実験結果と傾向がよく一致している。彼らの実験結果では、応力比 γ が 1 から 0 に近づくにつれて座屈荷重が増し、 $\gamma = 0$ 、すなわち x_1 方向単軸圧縮では座屈が生じなかった。本解析結果でも、 γ が 0 に近づくにつれて、座屈点までに生じる変形が大きくなり、座屈荷重が増大した(図 5.4)。特に $\gamma = 0$ の場合には、セル壁が接触するまで解析を行ったが、座屈は起きなかった。

5.3.2 座屈モード

$m = 1$ の場合、単純分岐点であるから座屈モードは一意的に求められる。 $m = 1$ となった $\gamma = 2, \infty$ の場合の座屈モードをそれぞれ逆べき乗法[110]により求めたところ、同じモード(以後、モード I と呼ぶ)が得られた。 $\gamma = \infty$ 、すなわち x_2 方向単軸圧縮の場合の計算結果を座屈直前の変形状態(細い実線)とともに図 5.5 に示す。また、この計算結果を繰返し配列した結果を図 5.6 に示す。これらの図から、モード I では、最大圧縮荷重を受けるセル壁の方向には 2 個のセルを繰返し単位とする周期変形が生じ

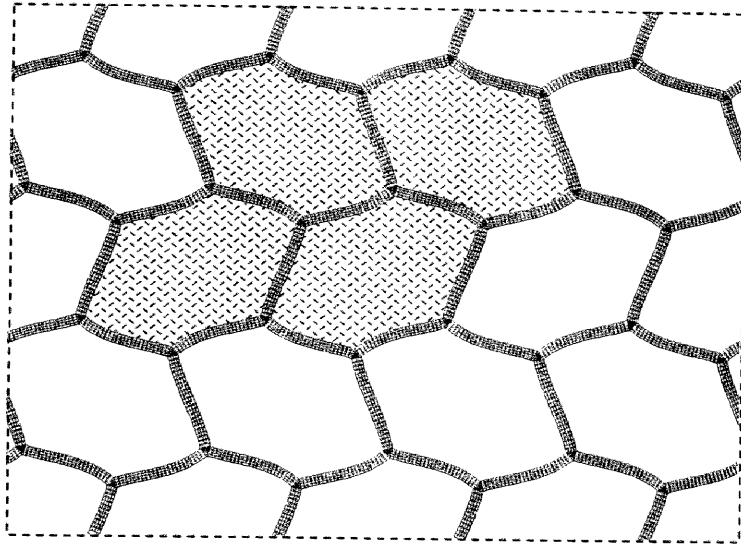


Fig. 5.6 Buckling in Mode I under uniaxial compression in x_2 direction ($\gamma = \infty$).

ているのに対し、これと垂直な方向、すなわち x_1 方向は1個のセルを繰返し単位とする単純な周期変形となっていることがわかる。これは、Gibson-Ashby[1], Papka-Kyriakides[9,15]や Chung-Waas[13]の実験で観察された結果、および斉木ら[107]の有限要素解析結果に一致する。

次に $m = 2$ の場合、二重分岐点であるから座屈モードは一意的には定まらないが、独立な座屈モードが2つ存在し、それらの任意の線形結合が解となる。そこで、このような独立なモードとして物理的意味の明確な基礎的モード(以後、単に基礎モードと呼ぶ)を2つ求めるため、次のように推察した。 $m = 2$ の場合は、 $|\Sigma_{11}| > |\Sigma_{22}|$ であるから(図 5.3 参照)、 x_1 方向と $\pm 30^\circ$ の角をなす2方向のセル壁が同じ最大圧縮荷重を受ける。したがって、これら $\pm 30^\circ$ の2方向にそれぞれ上述のモード I 座屈が起きると考えられる。この推察に基づいて、 -30° と $+30^\circ$ の各方向へのモード I 座屈には影響を及ぼさないような拘束を擾乱変位速度場に加え(付録 B.2 参照)、 $\gamma = 1/2$ の場合に解析を行った。この結果、座屈点で $m = 1$ となり、図 5.7 (a), (b) に示した2つの座屈モード $\phi^{(-30)}$ 、 $\phi^{(30)}$ が、拘束を加えなかった場合と同じ巨視的応力状態で生じた。 $\phi^{(-30)}$ と $\phi^{(30)}$

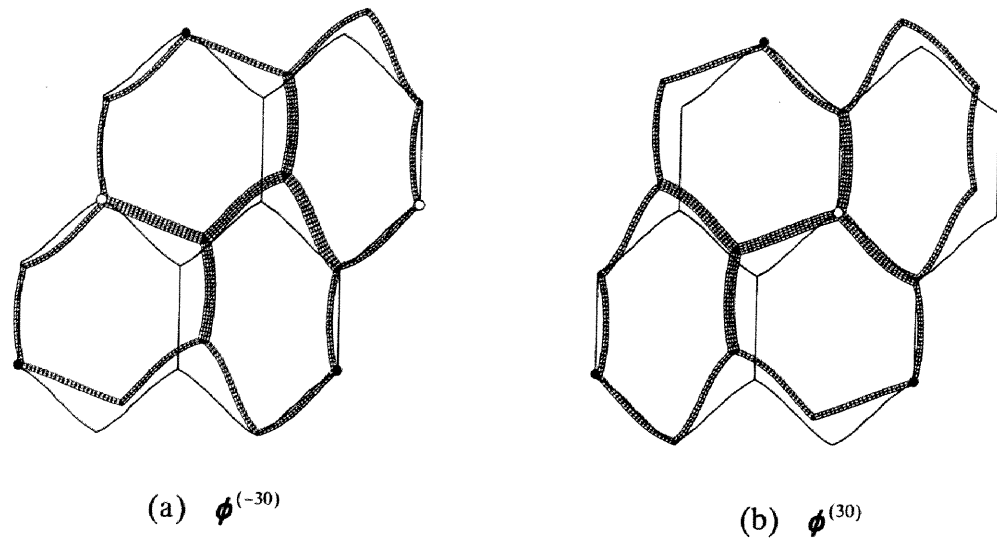


Fig. 5.7 Two basic modes $\phi^{(-30)}$ and $\phi^{(30)}$ for the buckling under biaxial compression of $\gamma = 1/2$.

は、明らかに互いに独立であるから、基礎モードである。なお図中の○は、上述のように $\phi^{(-30)}$ と $\phi^{(30)}$ を求めるため、擾乱変位速度を新たに零に拘束した節点を示す。図 5.7 (a), (b) は、 $\gamma = 1/2$ の場合の結果であるが、 $\gamma = 1/3, 1/4$ の場合も同様な 2 つの基礎モードが得られた。

上述の 2 つの基礎モード $\phi^{(-30)}$ 、 $\phi^{(30)}$ を線形に加え合わせ、さらに繰返し配列したところ、図 5.8 に示した座屈モード(以後、モード II と呼ぶ)が得られた。この図において、濃く影を付けた部分が線形加算 $\phi = \phi^{(-30)} + \phi^{(30)}$ によって得られた部分である。図 5.8 の座屈モードは、Gibson-Ashby[1]が観察した二軸圧縮座屈モードにほかならない。また、Papka-Kyriakides[15]や Chung-Waas[20]も円筒ハニカムの面内座屈試験において同様な座屈モードを観察している。なお、 $\phi^{(-30)}$ と $\phi^{(30)}$ の線形加算において、いずれかの符号を反転しても基本的に同じ座屈モードが得られる。例えば、 $\phi = \phi^{(-30)} - \phi^{(30)}$ とすると、図 5.8 において薄く影を付けた部分となる。

つづいて $m = 3$ の場合について考える。この場合は、三重分岐点であり、独立なモードが 3 つ存在する。 $m = 3$ となるのは等二軸圧縮負荷 ($\gamma = 1$) の場合であるから、正

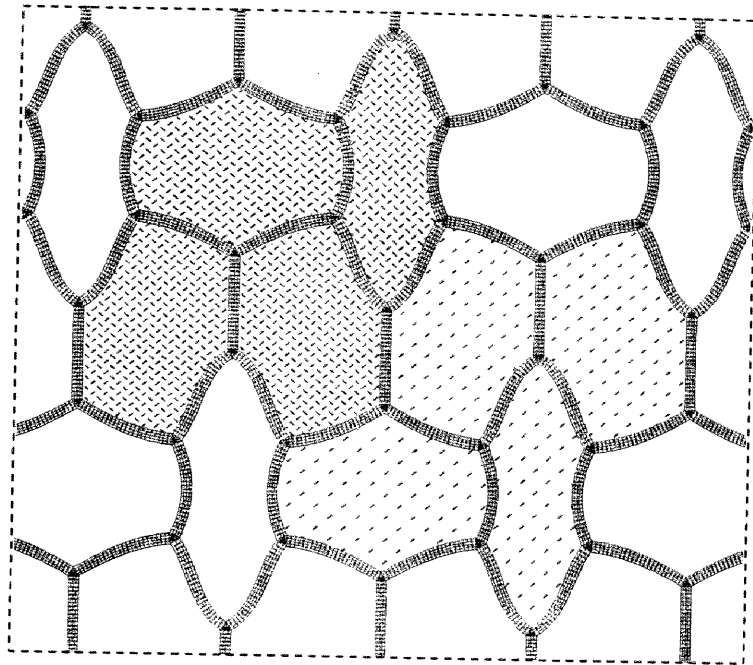


Fig. 5.8 Buckling in Mode II based on the two basic modes under biaxial compression of $\gamma = 1/2$; darkly and lightly shaded areas represent $\phi^{(-30)} + \phi^{(30)}$ and $\phi^{(-30)} - \phi^{(30)}$, respectively.

六角形ハニカム³の3方向のセル壁は同じ圧縮負荷を受ける。したがって、これら3方向にモードIの座屈が同時に生じると考えられる。そこで、このような3方向の座屈モードを基礎モードとしてそれぞれ求めるため、すでに議論した $m = 2$ の場合と同様、擾乱変位速度場に拘束を加えて解析を行った。この結果、拘束を加えなかった場合と同じ巨視的応力状態で、図5.9(a)~(c)に示す3つの座屈モード $\phi^{(90)}$ 、 $\phi^{(-30)}$ 、 $\phi^{(30)}$ が得られた。図中の○は、この場合も、擾乱変位速度を新たに零に拘束した節点を示す。

図5.10に示した座屈モードは、上に述べた3つの基礎モード $\phi^{(90)}$ 、 $\phi^{(-30)}$ 、 $\phi^{(30)}$ を線形に加え合わせ、その結果を繰返し配列したものである。この図において、濃く影を付けた部分が3つの基礎モードの線形加算 $\phi = \phi^{(90)} + \phi^{(-30)} + \phi^{(30)}$ によって形成された部分である。図5.10から、いわゆる花状座屈モード、すなわち大きく変形した6つの

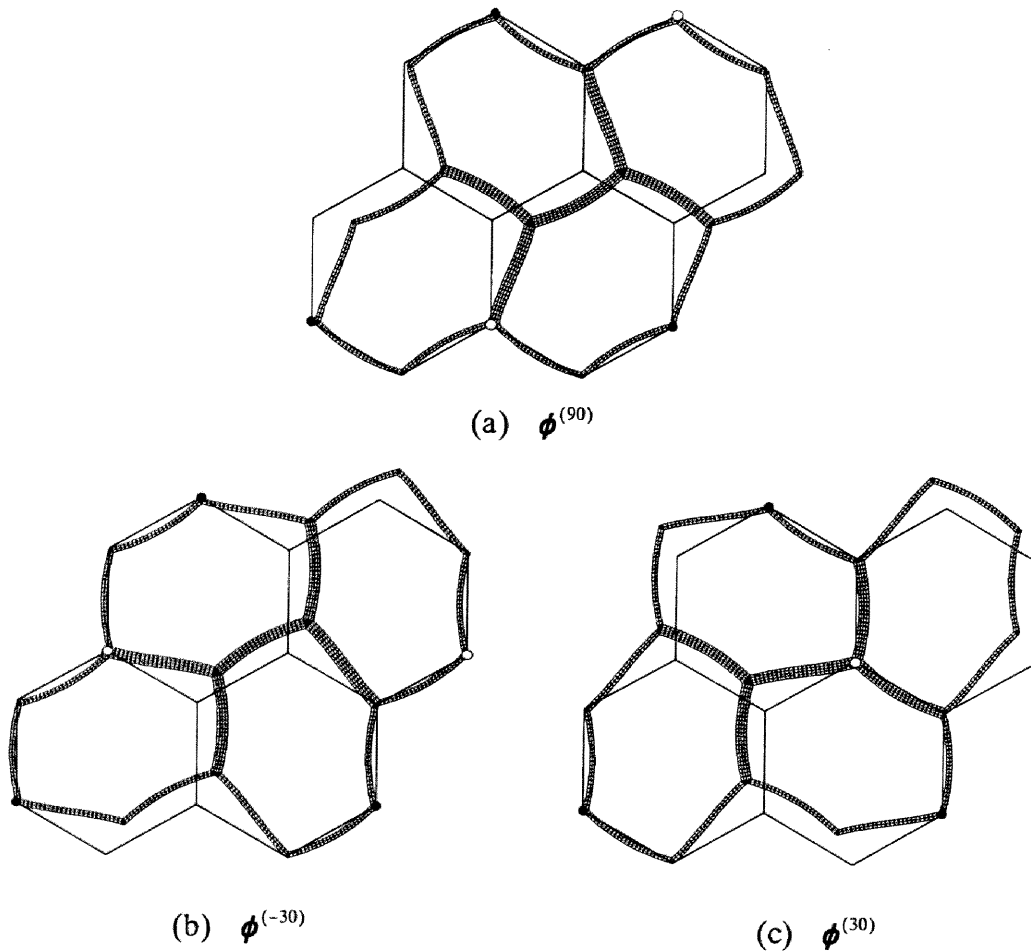


Fig. 5.9 Three basic modes $\phi^{(90)}$, $\phi^{(-30)}$ and $\phi^{(30)}$ for the buckling under equi-biaxial compression ($\gamma = 1$).

セルがほとんど変形していないセルを花卉状に取り囲んだ座屈モード(以後, モード III と呼ぶ)が生じていることがわかる. この座屈モードは, Papka-Kyriakides[15]や Chung-Waas[20]が円筒ハニカムの等二軸圧縮試験で観察したものと同一である. なお, $\phi^{(90)}$, $\phi^{(-30)}$, $\phi^{(30)}$ の線形加算において, これらの内の1つあるいは全部のモードの符号を反転すると“花卉”の回転方向が逆転する. 全部の符号を反転した場合の結果を次節で示す. しかし, 2つのモードの符号を反転すると, このような逆転は起きない.

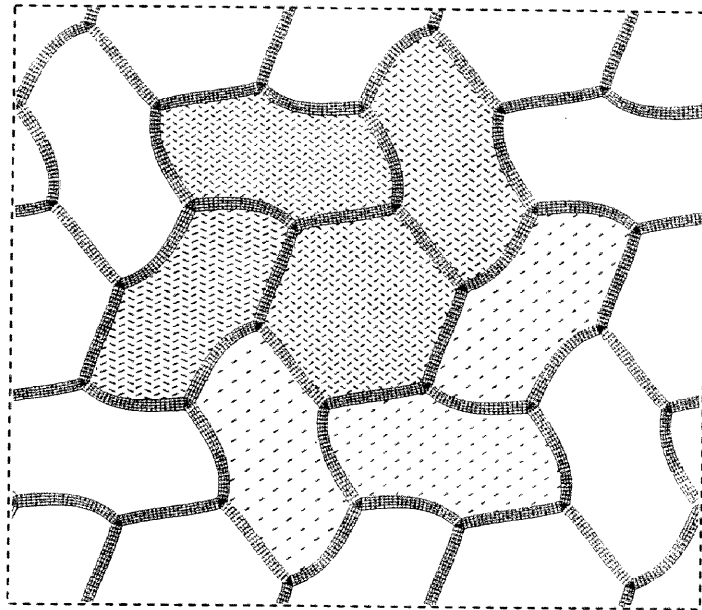
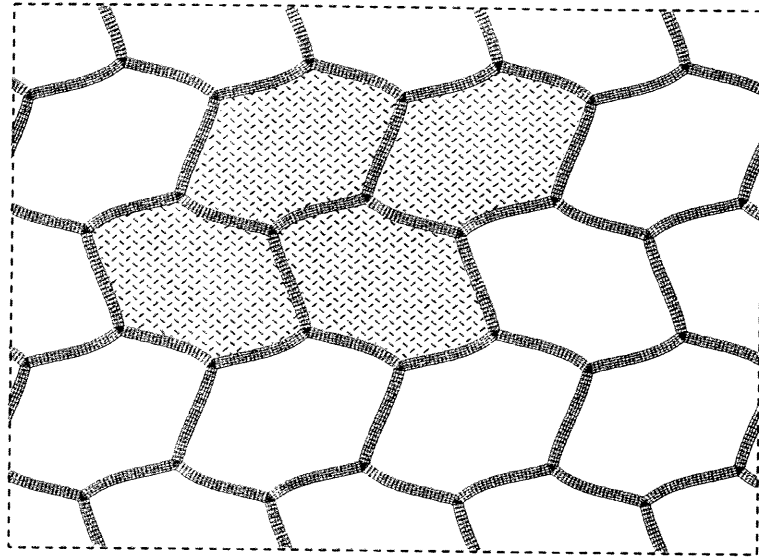


Fig. 5.10 Buckling in Mode III based on the three basic modes under equi-biaxial compression ($\gamma = 1$); darkly shaded area represents $\phi^{(90)} + \phi^{(-30)} + \phi^{(30)}$.

5.3.3 微視的分岐条件の検討

第3章で述べたように、座屈点で生じる自発的擾乱変位速度場(固有解)とその符号を反転した速度場が巨視的に等価ならば、微視的対称分岐である。この条件の成否を検討するため、前節で求めた座屈モード I, II, III における固有ベクトルの符号を反転してみた。この結果、座屈モードはそれぞれ図 5.11 (a)~(c)のようになった。まずモード I の場合を検討すると、図 5.6 と図 5.11 (a)に示した変形状態は平行移動によって互いに重なるから、両変形における自発的擾乱変位速度場が巨視的に等価であることは明らかである。したがって、モード I での座屈は微視的対称分岐であると結論できる。次にモード II も、図 5.8 と図 5.11 (b)を見比べると、同様に微視的対称分岐であることがわかる。これに対してモード III の場合、図 5.10 と図 5.11 (c)に示した変形状態は、“花卉”の回転方向が逆であるから平行移動によっては互いに重ならない。しかし、両変形状態は x_2x_3 面もしくは x_1x_3 面に関する鏡像変換により一致し、しかも巨視

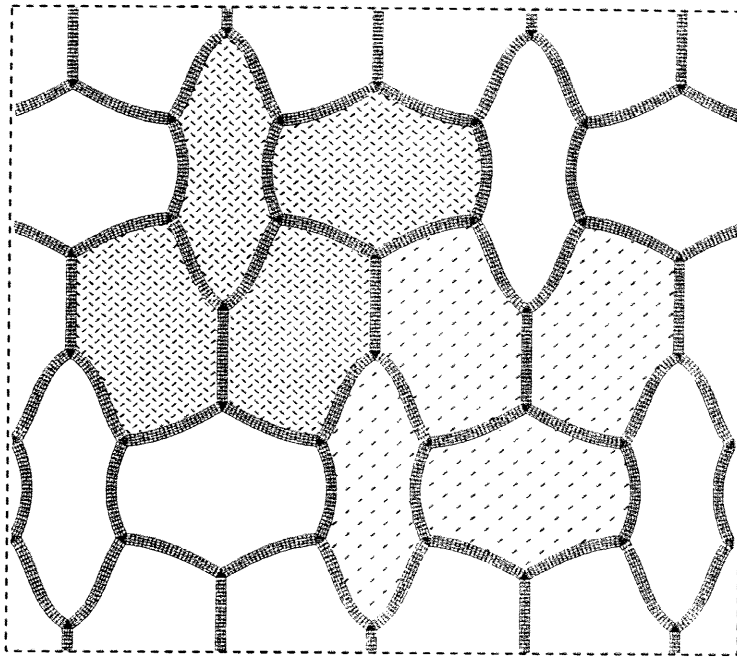


(a)

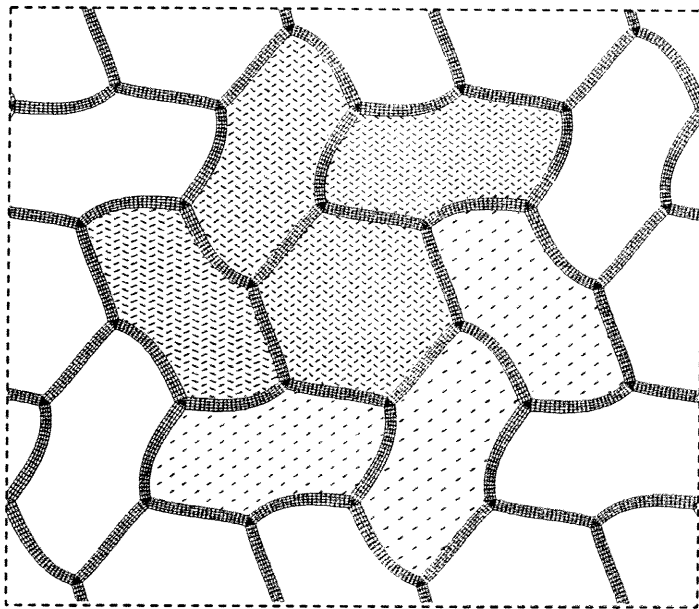
Fig. 5.11 Buckling mode obtained by changing the sign of spontaneous perturbed velocity;
 (a) Mode I ($\gamma = \infty$), (b) Mode II ($\gamma = 1/2$), (c) Mode III ($\gamma = 1$).

的応力および巨視的ひずみの状態は、 x_i ($i = 1, 2, 3$) 方向の垂直成分だけであるから (付録 B.3), この鏡像変換によって影響されない. したがって, モード III での座屈も微視的対称分岐であると結論できる. ただし, 第 3 章での一般的な微視的分岐条件の議論から明らかのように, 微視的分岐点において座屈モードの巨視的等価性の確認は必須ではない.

微視的座屈点での擾乱変位速度場は剛性場との直交条件式(3.35)を満足するはずであるから, この条件の有限要素表示式(4.11)の成否を図 5.3 で示される微視的分岐点で調べた. このため, $\tilde{\phi}_i$ は全節点の中で最大の大きさを 1 に正規化した節点ベクトル, すなわち $\tilde{\phi}_i = \phi_i / \phi_{\max}$ を表し, また \tilde{u}_i^* は座屈点直前での擾乱変位速度節点ベクトルを同様に正規化した節点ベクトル, $\tilde{u}_i^* = u_i^* / u_{\max}^*$ とする. このとき, 直交条件式(3.35)が満足されるのであれば, 次式が数値解析的に十分小さい値を取るはずである.



(b)



(c)

Fig. 5.11 (continued)

Table 1

Numerical verification of orthogonality condition (3.35)

γ	1/4	1/3	1/2	1	2	∞
Mode	II	II	II	III	I	I
R	7.07×10^{-6}	2.34×10^{-6}	2.61×10^{-6}	3.80×10^{-8}	4.82×10^{-7}	1.04×10^{-6}

$$R = \frac{\left(\tilde{S}_{ij}^{\phi} \tilde{S}_{ij}^{\phi} \right)^{1/2}}{\left(\tilde{S}_{kl}^{\cdot} \tilde{S}_{kl}^{\cdot} \right)^{1/2}} \quad (5.6)$$

ここで、 $\tilde{S}_{ij}^{\phi} = \langle c_{ijkl} \tilde{\phi}_{k,l} \rangle$ 、 $\tilde{S}_{ij}^{\cdot} = \langle c_{ijkl} \tilde{u}_{k,l}^{\cdot} \rangle$ である。この結果が表1であり、 R の値は全ての場合で十分に小さいことがわかる。これより、微視的分岐点において直交条件式(3.35)を満足することがわかる。

5.4 まとめ

この章では、第4章で示した解析手順に従って、正六角形弾性ハニカム面の面内二軸圧縮における微視的分岐点と座屈モードの解析を行った。まず、微視的分岐点における分岐の多重度を調べたところ、圧縮比の違いによって単純分岐、二重分岐および三重分岐の場合が現れた。多重分岐では座屈モードが多重となったが、擾乱変位速度場に拘束を与えることにより多重座屈モードの基礎モードを求めることができた。このように求めた基礎モードは、セル壁方向の単軸圧縮座屈モード(モード I)であり、簡単である。上述の基礎モードを線形結合したところ、二重分岐点では Gibson-Ashby が観察した複雑な二軸圧縮座屈モード(モード II)となり、また三重分岐点では Papka-Kyriakides や Chung-Waas によって報告された花状座屈モード(モード III)が得られた。

したがって、これらの複雑な座屈モードは力学的には多重分岐の結果によることが解明された。また、モード I~III の自発的擾乱変位速度場と剛性場との直交条件が数値的に満足することを確認することによって、微視的分岐条件の妥当性を検証した。なお、モード I~III は、擾乱変位速度場の符号の反転に基づく巨視的等価性の検討により、微視的対称分岐であることが示された。

また本研究では、セル壁材料の構成式として等方な線形関係を相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{\tau}_{ij}$ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kl}$ の間に仮定したが、この線形関係を Truesdell 応力速度 \dot{s}_{ij} とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kl}$ の間に仮定しても結果はほとんど変わらなかった。

第 6 章

正六角形弾性ハニカムの面内座屈後解析^[27]

6.1 はじめに

前章では，正六角形弾性ハニカムの面内二軸圧縮における微視的分岐点と座屈モードの解析を行い，二軸圧縮で生じる複雑な座屈モードが微視的分岐の多重性に起因して発生することを明らかにした．すなわち，二軸モードや花状モードは二重分岐，三重分岐の結果として生じる．多重分岐が生じると，座屈モードは独立な固有解の線形結合形で表される．このため，微視的分岐点で生じる座屈モードは一意的に定まらないから，分岐後に安定に進展する座屈モードは明らかではない．したがって，安定に進展する座屈モードを特定するためには，それぞれの座屈モードに対して座屈後の解析を行い，安定性について比較検討する必要がある．

そこで本章では，第 5 章で得られた座屈モードを用いて，面内二軸圧縮を受ける正六角形弾性ハニカムの座屈後の解析を行う．二軸モードや花状モードが現れる多重分岐点では座屈モードは一意的に定まらないため，座屈後に安定に進展する座屈モードの検討が必要となる．このため，特定の座屈モードが安定に進展するような拘束を課して座屈後の解析を行い，内部エネルギーを比較することで安定な座屈モードの特定を行う．また，巨視的不安定についても調べ，巨視的局所化に関する検討を行う．

6.2 座屈モード

前章の結果によれば, $\Sigma_{22} < \Sigma_{11} < 0$ の場合に単純分岐, $\Sigma_{11} < \Sigma_{22} < 0$ の場合に二重分岐, $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} < 0$ の場合に三重分岐が生じることになり, Gibson ら[1,4,6]や Papka-Kyriakides[9,15], Chung-Waas[13,20]によって観察された, 複雑なセルパターンを有する微視的座屈が生じる.

等二軸圧縮負荷によって生じる独立な3つの座屈モード, $\phi^{(90)}$, $\phi^{(-30)}$ および $\phi^{(30)}$ は図 5.9 に示されており, これらの座屈モードは, 負荷条件 $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} < 0$ において同じ圧縮荷重が3つの方向のセル壁 ($\theta = 90^\circ, -30^\circ, 30^\circ$) に作用することにより生じる.

$\phi = \phi^{(90)} + \phi^{(-30)} + \phi^{(30)}$ の座屈モードは, 斜線部分をセル集合として図 6.1 (c) のように表され, この花状モード (以降, モード III と呼ぶ) は円筒ハニカムの等二軸圧縮実験で観察された[15,20].

しかしながら, 3つの基礎モード ($\phi^{(90)}$, $\phi^{(-30)}$, $\phi^{(30)}$) を線形加算した座屈モードはいずれも式(4.9)の固有解となるから, 等二軸圧縮負荷の微視的分岐点では, 花状モード (モード III) の他にも異なる座屈モードが生じ得る. 例えば, $|\Sigma_{22}|$ が $|\Sigma_{11}|$ よりわずかに大きければ, $\phi^{(90)}$ のみが生じることになり, 図 6.1 (a) のように x_2 方向に単軸モード (以降, モード I と呼ぶ) が現れる. 一方, $|\Sigma_{11}|$ が $|\Sigma_{22}|$ よりわずかに大きければ, 図 6.1 (b) のように $\phi^{(-30)} + \phi^{(30)}$ で表される二軸モード (以降, モード II と呼ぶ) が生じる. この理由は, $\theta = \pm 30^\circ$ の2つの方向のセル壁はまったく同じ圧縮荷重を受け, この圧縮荷重は $\theta = 90^\circ$ のセル壁よりわずかに大きくなるからである. この二軸モード (モード II) は, Gibson-Ashby[1,6]の正六角形ゴムハニカムの二軸圧縮実験によって最初に観察された. 図 6.1 に示されるモード I, II, III は, 等二軸圧縮負荷で生じる代表的な座屈モードである.

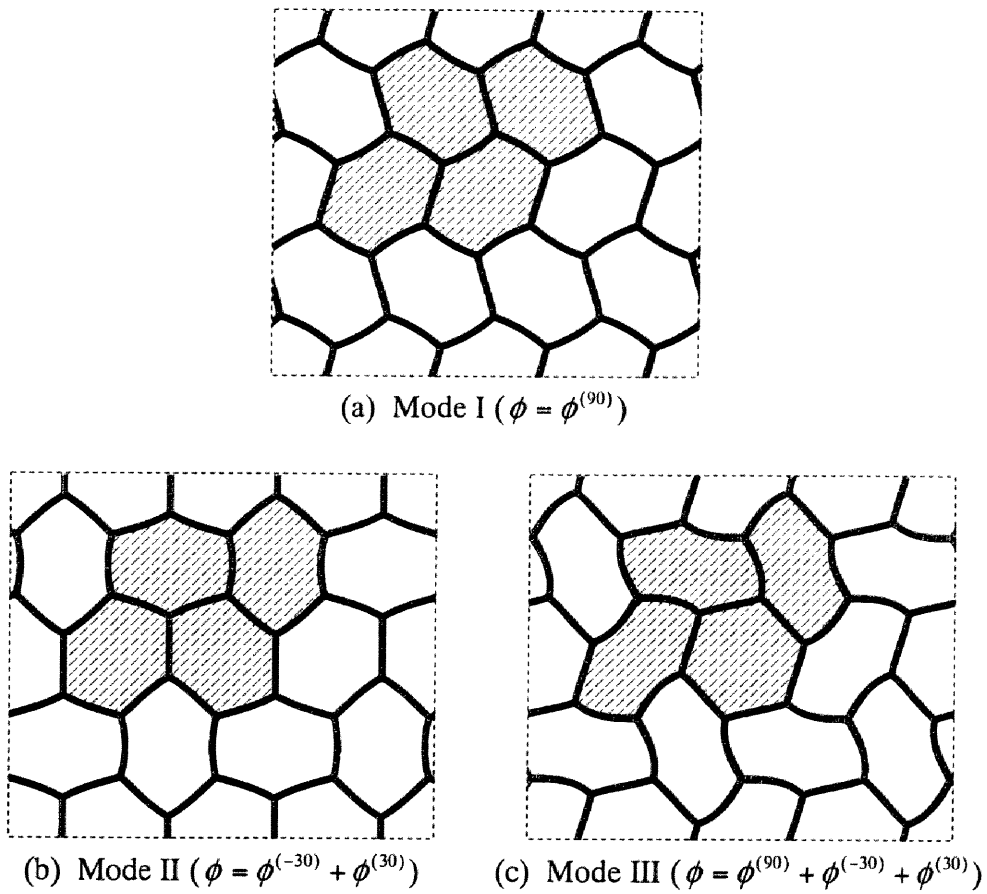


Fig. 6.1 Representative possible modes for the buckling under equi-biaxial compression.

6.3 等二軸圧縮座屈後解析

この節では、三重分岐が生じる等二軸圧縮負荷において座屈後の解析を行い、どの座屈モードが安定に成長するかを議論する。等二軸圧縮負荷を加えたときに生じる代表的な座屈モードはモード I, II, III である (図 6.1)。それぞれの座屈モードが安定に進展するように微視的速度場に拘束を課して解析を行い、座屈後の内部エネルギーを比較することによって、それぞれの座屈モードの安定性を調べる。

6.3.1 拘束と負荷条件

等二軸圧縮では、分岐の多重度が $m=3$ となり、座屈モードが唯一に定まらない。しかしながら、 kY の擾乱変位速度場 \dot{u}_i^* に拘束を課することによって、分岐の多重度を $m=3$ から $m=1$ に減少させることができ、モード I, II, III の中から特定の座屈モードに関する座屈後解析を行うことができる。図 6.2 には、3つの座屈モードを安定に座屈後解析するために付け加える拘束点が表示されている。図中において、 \bullet 印の3点は \dot{u}_i^* の平行移動を防ぐために必要な拘束点であり、3点のいずれかを $\dot{u}_i^* = 0$ とすれば kY 周期性からほかの2点にも $\dot{u}_i^* = 0$ が課される。また、分岐の多重度を $m=3$ から $m=1$ に減少させるために付け加える拘束点は \circ 印と \square 印で示され、 \circ 印は $\dot{u}_1^* = \dot{u}_2^* = 0$ 、 \square 印は $\dot{u}_1^* = 0$ を表す。なお、これらの拘束点は、幾何学的な考察から、微視的分岐点や座屈後の挙動に影響を与えない。

等二軸圧縮負荷には、次式で表されるような2つの場合が考えられる。

$$\dot{\varepsilon}_{11}^0 = \dot{\varepsilon}_{22}^0 < 0, \quad \Sigma_{33} = 0 \quad (\text{巨視的ひずみ制御}) \quad (6.1)$$

$$\dot{\Sigma}_{11} = \dot{\Sigma}_{22} < 0, \quad \Sigma_{33} = 0 \quad (\text{巨視的応力制御}) \quad (6.2)$$

ここで、 $\Sigma_{33} = 0$ であるが $\sigma_{33} \neq 0$ ではない。また、どちらの場合も、巨視的せん断ひずみを零としている。

本解析では、 x_1, x_2, x_3 方向に周期的な無限体のハニカム (図 5.1) に巨視的一様な負

荷が加えられる。しかし、実際の実験では、有限の大きさのハニカム端面に応力もしくは変位の制御で負荷条件が与えられる。式(6.1)や(6.2)の負荷条件は、このような場合の変位制御と応力制御にそれぞれ相当する。

負荷条件(6.1)と(6.2)は、ハニカムが面内擬似等方性を有していれば同じ結果を与えるから、微視的分岐が生じる前まで2つの条件は等しい。さらに、微視的分岐後にモード III が進展するのであれば、このモードは面内において3つの方向に対称性を有することから面内擬似等方性を満足し[111]、2つの条件は同じとなる。一方、分岐後にモード I, II が進展するのであれば、もはや擬似等方性を有しないから、2つの条件は異なる結果を与える。

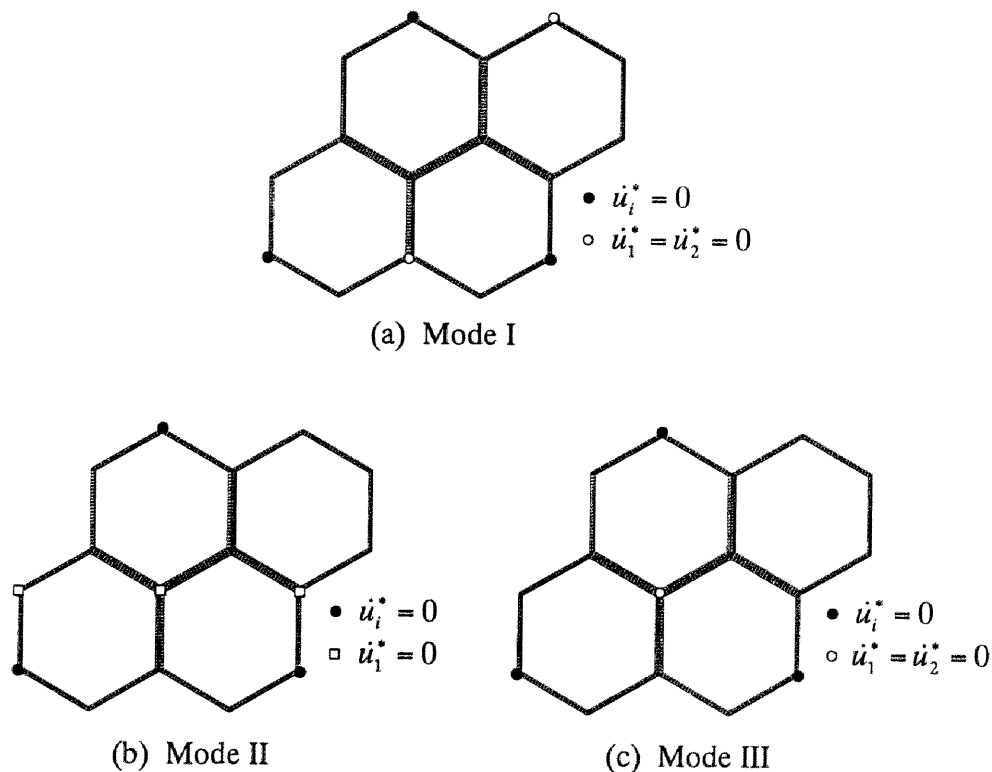


Fig. 6.2 Constraints on perturbed velocity field in kY ; solid and open symbols indicate necessary and additional constraints, respectively.

6.3.2 解析結果

等二軸圧縮で生じる3つの座屈モード(図6.1)の中で,どのモードが成長するかを議論するために,セル集合 kY に生じる内部エネルギー U の変化率,

$$\dot{U} = \langle \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle |kY| = \Sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^0 |kY| \quad (6.3)$$

を考える. また, 等二軸圧縮の2つの負荷条件(6.1)と(6.2)の場合に, 上式は次のようになる.

$$\dot{U} = (\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) \dot{\varepsilon}_{11}^0 |kY| \quad (\text{巨視的ひずみ制御}) \quad (6.4)$$

$$\dot{U} = \Sigma_{11} (\dot{\varepsilon}_{11}^0 + \dot{\varepsilon}_{22}^0) |kY| \quad (\text{巨視的応力制御}) \quad (6.5)$$

なお, 微視的座屈が始まっても, ハニカムは x_1 x_2 面内に比べて x_3 方向に高い剛性を有するから, ε_{33}^0 は十分に小さいと考えられる. したがって,

$$|kY| \approx \exp(2\varepsilon_{11}^0) |kY(0)| \quad (\text{巨視的ひずみ制御}) \quad (6.6)$$

$$|kY| \approx \exp(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) |kY(0)| \quad (\text{巨視的応力制御}) \quad (6.7)$$

であるとする. ここで, $|kY(0)|$ は $|kY|$ の初期体積を表す.

図6.3 (a)は, 図6.2に示される拘束を用いて, 巨視的ひずみ制御により解析を行ったときの巨視的応力と巨視的ひずみの関係である. この図では, 縦軸に巨視的平均応力 $(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2$, 横軸に ε_{11}^0 を取っている. したがって, 図6.3 (a)から, 式(6.4), (6.6)の関係より内部エネルギーの変化率を調べることができる. 3つのモードの内部エネルギーを比較すると, モードIIIの場合が最も小さいことより, モードIIIがモードI, IIと比べて安定であると予測できる. この予測を確かめるために, 3つの座屈モードに対して, 図6.2の○印と□印の点に拘束を加えずに解析を行った. この結果, モードIIIの場合には拘束がある場合と同様の結果が得られたのに対して, モードI, IIは数値解析的に不安定となり, 分岐直後にモードIIIに変化した. したがって, 巨視的ひずみ制御ではモードIIIが安定である.

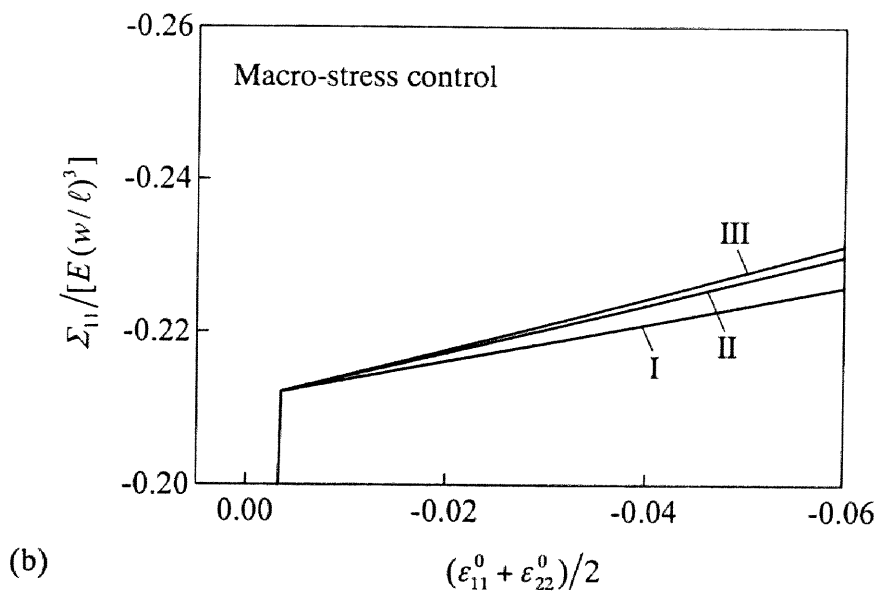
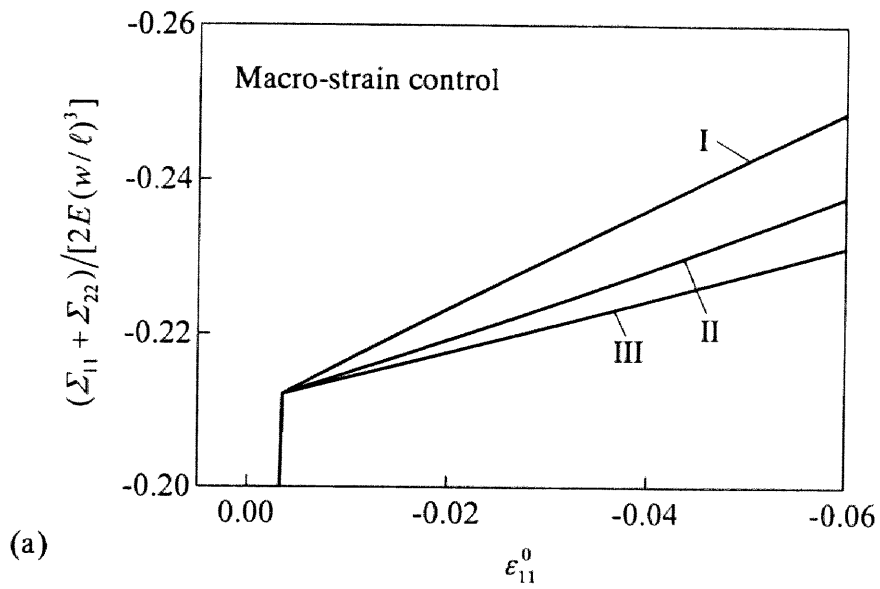


Fig. 6.3 Macroscopic stress versus strain relations attained in the analysis with additional constraints; (a) macroscopic strain control, and (b) macroscopic stress control.

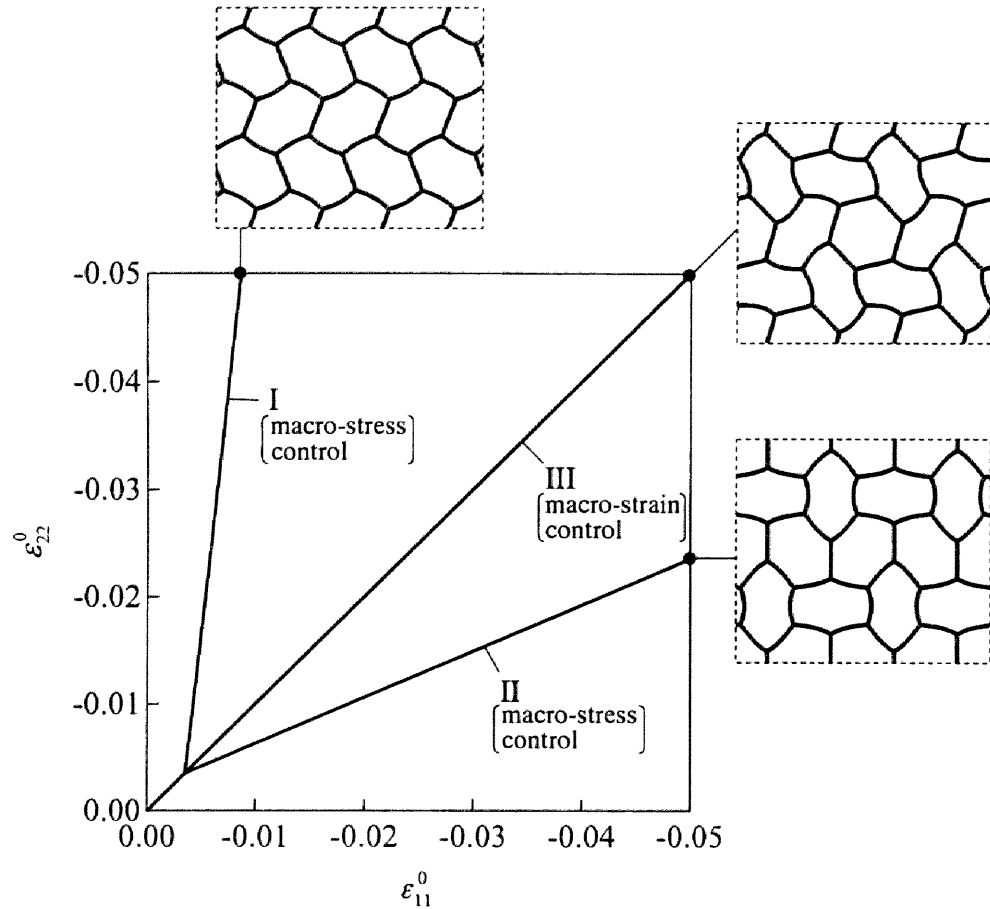


Fig. 6.4 Macroscopic strain trajectories and cell-patterns under equi-biaxial compression.

図 6.3 (b)は、巨視的応力制御により解析を行ったときの巨視的応力と巨視的ひずみの関係である。この図でも、内部エネルギーが比較できるように、式(6.5)と(6.7)の関係をより縦軸には Σ_{11} 、横軸には平均ひずみ $(\epsilon_{11}^0 + \epsilon_{22}^0)/2$ を取った。図 6.3 (b)から内部エネルギーを比較すると、3つの座屈モードの中でモード I の内部エネルギーが最も低いことから、巨視的応力制御ではモード I が安定であると考えられる。このことを調べるために、図 6.2 の○印と□印の点に拘束を加えずに解析を行ったところ、モード I だけでなくモード II も安定に成長した。ところが、モード III は分岐後の解析が不安定となり、すぐにモード II に変化した。すなわち、巨視的応力制御の場合にはモード I, II が安定である。

図 6.4 は、等二軸圧縮負荷において安定な座屈モードが進展するときの、巨視的ひずみの軌跡である。巨視的応力制御の場合にはモード I, II が安定に進展し、巨視的ひずみ制御の場合にはモード III が安定に進展する。図からわかるように、これらの軌跡は、分岐点まではまったく同じであるが、分岐後では進展する座屈モードによって大きく異なる。

6.4 二軸圧縮座屈後解析

花状モード(モード III)は、三重分岐の結果として等二軸圧縮でのみ生じ、前の節では巨視的ひずみ制御の等二軸圧縮で花状モードが安定に進展することを示した。しかし、Papka-Kyriakides の実験結果[15]では、 $\epsilon_{22}^0 / \epsilon_{11}^0 = 2$ の変形制御で、擬似的な花状モードの発生が観察されている。

このことを検討するため、巨視的ひずみ制御によって二軸圧縮負荷の座屈後解析をいくつか行った。このため負荷条件は、ひずみ比 γ_ϵ を正として、

$$\dot{\epsilon}_{22}^0 = \gamma_\epsilon \dot{\epsilon}_{11}^0 < 0, \quad \Sigma_{33} = 0 \quad (6.8)$$

とする。このとき、式(6.3)と(6.6)は次式のように表される。

$$\dot{U} = (\Sigma_{11} + \gamma_\epsilon \Sigma_{22}) \dot{\epsilon}_{11}^0 |kY| \quad (6.9)$$

$$|kY| \approx \exp[(1 + \gamma_\epsilon) \epsilon_{11}^0] |kY(0)| \quad (6.10)$$

図 6.5 は、等二軸圧縮近傍の $\gamma_\epsilon = 3/2, 3/4$ で座屈後解析を行ったときの巨視的応力と巨視的ひずみの関係である。どちらの場合も2度目の分岐が生じており、図中において最初の分岐が点 A、2度目の分岐が点 B である。 $\gamma_\epsilon = 3/2$ のときには、まず単純分岐が生じた後に二重分岐が生じる。一方、 $\gamma_\epsilon = 3/4$ のときには、最初に二重分岐が生じ、その後に単純分岐が生じる。この図は、縦軸に $\Sigma_{11} + \gamma_\epsilon \Sigma_{22}$ 、横軸に ϵ_{11}^0 を用いて

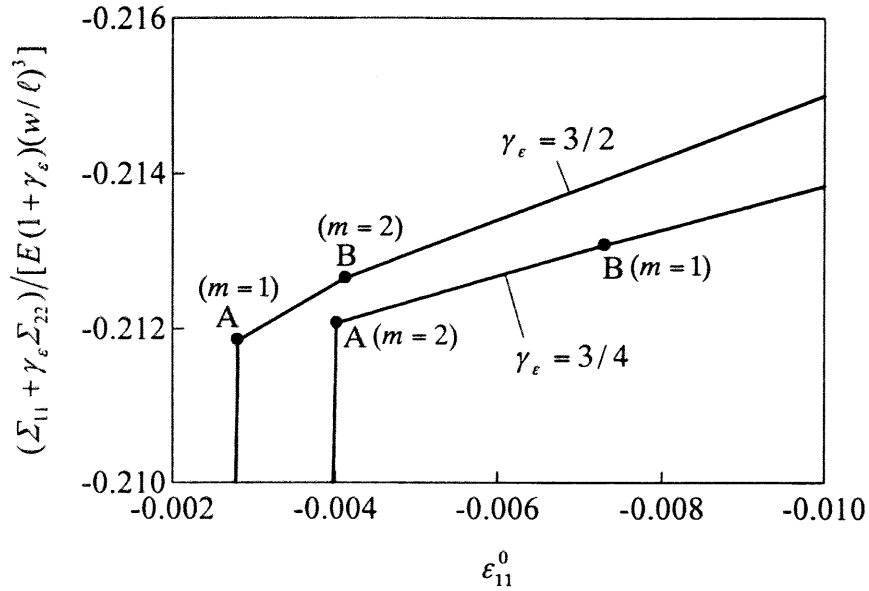


Fig. 6.5 Macroscopic stress versus strain relations under near-equi-biaxial compression of macroscopic strain control.

いるので、式(6.9), (6.10)の関係から、内部エネルギーの変化率 \dot{U} を調べることができる。この結果、 $\gamma_e = 3/2$, $3/4$ のどちらの場合も、分岐後に \dot{U} が減少している。すなわち、分岐が生じることによってハニカムは力学的により安定な状態になる。

図 6.6 は、 $\gamma_e = 3/2$, $3/4$ で解析を行ったときの、座屈モードの変化を示したものである。図 6.6 (a)に示されるように、 $\gamma_e = 3/2$ のときには、点 A では単純分岐、点 B では二重分岐が生じ、A-B 間ではモード I が成長し、点 B 以降は新しいモードとなる。新しいモードで変形を進めると、擬似的な花状モード(以降、モード III と呼ぶ)が現れる。このモード III は、花状モードの中心のセルが少しくつぶれた形をしており、中心のセルがほとんど変形しないモード III (図 6.4)とは少しだけ異なる。次に $\gamma_e = 3/4$ のときには、まず二重分岐が生じることによって点 A-B 間ではモード II が成長する。それから点 B で単純分岐が生じ、図 6.6 (b)のようなモード III が現れる。

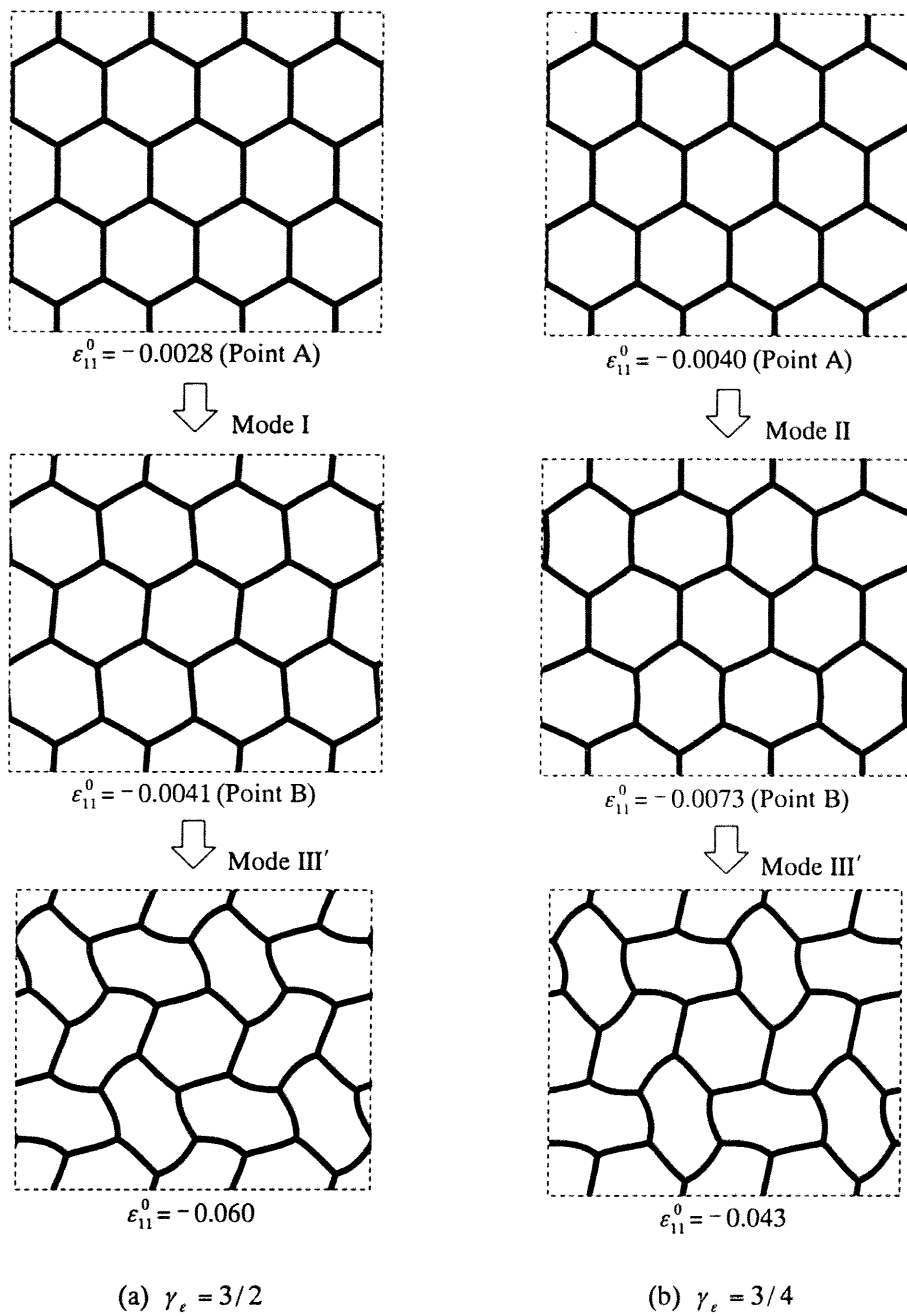


Fig. 6.6 Change in buckling mode under near-equi-biaxial compression of macroscopic strain control.

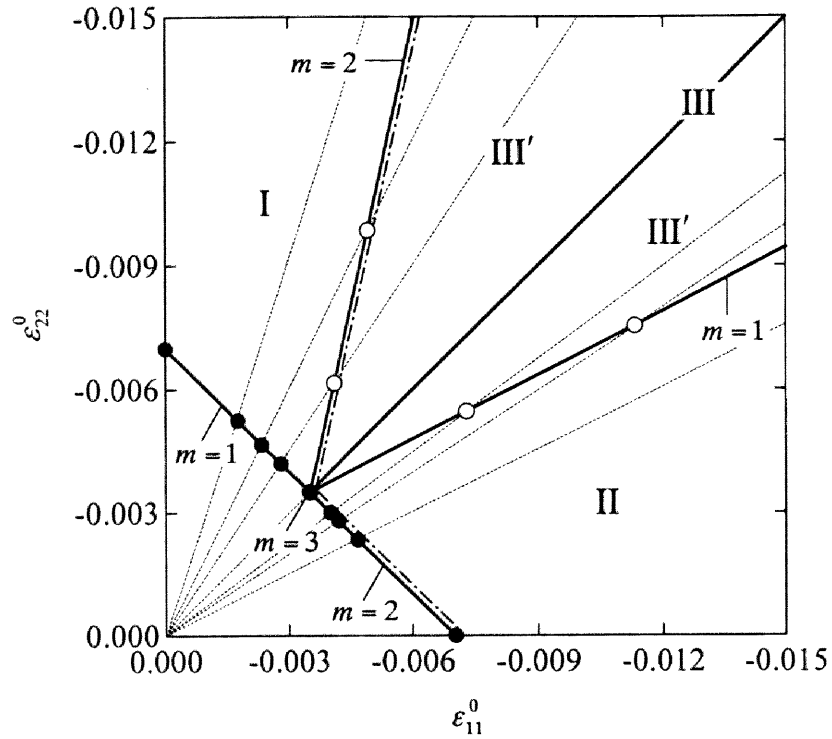


Fig. 6.7 Map of buckling modes under biaxial compression of macroscopic strain control; solid and open circles represent first and second bifurcation points, respectively, and chain line indicates potential initiation of macroscopic instability.

ここで、 $\gamma_e = 3/2$ のときには、第二分岐点 B では二重分岐が生じるから、座屈モードは唯一に定まらない。しかし、前節における等二軸圧縮の議論と同様にして、点 B で加える座屈モードに関係なく座屈後は図 6.6 (a) のような変形が安定に生じる。

図 6.7 は、巨視的ひずみ制御により座屈後解析を行ったときの座屈モードマップである。図からわかるように、 $|\epsilon_{22}^0| \gg |\epsilon_{11}^0|$ であればモード I、 $|\epsilon_{11}^0| \gg |\epsilon_{22}^0|$ であればモード II が成長し、2 度目の分岐は生じない。一方、2 度目の分岐が生じる場合には、モード I やモード II からモード III が成長する。さらに、等二軸圧縮 ($|\epsilon_{11}^0| = |\epsilon_{22}^0|$) のときはモード III が成長する。この傾向は、 $\gamma_e = 1/3$ のときモード II、 $\gamma_e = 1.0$ のときモード III、 $\gamma_e = 2.0$ のときモード III' が観察される Papka-Kyriakides の実験結果[15] と整合性がある。

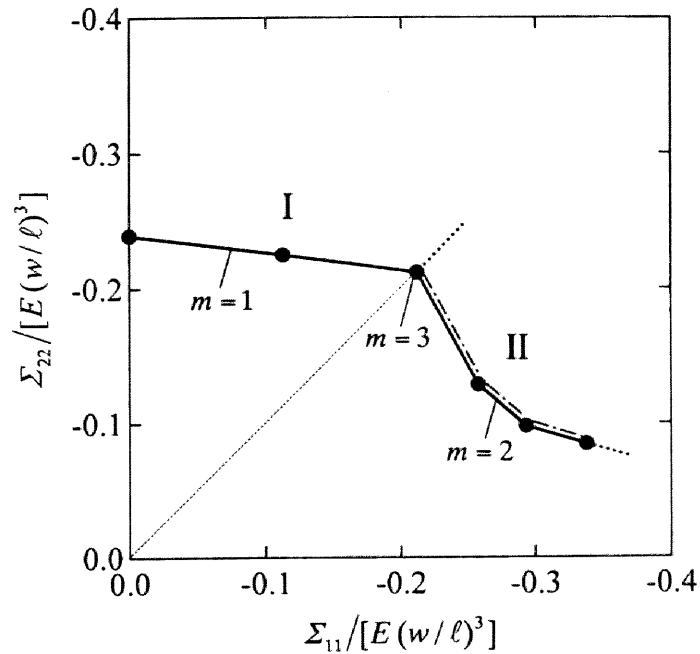


Fig. 6.8 Map of buckling modes under biaxial compression of macroscopic stress control; chain line indicates potential initiation of macroscopic instability.

巨視的応力制御で座屈後解析を行った。

$$\dot{\Sigma}_{22} = \gamma_{\Sigma} \dot{\Sigma}_{11} < 0, \quad \Sigma_{33} = 0 \quad (6.11)$$

ここで、応力比 γ_{Σ} は正である。このときのマップは図 6.8 であり、巨視的ひずみ制御の場合と異なり第二分岐は生じず、座屈モードはモード I かモード II である。

6.5 巨視的不安定

Abeyaratne-Triantafyllidis[33]は、均質化理論を用いて、二軸負荷を受ける多孔質弾性板の巨視的不安定を研究した。今回の問題でも、微視的座屈によって巨視的剛性は急

激に減少するから、微視的分岐後に巨視的不安定の生じる可能性が高くなる。

6.5.1 巨視的不安定条件

巨視的構成式(2.38)において、法線ベクトルを n_i とすると巨視的なアコースティックテンソルは、

$$A_{ik} = L_{ijkl}^H n_j n_l \quad (6.12)$$

と表される。このとき、

$$A_{ik} m_k = 0 \quad (6.13)$$

を満足する方向ベクトル m_k が存在すると、速度勾配 $m_k n_l$ の巨視的不安定が巨視的面に沿って生じる[46,47]。このような m_k が存在するためには、

$$\det A_{ik} = 0 \quad (6.14)$$

が満足される必要があり、上式が巨視的不安定の発生条件である。

6.5.2 面内における巨視的不安定条件

ハニカムの面内座屈では、微視的分岐が生じた後に面内の巨視的剛性が低くなる。面内での巨視的不安定は $x_1 x_2$ 平面内に n_i を取ることによって調べることが可能であり、式(6.12)と式(6.14)は次のように展開することができる。

まず、モード I, II の場合には、 C_{ijkl}^H は直交座標 x_i に関して直交異方性を満足するから、式(6.12)によって定義される A_{ik} の非零成分は

$$A_{11} = (C_{1111}^H + \Sigma_{11}) n_1^2 + (C_{1212}^H + \Sigma_{22}) n_2^2 \quad (6.15a)$$

$$A_{22} = (C_{1212}^H + \Sigma_{11}) n_1^2 + (C_{2222}^H + \Sigma_{22}) n_2^2 \quad (6.15b)$$

$$A_{33} = (C_{1313}^H + \Sigma_{11})n_1^2 + (C_{2323}^H + \Sigma_{22})n_2^2 \quad (6.15c)$$

$$A_{12} = A_{21} = (C_{1122}^H + C_{1212}^H)n_1n_2 \quad (6.15d)$$

と表される. ここで, $n_1 = \cos\psi_n$, $n_2 = \sin\psi_n$ であり, ψ_n は x_1 軸と n_i の間の角である. このとき, 巨視的不安定条件(6.14)は次のようになる.

$$\det A_k = (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)A_{33} = 0 \quad (6.16)$$

なお, モード III' の場合でも, C_{ijkl}^H が直交座標 x_i で数値的に直交異方性を満足することから, 式(6.15a)~(6.15d)や(6.16)は成り立つ.

次に, モード III は x_3 軸に対する 3 回回転の対称性を有することから, C_{ijkl}^H は面内擬似等方性を有し, $C_{1111}^H = C_{2222}^H$, $C_{1313}^H = C_{2323}^H$, $C_{1111}^H - C_{1122}^H = 2C_{1212}^H$ が成り立つ[112]. また, モード III は巨視的ひずみ制御による等二軸圧縮負荷 ($\dot{\epsilon}_{11}^0 = \dot{\epsilon}_{22}^0 < 0$) のときに生じ, このとき $\dot{\Sigma}_{11} = \dot{\Sigma}_{22} < 0$ であるから式(6.15a)~(6.15d)は

$$A_{11} = (C_{1111}^H + \Sigma_{11})n_1^2 + (C_{1212}^H + \Sigma_{11})n_2^2 \quad (6.17a)$$

$$A_{22} = (C_{1212}^H + \Sigma_{11})n_1^2 + (C_{1111}^H + \Sigma_{11})n_2^2 \quad (6.17b)$$

$$A_{33} = C_{1313}^H + \Sigma_{11} \quad (6.17c)$$

$$A_{12} = A_{21} = (C_{1111}^H - C_{1212}^H)n_1n_2 \quad (6.17d)$$

となる. この関係を用いると, 式(6.16)は

$$\det A_k = (C_{1111}^H + \Sigma_{11})(C_{1212}^H + \Sigma_{11})(C_{1313}^H + \Sigma_{11}) = 0 \quad (6.18)$$

となり, 面内擬似等方性を有する場合には, n_i は巨視的不安定条件に影響しない.

式(6.18)を満たすためには, $C_{1111}^H + \Sigma_{11} = 0$, $C_{1212}^H + \Sigma_{11} = 0$, $C_{1313}^H + \Sigma_{11} = 0$ の 3 つの場合が考えられる. 式(6.13)と式(6.17a)~(6.17d)より, もし $C_{1111}^H + \Sigma_{11} = 0$ であれば, m_i は $x_1 x_2$ 面内に生じ n_i と平行であり, もし $C_{1212}^H + \Sigma_{11} = 0$ であれば, m_i は $x_1 x_2$ 面内に生じ n_i と垂直である. また, $C_{1313}^H + \Sigma_{11} = 0$ の場合には, m_i は x_3 軸方向に生じ n_i と垂直となる.

6.5.3 解析結果

まず、巨視的ひずみ制御における等二軸圧縮の場合に巨視的不安定を調べた。この場合、モード III が微視的座屈モードであるから、式(6.18)が巨視的不安定条件となる。モード III が進展するとすぐに $C_{1212}^H + \Sigma_{11} = 0$ が負となり、式(6.18)が満足される。このときの巨視的不安定は、上述のように x_1 x_2 面内において m_i が n_i と垂直となることから、せん断型である。しかし、ここで生じるせん断型の巨視的不安定は、後述するように $\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0 < 0$ の負荷条件に対して整合性がない。

二軸圧縮の場合でも巨視的不安定を検討した。巨視的不安定条件(6.16)は、表 1 に示されるようにモード II, III'の発生後に満足され、その発生個所は図 6.7, 6.8 の鎖線である。表 1 において、 ψ_n は x_1 軸と n_i の間の面内角を表し、 ψ_m は x_1 軸と m_i 間の面内角を表す。

上に述べた巨視的不安定が、巨視的ひずみ制御や巨視的応力制御に基づく負荷条件に対して適合性があるかどうかの検討を行う。この 2 つの負荷条件は、もしハニカムが有限体であるならば、境界に加えられる変形制御と荷重制御に相当する。図 6.9 は、境界における負荷条件が変位 U_i か荷重 F_i で制御されるハニカム平板 $L_1 \times L_2$ に生じ得る巨視的不安定を表している。図中に示されるように、巨視的不安定は 2 つの場合で発生可能となる。

$$m_2 = 0 \text{ if } \tan \psi_n < L_1 / L_2, \quad (6.19)$$

$$m_1 = 0 \text{ if } \tan \psi_n > L_1 / L_2. \quad (6.20)$$

表を見ると、モード II, III, III'が生じた後の巨視的不安定は、この 2 つの条件のいずれも満足せず、本解析での負荷条件では巨視的局所化は生じないと考えられる。

Table 1

Macroscopic instability detected just after the onset of Mode II, III and III'; ψ_n and $\psi_m - \psi_n$ in degree.

	γ_ϵ	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2
Macro-strain control	Mode	II	II	II	III	III'	III'
	ψ_n	0	0	0	-	54	55
	$\psi_m - \psi_n$	90	90	90	90	72	70
	γ_Σ	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1		
Macro-stress control	Mode	II	II	II	II		
	ψ_n	0	0	0	0,90		
	$\psi_m - \psi_n$	90	90	90	90		

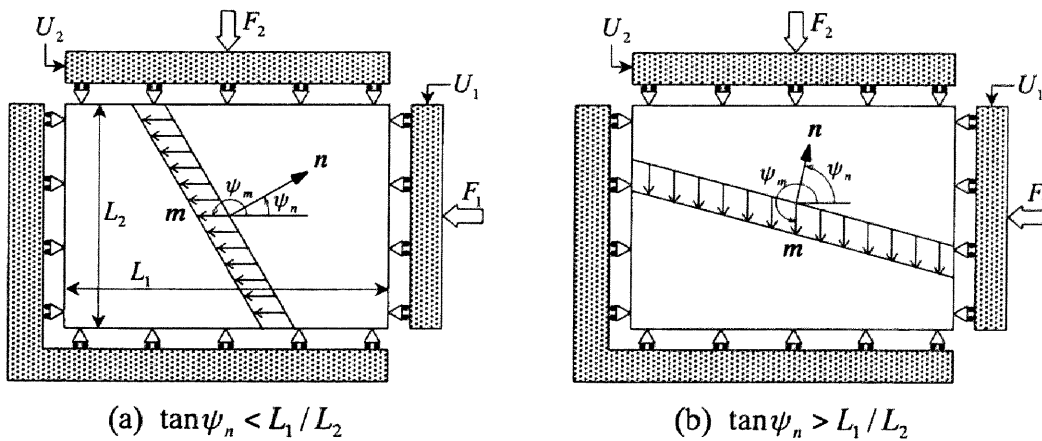


Fig. 6.9 Admissible velocity field in macroscopic instability in honeycomb plate subject to either displacement or load control at boundary.

6.6 まとめ

この章では、第5章で得られた座屈モードの結果に基づいて、正六角形弾性ハニカム面の面内座屈後解析を行った。まず、三重分岐点が現れる等二軸圧縮負荷の場合を検討した。3つの代表的な座屈モード(モード I~III)が進展するときの内部エネルギーを比較したところ、巨視的ひずみ制御の場合には花状モード(モード III)が安定に進展し、巨視的応力制御の場合には単軸モード(モード I)もしくは二軸モード(モード II)が安定に進展した。次に、等二軸圧縮以外の場合の解析を行った。巨視的ひずみ制御における等二軸圧縮近傍の解析では、単軸モード(モード I)や二軸モード(モード II)から擬似的な花状モード(モード III')に進展する第二分岐点が現れた。つづいて、巨視的不安定についての検討を行った。この結果、モード II, III, III'が進展し始めた直後に巨視的不安定条件が満足された。ただし、この巨視的不安定は、面内二軸負荷を加える場合の境界条件と不整合であるため、巨視的局所化に進展しない。

なお、これまでの解析(第5章と第6章)では4つのセルの集合を用いて解析を行い、セル数依存性の検討を行わなかった。ただし、Saikiら[113]の研究によって、六角形弾性ハニカムの面内座屈解析には 2×2 のセル数(すなわち4つのセルの集合)を用いれば十分であることが示されている。

第 7 章

正六角形弾塑性ハニカムの面内座屈解析^[91]

7.1 はじめに

アルミニウムハニカムや高分子ハニカムに圧縮負荷を与えると、弾性ハニカムの場合[1,4,6]とは異なり、図 1.3 のように微視的座屈が局所的に進行する[9,13,15,19,20]. このような巨視的局所化は金属フォームでも観察されており[3,5,7,8,10-12,14,16-18,21,22,24], 微視構造を有する材料の巨視的不安定は、有限変形の均質化理論でもすでにいくつかの研究が行われている。

周期材料における微視的分岐と巨視的不安定の関係は最初に Triantafyllidis-Maker[34]によって見出された。彼らは、一軸負荷を受ける長繊維強化複合材料の微視的分岐条件を調べ、フーリエ波長無限大の微視的分岐解が支配的となるとき巨視的接線係数の楕円性喪失に基づく巨視的不安定が生じることを発見した。次に Geymonat ら[35]は、非線形超弾性材料の微視的分岐と巨視的不安定を Γ 収束論[48]に基づいて議論し、微視的分岐点での擾乱変位場は Bloch 波で表されること、またこの Bloch 波の波長が無限に長い場合は巨視的不安定が起きる場合に一致することを示した。

Triantafyllidis-Schraad[37]は、Bloch 波を用いてアルミニウムハニカムの面内二軸圧縮での第一微視的分岐点を解析し、Bloch 波の無次元周波数(セル長と周期長の比)を調べることにより巨視的安定性を議論した。また、Laroussi ら[38]が、3次元弾性セル材料の座屈強度を解析して座屈モードのセル数依存性を検討した。これに対して Saiki

ら[113]は、群論的分岐理論に基づくブロック対角化法[114]により、正六角形弾性ハニカム面の面内座屈荷重のセル数依存性と分岐モードとともに解析し、 2×2 のセル数で十分であることを示した。このようにセル状固体の微視的分岐の波動性やセル数依存性が検討されているが、これらの研究では第一分岐点だけが扱われており、それ以後の解析は行われていない。

さて、微視的分岐が Bloch 波のような波動性を有するならば、分岐モードは波形に加えて位相を有することになる。このことは、波動的な微視的分岐点では二重分岐が起きることを示唆しており、分岐解析の観点から興味深い。さらに、そのような分岐モード (Bloch 波) が長波長ならば、分岐点後に巨視的局所化が進行することになるから、分岐後解析により重要な知見が得られると考えられる。特に、Bloch 波に縦波成分と横波成分が混在すれば、どちらの成分が巨視的不安定を支配するか、つまり巨視的局所化が圧縮型かせん断型かを分岐モードから予測することは難しい。また、もし非対称の微視的分岐が生じるならば、微視的分岐の符号によって分岐後の巨視的局所化の進行は異なる。このような場合の巨視的局所化の進行を調べるためには、分岐後解析が必要であるが、このような解析はまだ報告されていない。

この章では、面内単軸圧縮を受ける六角形弾塑性ハニカムを解析し、微視的分岐点での分岐モードの波動性とセル数依存性を調べるとともに、分岐後解析により微視的分岐点から巨視的局所化に至る過程を検討する。さらに、巨視的不安定についても調べ、微視的分岐により誘起された巨視的局所化との整合性を議論する。このような解析を行うため、セル集合は $2M \times 2N$ 個の単位セルの集合からなるとしてセル数を陽に考慮する。なお本解析では、有限要素解析がかなり大規模となるため、サブストラクチャ法[115]により解析の効率化を図る。

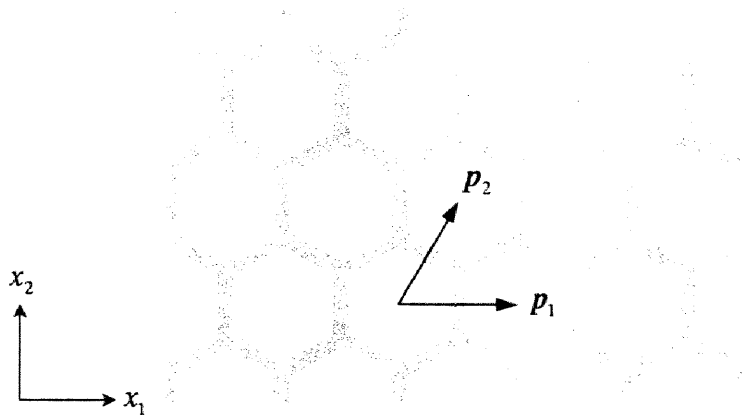


Fig. 7.1 Primitive unit vectors for periodicity of hexagonal honeycombs, and coordinates for analysis.

7.2 解析条件・方法

正六角形弾性ハニカムの場合と同様にして、図 7.1 に示すような正六角形ハニカムの面内座屈解析を行った。

7.2.1 負荷条件

正六角形ハニカムは、次式で表されるような単軸圧縮を受けるとする。

$$\dot{\epsilon}_{22}^0 < 0, \Sigma_{11} = \Sigma_{33} = 0, \dot{\epsilon}_{ij}^0 = 0 \quad (i \neq j) \quad (7.1)$$

ここで、 x_1 および x_2 座標軸は図 7.1 に示すように面内に取られており、 x_3 座標軸は紙面に垂直である。なお、図中に示したベクトル p_1 と p_2 は、正六角形ハニカムの周期性に関する基本単位ベクトルを示す。

7.2.2 材料特性

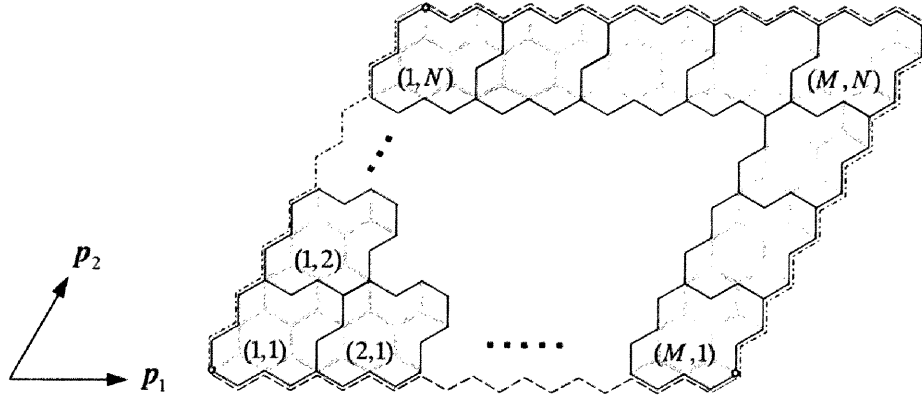


Fig. 7.2 Periodical unit kY divided into $M \times N$ subunits, each of which consists of 2×2 cells.

ハニカムのセル壁材料は、次式のような弾塑性構成式に従うとする。

$$\overset{\circ}{\tau}_{ij} = c_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (7.2)$$

ここで、 $\overset{\circ}{\tau}_{ij}$ は相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を表し、また c_{ijkl}^{ep} は J_2 流れ則に基づく等方弾塑性体の剛性を示す(付録 A.2 参照)。このとき、微視的構成式(2.4)の c_{ijkl} は、

$$c_{ijkl} = c_{ijkl}^{ep} - \frac{1}{2}(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\sigma_{jl} + \delta_{il}\sigma_{jk}) \quad (7.3)$$

と表される。

c_{ijkl}^{ep} に含まれる材料パラメータは、次のように仮定する。まず、セル壁材料のヤング率 E は応力の無次元化に用い、ポアソン比 ν は 0.3 とする。次に、塑性特性としては、単軸引張における真応力 σ と対数ひずみの塑性成分 ϵ^p の関係が n 乗硬化則

$$\sigma = \sigma_0(1 + \epsilon^p / \epsilon_0)^n, \quad \epsilon_0 = \sigma_0 / E \quad (7.4)$$

により表されるとし、上式のパラメータは高分子ハニカムのセル材料の引張試験結果[9]を参考にして $\epsilon_0 = 0.02$, $n = 0.2$ とする。

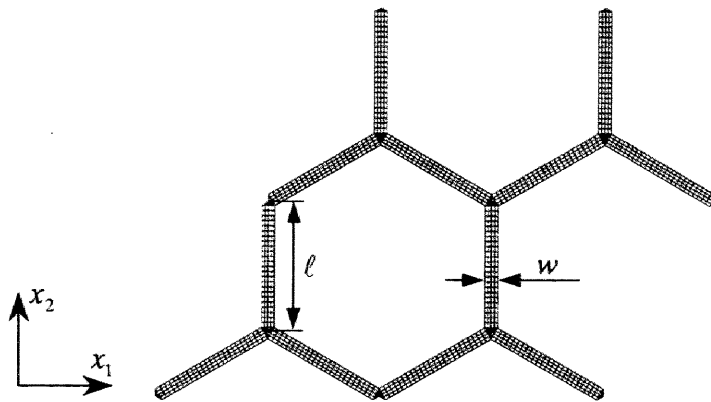


Fig. 7.3 Finite element mesh of subunit ($w/\ell = 0.1$; 1,598 nodes; 1,296 elements).

7.2.3 セル集合

弾性ハニカムの面内座屈では、 2×2 個の単位セルの集合が周期単位となる[113]. また、このような単位セルの集合を考えると、それ自身で二軸モードや花状モードのような複雑な座屈モードが表現されるから(第5章参照), 数値解析において都合がよい. そこで本弾塑性解析では、図7.2に示すように、 2×2 個の単位セルの集合(以後、サブユニットと呼ぶ)を p_1 , p_2 方向にそれぞれ M 個および N 個配列し、このように構成されるセル集合を kY として考えることにする. 図中の一点鎖線、破線および点線は、 kY 周期境界条件を課す境界辺のペアを示す. また○印は、擾乱変位速度 \dot{u}_i^* を零に設定する点である. このような点は3つあり、そのいずれかで \dot{u}_i^* を零にすれば kY 周期境界条件により他の2点でも $\dot{u}_i^* = 0$ となる. なお今後、図7.2に示した単位セルの集合を $2M \times 2N$ のセル集合と呼ぶこととする.

7.2.4 解析方法

解析には第4章で述べた解析手順を用いており第5章や第6章と同じであるが、セル壁の塑性変形とセル集合 kY に関する変更を以下のように行った.

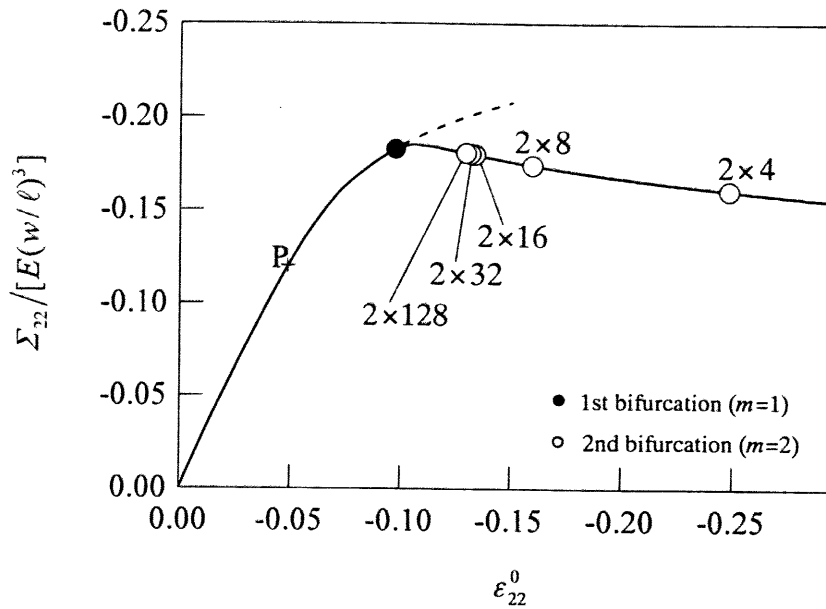


Fig. 7.4 Macroscopic stress strain relation under uniaxial compression.

まず，セル壁の塑性変形に関しては，降伏条件の判定のため，増分をできるだけ小さくした．また，微視的分岐点では，線形比較体の考え方[94,116]を採用し，負荷から除荷への転化を防いだ．すなわち，微視的分岐点では固有変位速度 ϕ_i が生じるが，基本解による変位速度 $\dot{u}_i^0 + \chi_i^k \dot{\epsilon}_{kl}^0$ とは独立であるから(第3章参照)，両者の比を調整することにより，微視的分岐点で負荷から除荷に転じることを防いだ．

次に，セル集合 kY に関しては，サブストラクチャ法[115]を採用し，解析効率の向上を図った(付録C参照)．単位セルの集合 kY に対する境界値問題(2.30)を有限要素法により解く場合，サブストラクチャ法が極めて有効であり，実質的に一つのサブストラクチャを要素分割するだけでよい．そこで，サブユニット(2×2個のセル集合)をサブストラクチャとして考え，4節点アイソパラメトリック要素に分割した(図7.3)．セル壁厚さ w とセル壁長さ ℓ の比 w/ℓ は 0.1 であり，節点数は 1,598，要素数は 1,296 である．

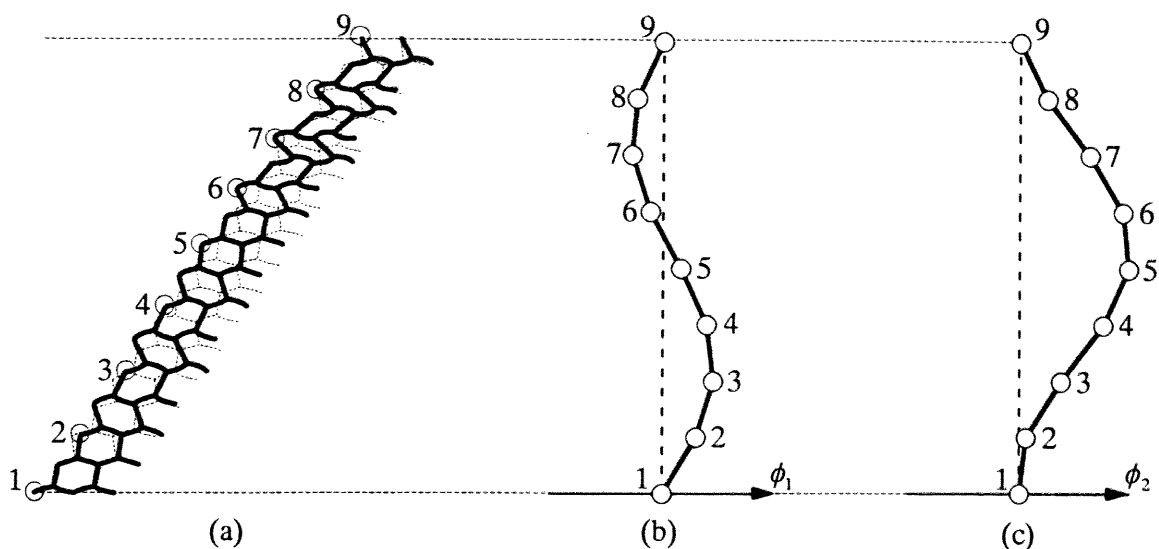


Fig. 7.5 Eigenmode of second bifurcation in 2×16 cell aggregate; (a) ϕ , (b) ϕ_1 at points 1 to 9, (c) ϕ_2 at points 1 to 9.

7.3 解析結果

7.3.1 微視的分岐点

最初に、セル壁が弾性的の場合(第5章, 第6章)と同じく 2×2 のセル集合に対して解析を行った。この結果、図 7.4 に示す巨視的応力-ひずみ曲線上の点 P でセル内に塑性変形が生じた後、●印の点で単純な微視的分岐($m=1$)が起きた。そこで、逆べき乗法により分岐モードを求めて分岐経路に誘導したところ、巨視的応力は極大値を取った後、単調に減少し、巨視的軟化が生じた。しかし、2回目の微視的分岐は検知されなかった。なお、ここでの分岐モードは弾性的の場合と同じ単軸モードであった(図 7.8 (a))。

次に、 2×4 , 2×8 , 2×16 , ... のセル集合に対して解析を行ったところ、塑性変形の開始と単純な微視的分岐が 2×2 のセル集合の場合と同じ点で生じたが、 2×2 のセル集合では検知されなかった 2 回目の微視的分岐が巨視的軟化域において生じた(図 7.4 の ○印)。この 2 回目の微視的分岐は、1 回目の微視的分岐とは異なり二重分岐($m=2$)であり、しかもセル数が多いほど早く生じた。ただし、 $2 \times 16 \sim 2 \times 128$ のセル集合では、

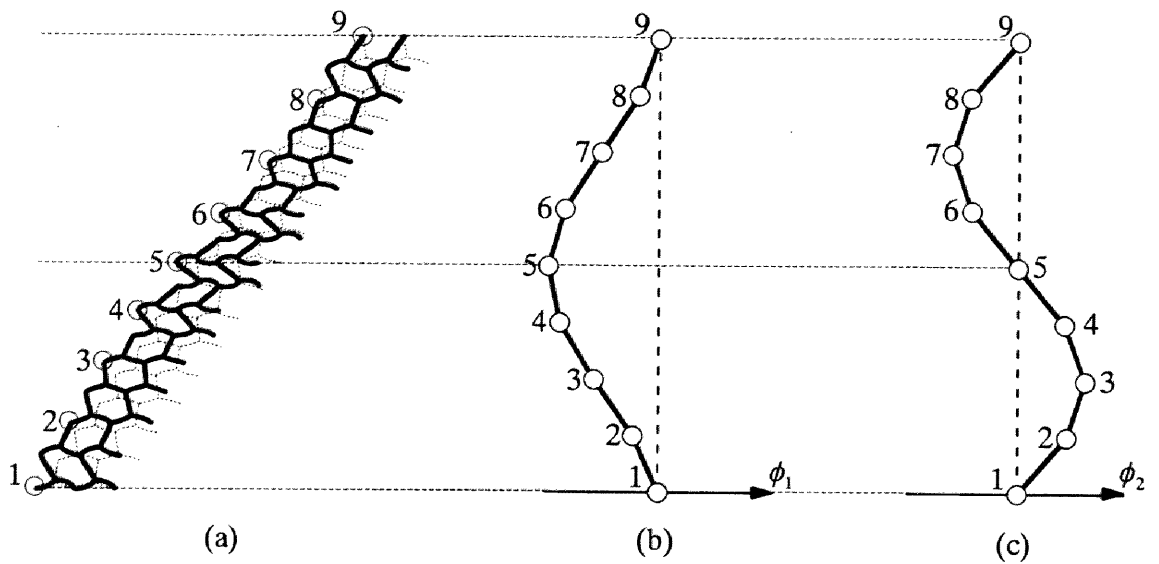


Fig. 7.6 Basic eigenmode of second bifurcation in 2×16 cell aggregate with the constraint of $\dot{u}_2^* = 0$ at point 5; (a) ϕ , (b) ϕ_1 at points 1 to 9, (c) ϕ_2 at points 1 to 9.

2回目の微視的分岐はほぼ同じ巨視的圧縮ひずみで起きた。つづいて、 x_1 方向のセル数の影響を検討するため、さらに 16×2 , 16×4 , 16×8 , 16×16 のセル集合に対して解析を行ったが、 2×2 , 2×4 , 2×8 , 2×16 の場合と同じ解析結果となった。

上述の結果より、負荷方向(x_2 方向)のセル数が2回目の微視的分岐に影響するが、この方向のセル数が16以上となれば、その影響はほぼ飽和すると言える。

7.3.2 微視的分岐モード

微視的分岐が二重分岐の場合、分岐モード ϕ は、2つの独立な基底モードが存在するため一通りに決まらないが、それらの適当な線形結合モードならば逆べき乗法により求められる。そこで、 2×16 のセル集合に対し、2回目の微視的分岐点で逆べき乗法を用いたところ、図7.5(a)に示すような分岐モード ϕ が得られた。セル代表点1~9(図中の○印)に注目すると、この分岐モードにおける固有速度の分布は、図7.5(b), (c)に

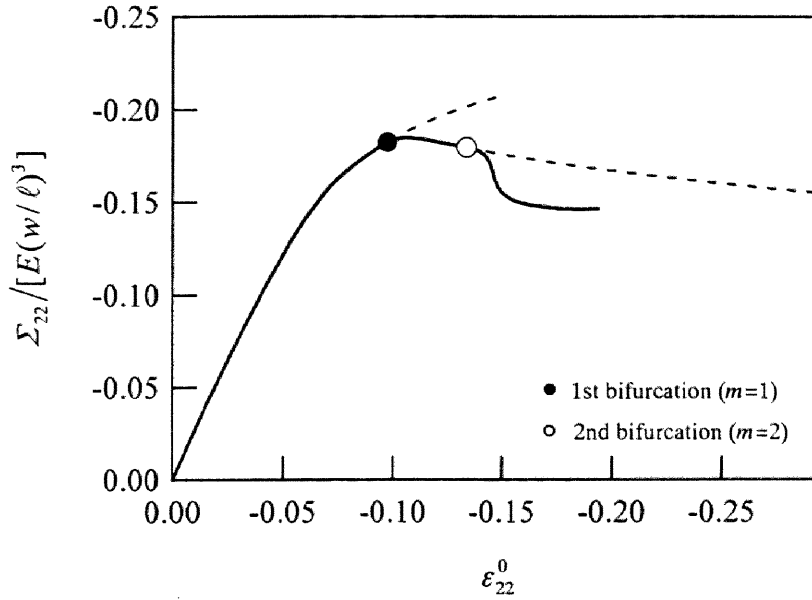


Fig. 7.7 Macroscopic stress-strain relation of 2×16 cell aggregate in bifurcated paths.

示すように正弦波と余弦波の線形結合となっており，分岐モード ϕ の波動性[35,113]が示唆される。

分岐モード ϕ が波動性を有するならば，波形に加えて位相という自由度を有する。このため，2回目の微視的分岐は二重 ($m=2$) になったと考えられる。そこで，図 7.5 (c) に示した縦波の位相が零となるように，セル代表点 5 に $\dot{u}_2 = 0$ の拘束を課し，解析を再度行った。この結果，2回目の微視的分岐も単純分岐となり，図 7.6 (a) に示すような基本分岐モード ϕ が逆べき乗法により得られた。この分岐モード ϕ のセル代表点 1 ~ 9 での速度分布を見ると，縦波成分[図 7.6 (c)]は正弦波であるのに対し，横波成分[図 7.6 (b)]は余弦波となっており，興味深い。

なお， 16×16 のセル集合に対して同様に解析を行い，2回目の微視的分岐点で分岐モード ϕ を求めたが， 2×16 個のセル集合に対する微視的分岐モード ϕ (図 7.6 (a)) を x_1 方向に周期配列したものとなり，分岐モード ϕ に関しても x_1 方向のセル数の影響は見られなかった。

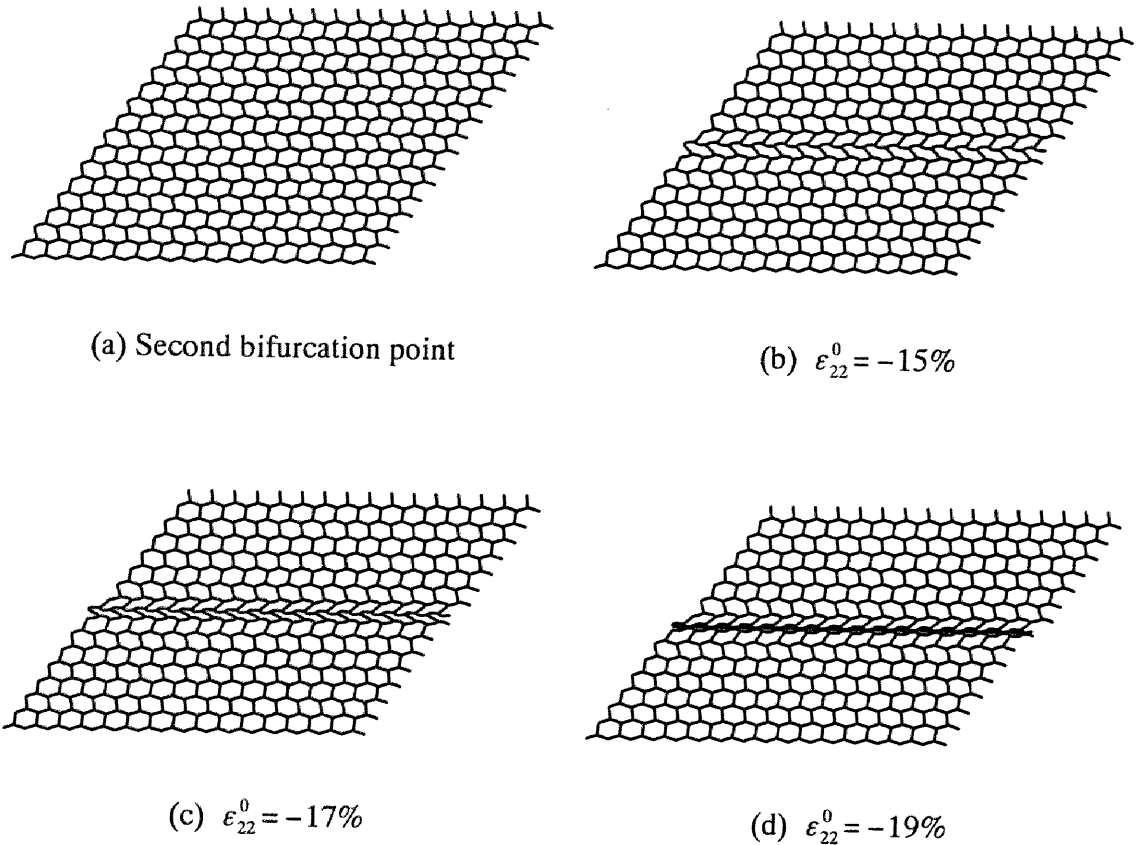


Fig. 7.8 Microscopic deformation of 2×16 cell aggregate after the onset of second bifurcation.

7.3.3 微視的分岐後挙動

7.3.2 節で議論した2回目の微視的分岐は、長波長の分岐モードを有しているから、巨視的局所化を引き起こすと考えられるが[35]、図7.6のように縦波成分と横波成分を有する微視的分岐モードは報告されていない。縦波成分が優勢ならば圧縮型の巨視的局所化が、また横波成分が支配的ならばせん断型の巨視的局所化が生じると予想される。しかし、図7.6(b), (c)に示した縦波成分と横波成分を比較すると、振幅の差は15%程度しかなく、どちらの成分が優勢であるか明らかではない。したがって、2回目の微視的分岐後の巨視的局所化が圧縮型かせん断型かを、図7.6の分岐モードから判定

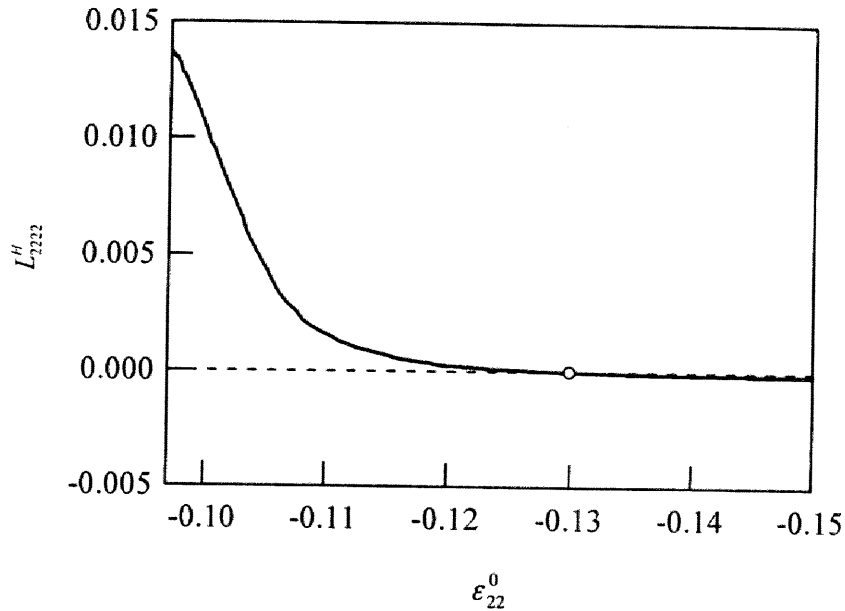


Fig. 7.9 Change in L_{2222}^H after the onset of first bifurcation.

することは難しい.

そこで、2回目の微視的分岐後の解析を 2×16 個のセル集合に対して行った. このため、図7.6(a)に示した微視的分岐モードが直交条件(3.35)を満足することを確認した後、式(3.23)と(3.27)を用いて分岐経路に誘導した. この結果、巨視的応力-ひずみ状態は、図7.7の実線で示すように変化した. 2回目の分岐(図7.7の○印)後の微視的変形状態の変化を図7.8(a)~(d)に示す. この微視的変形状態は、 2×16 個のセル集合に対する解析結果を x_1 方向に周期配列したものである. 図7.8(a)は2回目の分岐直前の変形状態であり、単軸モードが規則的に現れている. これに対して2回目の分岐後は、図7.8(b)~(d)から、変形が負荷方向に垂直な一つのセル列に局所化していくことがわかる. これを巨視的に見れば、負荷方向に垂直な面内で圧縮型の巨視的局所化が進行することになるから、図7.6(c)に示した縦波成分がその後の巨視的局所化を支配したと言える.

7.3.4 巨視的不安定条件との関係

分岐後解析により、縦波成分[図 7.6 (c)]の方が横波成分[図 7.6 (b)]より支配的であり、圧縮型の巨視的局所化が進行することが明らかとなった。また、長波長の微視的分岐点は巨視的不安定の開始点に一致することが示されている[35]。これらのことから、圧縮型の巨視的不安定の開始条件が2回目の微視的分岐点で成立していることが示唆される。この開始条件は、圧縮型の局所化が負荷方向に垂直な面内で進行することより $L_{2222}^H = 0$ と表されるから(6.5 節参照)、1回目の微視的分岐後における L_{ijkl}^H の変化を調べたところ、図 7.9 の○印の点($\varepsilon_{22}^0 = -0.1295$)で $L_{2222}^H = 0$ となることがわかった。この点は、 2×128 のセル集合で2回目の微視的分岐が起きる点にほぼ一致する(図 7.4 参照)。したがって、2回目の微視的分岐点後、分岐モードの縦波成分が優勢となり、圧縮型の巨視的局所化が進行することが、巨視的不安定条件によっても裏付けられたことになる。

7.4 まとめ

この章では、面内単軸圧縮を受ける正六角形弾塑性ハニカムの解析を行い、微視的分岐点での分岐モードの波動性とセル数依存性を調べるとともに、分岐後解析により微視的分岐点から巨視的局所化に至る過程の検討を行った。このため、サブストラクチャ法を用いて、 $2M \times 2N$ のセル集合に対して解析を行った結果、巨視的軟化域において周期セル数に依存する長波長の微視的分岐が起きた。この分岐は二重分岐であり、波形に加えて位相という自由度を有すること、またその分岐モードには縦波成分と横波成分が含まれることがわかった。分岐後解析を行った結果、分岐モードの縦波成分の方が横波成分より優勢であり、Papka-Kyriakides や Zhu-Mills によって観察された巨視的局所化が得られた。さらに、このような巨視的局所化の進行は、圧縮型の巨視的不安定の開始条件と符号することも明らかとなった。

第 8 章

結 論

本研究では、更新 Lagrange 形式の均質化理論において、微視的分岐が生じる場合の理論構築を行った。また、この理論を用いて正六角形ハニカムの面内座屈解析を行い、複雑な座屈モードが現れるメカニズムや、微視的座屈が巨視的局所化に進展する場合の検討を行った。本研究により得られた結果は、次のようにまとめられる。

まず、更新 Lagrange 形式の均質化理論の構築では、周期材料が巨視的一様変形を受ける場合の仮想仕事の原理を増分形で示し、これに基づいて均質化方程式の導出を行った。さらに、このように導いた均質化方程式は物質客観性を陽に満足することを示した。

次に、上述の理論において微視的分岐が生じる場合の検討を行った。このため、まず微視的対称分岐点では、固有解が自発的に生じるが、この固有解の符号を変えても巨視的状态の変化には影響しないとし、微視的対称分岐点で成立する条件を調べた。この結果、微視的対称分岐が生じるときの固有解を決定する境界値問題が示されるとともに、この固有解による擾乱変位速度場は剛性場との直交条件を満足し、巨視的变化を伴わないことが示された。つづいて、より一般的な微視的分岐の検討を行ったところ、微視的分岐点での固有解を決定する境界値問題に加えて、固有解の発生が巨視的变化に影響をしないことを示す直交条件が導かれた。すなわち、微視的分岐点では、固有解の巨視的等価性に関わらず、固有解は直交条件を満足することになり、巨視的变化を伴わないことが示された。

正六角形弾性ハニカムの面内二軸圧縮の解析では、まず、第一微視的分岐点に圧縮比の違いによって単純分岐、二重分岐および三重分岐の場合が現れた。多重分岐では座屈モードが多重となったが、擾乱変位速度場に拘束を与えることにより多重座屈モードの基礎モードを求めることができた。このように求めた基礎モードは、セル壁方向の単軸モードであり、簡単である。これらの基礎モードを線形結合したところ、二重分岐点では Gibson-Ashby が観察した複雑な二軸モードとなり、また三重分岐点では Papka-Kyriakides や Chung-Waas によって報告された花状モードが得られた。したがって、これらの複雑な座屈モードは力学的には多重分岐の結果によることが解明された。さらに、座屈後の解析では、三重分岐点が見れる等二軸圧縮負荷の場合に、進展する座屈モードの内部エネルギーを比較することによって、巨視的ひずみ制御の場合には花状モードが安定に進展し、巨視的応力制御の場合には単軸モードもしくは二軸モードが安定に進展することを示した。巨視的ひずみ制御における等二軸圧縮近傍の解析では、第二微視的分岐点が見れることによって、単軸モードや二軸モードは擬似的な花状モードに進展した。

面内単軸圧縮を受ける正六角形弾塑性ハニカムの解析では、微視的分岐点での分岐モードの波動性とセル数依存性を調べるとともに、分岐後解析により微視的分岐点から巨視的局所化に至る過程の検討を行った。この結果、巨視的軟化域において周期セル数に依存する長波長の微視的分岐が起きた。この分岐は二重分岐であり、波形に加えて位相という自由度を有すること、またその分岐モードには縦波成分と横波成分が含まれることがわかった。分岐後解析を行った結果、分岐モードの縦波成分の方が横波成分より優勢であり、Papka-Kyriakides や Zhu-Mills によって観察された巨視的局所化が得られた。さらに、このような巨視的局所化の進行は、圧縮型の巨視的不安定の開始条件と符号することも明らかとなった。

以上の結果より、本理論に基づいた解析を行えば、セル状固体の微視的座屈や巨視的局所化を定性的かつ定量的に調べることができ、さらには発生のメカニズムに関しても議論が可能であることがわかった。したがって、本研究は、今後使用の拡大が期待される金属フォームに対する力学的挙動の把握だけでなく、使用目的に応じたセル状固体の設計においても有益である。

付録 A

有限要素解析^[99-103,117,118]

A.1 B_L と B_{NL}

線形ひずみ-変位マトリックス B_L は変位をひずみに変換するマトリックスであり、工学的ひずみを用いて、

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

と表される。また、非線形ひずみ-変位マトリックス B_{NL} は変位を変位速度勾配に変換するマトリックスであり、

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ \partial/\partial x_2 & 0 & 0 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_2 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

と表される. ここで, 本研究で解析を行った正六角形ハニカム(図 5.1)は, x_3 軸方向に一様な無限体であるから, 応力やひずみ, 変位の分布も x_3 方向において一様となる. このとき, $\partial/\partial x_3 = 0$ となり式(A.1), (A.2)はそれぞれ

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_2 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ \partial/\partial x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

となる[78,108,109]. なお, 後述(A.4 節参照)の形状関数 N_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を用いると, 式(A.3)は

$$\mathbf{B}_L = [\mathbf{B}_L^1 \mathbf{B}_L^2 \cdots \mathbf{B}_L^n] \quad (\text{A.5})$$

と与えられ, B_L^i は

$$B_L^i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial N_i / \partial x_2 & \partial N_i / \partial x_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial x_2 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial x_1 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.6})$$

と表される. また, 式(A.4)は

$$B_{NL} = [B_{NL}^1 B_{NL}^2 \cdots B_{NL}^n] \quad (\text{A.7})$$

と与えられ, B_{NL}^i は

$$B_{NL}^i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x_1 & 0 & 0 \\ \partial N_i / \partial x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial x_1 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.8})$$

と与えられる.

A.2 C と T

本解析では, 式(5.2)のように相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ の間に線形関係を仮定しており, 式(5.5)に示される等方弾性体や, (7.3)に示される J_2 流れ則に基づく等方弾塑性体構成式に対して C は次のように表される.

$$C = C^{ep} - r = (C^e - C^p) - r \quad (\text{A.9})$$

ここで, C^e は式(5.3)の関係より,

$$C^e = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

と表され, $G = E/2(1+\nu)$ である. つづいて, C^p は,

$$C^p = \frac{9\alpha G^2}{(3G + H')\bar{\sigma}^2} \begin{bmatrix} \sigma'_{11}\sigma'_{11} & \sigma'_{11}\sigma'_{22} & \sigma'_{11}\sigma'_{33} & \sigma'_{11}\sigma'_{12} & \sigma'_{11}\sigma'_{23} & \sigma'_{11}\sigma'_{31} \\ & \sigma'_{22}\sigma'_{22} & \sigma'_{22}\sigma'_{33} & \sigma'_{22}\sigma'_{12} & \sigma'_{22}\sigma'_{23} & \sigma'_{22}\sigma'_{31} \\ & & \sigma'_{33}\sigma'_{33} & \sigma'_{33}\sigma'_{12} & \sigma'_{33}\sigma'_{23} & \sigma'_{33}\sigma'_{31} \\ & & & \sigma'_{12}\sigma'_{12} & \sigma'_{12}\sigma'_{23} & \sigma'_{12}\sigma'_{31} \\ & \text{sym.} & & & \sigma'_{23}\sigma'_{23} & \sigma'_{23}\sigma'_{31} \\ & & & & & \sigma'_{31}\sigma'_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

である. ここで, H' は硬化係数, $\bar{\sigma}$ は相当応力, σ'_{ij} は偏差応力を表し, α は降伏条件式,

$$f = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} \sigma^2(\varepsilon^p) \quad (\text{A.12})$$

より, $f = 0$ のとき $\alpha = 1$, $f < 0$ のとき $\alpha = 0$ である. また, r は

$$r = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{31} \\ & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ & & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{31} \\ & & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{31}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} \\ & \text{sym.} & & & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ & & & & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

で与えられる.

式(4.2), (4.7)において $\delta_{ip} \sigma_{jq}$ を表すマトリックス T は次のように与えられる.

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

A.3 ペナルティ法

ここでは、ペナルティ法を用いた周期境界条件の与え方についての説明を行う。

式(4.1), (4.6)および(4.9)において, $\dot{\mathbf{u}}^*$, $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\phi}$ は kY 周期性を満足する未知数である。

例えば $\dot{\mathbf{u}}^*$ について節点値ベクトルを表せば, 総節点数を N として次のように表される。

$$\dot{\mathbf{u}}^* = \begin{Bmatrix} {}^{(1)}\dot{\mathbf{u}}^* \\ {}^{(2)}\dot{\mathbf{u}}^* \\ \vdots \\ {}^{(N)}\dot{\mathbf{u}}^* \end{Bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

ここで, ${}^{(j)}\dot{\mathbf{u}}^*$ は j 番目の節点における $\dot{\mathbf{u}}^*$ の節点ベクトルであり,

$${}^{(j)}\dot{\mathbf{u}}^* = \left\{ {}^{(j)}\dot{u}_1^* \quad {}^{(j)}\dot{u}_2^* \quad {}^{(j)}\dot{u}_3^* \right\}^T, \quad (j=1,2,\dots,N) \quad (\text{A.16})$$

である。このとき, 図 A.1 に示すように, 周期性を満足すべき節点の組合せをそれぞれ節点 n_q^+ と n_q^- ($q=1,2,\dots,M$) とすると,

$${}^{(n_q^+)}\dot{\mathbf{u}}^* - {}^{(n_q^-)}\dot{\mathbf{u}}^* = \mathbf{0}, \quad (q=1,2,\dots,M) \quad (\text{A.17})$$

が成り立つ。この関係は, 式(A.15)を用いれば,

$$\mathbf{P}_q \dot{\mathbf{u}}^* = \mathbf{0} \quad (\text{A.18})$$

となり, \mathbf{P}_q ($q=1,2,\dots,M$) は, 3×3 の零行列 \mathbf{O} と 3×3 の単位行列 \mathbf{I} により, 次のように表される $3 \times 3N$ のマトリックスである。

$$\mathbf{P}_q = [\mathbf{O} \quad \mathbf{O} \quad \dots \quad \mathbf{I} \quad \dots \quad -\mathbf{I} \quad \dots \quad \mathbf{O}] \quad (\text{A.19})$$

ただし, \mathbf{I} と $-\mathbf{I}$ はそれぞれ n_q^+ 番目と n_q^- 番目に位置する。この関係を用いると, 式(A.18)は,

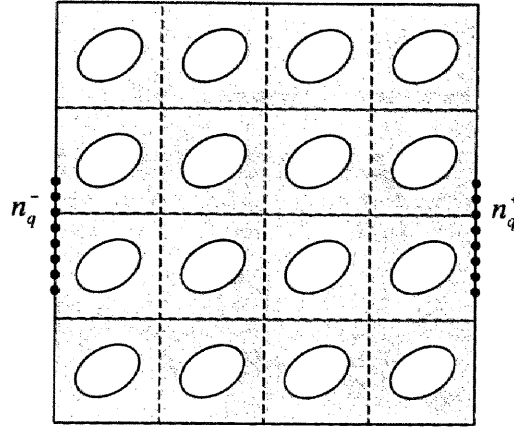


Fig. A.1 Pair of nodal points which are constrained to satisfy kY -periodic boundary condition.

$$\mathbf{P}_{kY} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.20})$$

と表され, \mathbf{P}_{kY} は式(4.7)の拘束マトリックスであり,

$$\mathbf{P}_{kY} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_M \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

で与えられる.

ペナルティ法では, 上で導出した拘束マトリックス \mathbf{P}_{kY} を用い, ペナルティ数 λ に大きな実数を与えることで, 結果的に周期境界条件を満足する解を得る.

A.4 アイソパラメトリック要素

本研究では、図 A.2 のような 1 次の 4 節点アイソパラメトリック要素を用いた。その形状関数は、図 A.2 (b) で示される正規化された局所座標系 (ξ, η) において、以下のように表される。

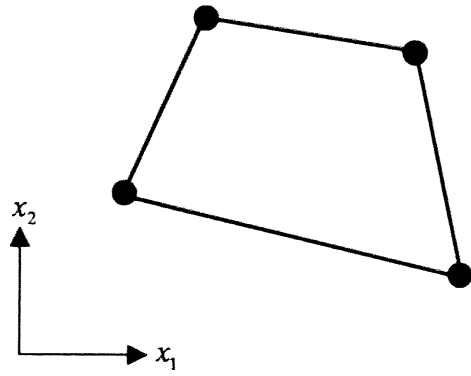
$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (\text{A.22a})$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (\text{A.22b})$$

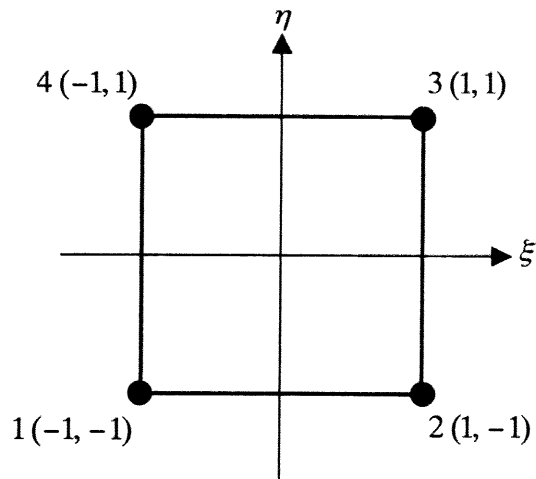
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (\text{A.22c})$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (\text{A.22d})$$

なお、数値積分にはガウス積分を用いた。



(a) Global coordinate



(b) Local coordinate

Fig. A.2 Two kinds of coordinate systems.

付録 B

微視的分岐点と座屈モードの解析方法

B.1 微視的分岐点の探索方法

ここでは、有限要素解析において微視的分岐点の探索するための方法について説明する。このため、一般的に式(3.30)のように多重分岐が生じる場合を考える。

式(3.30)を満足する独立な固有解が m 個存在するとき、 ϕ は $\phi^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) の線形結合された形である式(3.31)で表される。このとき、有限要素解析では式(4.9)のように表され、対応する節点ベクトル $\phi^{(k)}$ は、

$$K\phi^{(k)} = \kappa^{(k)}\phi^{(k)} \quad (\text{B.1})$$

の関係より、 $\kappa^{(k)} = 0$ を満足するような零固有値をペアとする固有解である。すなわち、分岐の多重度 m は K の零固有値の数に等しく、零固有値が生じることで式(4.8)が成り立つ。

零固有値の数を調べるには、シルベスターの慣性法則[119]を利用すると都合がいい。まず、 K を三角分解すると、

$$K = LDL^T \quad (\text{B.2})$$

と表される。ここで、 L は対角成分を 1 とする下三角行列であり、 D は対角行列である。このとき、シルベスターの慣性法則によれば、対角行列 D の零成分の数が K の零

固有値の数と等しく，さらには \mathbf{K} における固有値の正負符号の数と， \mathbf{D} における対角成分の正負符号の数は一致する．実際の解析では，未変形状態のとき \mathbf{K} の固有値がすべて正であり，微小増分をとって解析を進めて行くと微視的分岐を通過して \mathbf{K} の固有値に負符号が現れる．よって，増分計算毎に対角行列 \mathbf{D} の対角成分において負符号の数を調べれば，微視的分岐点の発生と分岐の多重度を調べることができる．なお，本解析では連立方程式(4.1)の解法に Gauss の消去法を用いており，この場合には前進消去した後の上三角行列に対して対角成分の符号を調べれば，上述と同様の確認を行うことが可能である．

B.2 独立な座屈モードを求めるための拘束

第5章のように4つのセルの集合をセル集合に取った場合，図 B.1 の点 A で擾乱変位速度 \dot{u}_i^* を零に設定すれば，周期性により点 C, G でも $\dot{u}_i^* = 0$ となる(5.3 節)．ただし座屈が生じるまでは，各セルが同じように変形するから，さらに点 B, D, E, F, H で $\dot{u}_i^* = 0$ が成り立つ．つまり，座屈点に至るまでは点 A~H で $\dot{u}_i^* = 0$ であるが，座屈点に達すると，点 B, D, E, F, H の5点で \dot{u}_i^* は非零の値を取り得ることになる．しかしここで， x_2 方向，すなわち 90° 方向のモード I 座屈(図 5.5)を見ると，これら5点のうち点 B, H では $\dot{u}_i^* = 0$ である．したがって，点 B, H で \dot{u}_i^* を零に拘束しても， 90° 方向のモード I 座屈には影響を及ぼさないことになる．同様に，点 D, F および点 E で \dot{u}_i^* を零に拘束しても，それぞれ -30° 方向および 30° 方向のモード I 座屈には影響を及ぼさない．

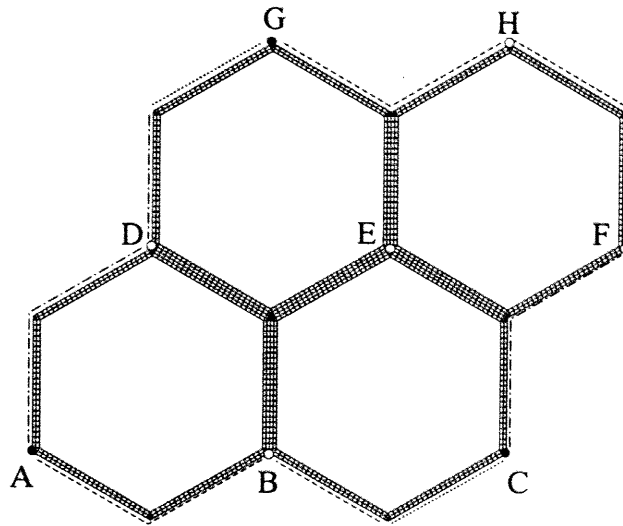


Fig. B.1 Periodical unit consisting of four cells; chain, dashed and dotted lines indicate three periodic pairs of cell walls.

B.3 花状座屈モードと巨視的応力・ひずみ状態

ある巨視的応力および巨視的ひずみのもとで、図 5.10 に示したような花状変形が現れたとする。この花状変形は x_3 軸回りの 60° の回転に対して不変であるから、これに対応する巨視的応力および巨視的ひずみの状態も x_3 軸回りの 60° の回転に対して不変でなければならない。この結果、花状変形を引き起こす巨視的応力および巨視的ひずみは、等二軸状態の面内垂直成分と x_3 軸方向の垂直成分からなることが示される。

付録 C

サブストラクチャ法を用いた解析方法

サブストラクチャ法[115]を用いると、 $M \times N$ 個のセル集合 kY の解析は単位セル Y を用いて効率的に行うことができる(図 C.1). まず、 $M \times N$ 個のセルの集合 kY に関する境界値問題(2.30)をそれぞれ単位セルごとに考える(図 C.1 (b)). このとき、 x_1 方向に i 番目、 x_2 方向に j 番目の単位セルに関する部分剛性方程式は、境界成分を表す添字 B とそれ以外の成分を表す添字 I を用いて、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)}^I & \mathbf{k}_{(i,j)}^{BI} \\ \mathbf{k}_{(i,j)}^{IB} & \mathbf{k}_{(i,j)}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{(i,j)}^{*I} \\ \dot{\mathbf{u}}_{(i,j)}^{*B} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_{(i,j)}^I \\ \mathbf{n}_{(i,j)}^B \end{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0, \quad (1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N) \quad (\text{C.1})$$

と表される. 式(C.1)の $\mathbf{k}_{(i,j)}^I$ に対して Gauss の前進消去法を適用し上三角化を行うと、演算後の $\mathbf{k}_{(i,j)}^B$ を $\boldsymbol{\kappa}_{(i,j)}^B$ 、 $\mathbf{n}_{(i,j)}^B$ を $\boldsymbol{\eta}_{(i,j)}^B$ として、境界成分のみに関する部分剛性方程式

$$\boldsymbol{\kappa}_{(i,j)}^B \dot{\mathbf{u}}_{(i,j)}^{*B} = -\boldsymbol{\eta}_{(i,j)}^B \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \quad (\text{C.2})$$

が求められる. ただし、 $\dot{\mathbf{u}}_{(i,j)}^{*B}$ はセル集合 kY の kY 周期境界条件および隣接する単位セル間での共有境界条件を満足しなければならない. 式(C.2)を用いてセル集合 kY の全境界に関する部分剛性方程式(図 C.1 (c))を組み立てると

$$\mathbf{K}^B \dot{\mathbf{u}}^{*B} = -\mathbf{N}^B \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \quad (\text{C.3})$$

となり、 \mathbf{K}^B 、 $\dot{\mathbf{u}}^{*B}$ 、 \mathbf{N}^B はそれぞれ $\boldsymbol{\kappa}_{(i,j)}^B$ 、 $\dot{\mathbf{u}}_{(i,j)}^{*B}$ 、 $\boldsymbol{\eta}_{(i,j)}^B$ を元に構成される. ペナルティ

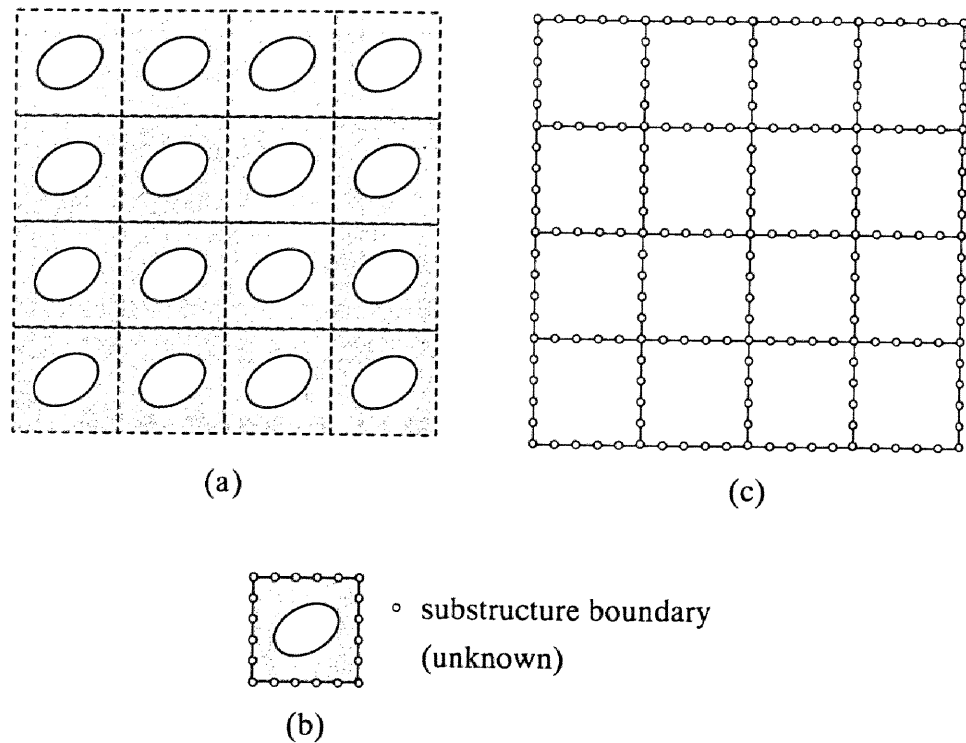


Fig. C.1 Schematic illustration of substructure method, (a) analysis region kY , (b) substructure Y in kY , (c) boundary among substructures.

法を用いて境界条件を課すれば, K^B は

$$K^B = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \kappa_{(i,j)}^B + \lambda P_{kY}^T P_{kY} \quad (C.4)$$

と表される. ここで, λ はペナルティ数, P_{kY} は kY 周期境界条件および共有境界条件を表す拘束マトリックスである.

微視的分岐が生じるまで, セル集合に含まれる各単位セルは同様の変形状態を示すので, 増分解析には単位セルを用いればよい. また, 式(C.4)を用いれば, 単位セルの解析で得られる $\kappa_{(i,j)}^B$ を使って, 大きさの異なるセル集合に対して効率的に微視的分岐点の探索が可能である. 分岐後は変形状態の異なる $M \times N$ 個のセルに対して式(C.1)から式(C.2)を求め, 式(C.3)を解くことで最終的に全体の変形状態を解析する.

参 考 文 献

- [1] Gibson, L.J., Ashby, M.F., 1997. Cellular Solids: Structure and Properties, 2nd Edition. Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Hooke, R., 1664. Micrographia. The Royal Society, London.
- [3] Ashby, M.F., Evans, A.G., Fleck, N.A., Gibson, L.J., Hutchinson, J.W., Wadley, H.N.G., 2000. Metal Foams: A Design Guide. Butterworth Heinemann, Boston.
- [4] Gibson, L.J., Ashby, M.F., Schajer, G.S., Robertson, C.I., 1982. The mechanics of two-dimensional cellular materials. Proceedings of the Royal Society of London A 382, 25-42.
- [5] Klintworth, J.W., Stronge, W.J., 1988. Elasto-plastic yield limits and deformation laws for transversely crushed honeycombs. International Journal of Solids and Structures 30, 273-292.
- [6] Gibson, L.J., Ashby, M.F., Zhang, J., Triantafillou, T.C., 1989. Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads – I. Modeling. International Journal of Mechanical Sciences 31, 635-663.
- [7] Papka, S.D., Kyriakides, S., 1994. In-plane compressive response and crushing of honeycomb. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 42, 1499-1532.
- [8] Sugimura, Y., Meyer, J., He, M.Y., Bart-Smith, H., Grenstedt, J., Evans, A.G., 1997. On the mechanical performance of closed cell Al alloy foams. Acta Materialia 45, 5245-5259.
- [9] Papka, S.D., Kyriakides, S., 1998. In-plane crushing of a polycarbonate honeycomb. International Journal of Solids and Structures 35, 239-267.

- [10] Papka, S.D., Kyriakides, S., 1998. Experiments and full-scale numerical simulations of in-plane crushing of a honeycomb. *Acta Materialia* 46, 2765-2776.
- [11] Bart-Smith, H., Bastawros, A-F., Mumm, D.R., Evans, A.G., Sypeck, D.J., Wadley, H.N.G., 1998. Compressive deformation and yielding mechanisms in cellular Al alloys determined using X-ray tomography and surface strain mapping. *Acta Materialia* 46, 3583-3592.
- [12] Sugimura, Y., Rabiei, A., Evans, A.G., Harte, A.M., Fleck, N.A., 1999. Compression fatigue of a cellular Al alloy. *Materials Science and Engineering A* 269, 38-48.
- [13] Chung, J., Waas, A.M., 1999. Compressive response and failure of circular cell polycarbonate honeycombs under inplane uniaxial stresses. *Journal of Engineering Materials and Technology* 121, 494-502.
- [14] Harte, A-M., Fleck, N.A., Ashby, M.F., 1999. Fatigue failure of an open cell and a closed cell aluminium alloy foam. *Acta Materialia* 47, 2511-2524.
- [15] Papka, S.D., Kyriakides, S., 1999. Biaxial crushing of honeycombs – Part I: experiments. *International Journal of Solids and Structures* 36, 4367-4396.
- [16] Bastawros, A-F., Bart-Smith, H., Evans, A.G., 2000. Experimental analysis of deformation mechanisms in a closed-cell aluminum alloy foam. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 301-322.
- [17] Gioux, G., McCormack, T.M., Gibson, L.J., 2000. Failure of aluminum foams under multiaxial loads. *International Journal of Mechanical Sciences* 42, 1097-1117.
- [18] Deshpande, V.S., Fleck, N.A., 2000. Isotropic constitutive models for metallic foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 1253-1283.
- [19] Zhu, H.X., Mills, N.J., 2000. The in-plane non-linear compression of regular honeycombs. *International Journal of Solids and Structures* 37, 1931-1949.
- [20] Chung, J., Waas, A.M., 2001. In-plane biaxial crush response of polycarbonate honeycombs. *Journal of Engineering Mechanics* 127, 180-193.

- [21] Deshpande, V.S., Fleck, N.A., 2001. Multi-axial yield behaviour of polymer foams. *Acta Materialia* 49, 1859-1866.
- [22] Deshpande, V.S., Fleck, N.A., 2001. Collapse of truss core sandwich beams in 3-point bending. *International Journal of Solids and Structures* 38, 6275-6305.
- [23] Chung, J., Waas, A.M., 2002. Compressive response of circular cell polycarbonate honeycombs under inplane biaxial static and dynamic loading. Part I: experiments. *International Journal of Impact Engineering* 27, 729-754.
- [24] Chen, C., Fleck, N.A., 2002. Size effects in the constrained deformation of metallic foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50, 955-977.
- [25] 奥村 大, 大野信忠, 野口裕久, 2001. 有限変形の均質化理論に基づくセル状固体の微視的対称分岐解析(第2報, 正六角形ハニカムの面内座屈への適用). *日本機械学会論文集(A編)* 67, 925-932.
- [26] Ohno, N., Okumura, D., Noguchi, H., 2002. Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50, 1125-1153.
- [27] Okumura, D., Ohno, N., Noguchi, H., 2002. Post-buckling analysis of elastic honeycombs subject to in-plane biaxial compression. *International Journal of Solids and Structures* 39, 3487-3503.
- [28] Gibson, L.J., Ashby, M.F., 1982. The mechanics of three-dimensional cellular materials. *Proceedings of the Royal Society of London A* 382, 43-59.
- [29] Mills, N.J., Zhu, H.X., 1999. The high strain compression of closed-cell polymer foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47, 669-695.
- [30] Papka, S.D., Kyriakides, S., 1999. Biaxial crushing of honeycombs – Part II: analysis. *International Journal of Solids and Structures* 36, 4397-4423.
- [31] Chung, J., Waas, A.M., 2002. Compressive response of circular cell polycarbonate honeycombs under inplane biaxial static and dynamic loading. Part II: simulations. *International Journal of Impact Engineering* 27, 1015-1047.

- [32] Guo, X.E., Gibson, L.J., 1999. Behavior of intact and damaged honeycombs: a finite element study. *International Journal of Mechanical Sciences* 41, 85-105.
- [33] Abeyaratne, R., Triantafyllidis, N., 1984. An investigation of localization in a porous elastic material using homogenization theory. *Journal of Applied Mechanics* 51, 481-486.
- [34] Triantafyllidis, N., Maker, B.N., 1985. On the comparison between microscopic and macroscopic instability mechanisms in a class of Fiber-reinforced composites. *Journal of Applied Mechanics* 52, 794-800.
- [35] Geymonat, G., Müller, S., Triantafyllidis, N., 1993. Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 122, 231-290.
- [36] Triantafyllidis, N., Schnaidt, W., 1993. Comparison of microscopic and macroscopic instabilities in a class of two-dimensional periodic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41, 1533-1565.
- [37] Triantafyllidis, N., Schraad, M.W., 1998. Onset of failure in aluminum honeycombs under general in-plane loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46, 1089-1124.
- [38] Laroussi, M., Sab, K., Alaoui, A., 2002. Foam mechanics: nonlinear response of an elastic 3D-periodic microstructure. *International Journal of Solids and Structures* 39, 3599-3623.
- [39] Miehe, C., Schröder, J., Becker, M., 2002. Computational homogenization analysis in finite elasticity: material and structural instabilities on the micro- and macro-scales of periodic composites and their interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191, 4971-5005.
- [40] Timoshenko, S.P., Gere, J.M., 1961. *Theory of elastic stability*, second edition. McGraw-Hill, Tokyo.
- [41] Bazant, Z.P., Cedelon, L., 1991. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, New York.

- [42] ABAQUS Manual, Version 5.8., 1998. Hibbitt, Karlsson and Sorenson, Pawtucket, RI., U.S.A..
- [43] 池田清宏, 室田一雄, 2001. 構造系の座屈と分岐. コロナ社.
- [44] Ikeda, K., Murota, K., 2002. Imperfect bifurcation in structures and materials: engineering use of group-theoretic bifurcation theory. Springer-Verlag, New York.
- [45] Onck, P.R., Andrews, E.W., Gibson, L.J., 2001. Size effects in ductile cellular solids. Part I: modeling. *International Journal of Mechanical Sciences* 43, 681-699.
- [46] Hill, R., 1962. Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10, 1-16.
- [47] Rice, J.R., 1976. (Koiter, W.T. Eds.), The Localization of plastic deformation, *Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the 14th IUTAM Congress*, North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 207-220.
- [48] Müller, S., 1987. Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 99, 189-212.
- [49] Kittel, C. 著, 宇野良清, 津屋 昇, 森田 章, 山下次郎 訳, 1998. 第7版キッテル固体物理学入門(上). 丸善.
- [50] Agah-Tehrani, A., 1990. On finite deformation of composites with periodic microstructure. *Mechanics of Materials* 8, 255-268.
- [51] 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池 昇, 1995. 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析(第1報, 定式化). *日本機械学会論文集(A編)* 61, 2199-2205.
- [52] 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池 昇, 1996. 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析(第2報, 数値解析). *日本機械学会論文集(A編)* 62, 2072-2079.
- [53] Takano, N., Ohnishi, Y., Zako, M., Nishiyabu, K., 2000. The formulation of homogenization method applied to large deformation problem for composite materials. *International Journal of Solids and Structures* 37, 6517-6535.
- [54] Truesdell, C., Noll, W., 1965. *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*,

Encyclopedia of Physics, Vol. III/3. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

- [55] Hill, R., 1963. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11, 357-372.
- [56] Hill, R., 1967. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 15, 79-95.
- [57] Suquet, P.M., 1985. Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity. In: Sawczuk, A., Bianchi, G. (Eds.), *Plasticity Today: Modelling, Methods and Applications*. Elsevier Applied Science Publishers, London, 279-310.
- [58] Suquet, P.M., 1987. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In: Sanchez-Palencia, E., Zaoui, A. (Eds.), *Homogenization Techniques for Composite Media*. Lecture Notes in Physics 272, Springer, Berlin, 193-278.
- [59] Hangai, Y., Kawamata, S., 1973. Analysis of geometrically nonlinear and stability problems by static perturbation method, Vol. 22. Report of the Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, 245-295.
- [60] Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., 1973. *A General Theory of Elastic Stability*. John Wiley & Sons, London.
- [61] 大野信忠, 奥村 大, 野口裕久, 2001. 有限変形の均質化理論に基づくセル状固体の微視的対称分岐解析(第1報, 理論). *日本機械学会論文集(A 編)* 67, 618-624.
- [62] Babsuka, I., 1976. Homogenization approach in engineering, In: R. Glowinski, J.L., Lions(Eds.), *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 134, Springer-Verlag, Berlin.
- [63] Bensoussan, A., Lions, J.-L., Papanicolaou, G., 1978. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherlands.
- [64] Sanchez-Palencia, E., 1980. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics 127, Springer, Berlin, Germany.

- [65] Bakhvalov, N., Panasenko, G., 1984. Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherland.
- [66] Léné, F., Leguillon, D., 1982. Homogenized constitutive law for a partially cohesive composite material. *International Journal of Solids and Structures* 18, 443-458.
- [67] Léné, F., 1986. Damage Constitutive relations for composite materials, *Engineering Fracture Mechanics* 25, 713-728.
- [68] Devries, F., Dumontet, H., Duvaut, G., Léné, F., 1989. Homogenization and damage for composite Structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 27, 285-298.
- [69] Guedes, J.M., Kikuchi, N., 1990. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 83, 143-198.
- [70] Jansson, S., 1991. Mechanical characterization and modeling of non-linear deformation and fracture of a fibre reinforced metal matrix composite. *Mechanics of Materials* 12, 47-62.
- [71] Jansson, S., 1992. Homogenized nonlinear constitutive properties and local stress concentrations for composites with periodic internal structure. *International Journal of Solids and Structures* 29, 2181-2200.
- [72] Swan, C.C., Cakmak, A.S., 1994. A hardening orthotropic plasticity model for non-frictional composites: rate formation and integration algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37, 839-860.
- [73] Swan, C.C., 1994. Techniques for stress- and strain-controlled homogenization of inelastic periodic composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 117, 249-267.
- [74] Wieckowski, Z., 2000. Dual finite element methods in homogenization for elastic-plastic fibrous composite material. *International Journal of Plasticity* 16, 199-221.

- [75] 渋谷 嗣, 1996. 均質化理論を用いた炭素繊維複合材料のクリープ・コンプライアンスの評価. 日本機械学会論文集(A編) 62, 1665-1671.
- [76] Yi, Y., Park, S., Youn, S., 1998. Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures. *International Journal of Solids and Structures* 35, 2039-2055.
- [77] Wu, X., Ohno, N., 1999. A homogenization theory for time-dependent nonlinear composites with periodic internal structures. *International Journal of Solids and Structures* 36, 4991-5012.
- [78] Ohno, N., Wu, X., Matsuda, T., 2000. Homogenized properties of elastic-viscoplastic composites with periodic internal structures. *International Journal of Mechanical Sciences* 42, 1519-1536.
- [79] Michel, J.C., Moulinec, H., Suquet, P.M., 1999. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 172, 109-143.
- [80] 岡田 裕, 福井泰好, 熊澤典良, 丸山拓也, 1998. 大変形弾塑性材料の均質化法による解析(第1報, 周期性の仮定を厳密に満足するための定式化). 日本機械学会論文集(A編) 61, 450-456.
- [81] 石原隆史, 野口裕久, 2000. 均質化法の微小ひずみ大変形問題への適用. 日本機械学会論文集(A編) 66, 31-38.
- [82] Ghosh, S., Moorthy, S., 1995. Elastic-plastic analysis of arbitrary heterogeneous materials with the Voronoi Cell finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 121, 373-409.
- [83] Ghosh, S., Kyunghoon, L., Moorthy, S., 1996. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 132, 63-116.
- [84] Miehe, C., Schröder, J., Schotte, J., 1999. Computational homogenization analysis in finite plasticity Simulation of texture development in polycrystalline materials.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 171, 387-418.

- [85] Miehe, C., Schotte, J., Lambrecht, M., 2002. Homogenization of inelastic solid materials at finite strains based on incremental minimization principles. Application to the texture analysis of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50, 2123-2167.
- [86] Fish, J., Shek, K., Pandheeradi, M., Shephard, M.S., 1997. Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 148, 53-73.
- [87] Yuan, X., Tomita, Y., 1999. Application of asymptotic homogenization method on micropolar materials. *Theoretical and Applied Mechanics* 48, 149-154.
- [88] 比嘉吉一, 富田佳宏, 2000. 粒子強化複合材料の均質化法による変形挙動のモデル化とシミュレーション. *日本機械学会論文集(A編)* 66, 1441-1446.
- [89] 大野信忠, 2001. *機械工学年鑑*, 5.3 グローバル/ローカルブリッジング手法. *機械学会誌* 104, 507.
- [90] 寺田賢二郎, 2001. 均質化理論に基づくマルチスケールモデリングとその非線形問題への展開. (財)エネルギー結合工学研究所.
- [91] 奥村 大, 大野信忠, 野口裕久, 均質化理論による周期セル状固体の微視的分岐と巨視的不安定の弾塑性解析. (投稿中).
- [92] Koiter, W.T., 1945. On the Stability of Equilibrium. Thesis Polytechnic Institute, Delft H.T., Paris, Amsterdam.
- [93] Britvec, S.J., 1973. The Stability of Elastic Systems. Pergamon Unified Engineering Series.
- [94] Hill, R., 1958. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 6, 236-249.
- [95] Needleman, A., 1972. A numerical study of necking in circular cylindrical bars. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 20, 111-127.

- [96] Tvergaard, V., Needleman, A., Lo, K.K., 1981. Flow localization in the plane strain tensile test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 29, 115-142.
- [97] 岡澤重信, 宇佐美勉, 1999. 弾塑性分岐解析による固体のくびれ・せん断帯挙動に関する研究. NUCE Research Report, No. 9902.
- [98] Hutchinson, J. W., 1967. Imperfection sensitivity of externally pressurized spherical shells. *Journal of Applied Mechanics* 34, 49-55.
- [99] 富田佳宏, 1990. 数値弾塑性力学:有限要素シミュレーションー基礎と応用. 養賢堂.
- [100] 久田俊明, 1992. 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎. 丸善.
- [101] 日本塑性加工学会 編, 1994. 非線形有限要素法-線形弾性解析から塑性加工解析まで-. コロナ社.
- [102] 久田俊明, 野口裕久, 1995. 非線形有限要素法の基礎と応用. 丸善.
- [103] Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B., 2000. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, Chichester.
- [104] Fujii, F., Ramm, E., 1997. Computational bifurcation theory: path-tracing, pinpointing and path-switching. *Engineering Structures* 19, 385-392.
- [105] Chen, C., Lu, T. J., Fleck, N. A., 1999. Effect of imperfections on the yielding of two-dimensional foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47, 2235-2272.
- [106] Chen, C., Lu, T. J., Fleck, N. A., 2001. Effect of inclusions and holes on the stiffness and strength of honeycombs. *International Journal of Mechanical Sciences* 43, 487-504.
- [107] 斉木 功, 寺田賢二郎, 池田清宏, 1999. セル構造体のマルチスケール解析のための座屈を考慮した微視スケール問題に関する一考察. *応用力学論文集* 2, 287-294.
- [108] 野口裕久, 清水映吾, 1999. 均質化法による一方向 CFRP の破壊モード遷移解析

(第1報, 定式化). 日本機械学会論文集(A編) 65, 225-231.

- [109] Ohno, N., Matsuda, T., Wu, X., 2001. A homogenization theory for elastic-viscoplastic composites with point symmetry of internal distributions. *International Journal of Solids and Structures* 38, 2867-2878.
- [110] 神谷紀生, 大野信忠, 佐脇 豊, 北 英輔, 1993. 数値計算とその応用—FORTRAN77—. サイエンス社.
- [111] Cristensen, R.M., 1979. *Mechanics of Composite Materials*. John Wiley & Sons, New York.
- [112] Sokolnikoff, I.S., 1956. *Mathematical Theory of Elasticity – Second Edition*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- [113] Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K., Hori, M., 2002. Appropriate number of unit cells in a representative volume element for micro-structural bifurcation encountered in a multi-scale modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191, 2561-2585.
- [114] Murota, K. and Ikeda, K., 1991. Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 12, 273–297.
- [115] Farhat, C., Wilson, E., 1987. A new finite element concurrent computer program architecture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24, 1771-1792.
- [116] Hutchinson, J.W., 1973. Post-bifurcation behavior in the plastic range. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 21, 163-190.
- [117] Zienkiewicz, O.C. 著, 川井忠彦ほか 訳, 1984. マトリックス有限要素法. 培風館.
- [118] 矢川元基, 吉村 忍, 1991. 計算力学と CAE シリーズ1. 有限要素法, 培風館.
- [119] 茂木 勇, 横手一郎, 1990. 線形代数. 裳華房.

謝 辞

本研究を行うにあたり終始丁寧なご指導とご鞭撻を賜りました大野信忠 教授に心より感謝いたします。また、本論文の作成にあたり貴重なご助言を賜りました田中啓介 教授，田中英一 教授に深く感謝いたします。

本研究を遂行するにあたり有益なご助言とご討論を賜りました野口裕久 教授(慶應義塾大学) に深く感謝いたします。さらには、折に触れ示唆に富んだアドバイスならびに激励を頂いた琵琶志朗 講師，松田哲也 助手に厚くお礼申し上げます。このほか多くのご支援とご協力を頂いた研究室の皆様に感謝いたします。

2003 年 1 月

奥 村 大