

図・本館

# 境界要素法による 形状最適化に関する研究



1991年2月

北 栄 輔

# 目次

|          |                    |           |
|----------|--------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>緒論</b>          | <b>5</b>  |
| 1.1      | 数値解析法              | 5         |
| 1.2      | 最適設計問題             | 6         |
| 1.3      | 本論文の内容             | 9         |
| <b>2</b> | <b>数値解析と最適化の理論</b> | <b>13</b> |
| 2.1      | 2次元弾性問題            | 13        |
| 2.1.1    | 境界値問題              | 13        |
| 2.1.2    | 積分方程式              | 15        |
| 2.1.3    | 有限要素解析             | 16        |
| 2.1.4    | 境界要素解析             | 18        |
| 2.2      | ポテンシャル解析           | 21        |
| 2.2.1    | 境界値問題              | 21        |
| 2.2.2    | 積分方程式              | 22        |
| 2.2.3    | 有限要素解析             | 22        |
| 2.2.4    | 境界要素解析             | 23        |
| 2.3      | 結合解法               | 26        |
| 2.3.1    | 提案されている方法          | 26        |
| 2.3.2    | 等価有限要素を用いた結合解法     | 26        |
| 2.3.3    | 等価境界要素を用いた結合解法     | 28        |
| 2.3.4    | 両者の比較              | 29        |
| 2.4      | シンメトリックBEM         | 29        |
| 2.4.1    | 2次元ポテンシャル解析の場合     | 30        |
| 2.4.2    | 2次元弾性解析の場合         | 31        |
| 2.5      | 最適設計理論             | 33        |
| 2.5.1    | 最適化問題              | 33        |
| 2.5.2    | 逐次線形化法             | 34        |
| 2.5.3    | 設計感度解析             | 35        |
| 2.5.4    | スムージング法            | 36        |

|          |                                   |           |
|----------|-----------------------------------|-----------|
| <b>3</b> | <b>有限要素法と境界要素法の結合解法による局所形状最適化</b> | <b>39</b> |
| 3.1      | はじめに                              | 39        |
| 3.2      | 局所形状最適化と結合解法                      | 39        |
| 3.3      | 最適化プロセス                           | 43        |
| 3.4      | 解析結果と検討                           | 44        |
| 3.4.1    | 解析例1：円孔を有する平板                     | 44        |
| 3.4.2    | 解析例2：段差付き平板                       | 51        |
| 3.4.3    | 解析例3：長方形キー溝を有する棒                  | 54        |
| 3.4.4    | 解析例4：台形キー溝を有する棒                   | 54        |
| 3.5      | まとめ                               | 56        |
| <b>4</b> | <b>一様でない場を含む局所形状最適化</b>           | <b>57</b> |
| 4.1      | はじめに                              | 57        |
| 4.2      | 不均一な場を含む局所形状最適化                   | 57        |
| 4.3      | 解析結果と検討                           | 59        |
| 4.3.1    | 解析例1：半径方向に厚さの変化する円板               | 59        |
| 4.3.2    | 解析例2：車輪形状                         | 66        |
| 4.4      | まとめ                               | 66        |
| <b>5</b> | <b>境界要素ズームング法による局所形状最適化</b>       | <b>67</b> |
| 5.1      | はじめに                              | 67        |
| 5.2      | 領域分割指標とズームング領域の設定                 | 68        |
| 5.2.1    | 領域分割指標                            | 68        |
| 5.2.2    | ズームング領域の設定                        | 69        |
| 5.3      | FE/BEメッシュコンバータ                    | 69        |
| 5.4      | 境界要素ズームングによる最適設計のプロセス             | 70        |
| 5.4.1    | 全体のプロセス                           | 70        |
| 5.4.2    | 境界要素メッシュの細分割                      | 71        |
| 5.5      | 解析例                               | 71        |
| 5.5.1    | 解析例1：円孔を有する平板                     | 71        |
| 5.5.2    | 解析例2：複数の応力集中部を有する場合               | 76        |
| 5.6      | まとめ                               | 83        |
| <b>6</b> | <b>コイルばね素線断面形状の最適設計</b>           | <b>85</b> |
| 6.1      | はじめに                              | 85        |
| 6.2      | コイルばねの静応力解析                       | 85        |
| 6.2.1    | 境界値問題                             | 85        |
| 6.2.2    | 各種関数                              | 86        |
| 6.3      | 境界要素解析                            | 88        |
| 6.3.1    | 境界積分方程式と離散定式化                     | 88        |

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| 目次                              | 3          |
| 6.3.2 基本解                       | 89         |
| 6.4 最適化問題                       | 90         |
| 6.4.1 問題の定義                     | 90         |
| 6.4.2 目的関数の成分                   | 90         |
| 6.4.3 制約条件                      | 90         |
| 6.4.4 設計変数                      | 91         |
| 6.4.5 収束条件                      | 91         |
| 6.4.6 ねじりモーメント感度                | 91         |
| 6.5 解析結果と検討                     | 92         |
| 6.5.1 解析例 1 : 楕円形素線ばねの応力解析      | 92         |
| 6.5.2 解析例 2 : 円形素線ばねからの最適化      | 92         |
| 6.5.3 解析例 3 : 高さ制約を受ける最適化       | 95         |
| 6.5.4 解析例 4 : 異なる初期形状からの最適化     | 95         |
| 6.5.5 解析例 5 : 滑らかな応力分布を得る最適化    | 98         |
| 6.6 まとめ                         | 98         |
| <b>7 境界要素法に対する適応メッシュ法の開発</b>    | <b>101</b> |
| 7.1 はじめに                        | 101        |
| 7.2 最適メッシュ構成問題                  | 102        |
| 7.2.1 目的関数                      | 102        |
| 7.2.2 設計変数                      | 103        |
| 7.2.3 制約条件                      | 104        |
| 7.3 適応メッシュプロセス                  | 104        |
| 7.3.1 設計感度の計算                   | 104        |
| 7.3.2 メッシュ変更プロセス                | 106        |
| 7.3.3 適応メッシュプロセス                | 106        |
| 7.4 解析結果と検討                     | 108        |
| 7.4.1 解析例 1 : 正方形平板の熱伝導解析       | 108        |
| 7.4.2 解析例 2 : L形平板の熱伝導解析        | 115        |
| 7.4.3 解析例 3 : 一辺が固定された正方形平板の引張り | 120        |
| 7.4.4 解析例 4 : 段差付き平板            | 120        |
| 7.5 まとめ                         | 120        |
| <b>8 結論</b>                     | <b>123</b> |





# Chapter 1

## 緒論

### 1.1 数値解析法

近年の計算機技術の長足の進歩は、高性能なコンピュータを従来では考えられなかったほど安価に利用する事を可能にした。その結果、設計や生産の現場に数値解析法をベースとしたシステムを導入し、従来は経験や実験に頼っていた作業をコンピュータ処理することが熱心に検討されている。このようなシステムは CAD (Computer Aided Design)、CAE (Computer Aided Engineering) などと呼ばれている。ここで用いられている数値解析法には差分法 (Finite Difference Method)、有限要素法 (Finite Element Method)、境界要素法 (Boundary Element Method) などがあるが、流体解析など特別な場合を除けば、主として用いられるのは有限要素法と境界要素法である。では、最初に有限要素法と境界要素法の発展と現状を簡単に概観してみることにする。

#### 有限要素法

有限要素法 [1] が初めて実用に用いられたのは、1950 年代に航空機の構造解析に適用されたときである。その後、この解析法は 1960 年代、1970 年代を通じて熱伝導や電磁場などの非構造解析、大変形や塑性などの非線形解析に応用された結果、ますます汎用性の高い解析法となった [2, 3]。しかし、この解析法を現在のように広く普及させるのにきわめて大きく貢献したのは、入出力データ処理を容易にするプリポストプロセッサの開発と、それを用いた強力な汎用プログラムの出現である。

ところで、有限要素法は Rayleigh-Ritz 法または Galerkin 法に基づいている。しかし、どちらの場合でも解析対象の領域を有限個の要素 (有限要素) に分割し、関数分布を各要素内で多項式近似して定式化する。領域をいくつかの要素に分割して解析するので、非線形な問題や不均一な場の問題でも容易に解析できるが、領域内に節点をとるので計算機の記憶容量や計算時間が増大する欠点がある。また、有限要素は解析対象の形状変更によってゆがみを生じ、計算精度が低下する可能性が大きいため、境界形状の変化する問題、例えば、自由境界を決定する問題や形状最適設計問題に対しては効果的なメッシュジェネレー

タや適応メッシュ法が必要となる。しかし、現在提案されているものはまだ十分実用的とはいえない [3-5]。

## 境界要素法

境界要素法の発展を見ると、これまでに2つの重要なターニングポイントがあった [6, 7]。その第1は、1967年に F.J.Rizzo により初めて行われた直接法による定式化である。それまで、境界要素法は間接法によって定式化されていたが、これ以降直接法境界要素法が中心となっていく。そして、第2は1975年に Lachat と Watson [8, 9] によってなされた、形状関数の導入である。彼らは、有限要素法で用いられている形状関数が、積分方程式に系統的に組み込まれ得ることを数値例によって示した。この結果、それまで境界積分方程式 (Boundary Integral Equation) と呼ばれていたこの解析法に「要素 (Element)」の概念が導入され、境界要素法 (Boundary Element Method) の名前が生まれることとなった [10, 11]。そして、その後境界要素法は流体や電磁気などの非構造解析、弾塑性解析や自由境界を有する問題などへも応用が進められ、最近では市販プログラムが開発されるまでになっている。

ところで、境界要素法の最大の特徴は、線形で均質な場の問題に対してその境界を要素分割するだけで解析できることである。そのために、領域内に節点を必要とする有限要素法に比べて計算時間と記憶容量の面で非常に有利となる。また、境界形状が変化する場合に対しても、要素がゆがんで計算精度が低下する恐れが少ないので、自由境界を決定する場合や形状最適化問題にも有効である。しかし、このような問題は線形で均質な場の問題に限られるので、これ以外の問題では領域の要素分割が必要となり、境界要素法の有効性は低下する。そこで、このような問題に対して、領域積分項を境界積分に変換するための一般的手法についての研究もいくつか行われているが、まだ十分効果的とはいえない [12-14]。

以上、この節では有限要素法と境界要素法の特徴について簡単に述べた。それによると、有限要素法は線形・非線形を問わずいろいろな問題の解析に適用できるが、境界形状の変化する問題には適していないこと、これに対して、境界要素法は線形で均質な問題や境界形状の変化する問題に適していることがわかった。これらの点をふまえて、次節では境界要素法が扱う最適化問題にはどのようなものが適しているか、それらで問題となるのはどのようなことかについて述べることにする。

## 1.2 最適設計問題

本論文の目的は、境界要素法を構造物や機械要素の最適設計に適用し、その有効性を検討することである。この節では、どのような最適設計問題を扱うのか、その場合に問題となるのはどのようなことか、という点について述べる。

### どのような問題を扱うか

一口に設計と言っても、現実の物体は何もない設計要求書だけの状態から実際の装置を作り出すその過程には、いくつかの段階がある。例えば航空機の設計を例にとって考えてみると、開発機種の世界市場調査に始まり、環境問題、将来の交通需要、法的な規制などの諸条件を考慮して航空機の概念設計がまず行われる。次に、その概念設計に基づいて航空機の最大速度、離着陸性能などの基本性能を決定するシステムレベル設計が検討される。そして、最後に各部分のより詳細な寸法を決定するコンポーネントレベル設計が行われる [15]。このうち、本論文ではコンポーネントレベルでの設計を研究対象にとり、これに境界要素法を適用する。

しかし、コンポーネントレベルでの最適設計といっても、何を最適化するかによって問題の内容も用いる解析法も異なってくる。コンポーネントレベルで扱われる最適設計問題には次の2つがある。

1. 解析対象の境界形状を最適化する形状最適化問題
2. 解析対象領域内での厚さや物理定数（ヤング率など）の分布を最適化する関数分布の最適化問題

これらのうち、境界要素法に適しているのは1の形状最適設計である。なぜならば、解析対象が均一で線形な場からなる場合、境界要素法はその境界を要素分割するだけで解析することができるので、境界形状の変更が容易だからである。これに対して、2の場合は解析対象の領域内で関数分布が不均一となるので、境界要素法を用いるとき領域を内部セルに分割しなければならない。

以上のように、本論文ではコンポーネントレベルでの設計段階において、解析対象の境界形状を最適化する問題を扱うことにする。このとき、解析対象は逐次線形化法により最適化される。しかし、逐次線形化法で最適化を行うには、目的関数の設計変数に関する微分量（設計感度）が必要となるので、次節では設計感度の計算法について考えてみることにする。

### どうやって設計感度を計算するか

前節で述べたように、数学的最適化理論に基づいて形状最適化問題を扱う場合には目的関数の設計感度が必要となる。そして、この計算には次のような方法が用いられる [16, 17]。

1. 数値微分法
2. 随伴変数法 (Adjoint Variable Method, AVM)
3. 直接微分法 (Direct Differential Method, DDM)

このうち、数値微分法 [18-39] では設計感度の式を差分近似して設計感度を求める。この方法はアルゴリズムが簡単であらゆる問題に対して容易に適用できる利点を持つが、感

度計算に時間がかかりすぎる欠点がある。そこで、この方法の計算効率と計算精度を改善することについての提案が、Z.Zhaoら[24, 25]によってなされている。しかし精度の点はともかく、効率の点では次に述べる2つの方法ほどの改善は期待できない。

これに対して、AVM [40-59]では次のようにして設計感度を求める。まず目的関数と制約条件の変分を求め、これに状態方程式の変分表現を用いて随伴系 (adjoint system) を定義し、随伴変数による目的関数、制約条件の変分表現を導出する。そして、随伴系についての境界値問題を通常の境界要素法で解き、その解を上の変現式に代入して設計感度を得る。この方法は、精度のよい設計感度を数値微分法に比べて短い時間で計算できる利点を持つが、目的関数の式の形によって随伴方程式の定式化が困難な場合があったり、問題に応じて定式化を変更する必要があることなどの欠点がある。

最後にDDM [60-69]であるが、この方法では境界積分方程式で表された評価関数を設計変数で直接微分して設計感度を求める。この方法は、利点の面でも欠点の面でもAVDとよく似た特徴を持っている。

これらを比較すると次のようなことが言える。まず数値微分法は、効率と計算精度の点で他の2法に比べて多少劣る場合があるが、扱う問題や最適化の目的によらずどのような問題についても設計感度を計算することができる。これに対して、他の2つの方法は定式化の可能な問題に対しては設計感度を効率よく、そして精度よく計算することが可能であるが、反面、定式化できない問題も存在する。

そこで、これらの特徴と本研究の研究目的を考慮して、設計感度の計算には数値微分法を用いることにする。なぜならば、本論文で提案しているのは形状最適設計を効率よく行うための効果的な数値解析法の利用法(3章、4章、5章)や実際上の問題に対する数値実験から得られた結論(6章)、そして境界要素法に対する新しい適応メッシュ法(7章)であり、このような場合には多少効率が劣っていても、どのような問題の設計感度でも確実に計算できることが重要だからである。

## どうやって計算効率を高めるか

最適設計では通常繰り返し計算を行って、最適形状を決定する。従って、どのようにして計算効率を高めるかが重要となってくる。これに関しては、高性能なハードウェアを徹底的に使うということ以外に、ここでは解析手法の点から考えてみる。

数値解析で計算効率を改善するポイントは、大体次の2つである。1つは連立方程式を解く効率を高めることであり、もう1つは全体系マトリックスを形成する効率を高めることである。このうち特に重要なのはマトリックスの形成効率の改善であり、このために次のような方法が提案されている。まず、M.E.Botkinら[42]は有限要素法にサブストラクチャリング法を用いて、全体系マトリックスを形状変更に関わる節点の自由度だけからなるマトリックスに縮小し、計算効率を改善している。E.Sandgrenら[70]は、境界要素法にサブストラクチャリングを用いて同様の効果を得ている。これに対して、N.Kamiyaと著者ら[26, 71]は境界要素法に領域の部分分割を用いて全体系マトリックスを形状変更に関わる節点について部分マトリックスとそれ以外の部分マトリックスに分けることで計算効率の改善を実現している。しかし、これらの方法にはそれぞれいくつかの欠点がある。まず

有限要素法を用いた方法では、形状変更によってメッシュのゆがみが生じて計算精度が低下するおそれがある。このために、メッシュジェネレータや適応メッシュ法も研究されている [3-5] が、実用性の点でまだいくつか解決すべき問題点がある。一方、境界要素法では有限要素法のようにメッシュのゆがみによる計算精度が低下するおそれは少ないが、解析対象の形状や形状変更境界の設定によっては計算精度や効率が低下する場合があること、不均一な場の問題を扱えないことなどの欠点がある。そこで、N.Kamiya と著者 [27,31-34] は、有限要素法と境界要素法の結合解法を用いることを提案している。

### どうやって精度の低下を防ぐか

境界要素法は線形で均一な場の問題を解析対象の境界を要素分割するだけで解析できるので、形状変更が容易で、メッシュがゆがんで計算精度が低下するおそれは有限要素法に比べてずっと少ない。しかし、必ず計算精度が低下しないわけではなく、特に形状の大変更を伴う場合には精度が低下している可能性が非常に強い。そこで、形状変更による計算精度の低下を防ぐために適応メッシュ法を用いることが考えられる。

適応メッシュ法の基礎となる誤差評価法についての研究は 1978 年の I. Babsüka らの論文 [72] が最初であり、その後の有限要素法におけるこの分野での研究の進展は、文献 [3, 5] などに詳しい。これに対して、境界要素法における適応メッシュ法の研究は C.Katz[73] や E.Alarcon ら [74] によるものが最初と考えられ、その後、引き続き E.Alarcon ら [75-79]、E.Rank ら [80, 81]、J.J.Rencis ら [82-88]、P.Parreira[89, 90]、M.S.Ingber ら [91]、M.Guiggiani[92]、結城ら [93]、川口ら [94, 95, 96] による研究が報告されている。

ところで、適応メッシュ法を開発する場合のキーポイントは 2 つある。その 1 つは、真の解が不明である問題について数値解と真の解との誤差をどの様にして予測するかということであり、もう 1 つは、誤差とメッシュ分割とをどのように関係付けるかである。これらの点に注意して先にあげた論文を検討すると、今までの研究の中心が精度のよい誤差評価法に集中していることがわかる。確かに誤差評価法は適応メッシュ法の中核部分であるから、これに高性能なものをまいようとするのは当然であるが、適応メッシュ法を本当の意味での適応メッシュ法とするためには、第 2 のポイントを解決しなければならない。このために、著者ら [97, 98] は適応メッシュ法のプロセス全体を最適化問題として定式化することで、誤差とメッシュ変更のプロセスを定量的に関連づける方法を提案している。

## 1.3 本論文の内容

前節では、本論文ではどのような最適化問題を扱うか、その問題ではどのような点にポイントがあるか説明した。それらを考慮して、本論文の内容は次のような構成になっている。

2 章は、数値解析と最適設計の理論に関する説明である。この節では、最初に 2 次元弾性解析の理論のうち数値解析理論の説明で必要となる事柄について簡単に述べてから、2 次元弾性問題の有限要素解析と境界要素解析の理論について説明し、その後、2 次元ポテンシャル問題の有限要素解析及び境界要素解析についても述べる。それから、有限要素法

と境界要素法の結合解法の理論と、シンメトリック BEM の理論についても述べる。そして最後に、最適設計の理論について説明する。

3章では、解析対象の局所形状を最適化する局所形状最適化に対して、有限要素法と境界要素法の結合解法を用いることを提案する。前節でも述べたように境界要素法は形状最適設計に適した解析法であるが、解析対象によって計算精度や計算効率が低下する場合がある。この欠点を解決するために有限要素法と組み合わせた結合解法を用いる。この章では有限要素法、境界要素法、境界要素法に領域の部分分割を組み合わせた方法、そして有限要素法と境界要素法の結合解法を比較し、局所形状最適化問題に結合解法を用いる利点について論じる。

これに続く4章と5章では、3章で提案した方法から派生した形状最適化法について述べる。まず4章では、不均一な場を含む局所形状最適化問題に対して、有限要素法と境界要素法の結合解法を用いることについて述べる。不均一な場を含む問題、例えば領域内で要素厚さや物理定数が変化する物体の解析や部分的に非線形な領域を含むような物体の解析がこれに相当するが、このような問題は境界要素法よりも有限要素法で扱うのに適している。しかし、有限要素法では形状変更によってメッシュがゆがむ欠点がある。そこで、このような物体の局所形状最適化問題には有限要素法と境界要素法の結合解法が適している。この章では、不均一な場の問題の例として厚さ不均一な物体をとり、これを結合解法で最適化する事について述べる。

次に、5章では境界要素ズームング法による局所形状最適化問題について述べる。3章と4章では、局所形状最適化問題において形状変更される境界を含む部分領域（形状変更領域）を境界要素で、それ以外の領域を有限要素で要素分割し、領域全体を結合解法で解析することについて述べたが、この章では、形状変更領域だけを他の領域から分離してズームアップし、このズーム領域だけを境界要素法で解析する近似解法について述べる。この方法では、まず領域全体が有限要素法で解析された後、形状変更領域だけが改めて境界要素法で要素分割されて解析される。それで、境界要素ズームング法と名づけられている。

6章ではコイルばね素線断面形状の最適設計問題を取り上げる。素線断面に生じる応力が外力のねじりモーメントだけによると仮定すると、応力関数を用いて支配方程式は準調和方程式で与えられる。従来、この方程式の境界要素解析には調和方程式の基本解を用いていたので、解析に内部セルが必要であった。これに対して、この章では内部セルを必要としない新しい定式化を採用する。この方法によれば、境界を要素分割するだけで解析することができるので、素線断面の最適設計問題に非常に効果的である。この解析プログラムを用いて実際に素線断面形状の最適化を行い、従来から有効性が検討されている異形素線断面ばねの有効性について検討する。

7章では境界要素法の適応メッシュ法について新しい手法を提案する。通常よく用いられる事後誤差評価を用いた適応メッシュ法では、解析を行ってから誤差評価を行い、誤差評価の結果に基づいて精度を改善するようにメッシュを変更する。この過程で重要なのは、前節で述べたようにどのようにして精度良く誤差評価を行うかということと、誤差評価の結果をメッシュ変更にどのように反映させるかということである。従来提案されている方法は主として前者に重点を置いていたが、本論文の手法は後者に重点を置き、適応メッシュ法のトータルバランスを改良しているのが特徴である。その結果、従来の方法に比べてか

なり効率が改善された方法となっている。

最後に 8 章では各章ごとのまとめを示し、本論文全体を通じての結論とする。





# Chapter 2

## 数値解析と最適化の理論

この章では、まず2次元弾性体の境界値問題の理論について必要な基礎事項、およびこの問題の有限要素および境界要素解析について述べてから、同様にして2次元ポテンシャル問題の解析理論についても簡単に述べる。つづいて、解析に用いる有限要素法と境界要素法の結合解法の理論と、軸対称な物体で対称軸を要素分割せずに解析する境界要素法（以下、これをシンメトリックBEMと呼ぶことにする）の理論について述べる。最後に、本論文で用いた最適化の理論について述べる。

### 2.1 2次元弾性問題

#### 2.1.1 境界値問題

弾性体の境界値問題とは、平衡方程式、変位ひずみ関係式、及び構成式を境界  $c_u$  上の幾何学的境界条件と境界  $c_t$  上の力学的境界条件のもとで解くことであり、これらの関係式は良く知られたものがあるが、後で用いる記号の説明もかねてここでまとめて表しておく [99]。

#### 基本物理量

2次元弾性体に関する変位ベクトル  $u$ 、ひずみテンソルのうちの2次元成分  $\epsilon$ 、応力テンソルのうちの2次元成分  $\sigma$ 、表面力ベクトル  $t$  を次のように定義する。

$$u = \{u_1 \quad u_2\}^T \quad (2.1)$$

$$\epsilon = \{\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{12}\}^T \quad (2.2)$$

$$\sigma = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}\}^T \quad (2.3)$$

$$t = \{t_1 \quad t_2\}^T \quad (2.4)$$

ここで添字 1,2 はそれぞれ座標軸の 1 軸と 2 軸を表す。

### 支配方程式と境界条件

弾性問題の支配方程式は、次の平衡方程式で与えられる。

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.5)$$

ここで、 $f_i$ は物体力の $i$ 方向成分であり、添字の $(,j)$ は $j$ 軸方向の偏微分を示す。また、境界条件は次のように与えられる。

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i & (c_u \text{上}) \\ t_i = \bar{t}_i & (c_t \text{上}) \end{cases} \quad (2.6)$$

ここで、記号 $(\bar{\quad})$ は境界上で与えられた値を示す。

### 構成式

弾性体のひずみと応力の関係を表す構成式は Hooke の法則と呼ばれ、次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.7)$$

これをマトリックス表示すると

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.8)$$

ここで、 $\mathbf{D}$ は剛性マトリックスと呼ばれ、次式で与えられる。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{平面応力状態})$$

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{平面ひずみ状態}) \quad (2.9)$$

ここで、 $E$ と $\nu$ はそれぞれ Young 率と Poisson 比を示す。

### 変位ひずみ関係式

変位ひずみ関係式は、微小変形理論に基づいて次式で与えられる。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.10)$$

これをマトリックス表示すると、

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.11)$$

ここで、マトリックス $\mathbf{B}$ は微分作用素で表されたマトリックスであり、次式で与えられる。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

## Cauchy の関係

応力と表面力の関係は Cauchy の関係として与えられる。

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.13)$$

ここで、 $n_j$  は表面での単位法線ベクトルの成分を示す。

## 相反定理

弾性体に物体力  $f_i$  と表面力  $t_i$  が作用してつりあい状態にあるとき、この弾性体に生じる応力を  $\sigma_{ij}$ 、変位を  $u_i$ 、ひずみを  $\epsilon_{ij}$  とする。次に、別の組の物体力  $f_i^*$  と表面力  $t_i^*$  によって生じる応力を  $\sigma_{ij}^*$ 、変位を  $u_i^*$ 、ひずみを  $\epsilon_{ij}^*$  とする。このとき、第1の組の物体力と表面力が第2の組の変位になした仕事は、第2の組の物体力と表面力が第1の組の変位になした仕事に等しい。つまり、

$$\int_c t_i u_i^* ds + \int_S f_i u_i^* dS = \int_c t_i^* u_i ds + \int_S f_i^* u_i dS \quad (2.14)$$

これを Betti の相反定理という。これを変形して

$$\int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dS = \int_S \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dS \quad (2.15)$$

または、マトリックス表示して

$$\int_S \epsilon^{*T} \sigma dS = \int_S \sigma^{*T} \epsilon dS \quad (2.16)$$

## 2.1.2 積分方程式

この節では、平衡方程式の重み付き残差表示から有限要素解析と境界要素解析の基礎となる積分方程式を導出する。なお、本論文の以下の解析では物体力を考慮していないので、これからの説明では平衡方程式の物体力項を無視することにする。

まず、平衡方程式 (式 (2.5)) と重み関数  $u_i^*$  の内積をとり、これを 0 とおくと次の重み付き残差表示式を得る。

$$\int_S \sigma_{ij,j} u_i^* dS = 0 \quad (2.17)$$

この左辺を Gauss-Green の定理

$$\int_S u_{,j} dS = \int_c u n_j ds \quad (2.18)$$

を用いて部分積分を行うと次式が得られる。

$$\int_c \sigma_{ij} n_j u_i^* ds - \int_S \sigma_{ij} u_{i,j}^* dS = 0 \quad (2.19)$$

ここで、左辺第2項は次のようになる。

$$\int_S \sigma_{ij} u_{i,j}^* dS = \int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dS \quad (2.20)$$

ただし、

$$\epsilon_{ij}^* \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \quad (2.21)$$

式(2.20)と式(2.13)を式(2.19)に代入すると

$$\int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dS = \int_c t_i u_i^* ds \quad (2.22)$$

この式で重み関数に仮想変位を考えて離散定式化を行うと有限要素解析の積分方程式が得られる。

次に式(2.22)の領域積分項をもう一度部分積分することを考える。式(2.22)の左辺にBettiの相反定理(式(2.16))を代入し、式(2.20)の操作を反対に施すと

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dS &= \int_S \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dS \\ &= \int_S \sigma_{ij}^* u_{i,j} dS \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。これに、Gauss-Greenの定理(式(2.18))を用いて部分積分を行い、Cauchyの関係(式(2.13))を用いれば

$$\int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dS = \int_c t_i^* u_i ds - \int_S \sigma_{i,j,j}^* u_i dS \quad (2.24)$$

となる。この式を式(2.22)に代入すれば、最終的に次式が得られる。

$$\int_c [t_i u_i^* - t_i^* u_i] ds + \int_S u_i \sigma_{i,j,j}^* dS = 0 \quad (2.25)$$

この式に対して、重み関数に基本解をとると境界積分方程式が得られる。

### 2.1.3 有限要素解析

この節では式(2.22)を変位法によって離散定式化し、これに境界条件を与えて有限要素解析を行うことについて説明する。

まず式(2.22)をマトリックス表示すると次式となる。

$$\int_S \boldsymbol{\epsilon}^{*T} \boldsymbol{\sigma} dS = \int_c \mathbf{u}^{*T} \mathbf{t} ds \quad (2.26)$$

この式について、重み関数として仮想変位を考えると変位指定境界  $c_u$  では仮想変位が0となるから次式が得られる。

$$\int_S \boldsymbol{\epsilon}^{*T} \boldsymbol{\sigma} dS = \int_{c_t} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{t} ds \quad (2.27)$$

次に、解析対象の領域を  $M$  個の有限要素に、表面力指定境界を  $N$  個の境界辺に分割すると次式となる。

$$\sum_{m=1}^M \int_{S_m} \epsilon_m^{*T} \sigma_m dS = \sum_{n=1}^N \int_{c_{1n}} u_n^{*T} t_n ds \quad (2.28)$$

ここで、各要素での変位値を節点での値と内挿関数によって表す。つまり、

$$\begin{aligned} u_m &= \Phi^T u_{node} \\ u_m^* &= \Phi^T u_{node}^* \end{aligned} \quad (2.29)$$

ここで、 $u_{node}$  と  $u_{node}^*$  はそれぞれこの要素に属する節点の変位値と仮想変位値からなるベクトルであり、 $\Phi$  は内挿関数マトリックスである。同様にして境界での表面力値を表すと、

$$t_n = \Psi^T t_{node} \quad (2.30)$$

式 (2.30) を変位ひずみ関係式 (2.11) に代入すれば、

$$\epsilon_m = B\Phi^T u_{node} \quad (2.31)$$

さらに、これを構成式 (2.8) に代入すれば

$$\sigma_m = DB\Phi^T u_{node} \quad (2.32)$$

となる。これらの式を式 (2.28) に代入すれば、

$$\sum_{m=1}^M \int_{S_m} (B\Phi^T u_{node}^*)^T DB\Phi^T u_{node} dS = \sum_{n=1}^N \int_{c_{1n}} (\Phi^T u_{node}^*)^T \Psi^T t_{node} ds \quad (2.33)$$

となり、まとめると次式となる。

$$\sum_{m=1}^M u_{node}^{*T} \int_{S_m} \Phi B^T DB\Phi^T dS u_{node} = \sum_{n=1}^N u_{node}^{*T} \int_{c_{1n}} \Phi \Psi^T ds t_{node} \quad (2.34)$$

ここで、

$$K_m = \int_{S_m} \Phi B^T DB\Phi^T dS \quad (2.35)$$

$$f_n = \int_{c_{1n}} \Phi \Psi^T ds t_{node} \quad (2.36)$$

とおくと、

$$\sum_{m=1}^M u_{node}^{*T} K_m u_{node} = \sum_{n=1}^N u_{node}^{*T} f_n \quad (2.37)$$

この式を全体系についてまとめると

$$u^{*T} K u = u^{*T} f \quad (2.38)$$

ここで、 $K$ 、 $u$ 、 $u^*$ 、 $f$ はそれぞれ全体系剛性マトリックス、節点変位ベクトル、節点仮想変位ベクトル、等価節点力ベクトルである。

この式が任意の仮想変位について恒等的に成り立つには、

$$Ku = f \quad (2.39)$$

とならなければならない。

この式に対して表面力指定境界での境界条件を与えてとき、節点での未知変位を求める。また、節点でのひずみと応力は式 (2.31) と式 (2.32) に求めた変位値を与えて決定する。

## 2.1.4 境界要素解析

### 境界積分方程式

次に2次元弾性体の境界要素解析について述べる。境界要素解析では重み関数として次式

$$\sigma_{ij,j}^*(P, Q) + \delta(P, Q)e_i = 0 \quad (2.40)$$

を満足する基本解をとる。ここで、 $\delta(P, Q)$ はDiracのデルタ関数であり、点 $P$ と $Q$ はソース点と積分点を表す。弾性解析の場合の基本解はKelvin解と呼ばれ平面ひずみ状態では次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_{kl}^*(P, Q) &= \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{kl} + \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right] \\ t_{kl}^*(P, Q) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-\nu)\delta_{kl} + 2\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right\} \right. \\ &\quad \left. - (1-2\nu) \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l - \frac{\partial r}{\partial x_l} n_k \right) \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここで $r$ は $P$ と $Q$ の距離を示す。

また、 $u_i^*$ と $t_i^*$ は、式 (2.41) と基底ベクトル $e_j$ を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_{ij}^*(P, Q)e_j \\ t_i^* &= t_{ij}^*(P, Q)e_j \end{aligned} \quad (2.42)$$

これらの式を式 (2.25) に代入すると次のようになる。

$$\int_c \left[ t_i(Q)u_{ij}^*(P, Q)e_j - u_i(Q)t_{ij}^*(P, Q)e_j \right] ds = \int_S u_i(Q)\delta(P, Q)e_i dS \quad (2.43)$$

ここで、点 $P$ が領域内にあれば、右辺はデルタ関数の性質によって次のように変形される。

$$\int_S u_i(Q)\delta(P, Q)e_i dS = u_i(P)e_i \quad (2.44)$$

結局、式(2.43)は次のようになる。

$$u_i(P)e_i = \int_c [t_i(Q)u_{i,j}^*(P,Q) - t_{i,j}^*(P,Q)u_i(Q)] ds e_j \quad (2.45)$$

これが、任意の基底ベクトルに対し成立するには、

$$u_i(P) = \int_c [t_i(Q)u_{i,j}^*(P,Q) - t_{i,j}^*(P,Q)u_i(Q)] ds \quad (2.46)$$

または、マトリックス表示を用いて、

$$u(P) = \int_c [U^*(P,Q)t(Q) - T^*(P,Q)u(Q)] ds \quad (2.47)$$

ここで、 $U^*(P,Q)$ と $T^*(P,Q)$ はそれぞれ変位の基本解、表面力の基本解を成分とする2次の正方マトリックスである。この式で点 $P$ を境界に近づける操作を行い、特異積分をCauchyの主値積分として処理すると次式が得られる。

$$C(P)u(P) = \int_c [U^*(P,Q)t(Q) - T^*(P,Q)u(Q)] ds \quad (2.48)$$

ここで係数マトリックス $C(P)$ は次のように与えられる。

$$C(P) = CI$$

$$C = \begin{cases} 1 & (P \text{が領域内にある場合}) \\ C' & (P \text{が境界上にある場合}) \\ 0 & (P \text{が領域外にある場合}) \end{cases} \quad (2.49)$$

ここで、 $I$ は2次の単位マトリックスであり、 $C'$ は点 $P$ のある境界の幾何学的形状によって決定される係数である。

### 離散定式化

次に式(2.48)を離散定式化することを考える。まず、解析対象の境界を $M$ 個の境界要素に分割し、節点 $P_i$ について式(2.48)を考えると次のようになる。

$$C(P_i)u(P_i) = \sum_{m=1}^M \int_{c_m} [U^*(P_i,Q)t(Q) - T^*(P_i,Q)u(Q)] ds \quad (2.50)$$

各要素上での関数値をその要素に属する節点の関数値で表すと

$$u(Q) = \Psi^T u_{node} \quad (2.51)$$

$$t(Q) = \Psi^T t_{node} \quad (2.52)$$

ここで、 $u_{node}$ 、 $t_{node}$ は $m$ 番目の要素に属する節点の変位値と表面力値で構成される節点変位ベクトル、節点表面力ベクトルであり、 $\Psi$ は内挿関数マトリックスである。これを式(2.50)に代入すると

$$C(P_i)u(P_i) = \sum_{m=1}^M \int_{c_m} [U^*(P_i,Q)^T \Psi^T t_{node} - T^*(P_i,Q)^T \Psi^T u_{node}] ds \quad (2.53)$$



となる。

この式の右辺は、要素について総和をとる形になっている。そこで、これを  $N$  個の節点について総和をとる形に書き直すと次式が得られる。

$$C(P_i)u(P_i) = \sum_{n=1}^N (g_{in}t_n - h'_{in}u_n) \quad (2.54)$$

ここで、 $u_n$  と  $t_n$  は  $n$  番目の節点の変位ベクトルと表面力ベクトルであり、 $h_{in}$  と  $g_{in}$  は式 (2.53) の右辺を整理して得られた係数ベクトルである。

次に、左辺を次のように変形する。

$$C(P_i)u(P_i) = \sum_{n=1}^N \delta_{in} C(P_n)u(P_n) \quad (2.55)$$

これを式 (2.54) に代入してまとめると

$$\sum_{n=1}^N (\delta_{in} C(P_n) + h'_{in}) u_n = \sum_{n=1}^N g_{in} t_n \quad (2.56)$$

ここで、

$$\delta_{in} C(P_n) + h'_{in} \equiv h_{in} \quad (2.57)$$

とおくと

$$\sum_{n=1}^N h_{in} u_n = \sum_{n=1}^N g_{in} t_n \quad (2.58)$$

この式は  $i$  番目の節点について成り立つ式であるから、これを全ての節点について考えマトリックスを使ってまとめると、

$$Hu = Gt \quad (2.59)$$

ここで、 $u$ 、 $t$  は全体系節点変位ベクトル、全体系節点表面力ベクトルであり、 $H$ 、 $G$  はそれらの係数マトリックスである。

この式に境界条件 (式 (2.6)) を与えると

$$\begin{bmatrix} H_t & H_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{u} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_t & G_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t} \\ t \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

ここで、添字  $u$ 、 $t$  は変位指定、表面力指定を示す。上の式で未知数を一方の辺に集めるように変形すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} H_t & -G_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_t & -H_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t} \\ \bar{u} \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

ここで、左辺の未知数ベクトルを  $x$ 、その係数マトリックス  $A$  を、右辺のマトリックスとベクトルの積を  $b$  と表せば、

$$Ax = b \quad (2.62)$$

これを解いて未知数を得る。

### 境界での応力

弾性体の応力解析では最大応力が境界で生じることが多く、これを小さくするのは最適設計の主要な目的の1つである。しかし、前節の解析で得られる解は境界での変位と表面力であって、境界での応力ではない。境界での応力成分を得るには次の方法が用いられる[100]。

境界上の点で、変位  $u_i$  の接線方向微分を考えると次のようになる。

$$\begin{aligned} u_{i,s} &= u_{i,1}x_{1,s} + u_{i,2}x_{2,s} \\ &= u_{i,1}(-n_2) + u_{i,2}n_1 \end{aligned} \quad (2.63)$$

ここで、 $(,s)$  は  $d/ds$  を示す。さらに、2次元弾性体における Hooke の法則と Cauchy の関係式は次のように書ける。

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.64)$$

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (2.65)$$

これらの式はそれぞれ2個、3個、2個で計7個である。そして、この中で未知量は3個の応力成分  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  と4個の変位の微係数  $u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,1}, u_{2,2}$  の計7個であるから上記の方程式と同数となる。そこで、これらの方程式を連立して解けば未知数を求めることができる。

これらの関係式を連立してマトリックスで表すと、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & -c_2 \\ n_1 & 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & -n_2 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -G & -G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_2 & 0 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ u_{1,s} \\ 0 \\ u_{2,s} \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

ここで、

$$c_1 = \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \quad c_2 = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \quad (2.67)$$

また、変位の接線方向微係数は境界で変位から差分近似して求められる。

## 2.2 ポテンシャル解析

### 2.2.1 境界値問題

ポテンシャル解析の支配方程式は次の Laplace 方程式で与えられる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.68)$$

ここで、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$  であり、境界条件は次のように与えられる。

$$\begin{cases} u = \bar{u} & (c_u \text{上}) \\ q \equiv u_{,n} = \bar{q} & (c_q \text{上}) \end{cases} \quad (2.69)$$

ここで  $c_u$ 、 $c_q$  はポテンシャル指定境界とフラックス指定境界を示す。また、記号  $(,n)$  は境界での法線方向微分を示す。

### 2.2.2 積分方程式

この節では、Laplace 方程式の重み付き残差表示から積分方程式を導出する。まず、Laplace 方程式 (式 2.5) と重み関数  $u^*$  の内積を取り、これを 0 とおくと次の重み付き残差表示式を得る。

$$\int_S \nabla^2 u u^* dS = 0 \quad (2.70)$$

この左辺を Gauss-Green の定理 (式 (2.18)) を用いて部分積分を行うと次式が得られる。

$$\int_c q u^* ds - \int_S \nabla u \nabla u^* dS = 0 \quad (2.71)$$

この式で重み関数に仮想ポテンシャルを考慮して離散定式化を行うと有限要素解析の積分方程式が得られる。

式 (2.71) の領域積分項に対してもう一度 Gauss-Green の定理 (式 (2.18)) を用いて部分積分を行うと次式を得る。

$$\int_c (u q^* - u^* q) ds = \int_S u \nabla^2 u^* dS \quad (2.72)$$

この式に対して、重み関数に基本解をとると境界積分方程式が得られる。

### 2.2.3 有限要素解析

この節ではさきに導出した式 (2.71) を離散定式化し、境界条件を与えて有限要素解析を行う方法について説明する。まず式 (2.71) について、重み関数として仮想ポテンシャルを考えるとポテンシャル指定境界  $c_u$  では仮想ポテンシャルが 0 となるから次式が得られる。

$$\int_{c_q} q u^* ds - \int_S \nabla u \nabla u^* dS = 0 \quad (2.73)$$

解析対象の領域を  $M$  個の有限要素に、フラックス指定境界を  $N$  個の境界辺に分割すると次式となる。

$$\sum_{m=1}^M \int_{S_m} \nabla u_m \nabla u_m^* dS = \sum_{n=1}^N \int_{c_{qn}} q_n u_n^* ds \quad (2.74)$$

ここで、下添え字  $m$  と  $n$  は要素  $m$  と境界辺  $n$  を示す。次に、各要素でのポテンシャル値を節点での関数値と内挿関数によって表す。つまり、

$$u_m = \Phi^T u_{node} \quad (2.75)$$

$$u_m^* = \Phi^T u_{node}^* \quad (2.76)$$

ここで、 $u_{node}$ と $u^*_{node}$ はそれぞれこの要素に属する節点のポテンシャル値と仮想ポテンシャル値を成分とするベクトルであり、 $\Phi$ は内挿関数マトリックスである。同様にして境界でのフラックス値を表すと、

$$q_n = \Psi^T q_{node} \quad (2.77)$$

これらの式を式(2.74)に代入すれば、

$$\sum_{m=1}^M \int_{S_m} (\nabla \Phi^T u_{node})^T (\nabla \Phi^T u^*_{node}) dS = \sum_{n=1}^N \int_{c_{qn}} (\Psi^T q_{node})^T \Phi^T u^*_{node} ds \quad (2.78)$$

となる。これを整理して、次の記号

$$K_m = \int_{S_m} \nabla \Phi \nabla \Phi^T dS \quad (2.79)$$

$$f_n = \int_{c_{qn}} \Phi \Psi^T q_{node} ds \quad (2.80)$$

を用いると、先の式は次のようになる。

$$\sum_{m=1}^M u^*_{node}{}^T K_m u_{node} = \sum_{n=1}^N u^*_{node}{}^T f_n \quad (2.81)$$

これを整理して全体系マトリックスにまとめると、

$$u^*{}^T K u = u^*{}^T f \quad (2.82)$$

この式が任意の仮想ポテンシャルについて恒等的に成り立つには、

$$K u = f \quad (2.83)$$

とならなければならない。この式に対してフラックス指定境界での境界条件を与えてとき、節点での未知ポテンシャルを求める。

## 2.2.4 境界要素解析

### 境界積分方程式

次にポテンシャル問題の境界要素解析について述べる。この場合、式(2.72)の重み関数として次式

$$\nabla^2 u^*(P, Q) + \delta(P, Q) = 0 \quad (2.84)$$

を満足する基本解をとる。ここで、 $\delta$ はDiracのデルタ関数である。ポテンシャル解析の基本解は次式で与えられる。

$$u^*(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (2.85)$$

$$q^*(P, Q) \equiv \frac{\partial u^*}{\partial n}(P, Q) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.86)$$

まず、式 (2.84) を式 (2.72) の領域積分項に代入しデルタ関数の性質を用いると、点  $P$  が領域内にある場合次のようになる。

$$\int_S u(Q) \nabla^2 u^*(P, Q) dS = - \int_S u(Q) \delta(P, Q) dS = -u(P) \quad (2.87)$$

これを式 (2.72) に代入すると

$$u(P) = \int_c (u^*(P, Q)q(Q) - u(Q)q^*(P, Q)) ds \quad (2.88)$$

この式で点  $P$  を境界に近づける操作を行い、特異積分を Cauchy の主値積分の形で処理すると次式が得られる。

$$C(P)u(P) = \int_c [u^*(P, Q)q(Q) - q^*(P, Q)u(Q)] ds \quad (2.89)$$

ここで係数マトリックス  $C(P)$  は次のように与えられる。

$$C(P) = \begin{cases} 1 & (P \text{ が領域内にある場合}) \\ C' & (P \text{ が境界上にある場合}) \\ 0 & (P \text{ が領域外にある場合}) \end{cases} \quad (2.90)$$

ここで、 $C'$  は点  $P$  がある境界の幾何学的形状によって決定される定数である。

### 離散定式化

次に式 (2.89) を離散定式化することを考える。まず、節点  $P_i$  について式 (2.89) を考え、解析対象の境界を  $M$  個の境界要素に分割すると次式となる。

$$C(P_i)u(P_i) = \sum_{m=1}^M \int_{c_m} [q(Q)u^*(P_i, Q) - q^*(P_i, Q)u(Q)] ds \quad (2.91)$$

各要素上での関数値をその要素に属する節点の関数値で表すと

$$u(Q) = \psi^T u_{node} \quad (2.92)$$

$$q(Q) = \psi^T q_{node} \quad (2.93)$$

ここで、 $u_{node}$ 、 $q_{node}$  は  $m$  番目の要素に属する節点のポテンシャル値とフラックス値で構成されるベクトルであり、 $\psi^T$  は内挿関数ベクトルである。これを式 (2.91) に代入すると

$$C(P_i)u(P_i) = \sum_{m=1}^M \int_{c_m} [u^*(P_i, Q)\psi^T q_{node} - q^*(P_i, Q)\psi^T u_{node}] ds \quad (2.94)$$

となる。

この式の右辺は、要素について総和をとる形になっている。そこで、これを節点について総和をとる形に書き直すと次式が得られる。

$$C(P_i)u(P_i) = \sum_{n=1}^N (g_{in}q_n - h'_{in}u_n) \quad (2.95)$$

ここで、 $u_n$ と $q_n$ は $n$ 番目の節点のポテンシャル値とフラックス値であり、 $h'_{in}$ と $g_{in}$ は式(2.94)の右辺を整理して得られた係数である。次に、この式の左辺を次のように変形する。

$$C(P_i)u(P_i) = \sum_{n=1}^N \delta_{in}C(P_n)u(P_n) \quad (2.96)$$

これを式(2.95)に代入してまとめると

$$\sum_{n=1}^N (\delta_{in}C(P_n) + h'_{in})u_n = \sum_{n=1}^N g_{in}q_n \quad (2.97)$$

ここで、

$$\delta_{in}C(P_n) + h'_{in} \equiv h_{in} \quad (2.98)$$

とおくと

$$\sum_{n=1}^N h_{in}u_n = \sum_{n=1}^N g_{in}q_n \quad (2.99)$$

この式は $i$ 番目の節点について成り立つ式であるから、これを全ての節点について考えマトリックスを使ってまとめると、

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (2.100)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{q}$ 、は全体系節点ポテンシャルベクトル、全体系節点フラックスベクトルであり、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{G}$ はそれらの係数マトリックスである。

この式に境界条件(式(2.6))を与えると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_q & \mathbf{H}_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_q & \mathbf{G}_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

ここで、添え字 $u$ 、 $q$ はポテンシャル指定、フラックス指定を示す。上の式で未知数を一方の辺に集めるように変形すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_q & -\mathbf{G}_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_q & -\mathbf{H}_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (2.102)$$

ここで、左辺の未知数ベクトルを $\mathbf{x}$ 、その係数マトリックス $\mathbf{A}$ を、右辺のマトリックスとベクトルの積を $\mathbf{b}$ と表せば、

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.103)$$

これを解いて未知数を得る。

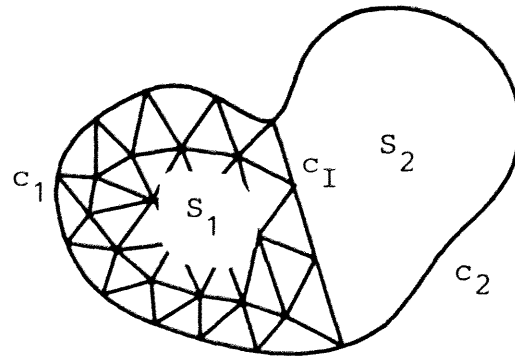


Figure 2.1: Region partition

## 2.3 結合解法

### 2.3.1 提案されている方法

有限要素法と境界要素法の結合解法についての研究は比較的以前から行われており、初期の頃の研究は O.C.Zienkiewicz ら [101, 102]、P.K.Banerjee ら [103]、C.A.Brebbia ら [104] の文献に詳しく述べられている。これらの文献に示された結合解法は主として次の 2 つに分類される。1 つは境界要素領域を単一の大きな有限要素と考慮して結合する方法であり、もう 1 つは有限要素領域についての剛性マトリックスを境界要素法のマトリックス方程式の形に変換し、これを境界要素法の方程式と連立して解析する方法である。前者は等価有限要素による結合解法、後者は等価境界要素による結合解法と呼ばれる。しかし、これらの方法では全体系の係数マトリックスが非対称となるので、計算精度と効率が低下する。これを改善するために係数マトリックスを対称化する方法が P. Georgiou [105]、M. Margulies [106, 107]、E. Schnack [108] らによって提案されている。結合解法としては、この他にも P. Belyschko ら [109] などによる研究が見られるが、応用研究の中心は先に述べた 2 方法であり、特に等価有限要素による結合解法を用いることが多い。そこで、この節ではまず等価有限要素を用いた結合解法と等価境界要素を用いた結合解法について述べてからそれらの特徴について考える。なお、2次元ポテンシャル解析と2次元弾性解析では同じ方法による定式化を用いるので、以下の説明では2次元弾性解析について結合解法の理論を説明する。

### 2.3.2 等価有限要素を用いた結合解法

解析対象として Fig.2.1 に示された 2次元弾性体を考え、全体領域を  $S$ 、有限要素領域を  $S_1$ 、境界要素領域を  $S_2$  とし、有限要素領域、境界要素領域の境界、内部境界をそれぞれ  $c_1, c_2, c_I$  とする。

まず、 $S_1$ に対して次式が成り立つ。

$$Ku = f \quad (2.104)$$

ここで、 $K$ 、 $u$ 、 $f$ はそれぞれ  $S_1$ についての剛性マトリックス、変位ベクトル、等価節点力ベクトルである。

また、 $S_2$ に対して次式が成り立つ。

$$Hu = Gt \quad (2.105)$$

ここで、 $u$ 、 $t$ は  $S_2$ に属する節点の変位ベクトル、表面力ベクトルであり、 $H$ 、 $G$ はそれらの係数マトリックスである。

等価有限要素を用いた結合解法では、まず境界要素法の方程式を等価有限要素の概念を用いて有限要素法の剛性方程式の形に変形する。そこで、まず両辺に左から $G$ マトリックスの逆マトリックスを掛けると次式となる。

$$G^{-1}Hu = t \quad (2.106)$$

次に、この両辺に有限要素法の等価節点力ベクトルと境界要素法の表面力ベクトルのディメンジョンを合わせるための変換マトリックス $M$ を掛けると次式となる。

$$MG^{-1}Hu = Mt \quad (2.107)$$

ここで、

$$K' = MG^{-1}H \quad , \quad f' = Mt \quad (2.108)$$

とおけば、

$$K'u = f' \quad (2.109)$$

となる。

式(2.109)は等価有限要素の概念を用いて表された境界要素法のマトリックス方程式であり、これと式(2.104)を重ね合わせれば全体系についての剛性マトリックスを構成することができる。そして、この式に表面力指定境界での境界条件を与えて解けば未知変位の解を得ることができる。有限要素領域でのひずみと応力は、得られた変位値をそれぞれ式(2.31)と式(2.32)に代入して決定される。一方、境界要素領域の節点表面力は得られた変位値を式(2.106)に代入して決定する。そして、得られた変位と表面力の値から2.1.4節の方法によって境界要素節点での応力成分を求めることができる。

最後に、変換マトリックス $M$ について述べておく。先にも書いたように、変換マトリックスは境界要素法の表面力ベクトルと有限要素法の等価節点力ベクトルのディメンジョンを合わせるための係数マトリックスであるが、これを与える式は有限要素法の等価節点力ベクトルを与える式(2.36)を考えれば分かる。この式を改めて書き表すと次のようになる。

$$f_n = \int_{c_{un}} \Phi \Psi^T dst_{node} \quad (2.110)$$



ここで、 $\Phi, \Psi^T$  は内挿関数を  $t_{node}$  は表面力指定境界にとられた  $n$  番目の境界要素に属する節点の表面力値を成分とするベクトルである。この式で、

$$M \equiv \int_{c_{un}} \Phi \Psi^T ds \quad (2.111)$$

とおけば、

$$f_n = M t_{node} \quad (2.112)$$

となる。このマトリックス  $M$  が変換マトリックスである。

### 2.3.3 等価境界要素を用いた結合解法

解析対象として先ほどと同じ 2 次元弾性体 (Fig.2.1) を考える。

まず、 $S_1$  に対して次式が成り立つ。

$$K u = f \quad (2.113)$$

この式の右辺に式 (2.112) を代入すると、

$$K u = M t \quad (2.114)$$

マトリックスとベクトルの成分を節点が内部境界に属するものとそうでないものとで分けると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_1^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_1^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_1^I \end{Bmatrix} \quad (2.115)$$

ここで上添字  $I$  は内部境界に属する節点に関する量であることを示す。また、下添字  $1$  は  $S_1$  を示し、後の説明のためにつけておく。

次に、 $S_2$  に対して次式が成り立つ。

$$H u = G t \quad (2.116)$$

マトリックスとベクトルの成分を節点が内部境界に属するものとそうでないもので分けて書き表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} H_2^I & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^I \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2^I & G_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_2^I \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (2.117)$$

ここで、下添字  $2$  は  $S_2$  を示す。

ところで、内部境界上では変位と表面力に関して次に示す適合条件と平衡条件が成り立つ。

$$\begin{aligned} u_1^I &= u_2^I \equiv u^I \\ t_1^I &= -t_2^I \equiv t^I \end{aligned} \quad (2.118)$$

これらの関係式を用いて、式 (2.115) と式 (2.117) を結合すると次式を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1^I & -\mathbf{M}_1^I & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2^I & \mathbf{G}_2^I & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u^I \\ t^I \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (2.119)$$

これに境界条件を与えて解けば、未知の変位と表面力を決定することができる。

### 2.3.4 両者の比較

これまで等価有限要素と等価境界要素を用いた結合解法の理論について述べてきたが、これらの比較から次のようなことが言える。

まず、等価有限要素を用いた方法の特徴として、

- 有限要素領域についてのマトリックス方程式を変形する必要がない。
- 等価境界要素を用いた場合のように内部境界上の条件を考慮する必要がないので、全体系マトリックスの構成が容易となる。
- 定式化の過程で逆マトリックスを用いるので、計算効率が低下する。

これに対して、等価境界要素を用いた方法の特徴として次のことがあげられる。

- 逆マトリックスを用いないので、等価境界要素を用いた場合のようにこれによって計算効率が低下しない。
- 全体系マトリックスの構成が複雑である。

このように、等価有限要素を用いた方法は逆マトリックスの利用によって多少計算効率が低下する可能性はあるが、有限要素領域のマトリックス方程式を変形しなくてもよいので市販の有限要素プログラムをそのまま利用でき、等価境界要素を用いた方法に比べて使い易い方法であることがわかる。実際の応用研究でも等価有限要素による方法も用いることが多く、市販されている有限要素解析プログラムにも境界要素法のマトリックスを等価有限要素の概念を用いてスーパーエレメントに変換し、解析に取り込む機能を持っているものもある。そして、この機能を用いて実際に解析を行った例も見られる [110]。そこで、本論文でも等価有限要素を用いた結合解法を採用している。

## 2.4 シンメトリック BEM

1 軸または 2 軸対称な物体を解析する場合、全体を解析するかわりに対称性を利用して対称軸上に仮想境界をとり、全体の 1/2 領域や 1/4 領域を解析する方法がたびたび用いられる。しかし、最適設計問題で形状変更境界が対称性を有する場合は仮想境界が形状変更

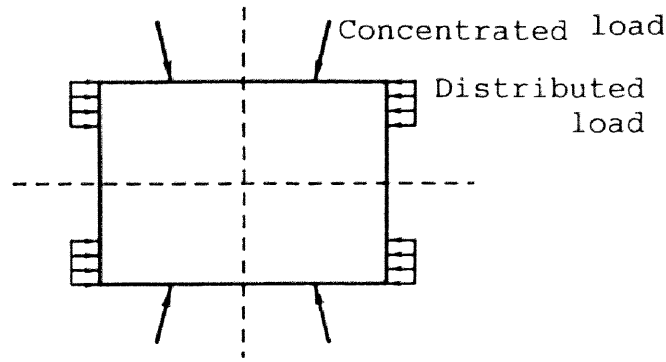


Figure 2.2: Symmetric body

境界を横切り、形状変更によって仮想境界上のメッシュ分割が変化する。この結果計算精度が低下するので、メッシュの再分割が必要となる。本論文の境界要素解析では、この問題点を回避するために対称軸を要素分割する必要のない解析法を採用している。この方法によれば解かれる全体系マトリックスが小さくなるので、計算効率の点からも有効である。

対称軸上に境界要素をとらずに解析する方法には、あらかじめ対称軸上での境界条件を満足した基本解を用いる方法 [111] と、解析対象と境界条件の対称性を用いて全体系マトリックスを縮小する方法 [112, 113, 114, 115] があるが、本論文では後者の方法を用いる。これは、前者では軸対称な解析対象とそうでない対象では係数マトリックスを計算するために別の基本解を用いることになり、一般性を持たせるにはプログラムの係数マトリックスを計算する過程が複雑になるためである。

本論文では、この方法を2次元弾性体の境界要素解析の場合にのみ用いているが、説明を容易にするために先ず2次元ポテンシャル解析の場合について述べ、それから2次元弾性解析の場合について述べる。

### 2.4.1 2次元ポテンシャル解析の場合

解析対象として Fig.2.2に示されたように、1軸及び2軸について対称な物体に同様に対称な境界条件が働いている状態を考える。この解析対象全体について境界要素法の定式化を行うと次式を得る。

$$Hu = Gq \quad (2.120)$$

ここで、ポテンシャルとフラックスの成分を節点が存在する座標系の象限によって上添字1から4をつけて区別して表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} & H^{13} & H^{14} \\ H^{21} & H^{22} & H^{23} & H^{24} \\ H^{31} & H^{32} & H^{33} & H^{34} \\ H^{41} & H^{42} & H^{43} & H^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{11} & G^{12} & G^{13} & G^{14} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} & G^{24} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} & G^{34} \\ G^{41} & G^{42} & G^{43} & G^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ q^4 \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

ここで、 $H^{ij}, G^{ij} (i, j = 1, \dots, 4)$  は、ポテンシャルとフラックスの部分ベクトルに対応する全体係数マトリックスの部分マトリックスである。

ここで、1軸と2軸に対称であるような境界条件を考えると、各象限の対応する位置にある要素のポテンシャル値とフラックス値の間に次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} u^1 &= u^2 = u^3 = u^4 \equiv u \\ q^1 &= q^2 = q^3 = q^4 \equiv q \end{aligned} \quad (2.122)$$

この式を式(2.121)の第1式に代入して部分マトリックスをまとめると次式となる。

$$H' u = G' p \quad (2.123)$$

ここで、

$$\begin{aligned} H' &= H^{11} + H^{12} + H^{13} + H^{14} \\ G' &= G^{11} + G^{12} + G^{13} + G^{14} \end{aligned}$$

式(2.123)は解析対象全体の第1象限に属する部分についての方程式である。そこで、これに第1象限での境界条件を与えて解けば必要な解を得ることができる。

#### 2.4.2 2次元弾性解析の場合

次に、シンメトリック BEM を 2次元弾性解析に拡張することを考える。2次元ポテンシャル解析と2次元弾性解析の根本的な違いは、前者では扱う関数値がスカラー量であるのに対して後者ではベクトル量であるため、境界条件の対称性から関数値の間で成り立つ関係式が1軸に関する場合と2軸に関する場合で区別する必要があることである。

解析対象としては、2次元ポテンシャル解析の場合と同様に Fig.2.2 に示された1軸及び2軸について対称な物体を考える。この解析対象全体について境界要素法の定式化を行うと次式を得る。

$$H u = G t \quad (2.124)$$

ここで、変位と表面力の成分を1軸方向と2軸方向に分けて書き表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (2.125)$$

ここで、 $u_1, u_2, t_1, t_2$  はそれぞれ各節点での変位ベクトルと表面力ベクトルの成分の1軸方向と2軸方向の成分を示す。また、 $H_{ij}, G_{ij} (i, j = 1, \dots, 4)$  は、変位ベクトルと表面力ベクトルの部分ベクトルに対応する全体系数マトリックスの部分マトリックスである。

つぎに、これらの部分ベクトルと部分マトリックスを節点が存在する象限によって分けて書き表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} H_{11}^{kl} & H_{12}^{kl} \\ H_{21}^{kl} & H_{22}^{kl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^l \\ u_2^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^{kl} & G_{12}^{kl} \\ G_{21}^{kl} & G_{22}^{kl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^l \\ t_2^l \end{Bmatrix} \quad (2.126)$$

ここで上添字は  $(k, l = 1, \dots, 4)$  であり、1 から 4 の各象限を示している。上式の各部分マトリックスや部分ベクトルは次のように与えられる。

$$H_{ij}^{kl} = \begin{bmatrix} H_{ij}^{11} & H_{ij}^{12} & H_{ij}^{13} & H_{ij}^{14} \\ H_{ij}^{21} & H_{ij}^{22} & H_{ij}^{23} & H_{ij}^{24} \\ H_{ij}^{31} & H_{ij}^{32} & H_{ij}^{33} & H_{ij}^{34} \\ H_{ij}^{41} & H_{ij}^{42} & H_{ij}^{43} & H_{ij}^{44} \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.127)$$

$$G_{ij}^{kl} = \begin{bmatrix} G_{ij}^{11} & G_{ij}^{12} & G_{ij}^{13} & G_{ij}^{14} \\ G_{ij}^{21} & G_{ij}^{22} & G_{ij}^{23} & G_{ij}^{24} \\ G_{ij}^{31} & G_{ij}^{32} & G_{ij}^{33} & G_{ij}^{34} \\ G_{ij}^{41} & G_{ij}^{42} & G_{ij}^{43} & G_{ij}^{44} \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.128)$$

$$u_i^l = \{ u_i^1 \quad u_i^2 \quad u_i^3 \quad u_i^4 \}^T \quad (i = 1, 2) \quad (2.129)$$

$$t_i^l = \{ t_i^1 \quad t_i^2 \quad t_i^3 \quad t_i^4 \}^T \quad (i = 1, 2) \quad (2.130)$$

ここで、1 軸と 2 軸に対称であるような境界条件を考えると、各象限の対応する位置にある要素の変位値と表面力値の 1 軸、2 軸成分に対して次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} u_1^1 &= -u_1^2 = -u_1^3 = u_1^4 \equiv u_1 \\ u_2^1 &= u_2^2 = -u_2^3 = -u_2^4 \equiv u_2 \\ t_1^1 &= -t_1^2 = -t_1^3 = t_1^4 \equiv t_1 \\ t_2^1 &= t_2^2 = -t_2^3 = -t_2^4 \equiv t_2 \end{aligned} \quad (2.131)$$

これを用いて式 (2.126) の第 1 式を変形すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G'_{11} & G'_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (2.132)$$

ここで

$$\begin{aligned} H'_1 &= H_{11}^{11} - H_{11}^{12} - H_{11}^{13} + H_{11}^{14} \\ H'_2 &= H_{12}^{11} + H_{12}^{12} - H_{12}^{13} - H_{12}^{14} \\ G'_1 &= G_{11}^{11} - G_{11}^{12} - G_{11}^{13} + G_{11}^{14} \\ G'_2 &= G_{12}^{11} + G_{12}^{12} - G_{12}^{13} - G_{12}^{14} \end{aligned}$$

この式を用いれば、解析対象全体の第 1 象限の部分だけを考慮するだけで解析することができる。

## 2.5 最適設計理論

この節では本論文で用いている最適化法の理論について述べる。まず、2.5.1節では最適化問題を定義し、2.5.2節では逐次線形化法による最適化の理論について説明する。そして、2.5.3節では設計感度解析について述べる。また、形状最適設計では計算誤差の累積などによって解析対象の形状がジグザグになることが多く、これを防ぐためにスムージング法が必要となるが、2.5.4節ではこれについて述べる。

### 2.5.1 最適化問題

この節では2次元弾性体の局所形状最適化に関する最適化問題を定義する。まず、目的関数、制約条件、設計変数などについて述べてから、設計感度解析についても述べる。

#### 問題の定義

最適化問題は、目的関数を与えられた制約条件のもとで設計変数を変更することによって最小化する問題として定式化される。このとき目的関数  $W$ 、制約条件  $f$ 、設計変数  $z$  を次式のように定義する。

$$W = w^T w \quad (2.133)$$

$$w = \{w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_{N_e}\}^T$$

$$f = \{f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{N_c}\}^T = 0 \quad (2.134)$$

$$z = \{z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_{N_d}\}^T \quad (2.135)$$

ここで、 $w$  は目的関数の成分であり、 $N_e$ 、 $N_c$ 、 $N_d$  はそれぞれ目的関数の成分、拘束条件、設計変数の総数である。

#### 目的関数の成分

最適設計の目的としては、応力集中を緩和することと応力分布を平滑化することの2種類をとる。これらの場合、目的関数の成分  $w_i$  は次式で与えられる。

(1) 応力集中緩和の場合 この場合の目的関数成分は次式で与えられる。

$$w_i \equiv \begin{cases} \sigma_i/\sigma_c - 1 & (\sigma_i > \sigma_c) \\ 0 & (\sigma_i \leq \sigma_c) \end{cases} \quad (2.136)$$

(2) 応力分布平滑化の場合 この場合の目的関数成分は次式で与えられる。

$$w_i \equiv \sigma_i/\sigma_c - 1 \quad (2.137)$$

これらの式で、 $\sigma_i$  は境界節点での応力値であり、 $\sigma_c$  は許容応力である。

### 制約条件

制約条件として、解析対象の面積一定条件と St. Venant のねじり問題（後出、3章参照）に対してはねじりモーメント一定条件をとる。これらの制約条件は次のように与えられる。

#### (1) 面積一定条件

$$f_1 \equiv A^k/A^0 - 1 = 0 \quad (2.138)$$

ここで、 $A$  は解析対象の面積を、上添字は繰り返し計算の回数を示す。

#### (2) ねじりモーメント一定条件

$$f_2 \equiv M^k/M^0 - 1 = 0 \quad (2.139)$$

### 設計変数

設計変数としては境界節点の座標値をとり、それを境界の法線方向に変化させることで最適化を行う。

### 収束条件

収束条件は目的関数によって異なり、次の式で与えられる。

(1) 応力集中緩和の場合 正の微小量  $e$  に対して、目的関数評価点での応力が次式を満足するときプロセスは終了する。

$$\sigma_i - \sigma_c \leq e \quad (i = 1, \dots, Ne) \quad (2.140)$$

(1) 応力分布平滑化の場合 ある正の微小量  $e$  に対して、目的関数評価点での応力が次式を満足するときプロセスは終了する。

$$|\sigma_i - \sigma_c| \leq e \quad (i = 1, \dots, Ne) \quad (2.141)$$

## 2.5.2 逐次線形化法

Lagrange 乗数  $\lambda$  を用いると、この問題の Lagrange 関数  $L$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} L &= W + \lambda^T f \\ &= w^T w + \lambda^T f \end{aligned} \quad (2.142)$$

この式を設計変数と Lagrange 乗数の関数と考えて第1変分をとり、それを0とおくと次式が得られる。

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0 \quad (2.143)$$

または

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2\mathbf{J}^T(\mathbf{w} + \mathbf{J}\delta z) + \mathbf{G}\lambda = 0 \quad (2.144)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \mathbf{f} + \mathbf{G}\delta z = 0 \quad (2.145)$$

ここで  $\mathbf{J}$ 、 $\mathbf{G}$  は設計感度であり、次式で与えられる。

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \{w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_{N_e}\}}{\partial \{z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_{N_d}\}} \quad (2.146)$$

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \{f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{N_c}\}}{\partial \{z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_{N_d}\}} \quad (2.147)$$

式 (2.144) と式 (2.145) を連立して解くと、設計変数の修正量  $\delta z$  と Lagrange 乗数  $\lambda$  を得ることができる。得られた修正量を用いて設計変数は次式で変更される。

$$z^{k+1} = z^k + \delta z \quad (2.148)$$

ここで、上添字は繰り返し計算の回数を示す。

### 2.5.3 設計感度解析

この節では、前節で定義した最適化問題に関連して必要な設計感度の計算方法について述べる。

#### 応力感度

式 (2.136) または式 (2.137) から分かるように、2次元弾性体の局所形状最適化問題の目的関数は応力の偏差によって表されている。従って、目的関数の設計感度は応力の設計感度で与えられる。本論文では、この場合に限らず応力の設計感度の計算には数値微分を用いている。つまり、

$$\frac{\partial \sigma_i(z)}{\partial z_j} = \frac{\sigma(z_j + \Delta z_j) - \sigma(z_j - \Delta z_j)}{2\Delta z_j} \quad (2.149)$$

#### 面積感度

解析対象の面積  $A^k$  を与える式を境界積分表示し、それを  $M$  個の境界要素で離散化して表すと次式となる。

$$\begin{aligned} A^k &= \int_S dS \\ &= \int_c \frac{1}{2} (x_1 n_1 + x_2 n_2) ds \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{c_n} \frac{1}{2} (x_1 n_1 + x_2 n_2) ds \end{aligned}$$



これを式 (2.138) に代入すると

$$f_1 = \frac{1}{A^0} \sum_{n=1}^N \int_{c_n} \frac{1}{2} (x_1 n_1 + x_2 n_2) ds - 1 = 0 \quad (2.150)$$

この式を設計変数  $z_j$  について微分すれば面積感度の式を得ることができる。

### ねじりモーメント感度

St. Venant のねじり問題では、ねじりモーメント  $M$  は次式で与えられる。

$$M = G\alpha J \quad (2.151)$$

ここで  $\alpha$  と  $J$  は、それぞれ単位長さあたりのねじれ角とねじり剛性率を示す。これを式 (2.139) に代入すると次式を得る。

$$f_2 = G\alpha^k J^k / G\alpha^0 J^0 - 1 = 0 \quad (2.152)$$

この式を設計変数  $z_j$  について微分すればねじりモーメント感度の式を得ることができる。しかし本論文では、ねじりモーメント感度については計算を容易にするために次の方法をとっている。

修正された形状に働くねじりモーメントが初期形状に与えられたそれと等しくするには式 (2.152) が成り立たなければならない。そこで、この式を  $\alpha^k$  について解けば次式を得る。

$$\alpha^k = \alpha^0 \frac{J^0}{J^k} \quad (2.153)$$

$J^k$  は棒の断面形状によって決定される量であるから、これを修正された形状について計算して式 (2.153) に代入すれば、修正された形状に働くねじりモーメントを初期形状のそれと等しくするために必要なねじれ角の値が決定される。つまり、形状変更毎に式 (2.152) を用いてねじれ角を計算し直し、それを解析に用いれば修正された形状に働くねじりモーメントを一定に保つことができる。

### 2.5.4 スムージング法

本論文ではスムージング法として、弱い設計感度を無視する方法と修正された形状の境界をスプライン関数によって平滑化するという2つの方法を用いている。

まず、第1の方法は数値微分で求めた応力の設計感度のうち、弱い設計感度を無視して計算に用いない方法である。特に設計感度解析の精度が低い問題では、弱い設計感度にはかなりの計算誤差が含まれている可能性が高く、これが最適形状がジグザグになる原因の1つと考えられる。そこで本論文の最適設計法では、これを無視することによって最適形状で極端なジグザグが生じるのを防いでいる。ただ、この方法にはどの程度の弱感度を無視するかについてまだ理論的裏付けが十分でなく、現在は経験に頼っている。しかし1つの指針として、最初にある程度まで弱感度を無視して最適化を行っても滑らかな最適形

状を得ることができない場合、さらに強い設計感度を無視すれば滑らかな最適形状を得ることが可能である。

第1の方法を用いれば、最適形状で大きなジグザグが発生するのを防ぐことができるが、小さなジグザグはこの方法では十分防ぐことはできない。そこで、小さなジグザグを平滑化するためにBスプライン関数を用いる。

これまで述べた2つのスムージング法を用いれば、どのような問題でも比較的安定して滑らかな最適形状を得ることができる。



# Chapter 3

## 有限要素法と境界要素法の結合解法による 局所形状最適化

### 3.1 はじめに

構造物や機械要素の形状を設計するための最適設計法は、数値解析法の進歩にともない以前から熱心に行われているが、近年ではCAD (Computer Aided Design) やCAE (Computer Aided Engineering) の登場でさらに重要性が高まっている。初期の頃、この用途に用いられる数値解析法は有限要素法が中心であったが、近年では境界要素法を用いた研究が多く見られる。これは、主として境界要素法は線形で均一な場の解析では境界を要素分割するだけで解析できるので、領域を分割しなければならない有限要素法に比べて形状変更が容易だからである。しかし、境界要素法では係数マトリックスの構成に長い時間がかかり、この計算効率を高めるための工夫が必要となる。このための方法の1つとして、境界要素法に領域の部分分割を用いることが提案されているが、本論文では有限要素法と境界要素法の結合解法を用いるほうが、より一般性が高く様々な問題に適応できることを示す。そこで、まず3.2節では他の解法と結合解法を比較して結合解法を用いる場合の有効性について検討する。そして、3.3節ではこの章で扱う最適化問題のプロセスについて説明し、3.4節ではこれを2次元弾性体の最適化に用いてその有効性を検討する。最後に3.5節はこの章のまとめである。

### 3.2 局所形状最適化と結合解法

構造物や機械要素の局所形状最適化問題に対して、有限要素法と境界要素法の結合解法を用いる有効性について述べるには、まず局所形状最適化の解析法に必要なとされる機能について考える必要がある。そこで、これについてまとめたのが次のリストである。

- 形状変更が容易で、それによる要素のゆがみが計算精度に大きく影響しないこと。

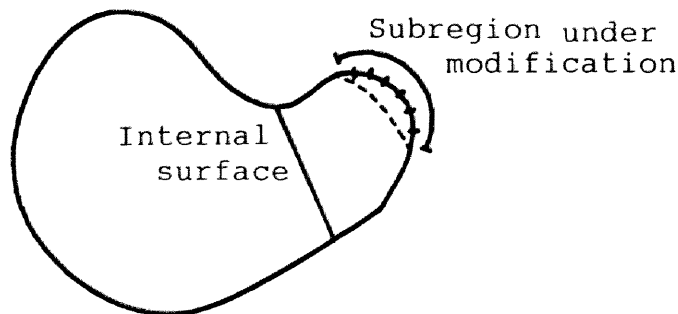


Figure 3.1: Subregion BEM

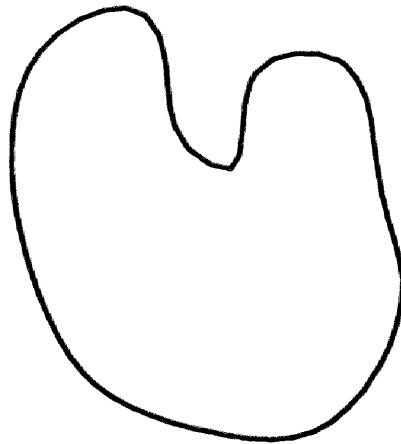
- 場の関数の微係数、2次元弾性解析では応力に相当するが、これが精度よく求められること。
- 最適化のプロセス全体の所要時間が短いこと。
- 扱える問題が広いこと、つまり汎用性が高いこと。

以下では、これらの点について代表的な数値解析法である有限要素法と境界要素法を比較していく。

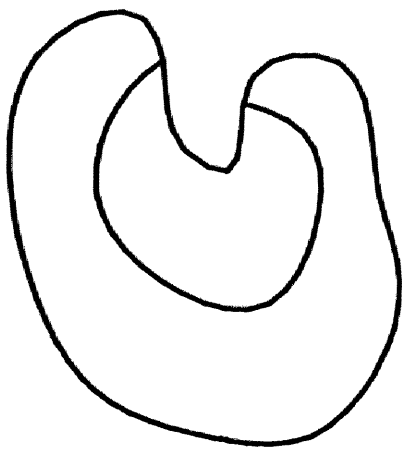
第1に、形状変更の容易さについて有限要素法と境界要素法を比較すると、前節でも述べたように境界要素法は有限要素法よりも優れている。なぜなら、有限要素法では形状変更によって形状変更境界付近にある要素がゆがんだり細長くなったりして計算精度が低下するので、形状変更ごとに要素の再分割（リメッシング）が必要となるからである。これに対して、境界要素法では境界を要素分割するだけなので、要素がゆがんで精度が低下する可能性は小さく、リメッシング自体も容易である。

第2に、応力の計算精度の点であるが、この点でも境界要素法は有限要素法よりも優れている。なぜならば、有限要素法では場の関数の内挿関数に比べてその微係数の内挿関数の次数が1つ低くなるからである。

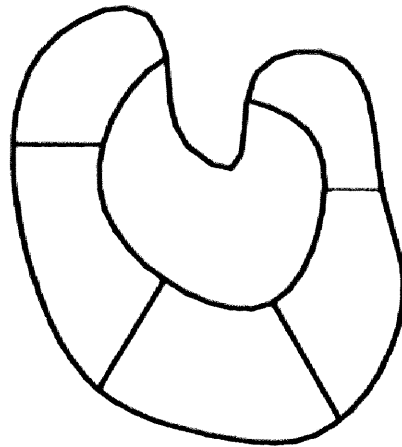
第3に、最適化過程全体の所要時間の点であるが、これを左右する要因には全体系マトリックスを解く時間と構成する時間の2つがある。解く時間を短くするにはマトリックスの自由度を小さくすればよいが、これには有限要素法よりも境界要素法が適している。なぜなら、同一の問題を解析するのに境界要素法では境界を要素分割するだけで解析できるので、領域内に接点をとる必要がある有限要素法に比べて全体系マトリックスの自由度はかなり小さくなるからである。次に構成時間の問題であるが、これを改善するためにマトリックスを再利用する事がしばしば用いられる。これは最初に構成したマトリックスを保存しておき、形状変更後は再計算の必要がある成分だけを計算し直す方法である。この方法を用いるには、境界要素法よりも有限要素法が適している。なぜなら、境界要素法では全体系マトリックスはフルマトリックスなので、形状変更によって移動する節点の総数に



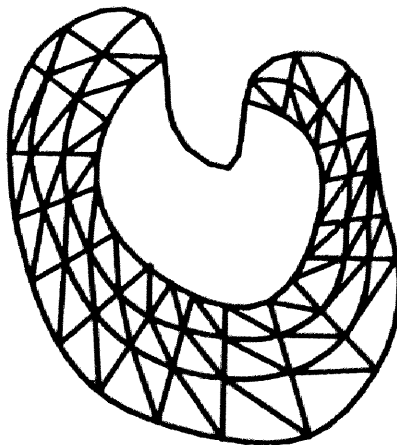
(a) Object under consideration



(b) SBEM(two subregions)



(c) SBEM(multi subregions)



(d) Combination method

Figure 3.2: Concave shape

Table 3.1: Comparison of numerical methods

|                       | FEM  | BEM       | SBEM      | FE+BE     |
|-----------------------|------|-----------|-----------|-----------|
| Shape modification    |      | easy      | easy      | easy      |
| Derivatives           |      | excellent | excellent | excellent |
| Matrix reformulation  | easy |           | easy      | easy      |
| Subregion flexibility |      |           |           | easy      |

比べて、再計算を必要とするマトリックス成分は全成分のかなりの部分となるが、有限要素法では再計算を必要とする成分は移動する節点を含む要素に関連するものだけに限定されるからである。

これらのことから、有限要素法と境界要素法を比べると局所形状最適化問題には境界要素法が有効であり、これにマトリックスの再計算効率を高める工夫を加えればよいことが分かる。そこで、このための1つの方法として境界要素法に領域の部分分割を組み合わせた方法 (Subregion BEM, 以下SBEMと呼ぶことにする) が考えられる (Fig.3.1)。この方法では、形状変更される境界を含むように部分領域 (以下、これを形状変更領域と呼ぶことにする。) をとり解析を行う。この結果、形状変更毎に再計算されるマトリックス成分は形状変更領域に限定されるので、部分領域を用いない場合に比べてかなり再計算効率を改善することができる。しかし、この方法では解析対象の形状によって計算精度や計算効率の低下する場合がある。

このような場合の典型的な例として、Fig.3.2(a) に示されるくぼんだ形状のくぼみ周辺を形状変更する場合をあげることができる。この問題をSBEMを用いて最適化するには、Fig.3.2(b) に示されるように部分分割しなければならず、非形状変更領域は細長くなる。しかし、このような細長い領域を境界要素法で解析する場合、計算精度が極端に悪くなることが知られているので、この欠点を回避するため非形状変更領域をさらに部分分割しなければならない (Fig.3.2(c))。しかし、そうすれば内部境界は非常に長くなって要素数が増加するので、計算効率は極端に低下するし、そのためのプログラムは非常に複雑となる。

そこで、これらの問題点を回避するために有限要素法と境界要素法の結合解法を用いることが考えられる (Fig.3.2(d))。この方法では、形状変更領域に境界要素法を非形状変更領域に有限要素法を用いて解析するので、変更領域に境界要素法を用いる利点はそのままで、非変更領域に有限要素法を用いることでその形状が細長い場合でも精度よく解析することができる。SBEMに比べて汎用性が高くなる。確かに、非変更領域に有限要素法を用いればSBEMの場合に比べてかなり要素数が増加するが、細かく分割すべき応力集中領域は境界要素領域に含まれるので、実際は有限要素領域のメッシュ分割はそれほど小さくする必要はない。それよりも有限要素法と組み合わせることによって、境界要素法が不得意とする異方性材料・厚さ不均一の材料への応用や、市販プログラムの有効利用などの汎用性が広がることが重要である。以上の検討をまとめて Table 3.1 に示す。

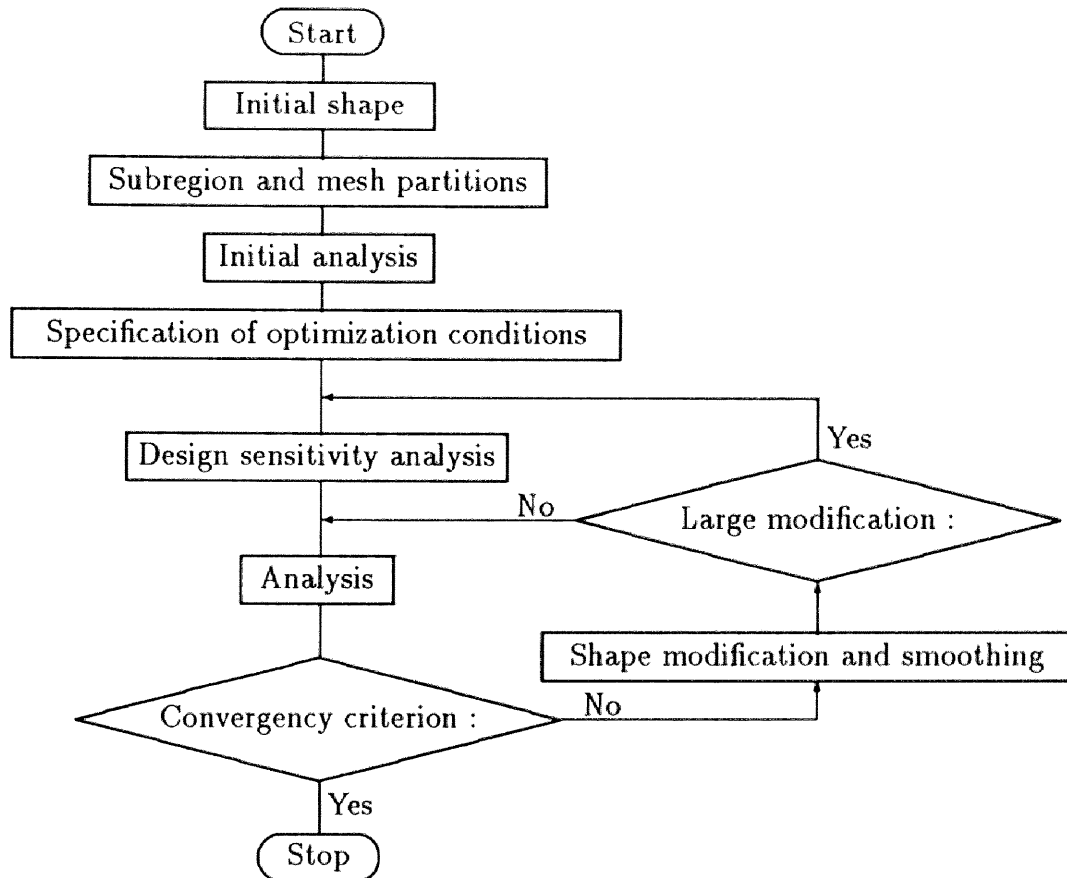


Figure 3.3: Optimization procedure

### 3.3 最適化プロセス

この章で扱う最適化のプロセスを Fig.3.3 に示す。このプロセスは最適化の準備過程と最適化過程に大別される。

#### 準備過程

1. 解析対象について適切な領域分割と要素分割を行う。この過程は現在はユーザーによって行っているが、市販の有限要素法プログラムのメッシュジェネレータを用いることも可能である。
2. 初期形状に対する数値解析を行い、得られた解に基づいて形状修正される境界要素や目的関数を評価する境界節点などの最適化のための条件を指定する。

#### 最適化過程

1. 設計感度を求める。



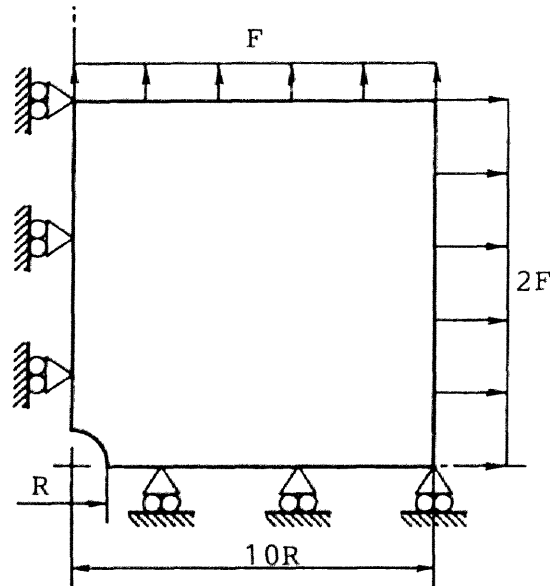


Figure 3.4: Object under consideration

2. 数値解析を行う。
3. 目的関数を計算し、これが収束条件を満足すればプロセスは終了するが、満足しなければ形状修正が行われる。
4. 形状の修正量が小さい場合はプロセスは 2. に、大きい場合は 1. に戻る。収束条件を満足するまでこのプロセスは繰り返される。

## 3.4 解析結果と検討

### 3.4.1 解析例 1 : 円孔を有する平板

最初の例題として Fig.3.4 に示される円孔を有する平板が 2 軸引張り力を受ける問題を考える。このとき、1 軸方向と 2 軸方向の引張り力の比は 2:1 である。この問題の解析対象の領域分割と有限要素分割は Fig.3.5 に、境界要素分割は Fig.3.6 に示されており、有限要素領域は 90 個の定ひずみ要素で、境界要素領域は 18 個の適合線形要素で分割されている。また、シンメトリック BEM を用いているので、境界要素領域の要素分割では 1 軸、2 軸上に要素をとっていない。この問題について、面積一定の制約条件のもとで円孔沿いの相当応力分布が一定となるように円孔の形状を最適化する。この問題では、円孔の半径は板

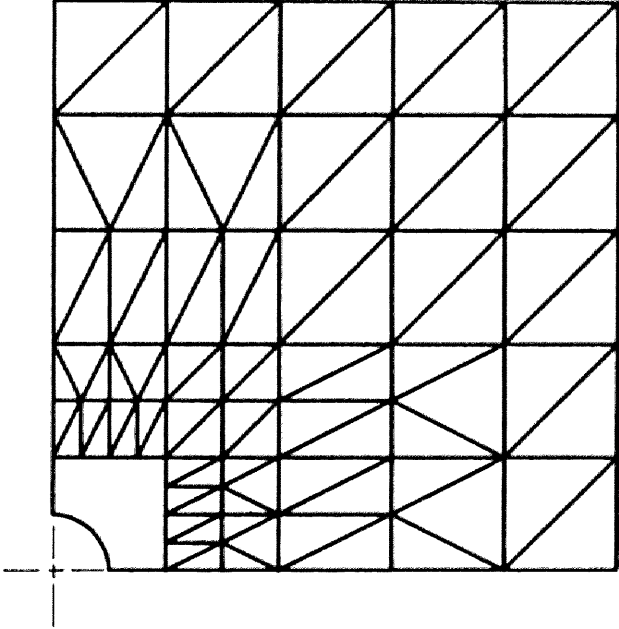


Figure 3.5: Region partition and FE mesh

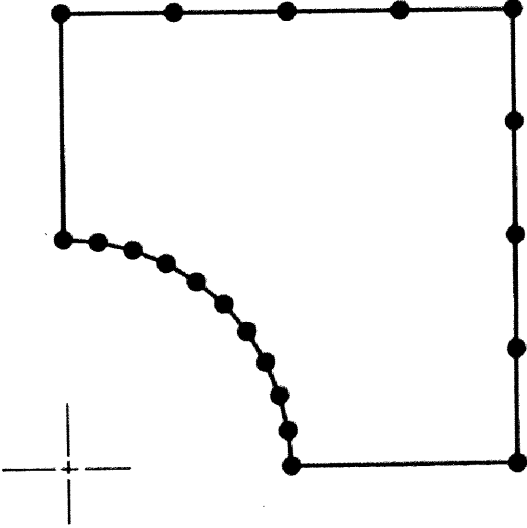


Figure 3.6: BE mesh

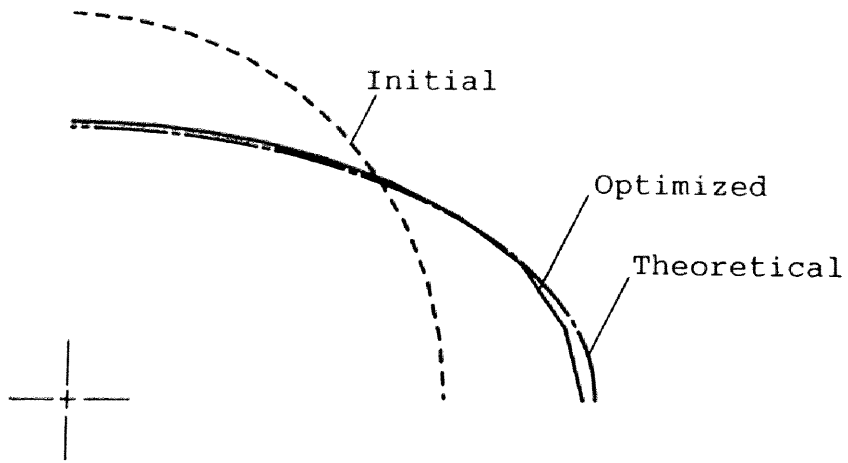


Figure 3.7: Initial and optimized shapes (constant area)

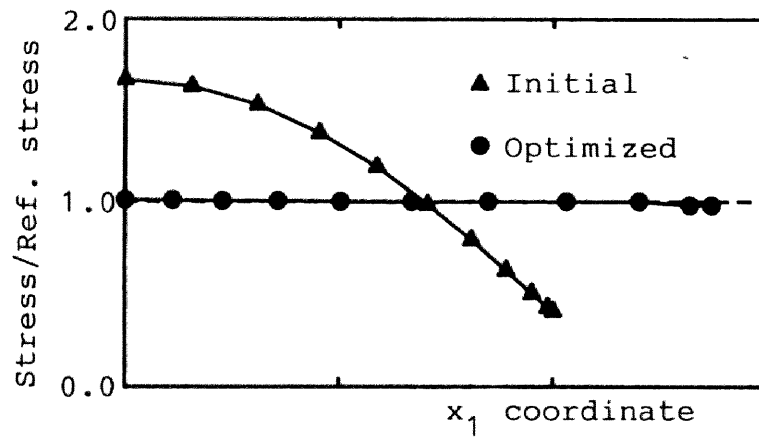


Figure 3.8: Stress distributions (constant area)

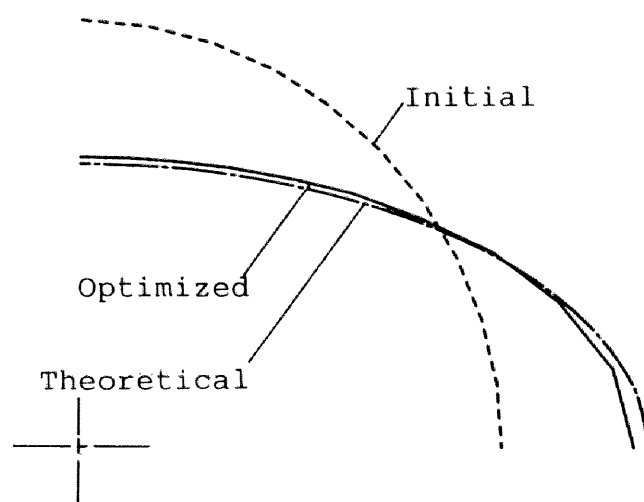


Figure 3.9: Initial and optimized shapes (without constraint condition)

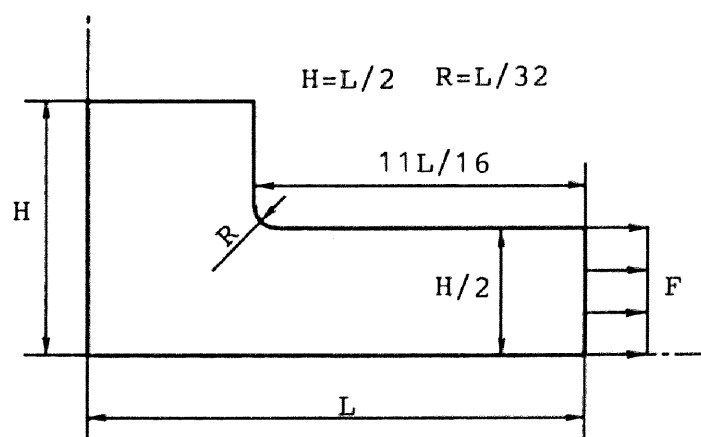


Figure 3.10: Object under consideration

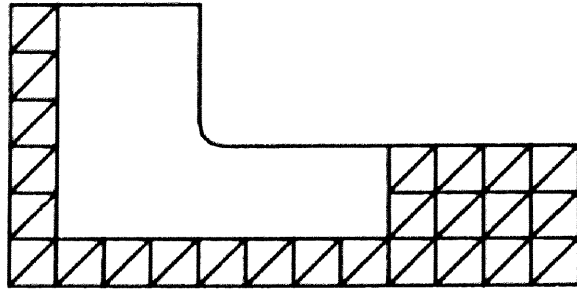


Figure 3.11: Region partition and FE mesh

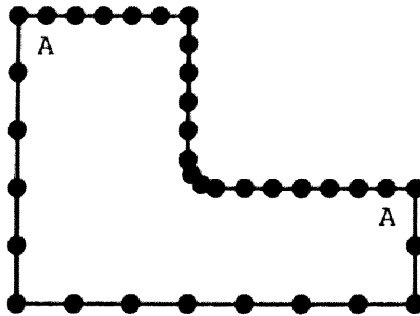


Figure 3.12: BE mesh

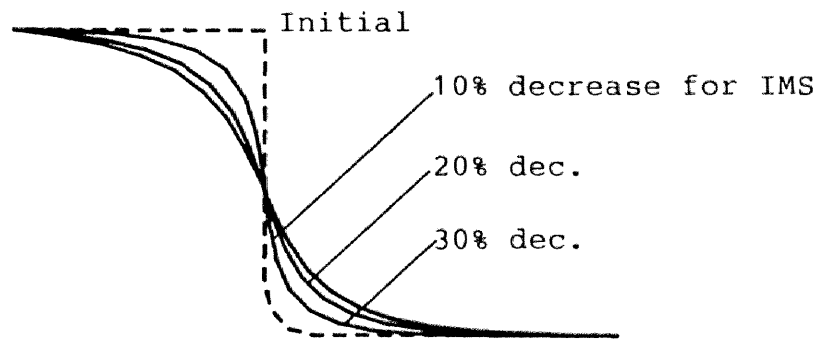


Figure 3.13: Initial and optimized shapes

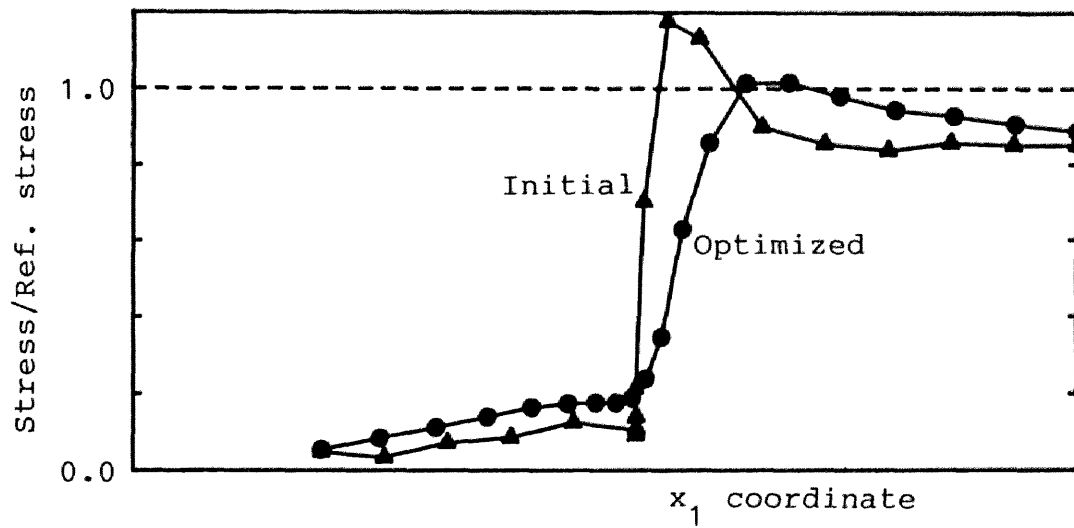


Figure 3.14: Stress distributions

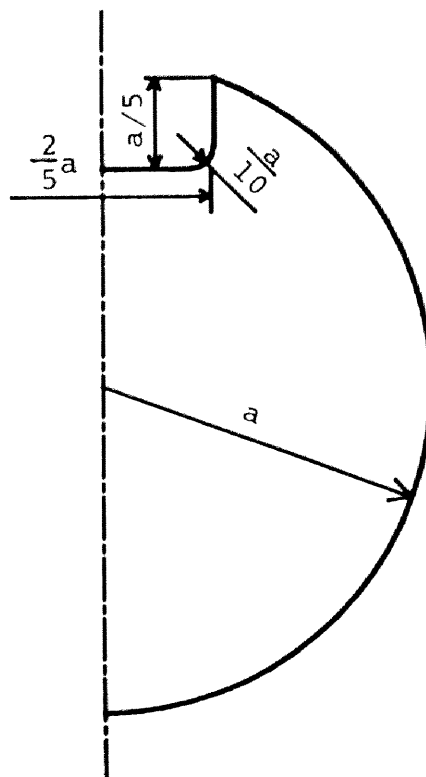


Figure 3.15: Object under consideration

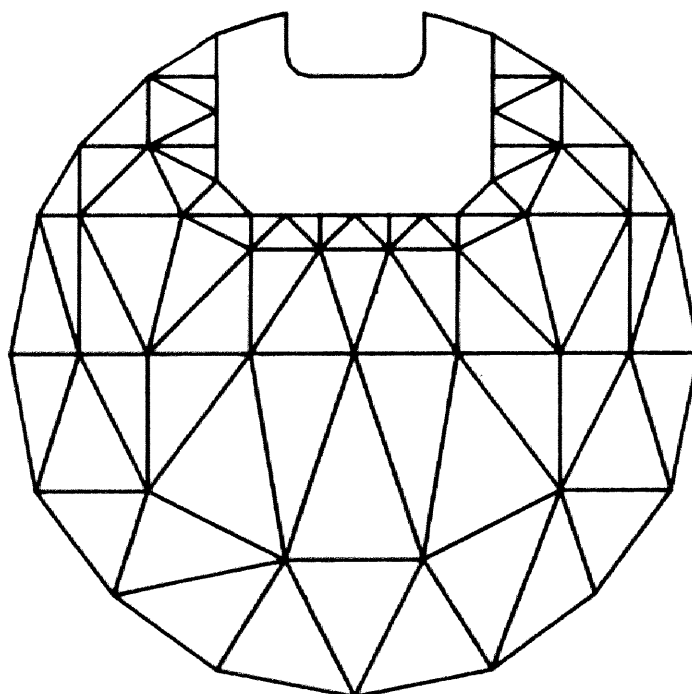


Figure 3.16: Region partition and FE mesh

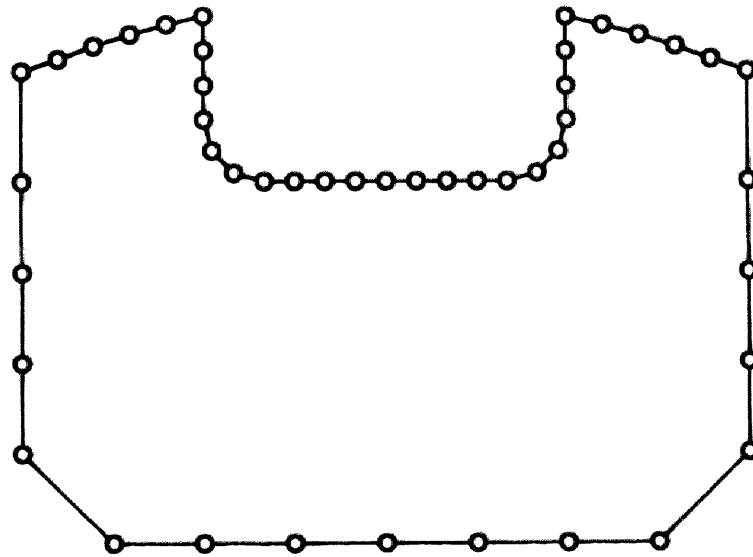


Figure 3.17: BE mesh

幅の 10 分の 1 であるから、円孔を有する無限大の平板が 2 軸引張り力を受ける問題の近似と考えることができるので、孔周辺の応力分布が均一となる孔の形状は長軸と短軸の比が 2:1 の楕円形として与えられる [116]。そこで、最適化の結果得られた形状を理論解と比較して検討する。最適形状は 5 回の繰り返し計算で得られており、Fig.3.7 に示したようになった。この図には、最適形状の他に初期形状、理論的な最適形状も合わせて表示する。これらのうち得られた最適形状と理論的な最適形状を比較すると、両者には近似誤差や計算誤差に基づく多少の不一致がみられるが全体としてはよく一致していることが分かる。次に、Fig.3.8 に初期形状と最適形状の応力分布の比較を示す。この図から分かるように、最適形状では関数分布が完全に均一になっている。最後に制約条件なしで最適化を行った結果を Fig.3.9 に示す。この場合、最適形状を得るまでの繰り返し計算の回数は 3 回であり、面積一定の条件下で行った場合に比べて少ない回数で最適形状に到達している。

### 3.4.2 解析例 2：段差付き平板

2 番目の例題として、Fig.3.10 に示される段差付き平板の問題を考える。この問題の領域分割と有限要素分割は Fig.3.11 に、境界要素分割は Fig.3.12 に示されており、有限要素領域は 50 個の定ひずみ要素で、境界要素領域は 35 個の適合線形要素で分割されている。この問題で、Fig.3.12 の記号 A-A の部分を形状変更領域として考え、段差の下端付近で生じる最大応力を 10%、15%、20% 減少するよう形状最適化を行う。最適形状は Fig.3.13 に示したようになり、条件が厳しくなるにしたがって最適形状はよりなだらかな斜面となっている。最適形状を決定するまでに必要な繰り返し計算の回数はそれぞれの場合に対して 12 回、23 回、30 回である。また、最大応力を 15% 減少する場合について、初期形状と最適形状の応力分布の比較を Fig.3.14 に示す。



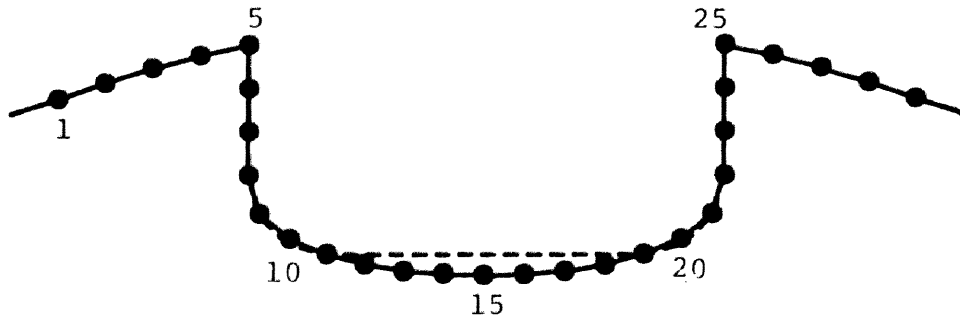


Figure 3.18: Initial and optimized shapes

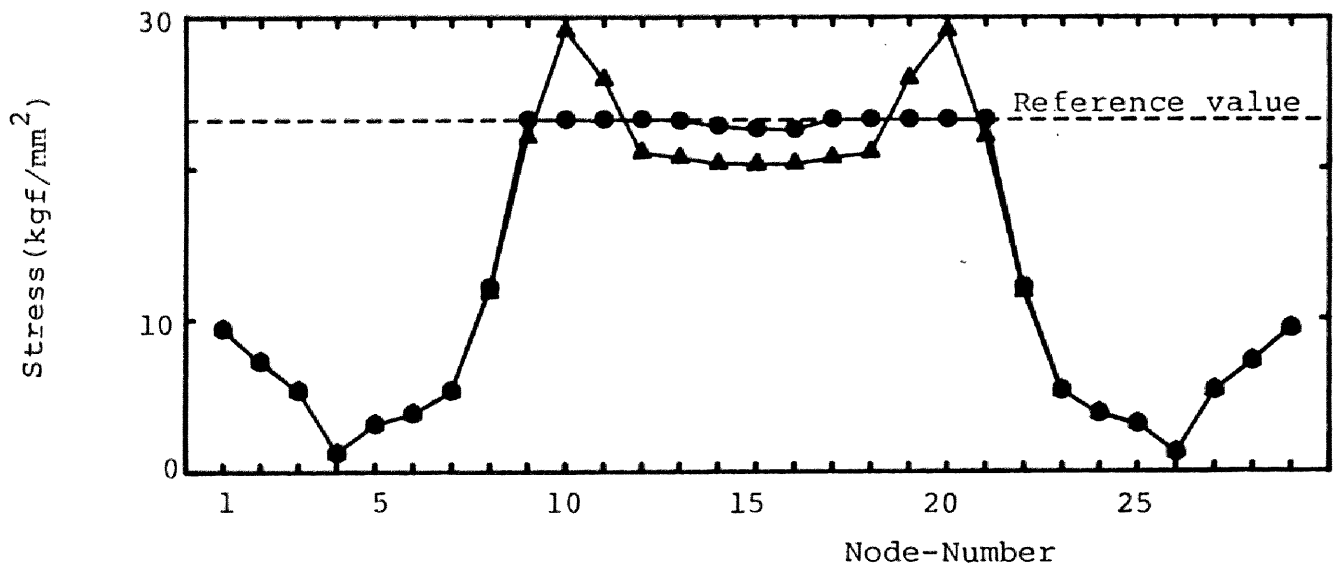


Figure 3.19: Stress distributions

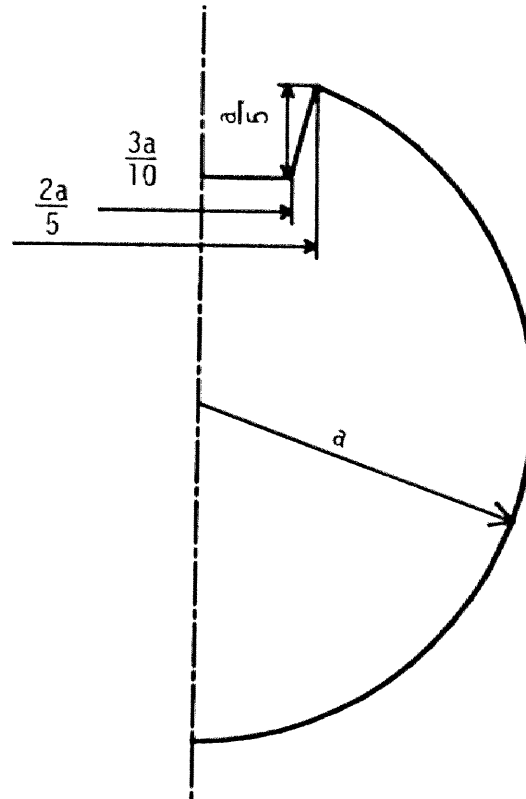


Figure 3.20: Object under consideration

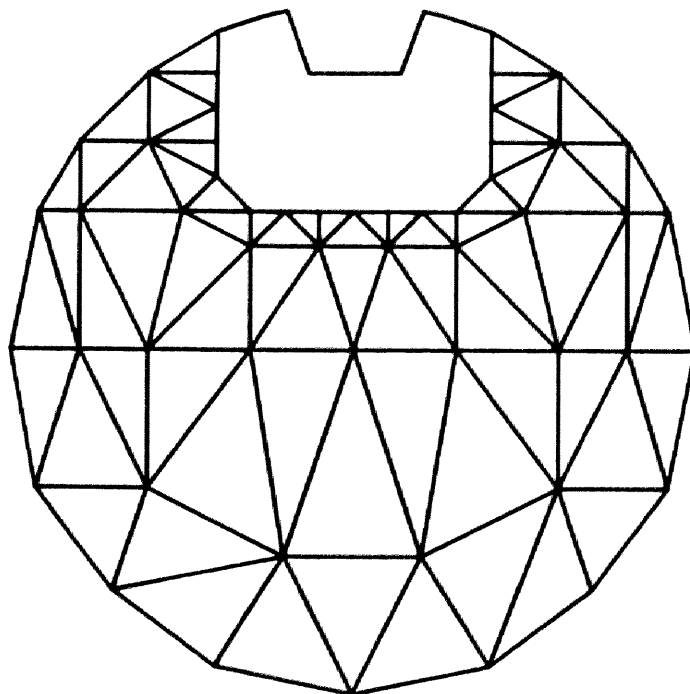


Figure 3.21: Region partition and FE mesh

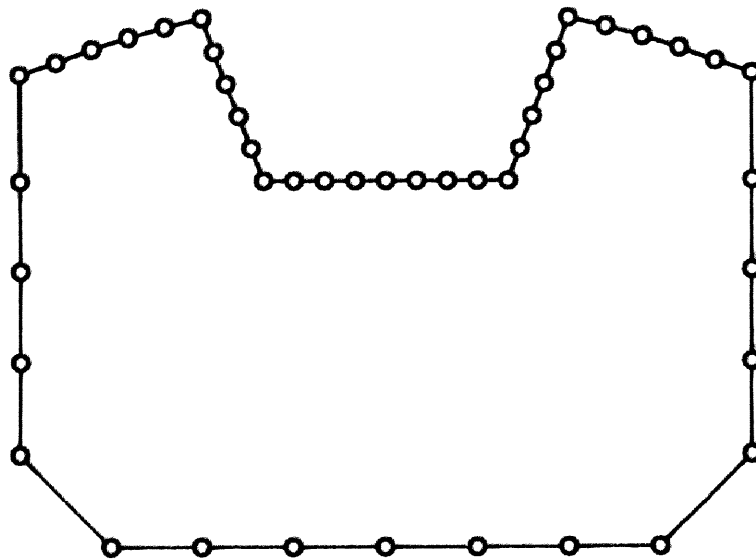


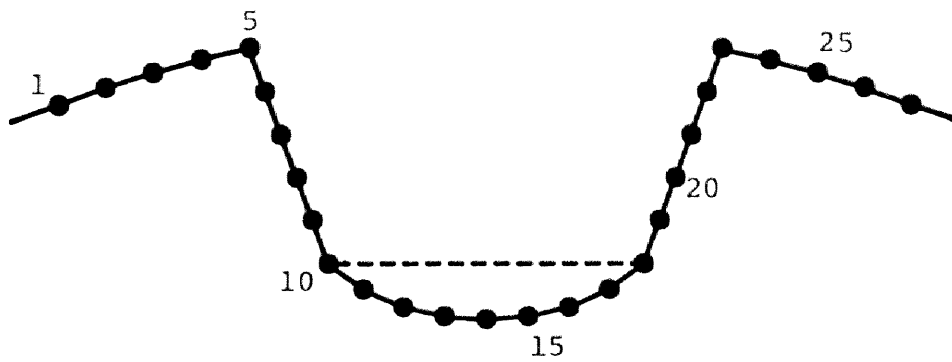
Figure 3.22: BE mesh

### 3.4.3 解析例 3 : 長方形キー溝を有する棒

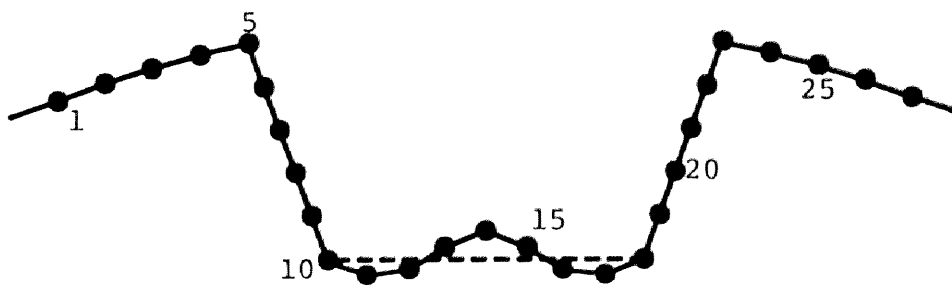
つぎに、この最適化法を St. Venant のねじり問題に適用した場合について述べる。これは 2次元ポテンシャル問題として定式化される [99]。まず、初期形状として Fig.3.15 に示された長方形キー溝を有する円形断面棒を考える。この問題の領域分割と有限要素分割は Fig.3.16 に、境界要素分割は Fig.3.17 に示されており有限要素領域は 72 個の定フラックス要素で、境界要素領域は 46 個の適合線形要素で要素分割されている。この問題で、キー溝底部の形状を変更することでキー溝かどで生じる最大応力を 20% 低下することを考える。初期形状と最適形状の比較を Fig.3.18 に、両形状における応力分布の比較を Fig.3.19 に示す。これらから、最適形状では底部が滑らかに湾曲しており、応力分布は一定となっていることがわかる。また、最適形状は 10 回の繰り返し計算で得られている。

### 3.4.4 解析例 4 : 台形キー溝を有する棒

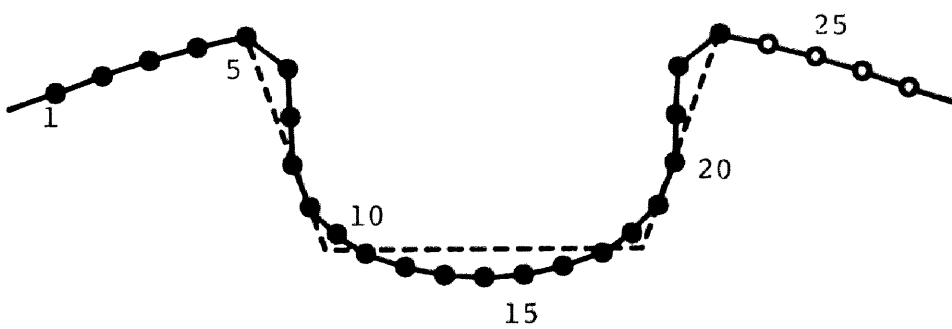
最後に、解析対象として Fig.3.20 に示された台形キー溝を有する円形断面棒を考える。この問題の領域分割と有限要素分割は Fig.3.21 に、境界要素分割は Fig.3.22 に示されており有限要素領域は 72 個の定フラックス要素で、境界要素領域は 44 個の適合線形要素で要素分割されている。この問題で、キー溝の形状を変更することでキー溝かどで生じる最大応力を 20% 低下することを考える。以下に、得られた最適形状を示す。まず、形状変更領域をキー溝底部にとり、制約条件無しで行った場合の結果を Fig.3.23(a) に、制約条件として断面積一定をとった場合の結果を Fig.3.23(b) に示す。制約条件無しの場合には底部が滑らかに湾曲した形状となっている。これに対して、面積一定条件の場合には応力を下げするために角部は丸くなっているが、面積一定にするため中央部が隆起して全体が波打っている。そ



(a)



(b)



(c)

Figure 3.23: Initial and optimized shapes

こで、形状変更部をキー溝全体に広げて最適化を行うと Fig.3.23(c) に示したような、全体として滑らかに湾曲した最適形状を得ることができた。

### 3.5 まとめ

この章では、構造物や機械要素の局所形状最適化に有限要素法と境界要素法の結合解法を用いる方法を提案した。境界要素法は線形で均一な場の問題に対しては境界を要素分割するだけで解析できるので、有限要素法を用いる場合に比べて形状変更が容易で形状変更により計算精度が低下するおそれも少ない。しかし、問題によっては計算効率や精度が問題になる場合もあるので、これを改善するために有限要素法を組み合わせ合わせた結合解法を用いる。この方法を、2次元弾性体の局所形状最適化に適用した結果、次のような結論を得ることができた。

1. 理論解のある問題について提案した適用した結果、得られた最適形状は理論解とよく一致したので解析法と最適化法の妥当性が確認できた。
2. さらに、これを他の2次元弾性体の局所形状最適化に適用した結果良好な最適形状を得ることができた。

これらのことからこの章で提案した最適化法の有効性が確認できたので、次章ではこの方法のさらなる可能性を探るため、一様でない場を含む問題の最適化に本章の最適化法を適用することについて述べる。

# Chapter 4

## 一様でない場を含む局所形状最適化

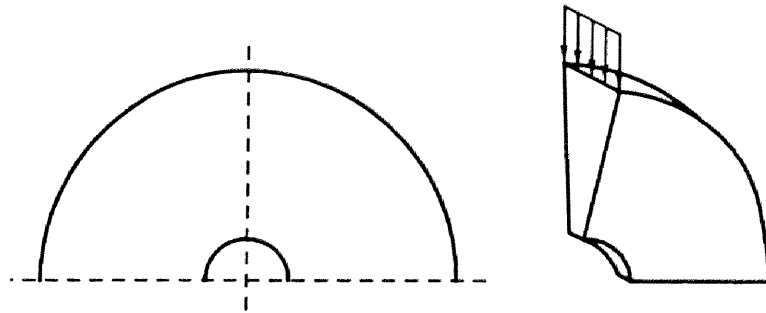
### 4.1 はじめに

前章では構造物や機械要素の局所形状最適化に有限要素法と境界要素法の結合解法を用いる方法について述べた。境界要素法は線形で均一な場の問題に対してその境界を要素分割するだけで解析できるので、有限要素法などの領域型解法に比べて形状変更が容易でメッシュのゆがみが計算精度に与える影響は小さいため、形状最適設計に適した解析法である。しかし、解析対象によっては計算効率や計算精度が低下する場合があるので、これを改善するために有限要素法を組み合わせた結合解法を用いることが有効であると考えられる。前章では、この点を中心にして結合解法を用いた形状最適化法の有効性について詳しく述べた。しかし、結合解法の利点はこれだけではなく、さらに積極的な利用方法も考えられる。この節では、そのような例として不均一な場を含む物体の局所形状最適化を取り上げる。このような物体は境界要素法単独では解析が困難なものであるが、結合解法を用いれば解析及び最適化が可能である。

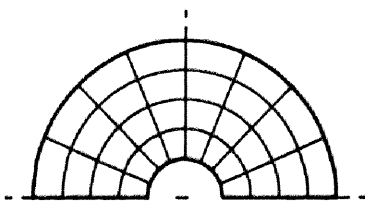
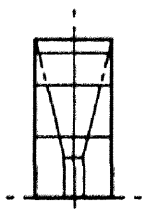
そこで、まず 4.2 節では不均一な場を含む解析対象の 1 つとして厚さが均一でない物体を取り上げ、これの局所形状最適化を結合解法で行う場合の有効性について、境界要素法を用いる場合と比較しながら検討する。次に 4.3 節では、厚さ不均一な物体の典型的な例をとってその局所形状最適化を行う。そして、4.4 節ではこの章について簡単にまとめる。なお、結合解法や最適形状決定プロセスについては前章までに述べられているのでこの章では説明を省略する。

### 4.2 不均一な場を含む局所形状最適化

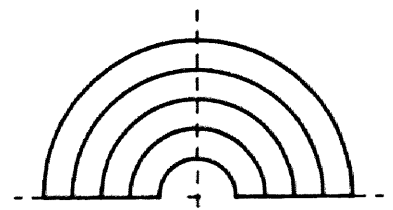
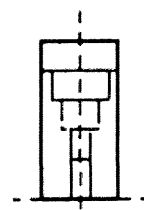
この節では不均一な場を含む問題の例として厚さが一定でない物体をとり、その局所形状を最適化することを考える。解析対象としては Fig.4.1(a) に示された中央に円孔を有し半径方向に厚さの変化する円板をとり、この円板の円孔形状を最適化することを考える。これを境界要素法で最適化するには 2 つの方法が考えられる。その第 1 は Fig.4.1(b) に示されたように全体を 3 次元体として解析することである。しかし、この場合プログラムと入



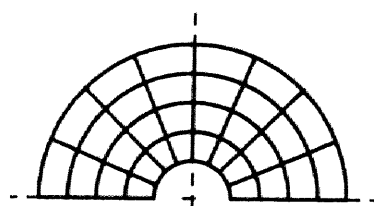
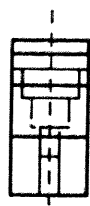
(a) Body of variable thickness



(b) 3D BE mesh



(c) Ring subregion partition



(d) Complicated subregion partition

Figure 4.1: Local shape optimization of inhomogeneous body

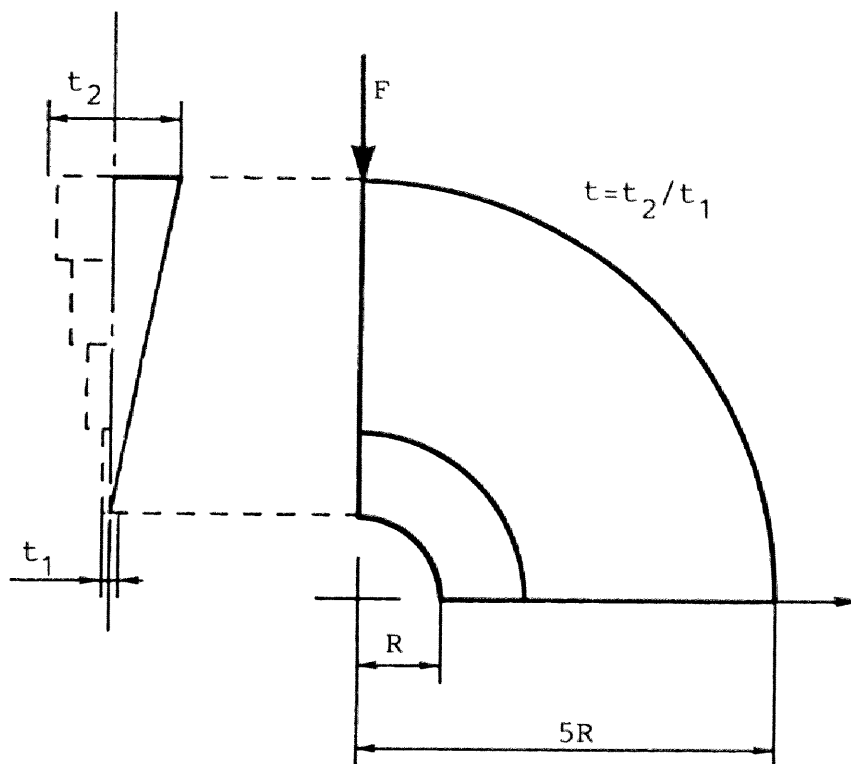


Figure 4.2: Object under consideration

力データが非常に複雑となるので好ましくない。そこで解析対象を2次元物体として扱うため、全体を Fig.4.1(c) に示したように細い円輪型の部分領域に分け、それぞれを厚さ一定として解析することが考えられる。しかし、この場合精度を高めるため円輪の幅を小さくすると細長いいくつかの部分領域が生じて計算精度が低下する可能性がある。これを防ぐには Fig.4.1(d) に示したように円輪状の部分領域をさらに円周方向に部分分割する必要がある。その結果、節点総数が増加して計算効率が低下するとともにプログラムも非常に複雑となる。従って、このような場合には境界要素法だけを用いるよりも境界要素法と有限要素法の結合解法を用いるほうが効率的である。この方法では円輪状の部分領域のもっとも内側の形状変更領域を境界要素領域とし、その外側を有限要素領域とする。そして、有限要素領域では要素ごとに厚さを変化させて解析する。こうすれば、全体を2次元物体として近似的に扱えるので効率的であるとともに、細長い境界要素領域が生じて計算精度が低下するのを防ぐこともできる。

次節ではこの方法をいくつかの典型的な例に対して適用して、その有効性を検討する。

## 4.3 解析結果と検討

### 4.3.1 解析例1：半径方向に厚さの変化する円板

最初の例題として Fig.4.2 に示されたように厚さが半径方向に変化する、円孔を有する



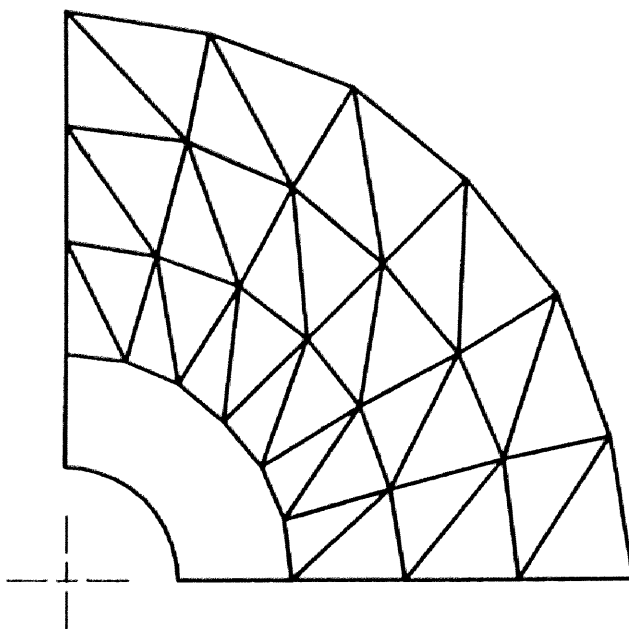


Figure 4.3: Region partition and FE mesh

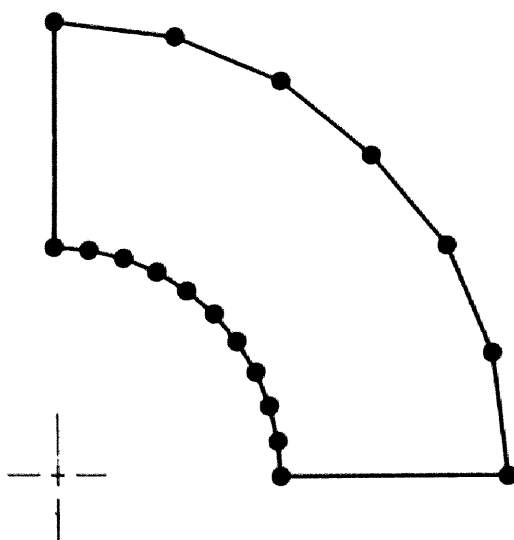
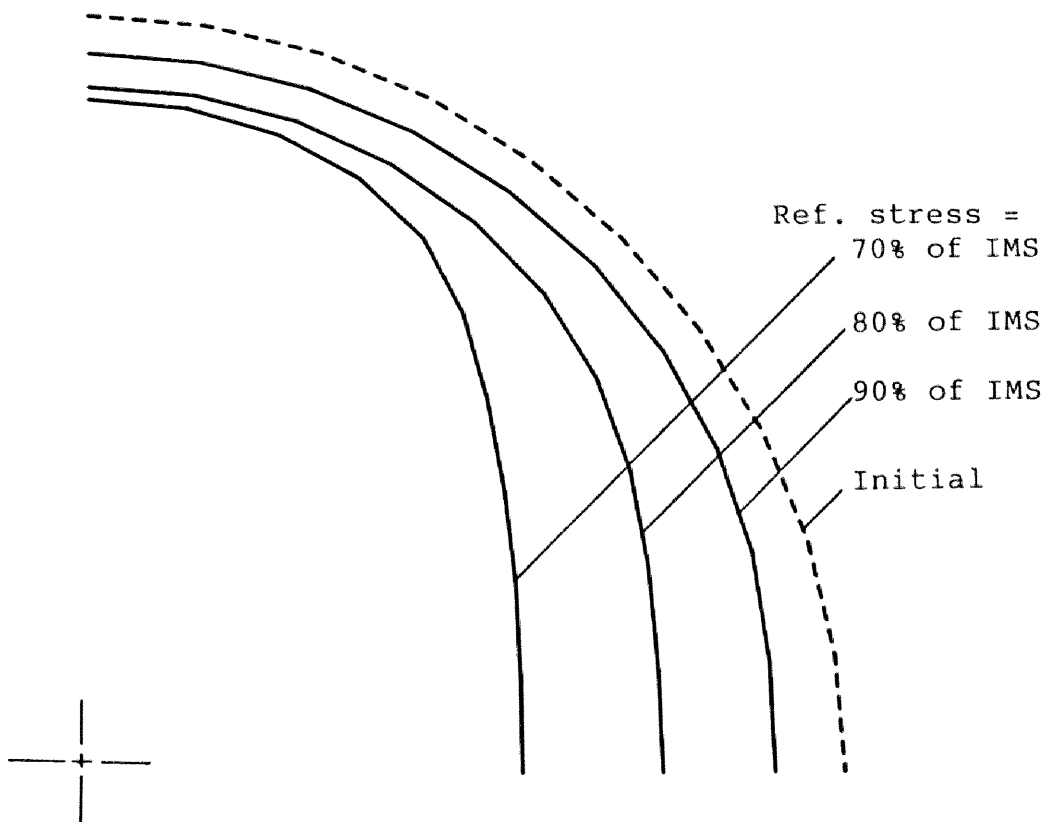
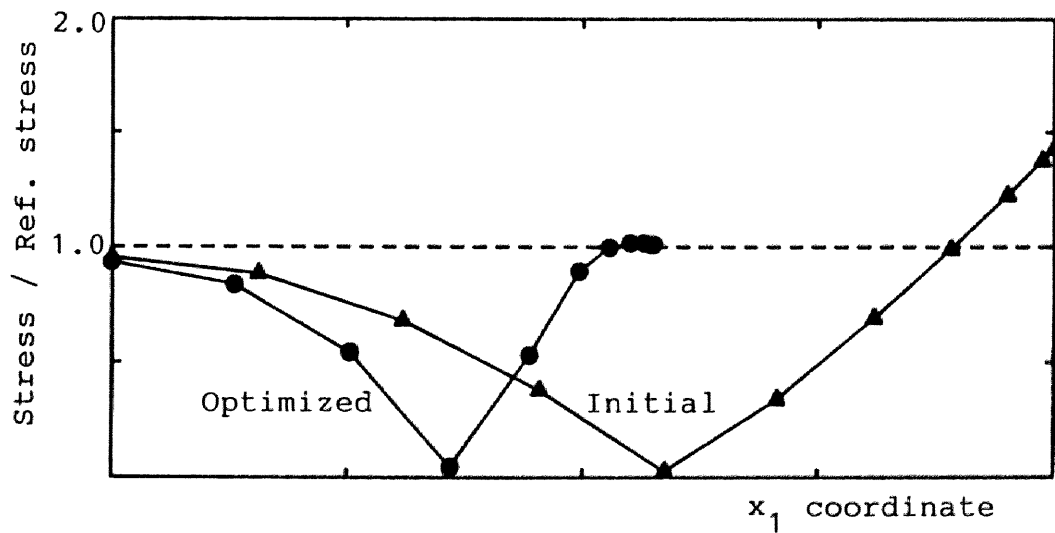


Figure 4.4: BE mesh



(a)Initial and optimized shapes



(b)Stress distributions

Figure 4.5: Initial and optimized shapes and stress distributions

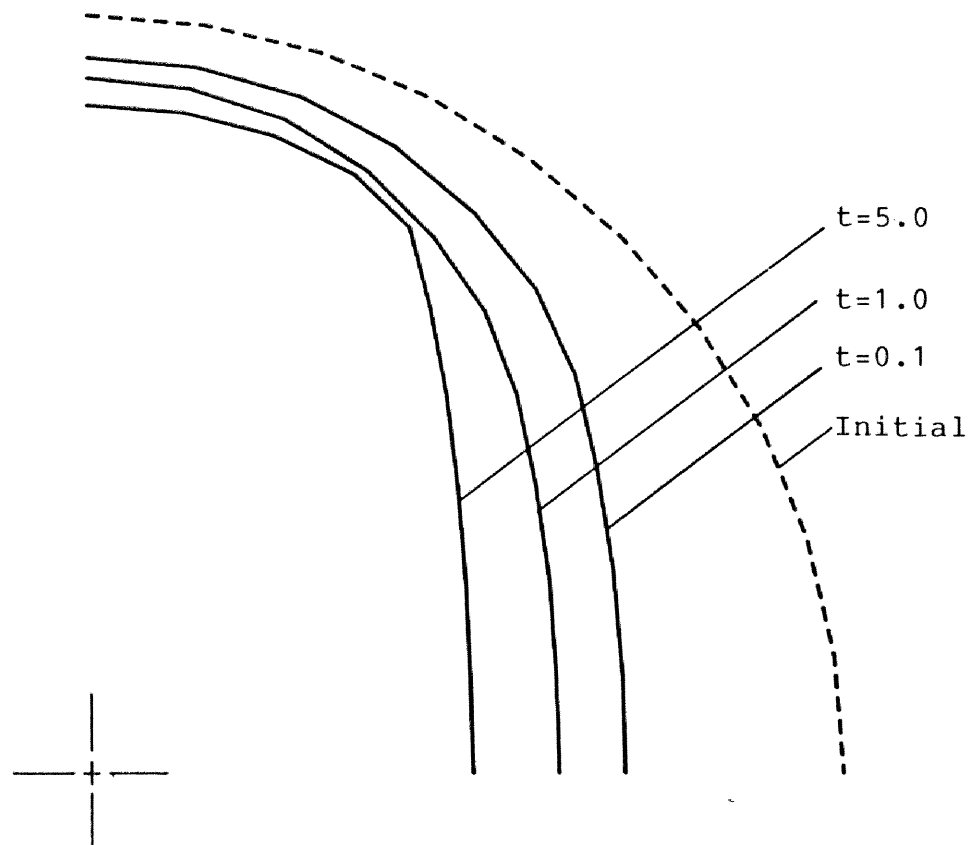


Figure 4.6: Initial and optimized shapes

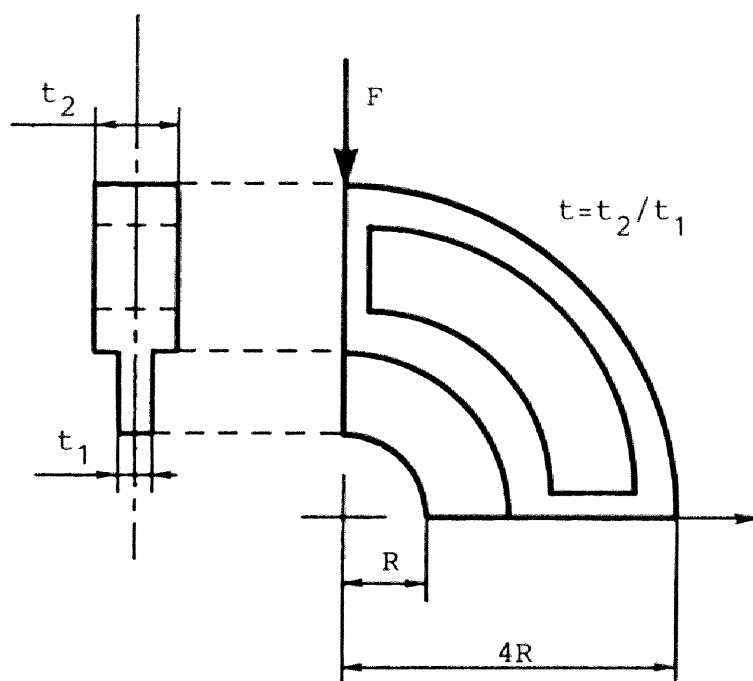


Figure 4.7: Object under consideration

円板が対向圧縮力を受ける問題を考える。応力集中は、円孔沿いと厚さが急変するあたりで生じていると考えられるが、最適化の対象としては円孔の形状をとり、円孔沿いの応力分布の最大値を許容応力以下とするようにその形状を最適化する。厚さが急変する部分の最適化も重要な問題であるが、現在使用しているソルバーではこれに十分対応できないので、ここでは扱わない。解析対象は全体を4つの円輪型の部分領域に分けてそれぞれを厚さ一定と考え、最も内側を境界要素でそれ以外を有限要素で要素分割して解析する。領域分割と有限要素分割は Fig.4.3 に、境界要素分割は Fig.4.4 に示されており、有限要素領域は36個の三角形定ひずみ要素で、境界要素領域は16個の適合線形要素で構成されている。また、この場合シンメトリックBEMを用いているので対称軸上には境界要素をとっていない。

まず、最外側と最内側の部分領域の厚さの比  $t$  が2.5である場合を考え、許容応力を初期最大応力 (Initial Maximum Stress, IMS) の90,80,70%として得られた最適形状を Fig.4.5(a) に示す。最適形状を得るまでの繰り返し計算の回数はそれぞれ12,23,26回であり、最適形状は許容値によらず圧縮力方向に長い楕円形になっている。また、許容応力が80%の場合について、初期形状と最適形状の応力分布の比較を Fig.4.5(b) に示す。

次に許容応力を初期最大応力の70%とし、最外側と最内側の部分領域の厚さの比  $t$  が5.0,1.0,0.1の場合について最適形状を決定する。結果は最適形状だけを Fig.4.6 に示す。それぞれについて、最適形状を決定するまでの繰り返し計算の回数は30,18,12回であり、 $t$  が大きくなるに従って最適形状は細長くなっている。

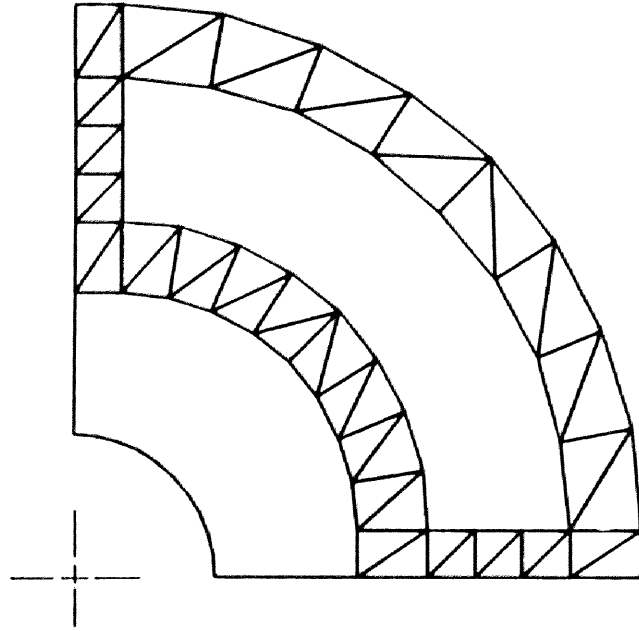


Figure 4.8: Region partition and FE mesh

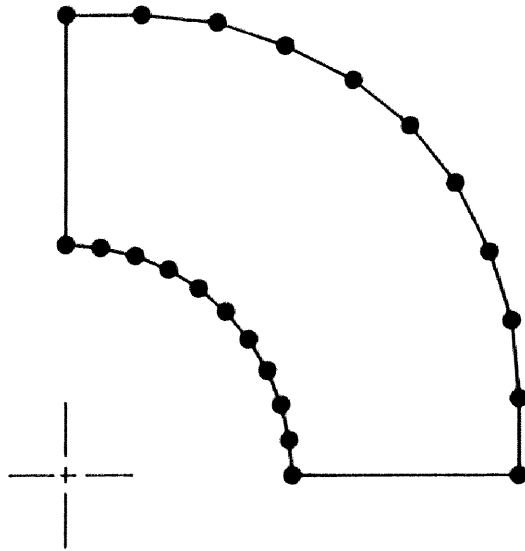
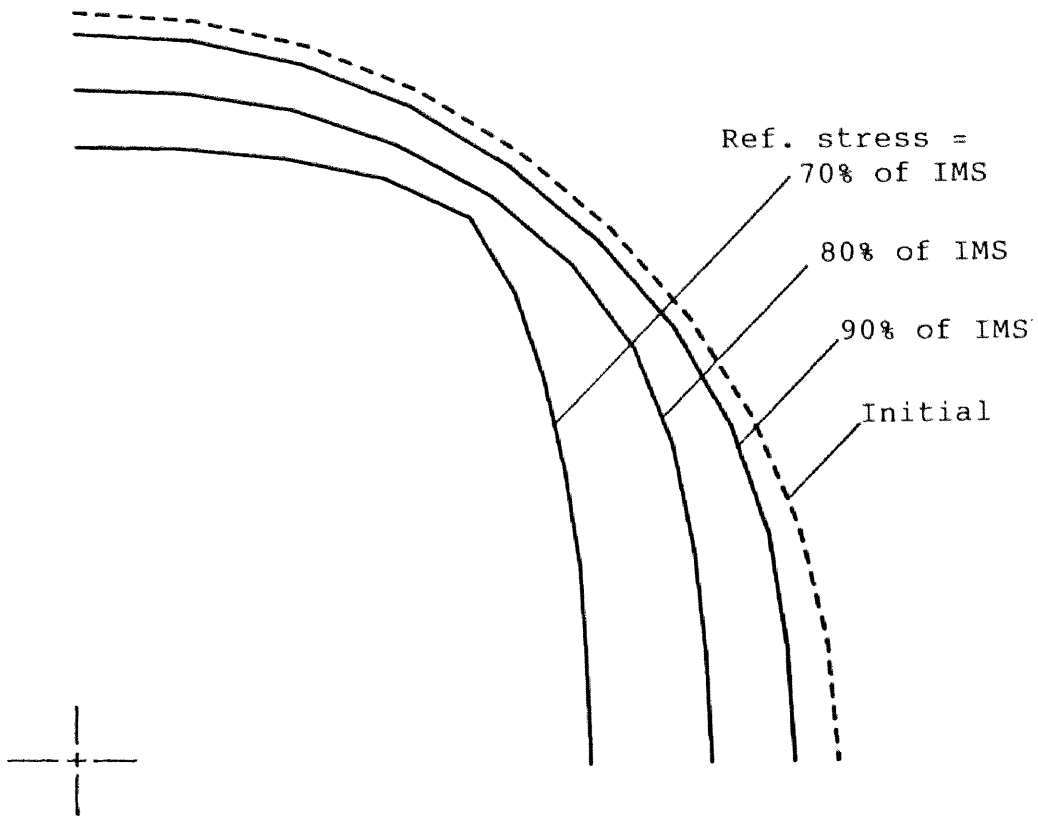
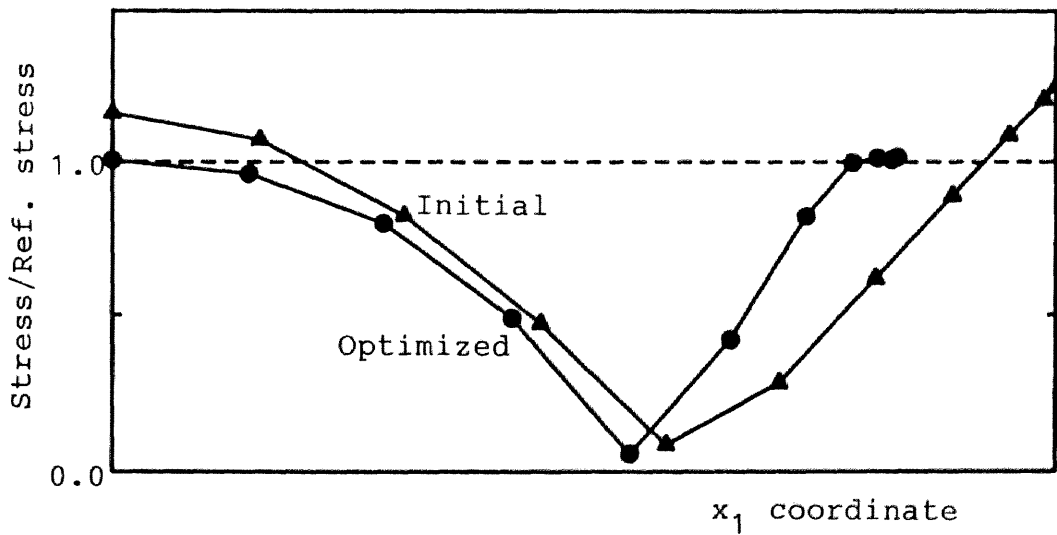


Figure 4.9: BE mesh



(a)Initial and optimized shapes



(b)Stress distributions

Figure 4.10: Initial and optimized shapes and stress ditributions

### 4.3.2 解析例 2 : 車輪形状

次に例題として Fig.4.7 に示されたような車輪型形状が対向圧縮力を受ける問題を考え、円孔沿いの応力分布の最大値を許容応力以下とするように円孔の形状を決定する。解析対象は厚さの違いで有限要素領域と境界要素領域に分け、外側の厚い領域を有限要素で、内側の薄い領域を境界要素で要素分割して解析する。領域分割と有限要素分割は Fig.4.8 に、境界要素分割は Fig.4.9 に示されており、有限要素領域は 52 個の三角形定ひずみ要素で、境界要素領域は 20 個の適合線形要素で構成されている。また、この場合もシンメトリック BEM を用いているので対称軸上には境界要素をとっていない。このとき、許容応力を初期最大応力 (IMS) の 90,80,70 % として得られた最適形状を Fig.4.10(a) に示す。最適形状を得るまでの繰り返し計算の回数はそれぞれ 5,10,10 回であり、最適形状は許容値がきびしくなるに従って角張った形状になっている。また、許容応力が 80 % の場合について、初期形状と最適形状での応力分布の比較を Fig.4.10(b) に示す。

## 4.4 まとめ

この章では、前章に続いて有限要素法と境界要素法の結合解法を用いた局所形状最適化法について述べた。前章での議論が、境界要素法の欠点を補うために有限要素法を用いるという点を中心に進めていたのに対して、この章では、提案した手法の有効性をさらに発展させるため、これを不均一な場を含む問題の局所形状最適化に適用することについて述べた。なぜなら、このような問題は境界要素法よりもむしろ有限要素法で解析するのに適した問題であるが、その局所形状最適化を有限要素法と境界要素法の結合解法で扱えば有効な解析ができる。解析例としては、そのような問題の端的な例として厚さが領域内で不均一な物体を取り上げ、提案した手法を用いればこのような問題を効果的に解析できることを示した。今回扱ったのは厚さ不均一な物体だけであったが、この方法はもちろん不均一な場を含む他の問題、例えば、不均質な物体や非線形な領域を含むような物体に対しても効果的であり、今後そのような問題への適用が望まれる。

# Chapter 5

## 境界要素ズームング法による局所形状最適化

### 5.1 はじめに

これまで、3章と4章では局所形状最適設計に対して有限要素法と境界要素法の結合解法を用いることについて述べてきた。この方法では形状変更される境界を含む部分領域（形状変更領域）を境界要素で、その他の領域を有限要素で要素分割して解析する。これに対して、この章では形状変更領域をその他の領域から分離してズームアップし、これだけを境界要素法で解析する近似解法を提案する。これは、ちょうど有限要素解析において局所データを詳しく得るためのズームング法に似ている。本来のズームング法では全体を有限要素法で解析したあと局所領域だけを他から分離し、この領域を改めて有限要素で細メッシュ分割する。そして、このズームアップされた領域の境界条件として全体を解析して得られた結果を与えて解析する。これに対して、本論文で提案する方法ではズームングされた領域は境界要素で改めてメッシュ分割して解析される。そこで、この方法を境界要素ズームング法と名付けることにする。これに対して、従来有限要素法で用いられてきたズームング法を有限要素ズームング法と呼ぶことにする。境界要素ズームング法を局所形状最適化問題に用いれば、次のような利点をもつ。

1. 最適化過程で繰り返し解析されるのは形状変更領域だけだから、そこに境界要素法を用いれば著しく計算効率を改善することができる。
2. 有限要素法と境界要素法による解析は完全に独立しているから、市販された解析プログラムに変更を加える必要が全くない。

ところで、境界要素ズームング法を形状最適設計に用いるには2つキーポイントがある。その第1は、どのようにしてズームング領域を決定するかということであり、第2はどのようにして有限要素解析のメッシュデータから境界要素解析のメッシュデータを作成するかということである。



このうち第1の点については、1つの方法として従来静弾性解析などに有限要素ズーミング法を適用する場合の基準をそのまま採用することが考えられる。しかし、形状最適設計では単なる解析の場合と異なり解析の過程で解析対象の形状が変化するので、それを予測して変化の影響が十分無視できるところにズーミング領域の内部境界（ズーミング境界）を設定しなければならない。本論文では、このための1つの基準として領域分割指標と名付けた基準量を導入する。この定義とこれを用いて実際にズーミング領域を決定する方法については、5.2節で詳しく述べる。

次に第2の点であるが、これについては有限要素解析のメッシュデータを境界要素解析のメッシュデータに変換するためのメッシュコンバータを開発する。これについては5.3節で詳しく述べる。

そして、5.4節ではこれらを用いた最適設計のプロセス全体について述べ、5.5節ではこれをいくつかの例題に対して適用して、この章で提案する領域分割指標とメッシュコンバータの有効性を検討する。最後に、5.6節はこの章のまとめである。

## 5.2 領域分割指標とズーミング領域の設定

この節では、最初に領域分割指標を定義してから、実際にこれを用いてズーミング領域を設定する方法について述べる。

### 5.2.1 領域分割指標

前節でも述べたように、形状最適設計にズーミング法を用いるには形状変更が各有限要素に及ぼす影響を予測し、それを定量的に評価しなければならない。本論文では、このための1つの試みとして各有限要素ごとのひずみエネルギー密度（Strain Energy Density, SED）を基準量として採用し、各設計変数に対するこれの最大変化量によって領域分割指標（Region Partition Index, RPI）を定義することにする。つまり、要素*i*のひずみエネルギー密度を $E_i$ 、設計変数 $z_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) による $E_i$ の最大変化量を $\Delta E_{ij}$ とし、この要素の領域分割指標 $\eta_i$ を次式で定義する。

$$\eta_i = \frac{1}{E_i} \sqrt{\sum_{j=1}^N \Delta E_{ij}^2} \quad (5.1)$$

なお、 $\Delta E_{ij}$ は次式で与えられる。

$$\Delta E_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial z_j} \Delta z_j^{max} \quad (5.2)$$

ここで、 $\partial E_i / \partial z_j$ は $E_i$ の $z_j$ に関する変化率を示す。また、 $\Delta z_j^{max}$ は設計変数の許容最大変化量であり、ユーザーによって指定される値である。

また本論文では、領域分割指標を決定するために、数値微分によって直接 $\Delta E_{ij}$ を計算する方法を用いている。

### 5.2.2 ズーミング領域の設定

式(5.1)からわかるように、領域分割指標はひずみエネルギー密度の形状変更による最大変化量を、形状変更前のひずみエネルギー密度で無次元化した形で定義されている。従って、領域分割指標の値は形状変更によるひずみエネルギー密度の変化の割合を示していることになるから、この値が十分小さい有限要素をズーム領域から除外して解析を行っても、その計算結果は全体を解析した場合に比べて十分な精度を有していると考えられる。従って、ある微少量 $\eta_c$ に対して、 $\eta_i$ の値が次式を満足するような有限要素だけからズーム領域を構成することにする。

$$\eta_c < \eta_i \quad (5.3)$$

ここで、 $\eta_c$ は領域分割指標の許容値である。この章の解析例では、この許容値 $\eta_c$ を3%から7%にとっている。

しかし、式(5.3)の条件を満足する要素だけでズーム境界を構成すると、計算誤差などのために本来ズーム境界に含まれるべき要素が含まれないなどのことから、その境界がジグザグになったり、領域に穴が開いたりといった不都合が生じる場合がある。そこで、この欠点を補うために式(5.3)の条件を満足する要素だけから構成されたズーム領域に対して、外接する有限要素をいくつか追加してやる。このための実際の処理としては、用いている三角形要素の3辺のうち2辺がズーム境界と接する要素をズーム領域に追加するようにして処理した。

これまでに説明したズーム領域決定のプロセスを簡単にまとめると次のようになる。

1. RPIの許容値 $\eta_c$ を与える。
2. RPIが $\eta_c$ より大きい要素をズーム領域とする。
3. このほか、2.の操作だけではズーム領域に含められない要素をズーム領域に加える。

## 5.3 FE/BEメッシュコンバータ

この節では、ズーム領域の有限要素メッシュのデータを境界要素メッシュのデータに変換する方法について述べる。このプロセスをまとめると次のようになる。

1. ズーム領域に含まれるある1つの有限要素E1を考え、その3辺をL1、L2、L3とする。
2. まず辺L1について、この辺を含むE1以外のもう1つの要素E2を探索する。
3. E2が存在しない(つまり、この辺が解析対象の境界の1部である)場合は、次の操作を行い、5.へ進む。

- L1を境界要素データとして保存する。

- L1 に与えられている境界条件を保存する。
4. E2 が存在する（つまり、この辺が解析対象の領域内にある）場合は、操作は次の2つに分岐する。
    - (a) E2 がズームング領域に含まれている場合は、5. へ進む。
    - (b) E2 がズームング領域に含まれていない（つまり、この要素が新たなズームング境界となる）場合は、次の操作を行い5. へ進む。
      - L1 を境界要素データとして保存する。
      - L1 に与えられている境界条件を保存する。
  5. 辺 L1、L2 について、2. から 4. の操作を行う。
  6. ズームング領域に含まれる全ての有限要素に対して、1. から 5. の操作を行う。
  7. これまでの過程で作成された境界要素データの重複を取り除く。

## 5.4 境界要素ズームングによる最適設計のプロセス

この節では境界要素ズームング法を用いた最適設計のプロセスについて述べてから、今までに説明しなかった過程について述べる。

### 5.4.1 全体のプロセス

全体のプロセスをまとめると次のようになる。

1. ズームング領域を設定する。
2. ズームング領域の有限要素メッシュデータを境界要素メッシュデータへ変換する。つまり、ズームング領域を境界要素で再要素分割する。
3. 作成された境界要素メッシュを適切に細分割して最適設計に適したメッシュとする。
4. 形状の最適化を行う。

このうち 1. と 2. については、それぞれ 5.2 節と 5.3 節で説明した。また、4. についても 2 章で説明している。そこで、以下では 3. について詳しく説明する。

### 5.4.2 境界要素メッシュの細分割

FE/BEメッシュコンバータで作成された境界要素メッシュは、その基となった有限要素メッシュの辺を境界要素とするメッシュである。従って、メッシュが粗すぎて最適設計には適さない場合があるので、次のようにして細分割される。

1. まず、設計境界要素を適当に細分割する。
2. 1. の操作によって最長要素と最短要素の比が大きくなると計算精度が悪化するので、比が8を越えた場合長い要素を細分割する。

このプロセスでのメッシュの細分割は等分割を基本としているが、もちろん適応メッシュ法などを組み込めばさらに効果的である。

## 5.5 解析例

### 5.5.1 解析例1：円孔を有する平板

最初の例題として、円孔を有する平板が2軸引張り力を受ける問題を考える (Fig.5.1)。この問題について、まずRPIの基準値を3%、5%、7%として境界要素メッシュを作成する。次に、作成された境界要素メッシュについて円孔周辺の応力分布が一定となるように円孔の形状を最適化し、得られた最適形状を理論的な最適形状と比較検討する。

**境界要素メッシュの構成** 最初に、解析対象を Fig.5.2 のように有限要素でメッシュ分割して解析した結果、ひずみエネルギー密度 (SED) の分布は Fig.5.3 のようになった。この問題で、円孔沿いの4節点を設計変数として境界要素メッシュを作成すると、領域分割指数 (RPI) の分布は Fig.5.4 のようになった。これをひずみエネルギー密度の分布 (Fig.5.3) と比較すると、2つの分布が必ずしも一致していないことがわかる。このことから、局所形状最適化問題にズームング法を適用する場合、ズームング領域の設定にひずみエネルギー密度を用いるのは必ずしも適切でないことがわかる。また、領域分割指標の基準値が0.03、0.05、0.07の場合に対してズームング領域を決定すると、Fig.5.5(a)、(b)、(c) に示されたようになった。これらの図中で黒丸は形状変更のための節点を示す。

**形状最適化** 次に、Fig.5.5の境界要素メッシュに対して円孔沿いの応力分布が一定となるように円孔形状を最適化する。まず、 $\eta_c = 0.03$  の場合のメッシュについて形状最適化を行うと、最適形状は30回の繰り返し計算で得られた。その初期形状と最適形状の比較を Fig.5.6(a) に、両方の形状での応力分布の比較を Fig.5.6(b) に示す。これらの図から最適形状は楕円形であり、それでの応力分布はほぼ一定となっていることが分かる。次に、 $\eta_c = 0.3$ 、0.5、0.7の場合の最適形状と理論的な最適形状 [116] をまとめて Fig.5.7 に示す。この図から、 $\eta_c$  が小さいほど得られた最適形状が理論的な最適形状に近づくという結果を得た。

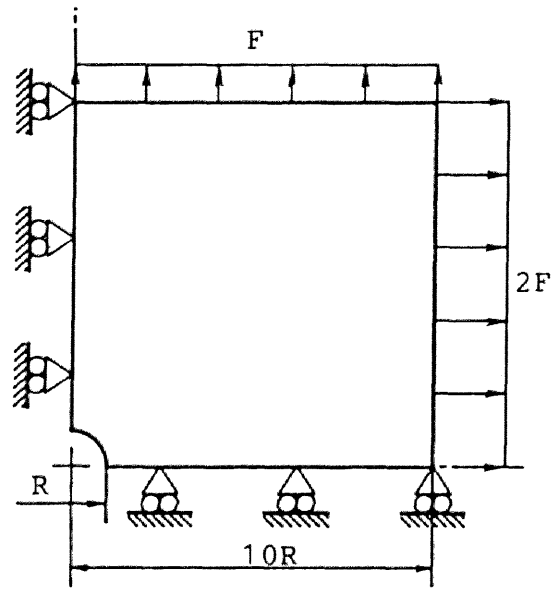


Figure 5.1: Object under consideration

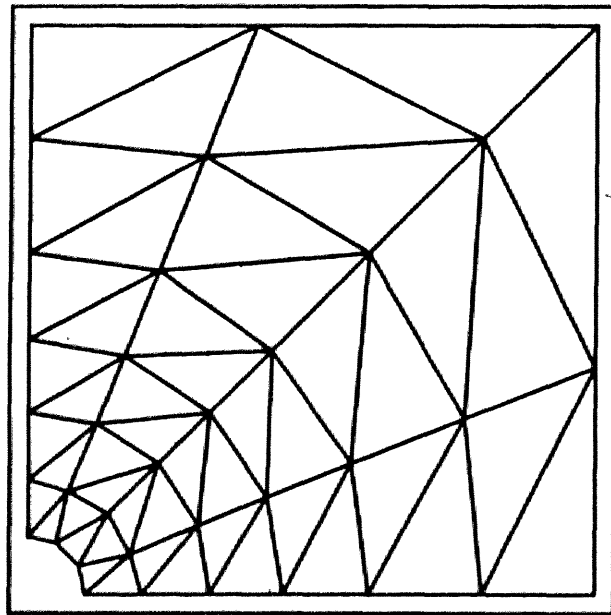


Figure 5.2: F.E. mesh

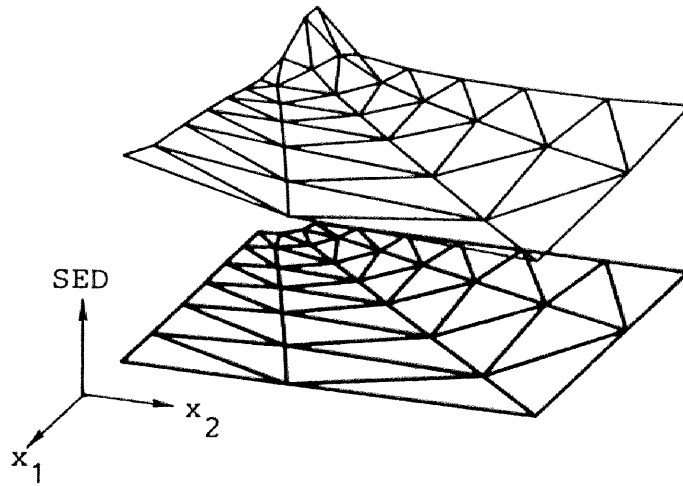


Figure 5.3: SED distribution

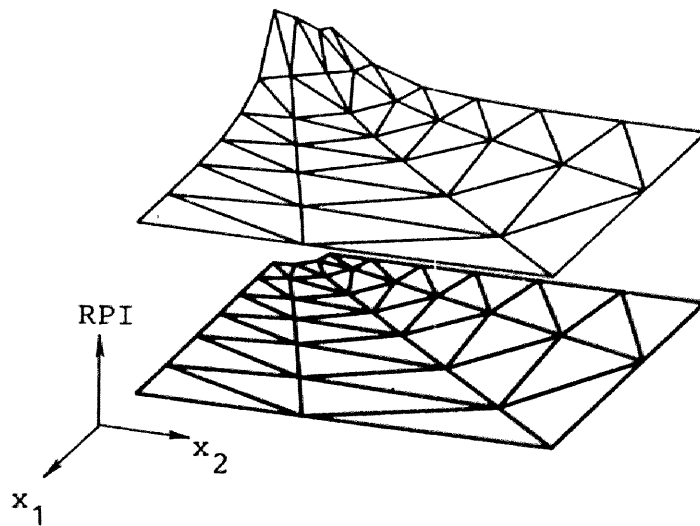
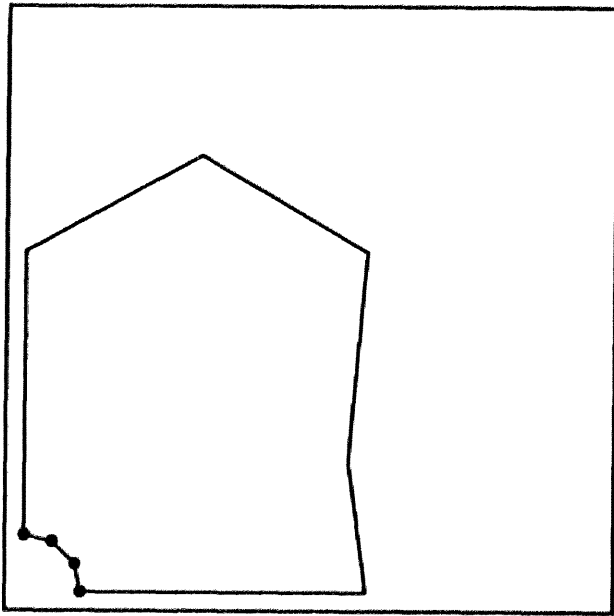
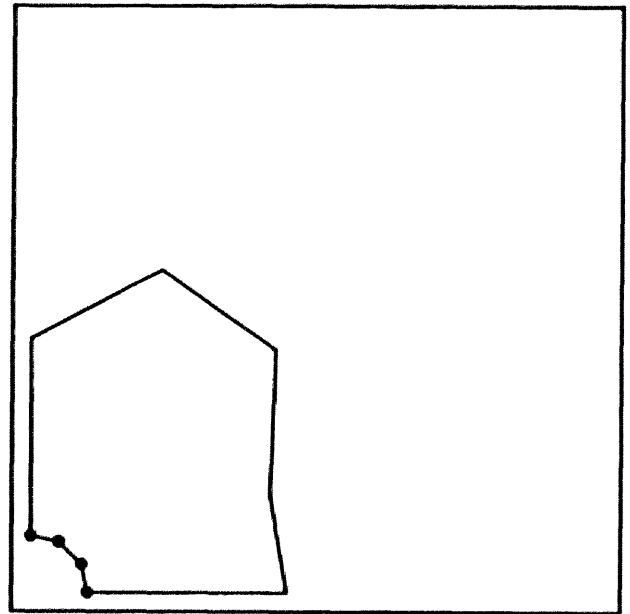


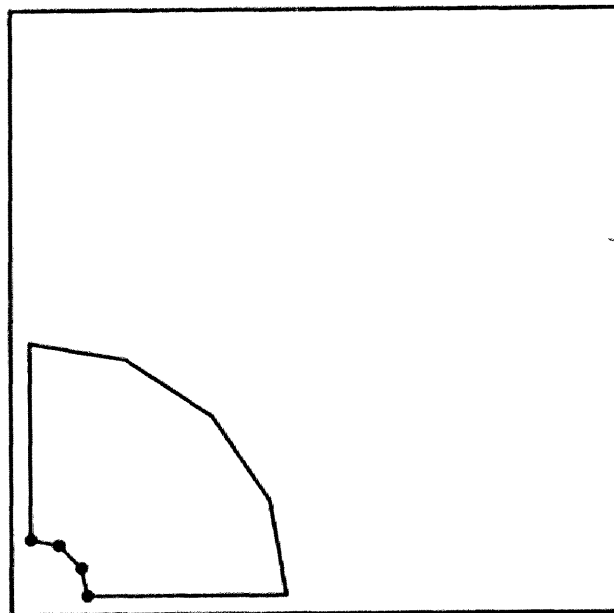
Figure 5.4: RPI distribution



(a) RPI=3%

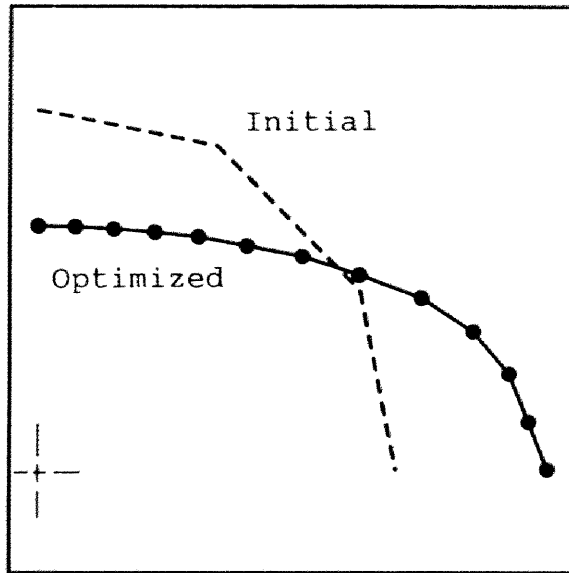


(b) RPI=5%

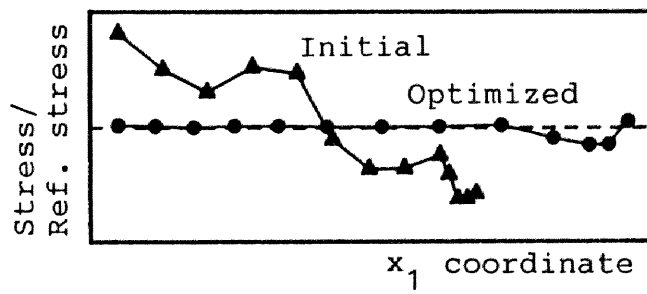


(c) RPI=7%

Figure 5.5: B.E. meshes



(a)Initial and optimized shapes



(b)Stress distributions

Figure 5.6: Initial and optimized shapes and stress distributions



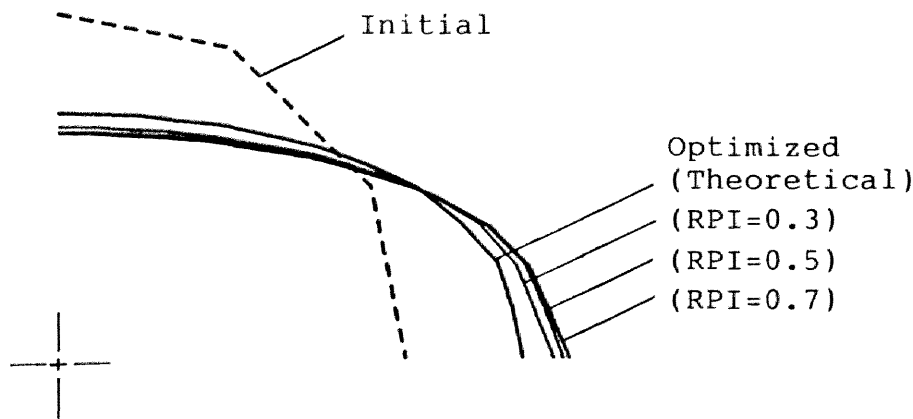


Figure 5.7: Optimized and theoretical shapes

### 5.5.2 解析例 2 : 複数の応力集中部を有する場合

次に、複数の応力集中部を有する問題を考える ( Fig.5.8 )。このような問題では応力集中部が互いに影響し合っている可能性があり、そのため1つの応力集中を緩和した結果、別の応力集中が高くなる可能性がある。このような問題をズームング法で解析するには、ズームング領域を適切に設定しなければ、正しい最適形状を得ることができない。そこで、このような問題に対して本論文の方法が有効かどうかを検討するために、次のような数値実験を行う。まず円孔部と切欠き部に対して、これらを別々に形状最適化するためのズームング領域を決定する。そして、得られたズームング領域について形状最適化を行い、得られた最適形状を境界要素法による結果と比較する。境界要素法による結果は、円孔部と切欠き部を同時に形状最適化したものであり、これと比較することによって境界要素ズームング法の有効性を検討する。

**境界要素メッシュの構成** 解析対象を Fig.5.9 のように有限要素で要素分割して定ひずみ三角形要素で解析する。SED の分布は Fig.5.10 のようであり、応力集中が円孔付近と切欠き付近で生じていることが分かる。

最初に、円孔形状を最適化するための境界要素メッシュを構成することを考える。円孔沿いの節点を設計変数にとり、 $\eta_c = 0.03$  として境界要素メッシュを決定すると Fig.5.11 のようになる。このときの領域分割指標の分布は Fig.5.12 のようになる。

次に、切欠き部を最適化するための境界要素メッシュを構成することを考える。そのために切欠き部周辺の節点を設計変数にとり、 $\eta_c = 0.03$  として境界要素メッシュを決定する

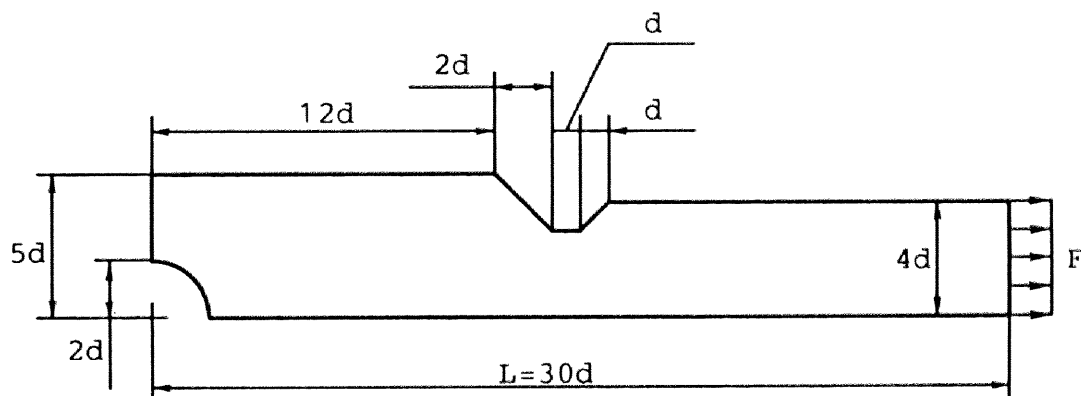


Figure 5.8: Object under consideration

と、Fig.5.13 のようになる。このときの RPI の分布は Fig.5.14 のようになる。

**形状最適化** 先の結果によれば 2 つの境界要素メッシュは重複していないので、ズームング法を用いてこれらを別々に最適化できると考えられる。そこで実際に最適化を行い、その結果を境界要素法による結果と比較する。

最初に、孔部について Fig.5.11 のような境界要素メッシュを取り、孔部の上端で生じる最大応力が初期形状の最大応力の 90 % となるようにその形状を最適化する。この場合、最適形状は 20 回の繰り返し計算で得られている。Fig.5.15 は初期形状、本方法による最適形状、境界要素法による最適形状を比較する。この図から分かるように、本方法による結果と境界要素法による結果は小さなずれが見られるものの、全体としてはよく一致している。また、Fig.5.16 は初期形状と最適形状での応力分布の比較を示す。

次に、切欠き部について Fig.5.13 に示された境界要素メッシュを取り、切欠き部で生じる最大応力が初期最大応力の 90 % となるようにその形状を最適化する。この場合、最適形状は 20 回の繰り返し計算で得られている。Fig.5.17 に初期形状、本方法による最適形状、境界要素法による最適形状の比較を示すが、この場合も最適形状は境界要素法による結果とよく一致している。Fig.5.18 には、この場合の初期形状と最適形状の応力分布の比較を示す。

以上の結果から、本手法を用いれば複数の応力集中部を有する問題における、応力集中部同士の相互的な影響関係を効果的に評価することができて、応力集中部を別々に形状最適化できるかどうかを判断するのに役立つことがわかる。

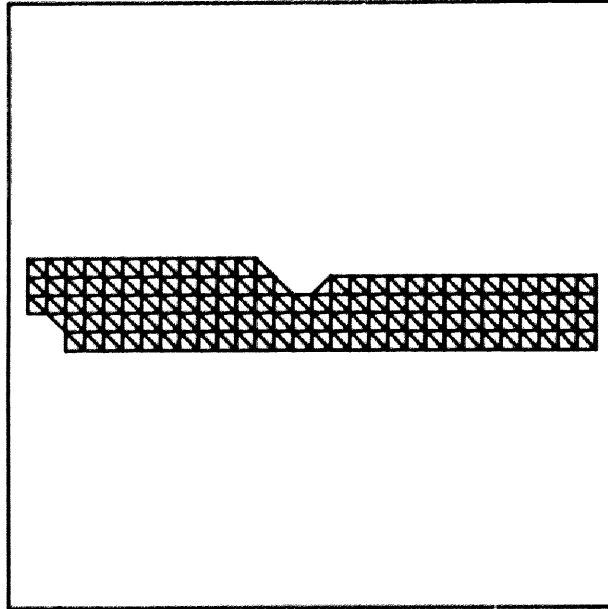


Figure 5.9: F.E. mesh

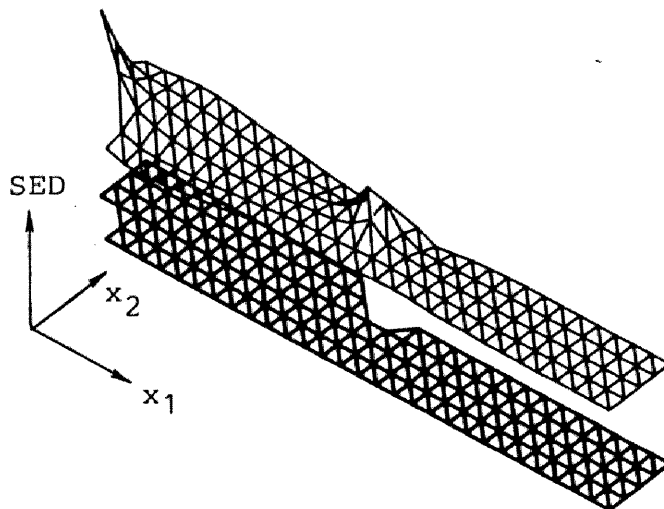


Figure 5.10: SED distribution

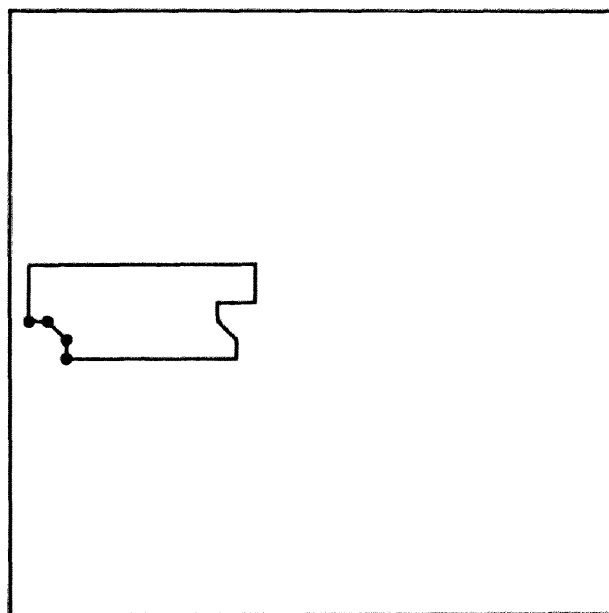


Figure 5.11: B.E. mesh

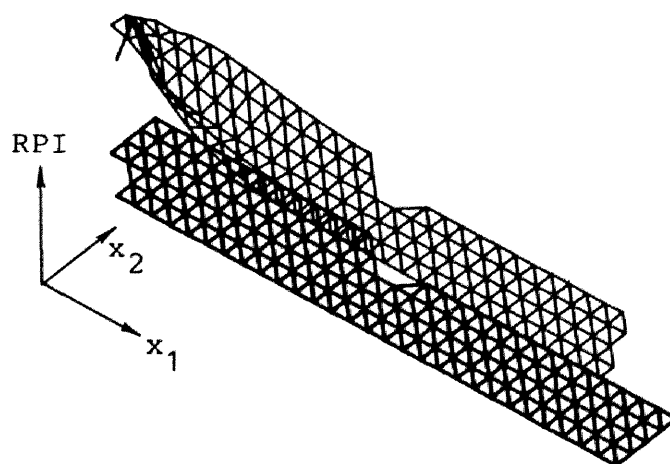


Figure 5.12: RPI distribution

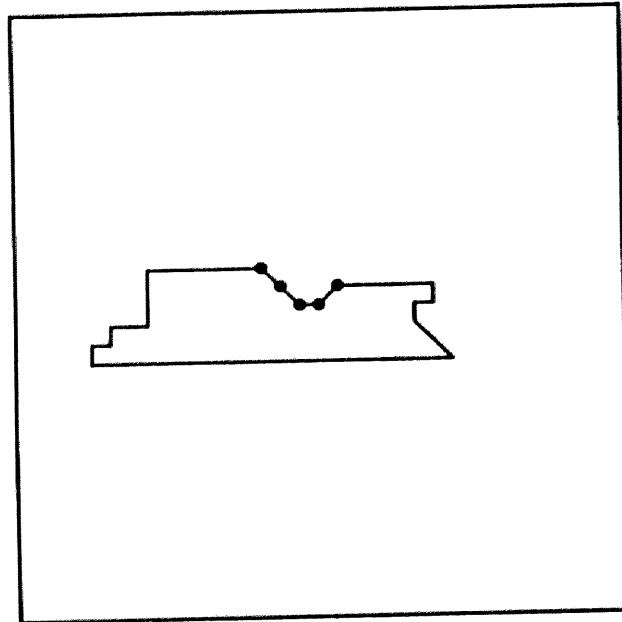


Figure 5.13: B.E. mesh

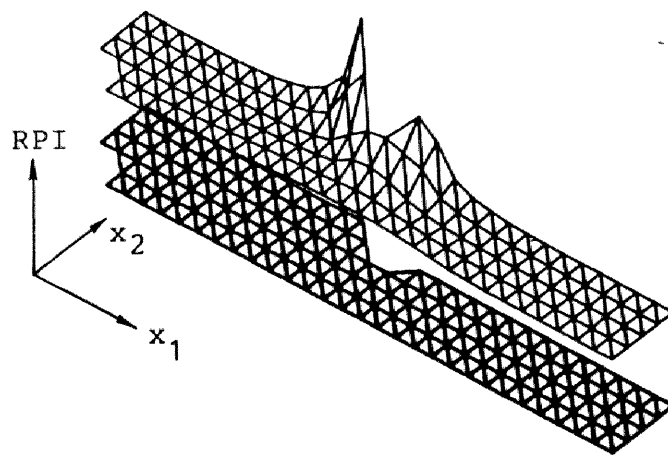


Figure 5.14: RPI distribution

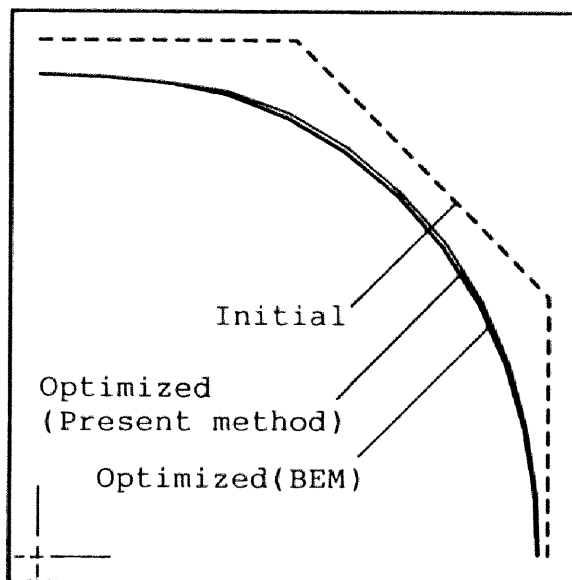


Figure 5.15: Optimized shapes

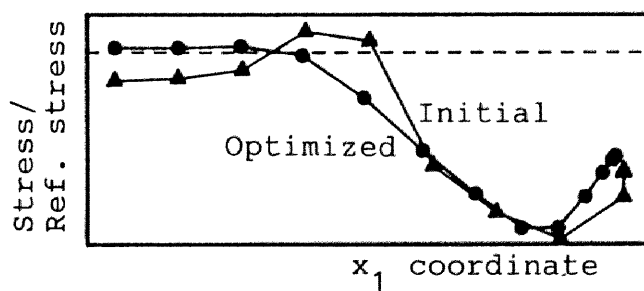


Figure 5.16: Stress distributions

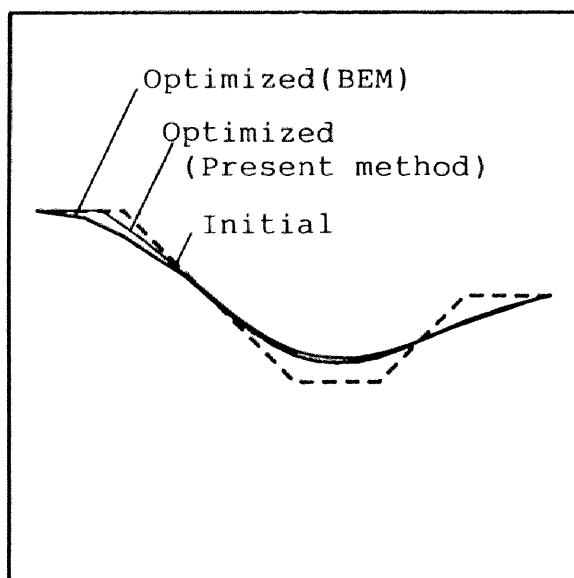


Figure 5.17: Optimized shapes

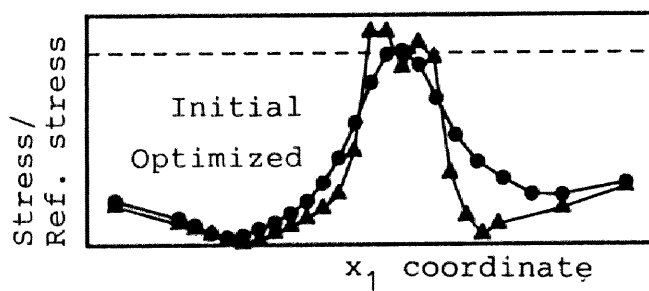


Figure 5.18: Stress distributions

## 5.6 まとめ

この章では、構造物や機械要素の局所形状最適設計のために境界要素法によるズームング法を用いた形状最適化法を提案した。この方法では、まず解析対象全体を有限要素法で解析する。その解析結果に基づいてズームング領域だけを他の部分と分離し、これを境界要素法で解析する。この方法のキーポイントは、どのようにしてズームング領域を設定するかということと、どのようにして有限要素解析のメッシュデータを境界要素解析のメッシュデータに変換するかということである。本論文では第1の点に対して、ひずみエネルギー密度に基づく領域分割指標という基準量の導入を提案し、第2の点に対して、メッシュデータを変換するためのメッシュコンバータの開発と利用について述べた。そして、これらの方法の有効性を検討するために数値実験を行い、次のような結論を得ることができた。

1. 円孔を有する平板の2軸引張りの問題で、異なる $\eta_c$ についてズームング領域を決定し、円孔沿いの応力分布が一定となるように円孔形状を決定した。得られた最適形状は、 $\eta_c$ が小さいほど理論的な最適形状に近いものが得られた。これは理論的に妥当な結果であり、これを適切に定めることにより、形状最適化を局所問題として扱えることを示している。
2. 複数の応力集中部を有してそれらの相互的な影響を考えなければならない問題に対して、本方法を用いてズームング領域を決定し、応力集中部を別々に形状最適化した結果、得られた最適形状は全体を一度に境界要素法で最適化した結果とよく一致した。このことから、本手法は複数の応力集中部を有する問題にも有効であることがわかる。

最後に、今回扱った解析例は比較的簡単な例題であるが、この方法は全体解析の負担が大きくなる複雑な解析対象の局所形状最適化に対して効果的な方法と考えられるので、今後はそのような問題に対しての適用が望まれる。





# Chapter 6

## コイルばね素線断面形状の最適設計

### 6.1 はじめに

この章では、境界要素法が効果的に適用できる実際的な例として、自動車等の基本的な機械部品の1つであるコイルばねをとりあげ、その素線断面形状の最適設計を行う。

この種の問題を扱った最初の研究としては H.O.Fuchs[117] のものがあり、素線断面境界に生じる最大合応力を低下するために、内側にとがった卵型を提案した。しかし、この形状が必ずしもその目的を満足しないことは神谷ら [118] や長屋ら [119, 120] によって指摘されている。そこで、最大応力の低下やばねの小型化といった目的に適した断面形状を決定するために、有限要素法を用いた研究が大河内ら [121] や畔上ら [122] によって行われている。しかし、有限要素法では形状変更ごとにメッシュの再構成が必要であり、このために計算精度と計算効率の点で大きな制約がある。そこで、有限要素法の代わりに境界要素法を用いることが考えられる。しかし、コイルばねの応力解析の支配方程式は準調和方程式であるため、従来のように調和方程式の基本解を用いる定式化では解析に内部セルを必要とし、有限要素法のように形状変更ごとに内部セルの再構成を必要とした。これに対してこの章で提案する方法は、F.J.Rizzo ら [123] の定式化に従って内部セルを必要としない新しい方法を採用しているので、解析対象の境界を要素分割するだけで解析することができて最適設計に有利である。

これらのことから、この章は次のような構成になっている。まず、6.2 節でコイルばね応力解析の境界値問題について述べてから、6.3 節では境界要素法によるコイルばねの応力解析のプロセスについて説明する。そして、6.4 節ではこの章で扱う最適化問題について述べ、6.5 節では実際に素線断面形状の最適設計を行う。最後に 6.6 節はこの章のまとめである。

### 6.2 コイルばねの静応力解析

#### 6.2.1 境界値問題

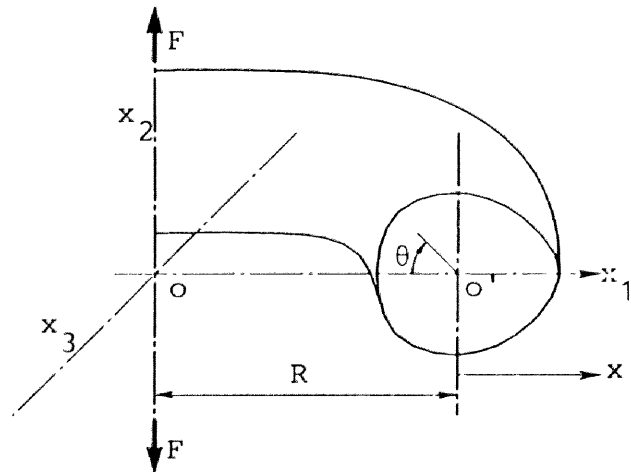


Figure 6.1: Helical coil spring

Fig.6.1 に示されたように、両端で互いに逆向きに働く引張り力（あるいは圧縮力） $F$ を受けているコイルばねを考える。このとき、ばねのコイル半径は素線半径に比べて十分大きく、ばねのピッチや曲率の効果は無視できると仮定すると、素線断面に生じる応力は引張り力によって素線断面に働くねじりモーメントだけによって生じると考えられるので、次のような支配方程式と境界条件を得る [116]。

$$\nabla^2 \phi - \frac{3}{x_1} \phi_{,1} + 2GC_e = 0 \text{ (in } S) \quad (6.1)$$

$$\phi = \text{Const. } (= c) \text{ (on } C) \quad (6.2)$$

ここで、 $\phi, G, C_e$  はそれぞれ応力関数（次節の式 (6.3) 参照）、横弾性係数、積分定数であり、 $S$  および  $C$  は解析対象の領域（ばねの素線断面）およびその境界を示す。また、座標系は図に示されたように  $x_1, x_2$  軸がそれぞればねの半径方向と長さ方向になるようにとる。なお、ばね素線断面の図心  $o'$  からの半径方向距離を  $x'$  とする。

## 6.2.2 各種関数

次に、最適設計で必要となる各種の関数を導入する。

### 応力成分

応力成分のうち 0 とならないのは  $\sigma_{13}$  と  $\sigma_{32}$  であり、これらは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{13} &= -\frac{1}{x_1^2} \phi_{,2} \\ \sigma_{32} &= \frac{1}{x_1^2} \phi_{,1} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

また、これらを用いて素線表面での合応力 $\tau$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\tau &= \sigma_{32}n_1 - \sigma_{13}n_2 \\ &= \frac{1}{x_1^2}\phi_{,n}\end{aligned}\quad (6.4)$$

ここで、 $n_1$ と $n_2$ は素線断面境界における単位法線の $x_1, x_2$ 成分である。

### 引張り力

ばねの軸方向引張り力 $F$ は次式で与えられる。

$$F = \int_S \sigma_{32} dS \quad (6.5)$$

これに式(6.3)を代入して整理し、領域積分を境界積分に変換すると次式を得る。

$$\begin{aligned}F &= \int_S \frac{1}{x_1^2} \phi_{,1} dS \\ &= \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{x_1} \phi_{,n} ds + GC_e \int_C \ln x_1 n_1 ds\end{aligned}\quad (6.6)$$

### ねじりモーメント

素線断面に働くねじりモーメントは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}M_t &= \int_S (\sigma_{32}(x_1 - R_a) + \sigma_{13}x_2) dS \\ &= \int_S (\sigma_{32}x_1 + \sigma_{13}x_2) dS - FR\end{aligned}\quad (6.7)$$

ここで、 $R$ は座標原点とねじり中心の距離である。この式に式(6.3)を代入して整理し、領域積分を境界積分に変換すると次式を得る。

$$\begin{aligned}M_t &= \int_S \left( \frac{1}{x_1^2} \phi_{,1} x_1 - \frac{1}{x_1^2} \phi_{,2} x_2 \right) dS - FR \\ &= \int_C \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2}{x_1^2} \phi ds - FR\end{aligned}$$

結局、境界条件(式(6.2))より

$$M = -FR \quad (6.8)$$

### ねじり中心の座標

座標軸原点とねじり中心の距離 $R$ は次式を満足する。

$$\int_S \frac{R - x_1}{x_1} dS = 0 \quad (6.9)$$

この式の左辺を変形すると、

$$R \int_C \ln x_1 n_1 ds - A = 0 \quad (6.10)$$

結局

$$R = \frac{A}{\int_C \ln x_1 n_1 ds} \quad (6.11)$$

ここで、 $A$  は素線の断面積を表す。

## 6.3 境界要素解析

### 6.3.1 境界積分方程式と離散定式化

この節では、F.J.Rizzo ら [123] の提案に基づいて、コイルばね応力解析の支配方程式から境界積分方程式を導出する。

まず、関数  $\phi$  に次のような変数変換

$$\phi = x_1^2 u - GC_e x_2^2 \quad (6.12)$$

を行い簡単な式の変形を行なえば、式 (6.1) と式 (6.2) から新たに関数  $u$  についての次の支配方程式と境界条件式を得る。

$$M(u) \equiv x_1 \nabla^2 u + u_{,1} - \frac{4u}{x_1} = 0 \quad (\text{in } S) \quad (6.13)$$

$$u = \frac{1}{x_1^2} (c + GC_e x_2^2) \quad (\text{on } C) \quad (6.14)$$

ここで、微分作用素  $M$  が自己随伴形であることから、次のような相反関係式を得る。

$$\int_S (M(u)u^* - uM(u^*)) dS = \int_C x_1 (qu^* - uq^*) ds \quad (6.15)$$

ここで、

$$q \equiv u_{,n} \quad , \quad q^* \equiv u^*_{,n} \quad (6.16)$$

上式の関数  $u^*$  として次式

$$M(u^*(P, Q)) + \delta(P, Q) = 0 \quad (6.17)$$

を満足するような基本解を用いると、次の境界積分方程式を得る。

$$C(P)u(P) = \int_C x_1(Q) \{q(Q)u^*(P, Q) - u(Q)q^*(P, Q)\} ds \quad (6.18)$$

ここで  $P, Q$  はそれぞれソース点と積分点を示す。また、 $C(P)$  は点  $P$  の位置によって決まる定数であり、点  $P$  が領域内にあるとき 1、点  $P$  が滑らかな境界上にあるとき  $1/2$ 、点  $P$  が領域外にあるとき 0 の値を取る。

本論文では、式 (6.18) を一定要素によって離散化し、境界上での  $u$  と  $q$  に関する代数方程式を構成する。これに式 (6.14) で示される Dirichlet 型の境界条件を与えて解析し、境界節点での  $q$  を得る。境界での合応力と引張り力の値は得られた  $q$  から次式によって決定される。

合応力

$$\tau = \frac{2n_1 u}{x_1} + q - \frac{2GC_e x_2 n_2}{x_1^2} \quad (6.19)$$

引張り力

$$F = \int_C \left( n_1 u + \frac{x_1}{2} q \right) ds + GC_e \int_C \left( \ln x_1 n_1 - \frac{x_2 n_2}{x_1} \right) ds \quad (6.20)$$

これらの式は、それぞれ式(6.4)と式(6.6)を  $u$  と  $q$  に関する式に書き直したものである。

### 6.3.2 基本解

この節では、この章で積分方程式の導出に用いた基本解について述べる。

F.J.Rizzo ら [123] は、次の形の方程式

$$\nabla^2 w^* + \frac{1}{x_1} w^*_{,1} - \frac{m^2}{x_1^2} w^* = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.21)$$

は次式で示される特解を持つことを示した。

$$w^*(P, Q) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\theta d\theta}{R(P, Q)} \quad (6.22)$$

ここで、 $R(P, Q)$  はソース点  $P$  と積分点  $Q$  の距離を表す。

式(6.13)は式(6.21)において  $m = 2$  の場合に相当しているから、ばね解析の支配方程式の基本解は次式で与えられる。

$$u^*(P, Q) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{R} \quad (6.23)$$

この式を変形して楕円積分によって表すと次式が得られる [124, 125]。

$$u^*(P, Q) = \frac{4}{D} \left\{ \left( \frac{8(k^2 - 2)}{3k^4} \right) E + \left( 1 + \frac{16(1 - k^2)}{3k^4} \right) K \right\} \quad (6.24)$$

ここで  $E$  と  $K$  は第1種と第2種の完全楕円積分を示し、 $D, k$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} D^2 &= (x_{1p} + x_{1q})^2 + (x_{2p} - x_{2q})^2 \\ k^2 &= \frac{4x_{1p}x_{1q}}{D^2} \end{aligned}$$

最後に、この基本解の特異性について述べておく。2次元弾性解析やポテンシャル解析の基本解はソース点と積分点の2点間距離の関数であり、これが0となったときに特異性を生じる。しかし、ばね解析の基本解は2点間距離の関数となっていないので、ソース点と積分点が一致しても特異性は生じない。そこで、この基本解をよく観察すると  $x_1 = 0$  のところで  $k = 0$  となり、特異性を生じることがわかる。しかし、ばねの座標系では  $x_1 = 0$  はばねの中心軸であるから、節点の座標値が  $x_1 = 0$  となることはなく、事実上この問題では特異性は生じない。

## 6.4 最適化問題

この節では、この章で扱うばねの素線断面形状の最適設計の目的関数や制約条件などについて述べる。ここで定義された最適化問題は、2.5節で説明した逐次線形化法によって扱われる。

### 6.4.1 問題の定義

すでに述べたように、最適化問題は目的関数を与えられた制約条件のもとで設計変数を変更することによって最小化する問題として定式化される。このとき目的関数  $W$ 、制約条件  $f$ 、設計変数  $z$  を次式のように定義する。

$$W = w^T w \quad (6.25)$$

$$w = \{w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_{Ne}\}^T$$

$$f = \{f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{Nc}\}^T = 0 \quad (6.26)$$

$$z = \{z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_{Nd}\}^T \quad (6.27)$$

ここで、 $w$  は目的関数の成分であり、 $Ne$ 、 $Nc$ 、 $Nd$  はそれぞれ目的関数の成分、拘束条件、設計変数の総数である。

### 6.4.2 目的関数の成分

最適設計の目的としては、応力集中を緩和することと応力分布を平滑化することの2種類をとる。これらの場合、目的関数の成分  $w_i$  は次式で与えられる。

(1) 応力集中緩和の場合 この場合の目的関数成分は次式で与えられる。

$$w_i \equiv \begin{cases} \tau_i/\tau_c - 1 & (\tau_i > \tau_c) \\ 0 & (\tau_i \leq \tau_c) \end{cases} \quad (6.28)$$

ここで、 $\tau_i$  は境界節点での合応力値であり  $\tau_c$  は許容応力である。

(2) 応力分布平滑化の場合 この場合の目的関数成分は次式で与えられる。

$$w_i \equiv \tau_i/\tau_c - 1 \quad (6.29)$$

ここで  $\tau_c$  は許容応力であり、初期解析の境界節点での応力値の平均値が与えられる。

### 6.4.3 制約条件

制約条件としては、素線断面積一定条件とねじりモーメント一定条件をとる。これらの制約条件は次のように与えられる。

(1) 素線断面積一定条件 この場合、制約条件は次式で与えられる。

$$f_1 \equiv A^k/A^0 - 1 = 0 \quad (6.30)$$

ここで、 $A$  は解析対象の面積を、上添字は繰り返し計算の回数を示す。

(2) ねじりモーメント一定条件

$$f_2 \equiv M_t^k/M_t^0 - 1 = 0 \quad (6.31)$$

#### 6.4.4 設計変数

他の問題と同様に設計変数としては境界節点の座標値をとり、それを境界の法線方向に変化させることで形状最適化を行う。

#### 6.4.5 収束条件

収束条件は目的関数によって異なり、次の式で与えられる。

(1) 応力集中緩和の場合 正の微小量  $e$  に対して、目的関数評価点での応力が次式を満足するときプロセスは終了する。

$$\tau_i - \tau_c \leq e \quad (i = 1, \dots, Ne) \quad (6.32)$$

(1) 応力分布平滑化の場合 ある正の微小量  $e$  に対して、目的関数評価点での応力が次式を満足するときプロセスは終了する。

$$|\tau_i - \tau_c| \leq e \quad (i = 1, \dots, Ne) \quad (6.33)$$

#### 6.4.6 ねじりモーメント感度

設計感度のうち、応力感度と面積感度については他の章（2.5節）ですでに定義したので、この節ではねじりモーメント感度について説明する。

式 (6.8) からわかるように、素線断面に働くねじりモーメント  $M$  は軸方向引張り力  $F$  と座標原点からねじり中心までの距離  $R$  の積で表される。従って、引張り力が一定ならばねじりモーメント感度は座標原点とねじり中心との距離の設計変数に対する感度、つまりねじり中心感度と同じになる。ねじり中心感度は、ねじり中心の座標を与える式 (6.11) を設計変数  $z_j$  で微分して得られる。つまり、

$$\frac{\partial R}{\partial z_j} = \frac{R}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial z_j} - R \frac{\partial}{\partial z_j} \int_C \ln x_1 n_1 ds \right) \quad (6.34)$$

ここで、 $A$  は断面積を表す。



Table 6.1: Comparison of optimized and reference springs

| $\tau_c/IMS$         | 0.90 | 0.85 | 0.80 |
|----------------------|------|------|------|
| Stress reduction (%) | 2.42 | 2.39 | 2.36 |
| Height reduction (%) | 11.6 | 11.9 | 12.1 |
| Area increase (%)    | 2.3  | 6.3  | 10.7 |

2.5節で、St. Venant のねじり問題でねじりモーメント一定を制約条件として形状最適化を行う場合、ねじりモーメント感度を直接計算して用いる代わりに、修正された形状ごとにねじり剛性率を計算しなおし、それに応じてねじれ角を修正することで制約条件を満足させる方法について述べた。同様にして、ばねの素線断面の最適化でも修正された形状ごとにねじり中心を計算しなおし、それに応じて引張り力を与え直すことでねじりモーメントを一定とする方法が考えられるが、これは適切ではない。なぜならば、コイルばねの場合ねじり中心が変化すると曲率の素線断面形状に与える影響が大きく違ってくるからである。特に、実際の解析ではねじり中心の位置は内側へ、つまりコイル半径が小さくなるように移動することが多いが、この場合、素線半径が十分大きいとして無視していた曲げモーメント、せん断力などの影響を考慮する必要が生じてくる。従って、ねじり中心の位置は変化しないように必ず制約条件に与えなければならない。

## 6.5 解析結果と検討

### 6.5.1 解析例 1 : 楕円形素線ばねの応力解析

本研究で用いたプログラムの解析精度を検討するために、楕円形素線ばねの表面に生じる合応力を計算し、他の解法による結果と比較した。解析対象は Fig.6.2 に示されるようにコイル半径  $R=15\text{mm}$  で、素線断面は長半径  $a=6.96\text{mm}$ 、短半径  $b=4.35\text{mm}$  ( $a/b=1.6$ ) の楕円形である。この素線境界を 30 要素に分割して解析し、結果を佐藤ら [120] の結果と比較する (Fig.6.3)。彼らは同様の問題に対して、ねじりモーメントによる効果以外にせん断力および曲げによる効果を考慮した解析を行い、実験結果とよい一致を見ている。Fig.6.3 は横軸に境界節点と図心のなす中心角を取り、縦軸に応力を同一断面積の円形断面棒の単純ねじり応力値  $\tau$  で無次元化した値を示している。本論文のプログラムによる結果と佐藤らの結果は、全体としてよく似た応力分布を示しているが、わずかにずれている。これは本論文のプログラムでは素線断面に働く曲げモーメントやせん断力の効果を考慮していないためと考えられる。なお、円形断面について計算した結果は、ねじりモーメントだけを考えた結果 [116] とよく一致した。

### 6.5.2 解析例 2 : 円形素線ばねからの最適化

初期形状として、ばね半径が  $15\text{mm}$  で素線断面は半径  $2\text{mm}$  の円形である円形素線ばね

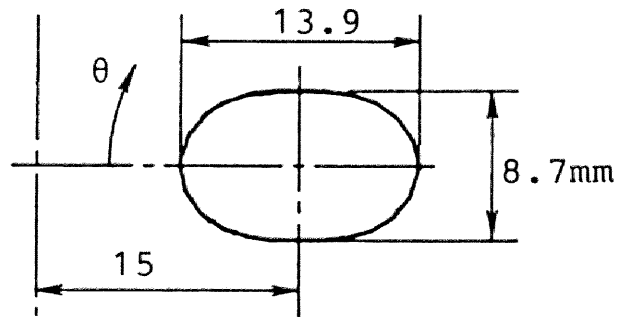


Figure 6.2: Object under consideration

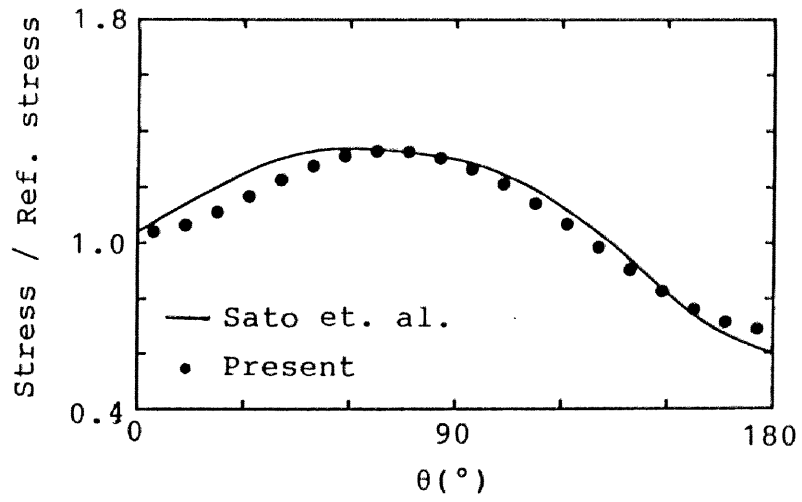


Figure 6.3: Stress distributions

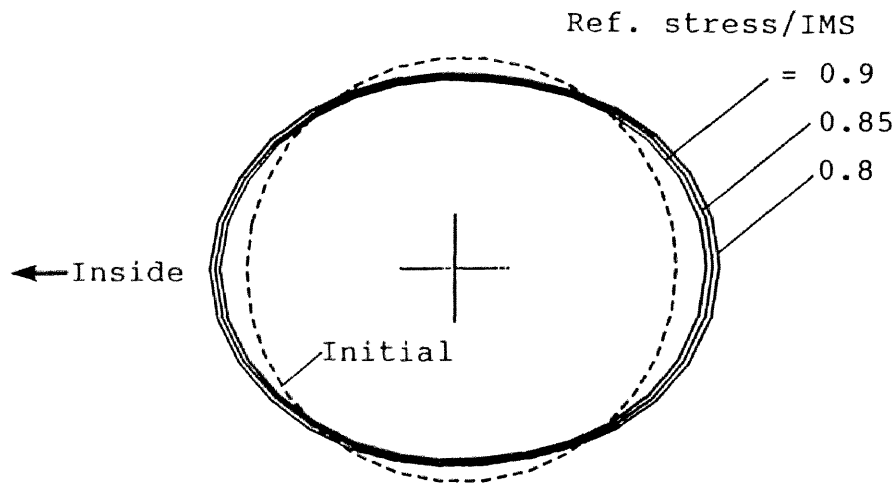


Figure 6.4: Initial and optimized shapes

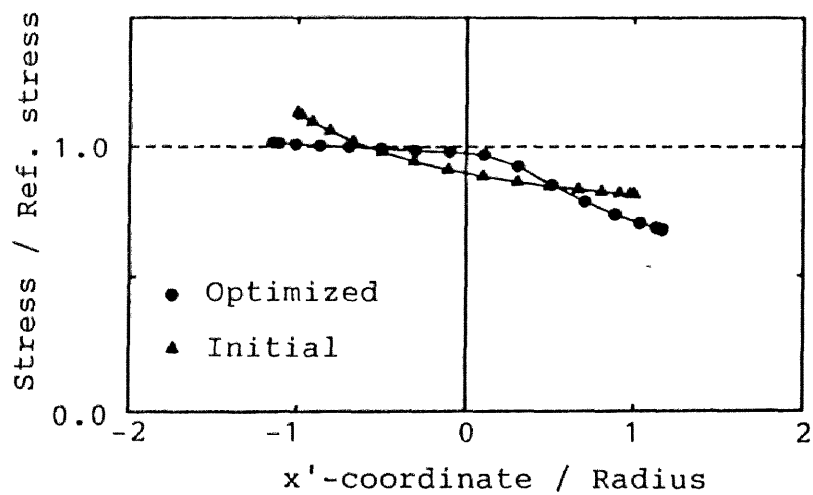


Figure 6.5: Stress distributions

Table 6.2: Comparison of optimized and reference springs

| a/b              | 1.5  | 2.0  |
|------------------|------|------|
| Optimized shape  | 1.7  | 1.65 |
| Reference spring | 2.0  | 2.00 |
| Height reduction | 14.5 | 17.5 |

を考える。この素線境界を 30 要素に分割し、最大応力を緩和することを目的とした素線形状の最適設計を行う。許容応力は初期最大応力 (Initial Maximum Stress、IMS) の 90 %、85 %、80 % をとり、制約条件としてねじりモーメント一定条件、つまり軸方向の引張り力とねじり中心位置が一定という条件を指定する。なお、以下の例題でねじりモーメント一定というときは、必ず引張り力とねじり中心位置が一定であることを意味する。

最適形状はどの場合も数回から 10 数回の繰り返し計算によって得られた。初期形状と得られた最適形状を Fig.6.4 に示す。また、Fig.6.5 には許容応力が初期最大応力の 85 % の場合について初期形状と最適形状における応力分布の比較を示す。このうち、Fig.6.4 から最適形状はいずれの場合もばねの半径方向に長い楕円に近い形となり、その断面積は許容値がきびしくなるに従って、少しずつ面積が増加していることがわかる。そこで、これらの最適形状をそれと同面積の円形ばね（以下これを基準ばねと呼ぶ）と比較し、最適形状における最大応力と素線断面高さが基準ばねに対してどれだけ減少しているかを検討する。結果を Table 6.1 に示す。この表には、最適形状の初期形状に対する断面積増加率も同時に示す。これらのデータからわかるように、本論文の数値実験で得られた最適形状では基準ばねに比べ最大応力はわずかに低下しているが、その割合は大きくない。これに対して、素線断面高さは約 10 数%減少している。これらのことから、楕円形素線ばねは最大応力の低下よりも、ばねを小型化するのに有利であることがわかる。

### 6.5.3 解析例 3：高さ制約を受ける最適化

次に、初期形状として第 1 の解析例と同じ寸法の円形素線断面ばねを考え、素線の断面高さが最小となるように素線形状を最適化する。許容応力として初期形状の最大値をとり、制約条件にはねじりモーメントと断面積の一定条件をとる。この場合も最適形状は 10 数回の繰り返し計算で得られている。Fig.6.6 には初期形状と最適形状の比較を示し、Fig.6.7 には両形状における応力分布の比較を示す。このうち、Fig.6.6 から最適形状は横に長い楕円形または卵型の形状であることがわかる。また、何度かの数値実験を通じて、断面高さの最大減少量は 10 数%であることが確かめられた。これらの結果は、2 番目の解析例の結果を再確認する事になった。

### 6.5.4 解析例 4：異なる初期形状からの最適化

初期形状として、ばね半径が 15mm で、素線断面は半径 2mm の基準ばねと同じだが、

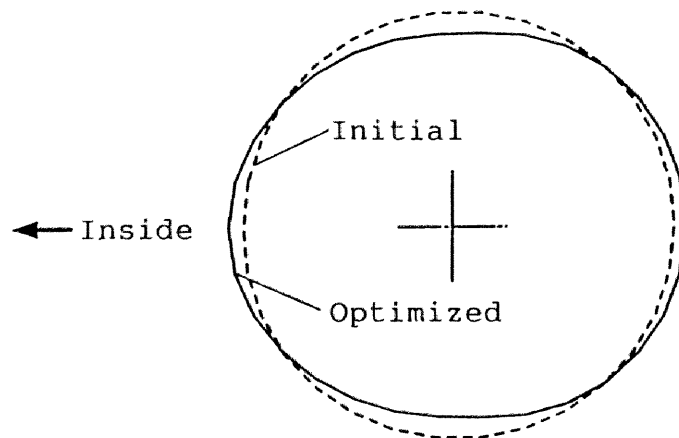


Figure 6.6: Initial and optimized shapes

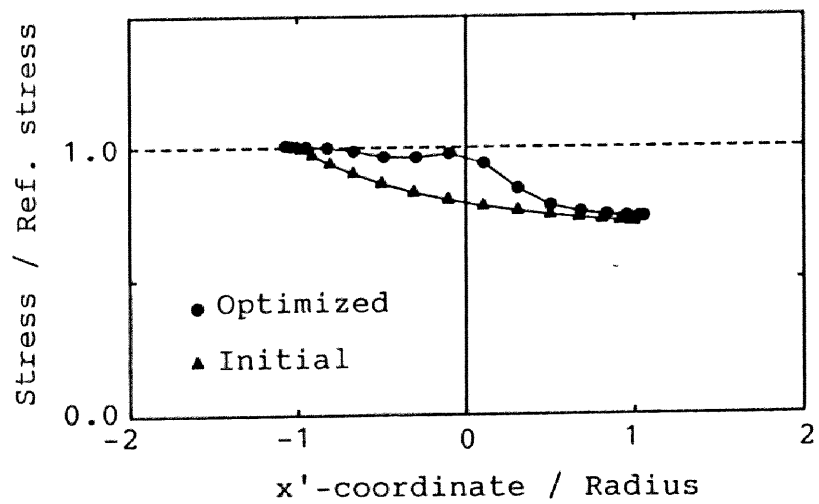


Figure 6.7: Stress distributions

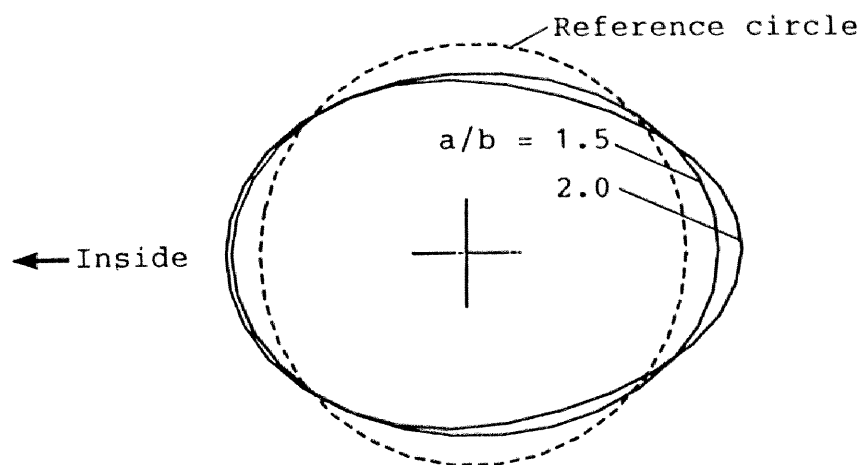


Figure 6.8: Initial and optimized shapes

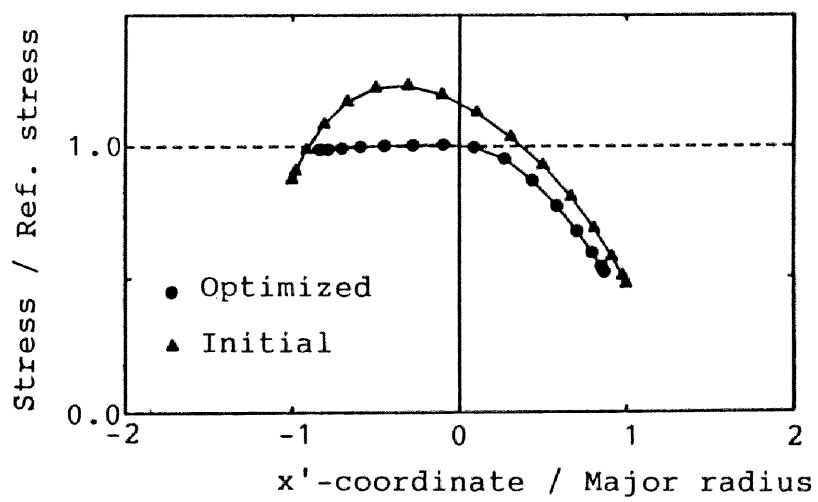


Figure 6.9: Stress distributions

Table 6.3: Comparison of max. and min. stresses

|             | Max. | Min. | Stress ratio |
|-------------|------|------|--------------|
| Initial     | 1.54 | .84  | 1.83         |
| Optimized   | 1.43 | 1.06 | 1.35         |
| Ref. spring | 1.47 | 1.05 | 1.40         |

長半径  $a$  と短半径  $b$  の比はそれぞれ  $a/b=1.5$  と  $2.0$  であるような 2 種類の楕円形素線ばねを考える。この素線境界を 30 要素に分割して解析し、最大応力を緩和することを目的に素線形状の最適設計を行う。許容応力は基準ばねの最大応力をとり、制約条件としてばね素線断面に働くねじりモーメントと断面積を一定とする。最適形状と基準ばね形状の比較を Fig.6.8 に示す。どちらの場合も、最適形状は数回から 10 数回の繰り返し計算によって得られており、その形状は外側に尖った卵型である。Fig.6.9 には、 $a/b=1.5$  の楕円形を初期形状とする場合について、初期形状と最適形状の応力分布の比較を示す。また Table 6.2 には、最適形状における素線断面高さの基準ばねに対する減少量を示す。

### 6.5.5 解析例 5 : 滑らかな応力分布を得る最適化

初期形状として、ばね半径が  $R=15\text{mm}$  で、素線断面積は半径  $2\text{mm}$  の基準ばねと同じだが、その形状は長半径  $a$  と短半径  $b$  の比が  $a/b=1.5$  であるような楕円形素線ばねを考える。この素線境界を 30 要素に分割して解析し、滑らかな応力分布を求めることを目的として最適化を行う。基準応力として基準ばねの平均応力をとり、制約条件としてばね素線断面に働くねじりモーメントと断面積を一定とする。まず、Fig.6.10 に初期形状と得られた最適形状の比較図を示す。この図には円形素線ばねから最適化を行った結果も同時に示しているが、それは楕円形からの結果と完全に一致している。次に、初期形状と最適形状での応力分布の比較を Fig.6.11 に、初期形状と最適形状、それに基準ばねの最大応力と最小応力、そして両者の比（応力比）の比較を Table 6.3 に示す。これらのデータから初期形状と最適形状を比較すると、最適形状では最大応力が低下し、一方で最小応力は増加し、応力分布は初期形状のそれに比べて滑らかになっていることがわかる。しかし、基準ばねと比較すると最大応力、最小応力、応力比についてあまり改善はみられない。この結果から、滑らかな応力分布という点では、円形の素線ばねはかなり優秀なばねであるということがいえる。

## 6.6 まとめ

この章では、自動車部品などとして広く用いられているコイルばねの境界要素法による応力解析プログラムを開発し、これを用いてばねの素線断面形状の最適設計を行った。従来ばねの応力解析に用いられていた境界要素法の定式化は、Laplace 方程式の基本解を用いるので解析に内部セルを必要としていたが、この章で示した新しい定式化を用いれば境

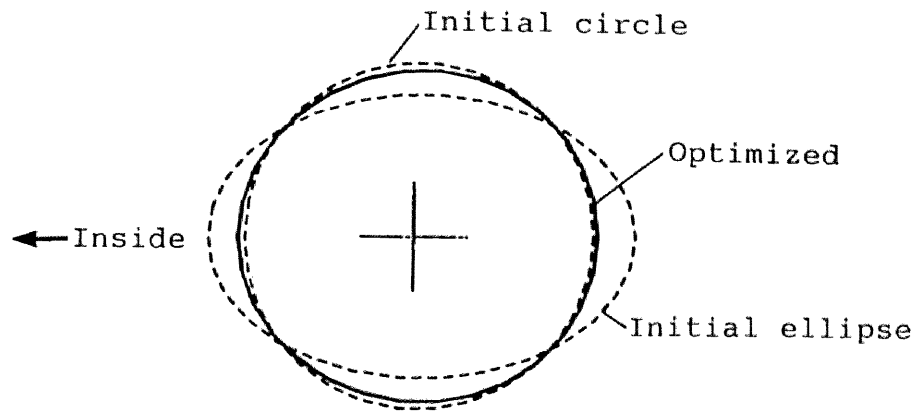


Figure 6.10: Initial and optimized shapes

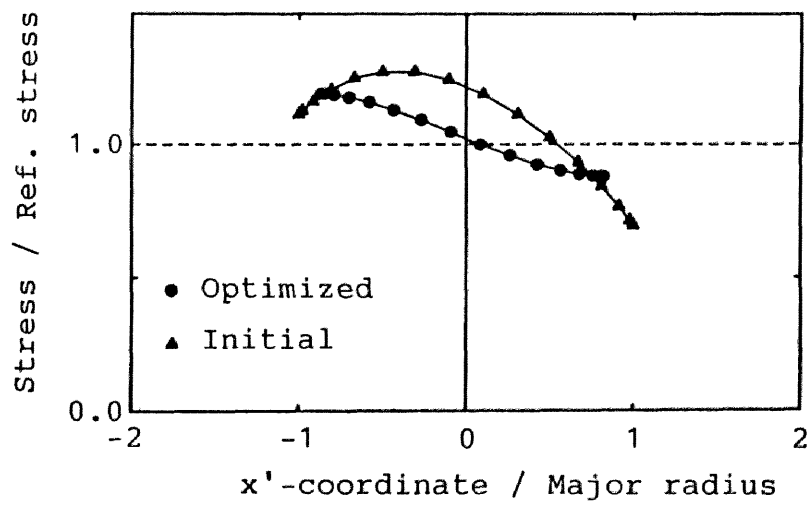


Figure 6.11: Stress distributions



界を要素分割するだけで解析を行うことができるので、非常に効率よく、また精度よくばねの素線形状の最適設計を行うことができる。この解析プログラムを用いて実際に素線断面形状の最適設計を行い、次のような結論を得た。

1. 円形や楕円形などの初期形状から応力集中を緩和するような形状最適化を行い、従来から他の研究者によって提案されているのと同じ楕円形や卵型などの最適形状を得ることができた。
2. 1. の最適形状のばねを同一断面積の円形断面ばねと比較すると、最大応力の低下はあまり大きくないが、断面高さは10数%低下することがわかった。このことから、異形断面ばねは最大応力の低下よりも、ばねの小型化に役立つことがわかる。
3. 円形や楕円形の初期形状から応力分布を滑らかにするような形状最適化を行い、同一の最適形状を得ることができた。そして、その形状は円形からわずかに変形した形であった。
4. 3. の最適形状を同一断面積の円形素線ばねと比較した結果、それらの最大応力、最小応力、応力比にはあまり変化がないことがわかった。この結果から、滑らかな応力分布を得るという点では円形の素線ばねはかなり有効なばねであるといえる。

# Chapter 7

## 境界要素法に対する適応メッシュ法の開発

### 7.1 はじめに

境界要素法では解析対象の境界を要素分割して解析を行うために、その計算精度は境界の要素分割に大きく依存する。そこで、解析結果の精度を評価しながら自動的にメッシュを変更し、望ましい精度が得られるメッシュ分割を決定する適応メッシュ法の開発が熱心に進められている。境界要素法に限らず、適応メッシュ法を開発する場合のキーポイントとなるのは次の2点である。

- 真の解が不明である問題について数値解と真の解との誤差をどの様にして予測するか。
- 誤差とメッシュ分割とをどのように関係付けるか。

このうち、第1のポイントについては今までに様々な方法が提案されており、これらは解の誤差を予測して用いる方法と誤差の代わりに方程式の残差を用いる方法に大別される。さらに、これらもいくつかの種類に分けることが可能であり、残差型の場合では誤差をエネルギーノルムの形で評価する E.Alarcon らの方法 [74–79] や、それとは違い  $L_2$  ノルムを用いる E.Rank の方法 [80, 81] や P.Parreira の方法 [89, 90] などがある。一方、誤差型では数値解の内挿誤差を用いる J.J.Rencis らの方法 [82–88]、2次要素で節点の配置の違いによる解のずれを用いる M.Guiggiani の方法 [92]、通常の直接法の解とソース点を領域外にとる DRM法の解の差を誤差とする結城らの方法 [93]、方程式の残差と誤差の関係式から誤差を決定する川口らの方法 [94–96] などがある。

これに対して、第2のポイントである誤差とメッシュ変更との関連付けについてはあまり理論的な方法が提案されておらず、要素ごとの誤差 (いわゆる Error Indicator) の平均値などを基準として、これよりも大きな値を持つ要素を細分割するに過ぎない。このように、従来の方法では誤差解析の結果をメッシュ再分割に効果的に反映させられないので、定量的に精度よく (場合によっては、長い計算時間をかけて) 決定した誤差解析の結果を有効に利用できていない。これは、従来から効果的な適応メッシュ法のためには第1に精度よい誤差評価法が必要であると考えられて、実際に研究の中心がこれに向けられた結果、誤

差評価法がメッシュ変更法と独立して開発されてきたためである。しかし、実際には適応メッシュ法とは誤差評価法とメッシュ変更法が一体となったものであって、両者を分けて考えることは正しくない。そこで、本研究では誤差評価とメッシュ変更とが一体となった適応メッシュ法を開発することを第1の目的とし、プロセス全体を最適化問題として定式化する方法を提案する。

また、もう1つ従来から指摘されていた問題点としては、最適メッシュを決定するまでに長い計算時間を必要としていたことがあげられるが、本論文ではこれを解決するために比較的細かく等分割された初期メッシュをあえて用いることを提案する。このような初期メッシュを用いればプロセス全体としての計算時間を大幅に短縮できる可能性が高いが、これを積極的に用いることはいままで提案されていない。それは、細分割された初期メッシュとしてどのくらいの自由度でどのように分割されたメッシュを用いればよいのか分からないので、初期メッシュの選択によっては必要以上に多くの自由度で構成されたメッシュが生じるためである。これを解決するために、本論文のメッシュ変更法には精度改善のために自由度を追加する機能の他に、精度改善に寄与しない自由度を除去する機能を有している。このような操作が可能となるのは、プロセス全体を最適化問題として定式化した結果、メッシュ変更による誤差の増減を定量的に評価することが可能となったからである。

以上の議論を踏まえて、この章の次節以降は次のような構成になっている。まず、7.2節では適応メッシュプロセスを最適化問題として定式化する。次に、7.3節では実際に最適メッシュを決定する方法について述べる。7.4節では提案した方法を2次元ポテンシャル解析と2次元弾性解析の最適メッシュ構成に用いてその有効性を検討し、7.5節ではこの章について簡単にまとめる。

## 7.2 最適メッシュ構成問題

この節では、プロセス全体を最適化問題として構成するために目的関数、設計変数、制約条件を定義する。

### 7.2.1 目的関数

目的関数は誤差面積と名付けた関数値を用いて定義される。そこで、まずこの誤差面積について述べてから、2次元ポテンシャル解析と2次元弾性解析の目的関数を定義する。

#### 誤差面積

本論文の2次元境界要素解析プログラムでは線形要素を用いている。従って、その数値解は境界の接線方向に取った座標系  $s$  について区分的に線形な分布曲線  $P(s)$  で表される (Fig.7.1)。一方、この数値解を3次スプライン関数で近似すればより精度の高い近似解の分布曲線  $Q(s)$  が得られる。誤差面積  $A$  は、数値解と近似解の差の絶対値を  $s$  について

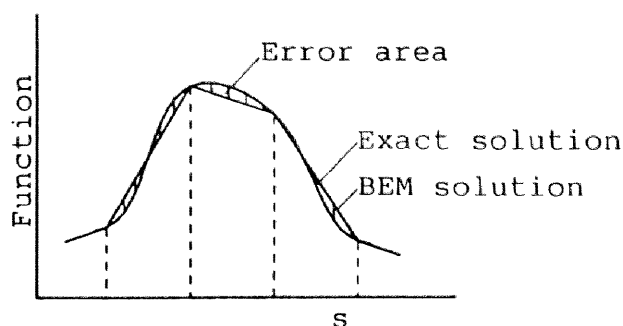


Figure 7.1: Error area

一周積分した値で定義される。つまり、

$$A = \int_c |P(s) - Q(s)| ds \quad (7.1)$$

ここで、 $c$  は解析対象の境界を示す。

### 2次元ポテンシャル解析の目的関数

前節では誤差面積を一般的に定義したが、2次元ポテンシャル解析では未知数はポテンシャル値とフラックス値の2種類があるので誤差面積も2種類定義される。これらをそれぞれ  $A_u$ 、 $A_q$  とすれば、2次元ポテンシャル解析の場合の目的関数  $W$  は次式で与えられる。

$$W(A_u, A_q) = \left( \frac{A_u}{A_u^0} \right)^2 + \left( \frac{A_q}{A_q^0} \right)^2 \quad (7.2)$$

ここで、上添字 ( $^0$ ) は初期メッシュについての誤差面積を示す。

### 2次元弾性解析の目的関数

2次元ポテンシャル解析では関数値はポテンシャル値とフラックス値の2種類であるから誤差面積は2種類だが、2次元弾性解析では関数値は1軸及び2軸方向の変位と表面力だから全部で4種類の誤差面積が定義される。これらをそれぞれ  $A_{u1}$ 、 $A_{u2}$ 、 $A_{t1}$ 、 $A_{t2}$  とすれば、2次元弾性解析の場合の目的関数  $W$  は次式で与えられる。

$$W(A_{u1}, A_{u2}, A_{t1}, A_{t2}) = \left( \frac{A_{u1}}{A_{u1}^0} \right)^2 + \left( \frac{A_{u2}}{A_{u2}^0} \right)^2 + \left( \frac{A_{t1}}{A_{t1}^0} \right)^2 + \left( \frac{A_{t2}}{A_{t2}^0} \right)^2 \quad (7.3)$$

## 7.2.2 設計変数

最適化問題の設計変数としては、未知関数を近似する近似関数の自由度の総数を取り、誤差の比較的大きな要素には自由度を追加し、誤差の比較的小さな要素からは自由度を除去して目的関数の最小値を探索する。自由度を変化させる方法には、従来の  $h$  法に基づい

て要素の内挿関数の次数は一定で、節点数を変化させて自由度を変化させる方法と、従来の  $p$  法に基づいて要素数は一定で、要素の内挿関数の次数を変化させる方法が考えられるが、本論文では前者の方法を用いることにする。なぜならば、後者の方法では解析プログラムを変更しなければならないからである。

### 7.2.3 制約条件

さきに述べたように、本論文の方法では細分割された初期メッシュを用いる。これは、第1に初期メッシュに最適メッシュに近いものを選ぶことで計算時間を短縮できるからであり、第2に誤差解析（この場合は目的関数）の計算精度が荒いメッシュの場合よりも高いからである。このような理由から、初期メッシュの自由度は多ければ多いほどよい。しかし、大きな自由度を有する初期メッシュから自由度が増加するようなメッシュ変更を行うと、精度の改善に寄与しない自由度を生じる可能性がある。そこで、自由度総数が初期メッシュを越えないような制約条件を与えることにする。つまり、

$$N \leq N^0 \quad (7.4)$$

ここで、添え字  $(0)$  は初期メッシュの自由度総数を示す。

## 7.3 適応メッシュプロセス

この節では実際に最適メッシュを決定するプロセスを説明する。そのために、まず設計変数の変化に対する目的関数の変化量（いわゆる設計感度）の計算方法について述べる。それから、実際に最適メッシュを構成するプロセスについて説明する。

### 7.3.1 設計感度の計算

設計感度には、要素を2等分して節点を追加することによる目的関数の減少量（正の感度）と、節点を除去して隣接する2要素を結合することによる目的関数の増加量（負の感度）の2つがある。前者は要素毎に定義される量であり、記号  $\delta W_i^-$  で表すことにする。これに対して、後者は節点毎に定義される量で、記号  $\delta W_i^+$  で表すことにする。これらは次のようにして決定される。

#### 正の設計感度

まず、Fig.7.2を用いて2次元ポテンシャル解析の場合の正の設計感度の計算方法について述べる。2等分される要素の両端点を  $A$ 、 $B$  とする。この要素を2等分したとき新しく付け加えられる節点が図中の点  $C$  である。節点を追加する前にこの要素に生じている誤差面積は、直線  $AB$  と曲線  $BCA$  で囲まれた面積で表される。一方、節点追加後の誤差面積は、直線  $AC$  と曲線  $CA$  で囲まれた面積と直線  $CB$  と曲線  $BC$  で囲まれた面積の和で表される。従って、細分割によって三角形  $ABC$  の面積に相当するだけの誤差面積が減少する

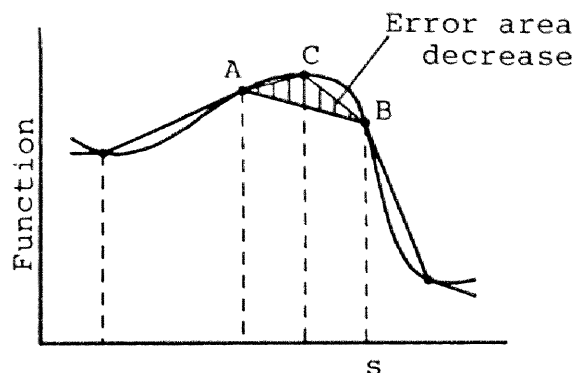


Figure 7.2: Error area decrease

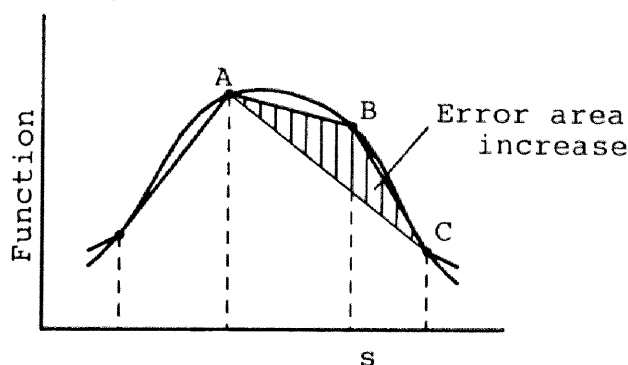


Figure 7.3: Error area increase

ことになる。2次元ポテンシャル解析では、この誤差面積の減少量はポテンシャル値とフラックス値の両方について考えられるので、これらを $\delta A_p^-$ 、 $\delta A_q^-$ とする。なお、このうち境界条件として与えられた関数値についてはその減少量は0となる。

誤差面積の減少量 $\delta A_p^-$ 、 $\delta A_q^-$ と式(7.2)から、要素*i*に関する正の設計感度 $\delta W_i^-$ は次式で計算される。

$$\delta W_i^- = W(A_p - \delta A_p^-, A_q - \delta A_q^-) - W(A_p, A_q) \quad (7.5)$$

一方、2次元弾性解析の場合は誤差面積が1軸、2軸方向の変位と表面力の4種類あるので誤差面積の減少量も4種類定義される。これらを、それぞれ $\delta A_{u1}^-$ 、 $\delta A_{u2}^-$ 、 $\delta A_{t1}^-$ 、 $\delta A_{t2}^-$ とすれば、式(7.3)を用いて、2次元弾性解析の場合の正の設計感度 $\delta W_i^-$ は次式で与えられる。

$$\delta W_i^- = W(A_{u1} - \delta A_{u1}^-, A_{u2} - \delta A_{u2}^-, A_{t1} - \delta A_{t1}^-, A_{t2} - \delta A_{t2}^-) - W(A_{u1}, A_{u2}, A_{t1}, A_{t2}) \quad (7.6)$$

### 負の設計感度

次に、Fig.7.3を用いて2次元ポテンシャル解析の場合の負の設計感度の計算方法について述べる。節点Bが除去されて新しく要素ACができると考える。このとき、節点が除去される前に要素ABと要素BCに生じている誤差面積は、直線ABと曲線BAで囲まれた面積と直線BCと曲線CBで囲まれた面積の和で表される。一方、節点Bが除去された場合の誤差面積は、直線ACと曲線CBAで囲まれた面積で表される。従って、この場合節

点 B が除去されることによって、誤差面積は三角形 ACB の面積に相当するだけ増加することになる。この増加量はポテンシャル値とフラックス値の両方に対して定義され、これらを  $\delta A_p^+$ 、 $\delta A_q^+$  とする。この場合も、境界条件として指定された関数値については、誤差面積増加量は 0 となる。

誤差面積の増加量  $\delta A_p^+$ 、 $\delta A_q^+$  と式 (7.2) から、節点  $i$  に関する負の設計感度  $\delta W_i^+$  は次式で計算される。

$$\delta W_i^+ = W(A_p + \delta A_p^+, A_q + \delta A_q^+) - W(A_p, A_q) \quad (7.7)$$

一方、2次元弾性解析の場合は誤差面積が1軸、2軸方向の変位と表面力の4種類あるので誤差面積の増加量も4種類定義される。これらを、それぞれ  $\delta A_{u1}^+$ 、 $\delta A_{u2}^+$ 、 $\delta A_{t1}^+$ 、 $\delta A_{t2}^+$  とすれば、式 (7.3) を用いて、2次元弾性解析の場合の負の設計感度  $\delta W_i^+$  は次式で与えられる。

$$\delta W_i^+ = W(A_{u1} + \delta A_{u1}^+, A_{u2} + \delta A_{u2}^+, A_{t1} + \delta A_{t1}^+, A_{t2} + \delta A_{t2}^+) - W(A_{u1}, A_{u2}, A_{t1}, A_{t2}) \quad (7.8)$$

### 7.3.2 メッシュ変更プロセス

これまでに導入した正負の設計感度を用いれば、節点の追加・除去についての優先順位を決定することができる。つまり、正の設計感度の大きい順番に要素に番号をつければ、これが節点の追加順位となる。一方、負の設計感度の小さい順番に節点に番号をつければ、これが節点の除去順位を示すことになる。そして、節点の追加・除去はこれらの順位にしたがって次のように行われる。

1. まず、高い追加順位を持つ要素に節点が追加される。それと同時に、高い除去順位を持つ節点が除去される。この節点の追加と除去は必ずペアとして行われる。従って、この操作によって自由度の総数は変化しない。
2. 1. の操作によって目的関数が減少している間はこの操作を続ける。そして、目的関数の変化量が増加に転じたところで次の操作に進む。
3. 2. までの操作で得られたメッシュから、不必要な節点を除去するために次の操作を行う。
  - 得られたメッシュの全節点について負の設計感度を計算し直す。
  - 高い除去順位を持つ節点を除去する。これは、節点除去による誤差の増大がある値以下（この論文の解析例では1%以下）となるように行われる。

### 7.3.3 適応メッシュプロセス

本論文の適応メッシュ法は、プロセス全体が初期入力・誤差評価・メッシュ変更の3つに大きく分けられ、これらはそれぞれ次のような操作を行う (Fig.7.4)。

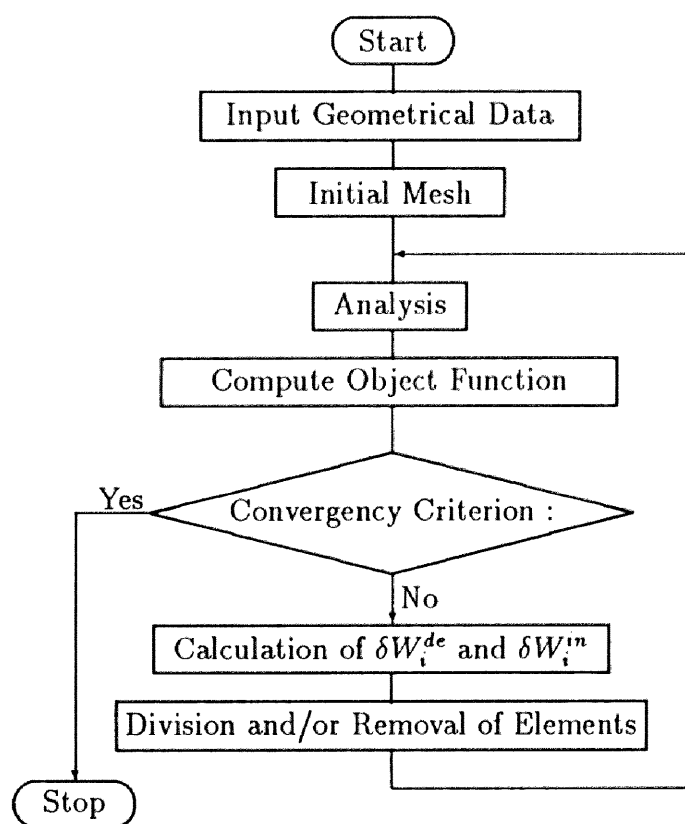


Figure 7.4: Adaptive mesh procedure



Table 7.1: Results of case-A

|                              | case-A1 | case-A2 | case-A3 |
|------------------------------|---------|---------|---------|
| Iteration                    | 1       | 1       | 1       |
| Object function decrease (%) | 10      | 20      | 39      |

**初期入力** この部分では与えられた解析対象の形状のデータから、細分割された初期メッシュのデータを作製する。分割方法は等分割が基本となるが、問題によっては部分的に不等分割することも可能である。

**誤差評価** この部分では与えられたメッシュデータについて境界要素解析を行い目的関数を計算する。そして、目的関数が前のステップの目的関数より大きければプロセスを終了し、小さければメッシュ変更に進む。従って、プロセスの収束判定条件は次式で与えられる。

$$W^{k-1} < W^k \quad (7.9)$$

ここで、上添字は繰り返し計算の回数を示す。

**メッシュ変更** この部分では、まず各要素についての正の設計感度と各節点についての負の設計感度を計算し、それからメッシュを変更する。メッシュ改良のプロセスは先に説明した通りである。メッシュ変更が終了すれば、再び誤差評価に戻り先の操作を繰り返すことになる。

## 7.4 解析結果と検討

この節では、さきに提案した適応メッシュ法を2次元ポテンシャル解析と2次元弾性解析の最適メッシュ決定に用いてその有効性を検討する。

### 7.4.1 解析例1：正方形平板の熱伝導解析

最初の例題として Fig.7.5 に示される正方形平板の熱伝導解析を考える。この問題では点 B と C がかど点となるため、これらの点に2重節点をとって解析する。

**A. 等分割初期メッシュ** 初期メッシュとして自由度がそれぞれ 31、39、51 である3種類の等分割メッシュを考え、これらを case-A1、case-A2、case-A3 とする。そして、自由度一定の条件下でこれらから決定される最適メッシュを比較し、提案した適応メッシュ法に対する初期メッシュの自由度の影響を検討する。

初期メッシュと得られた最適メッシュのメッシュ分割及び関数分布を Fig.7.6 から Fig.7.11 に示し、繰り返し計算の回数と目的関数の減少量を Table 7.1 に示す。

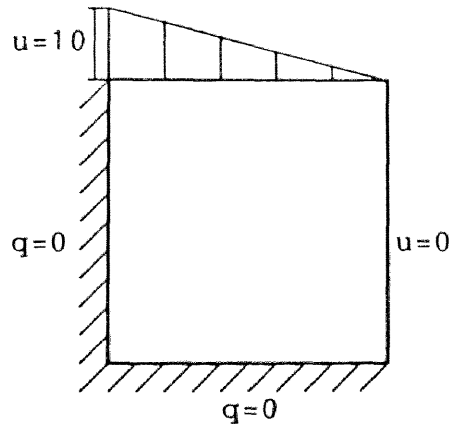


Figure 7.5: Object under consideration

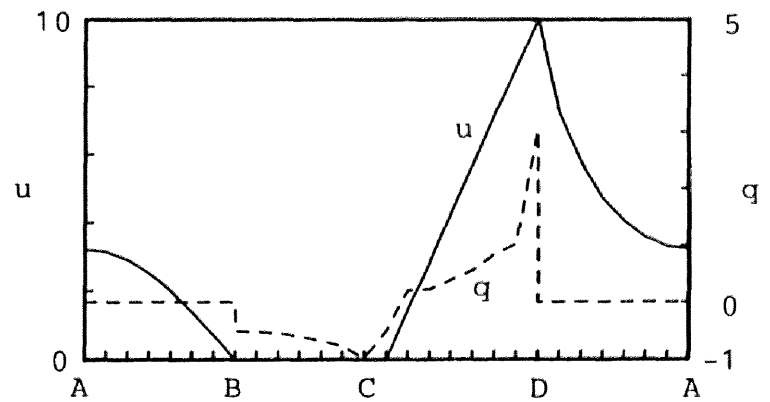
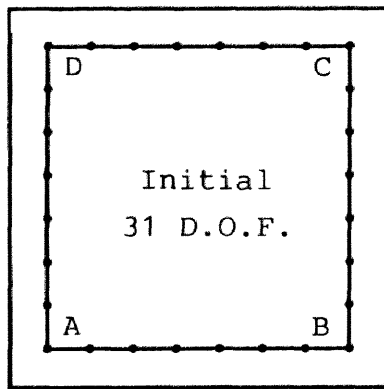


Figure 7.6: Initial mesh (case-A1)

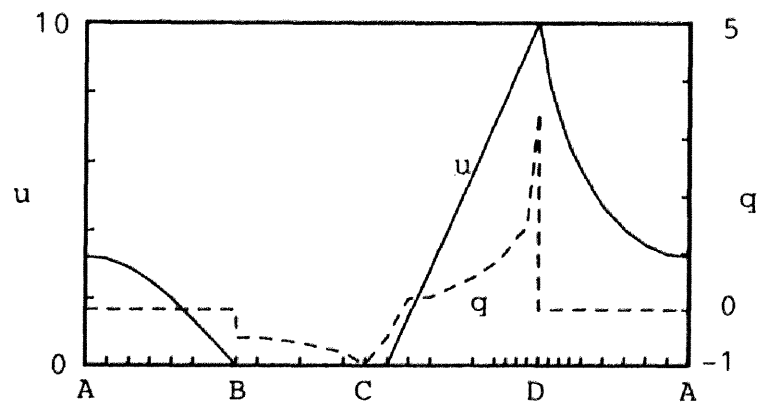
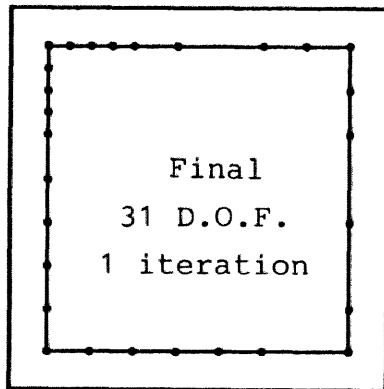


Figure 7.7: Optimal mesh (case-A1)

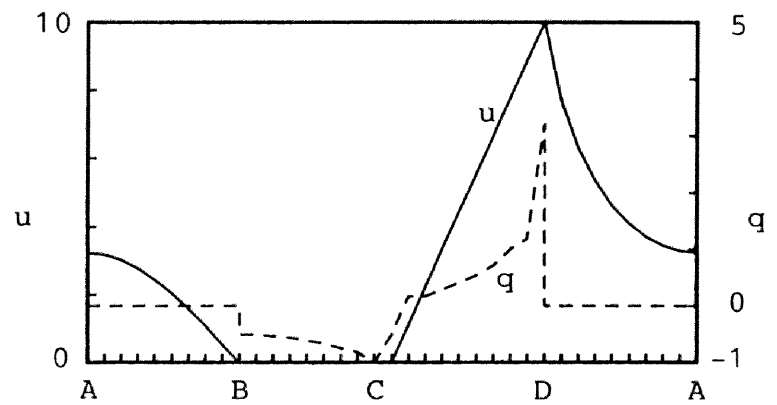
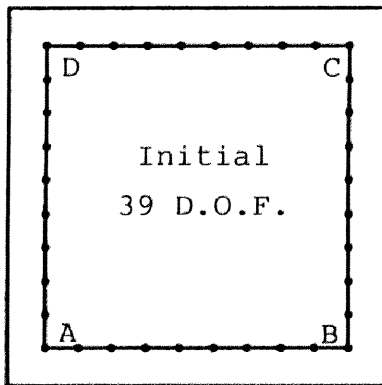


Figure 7.8: Initial mesh (case-A2)

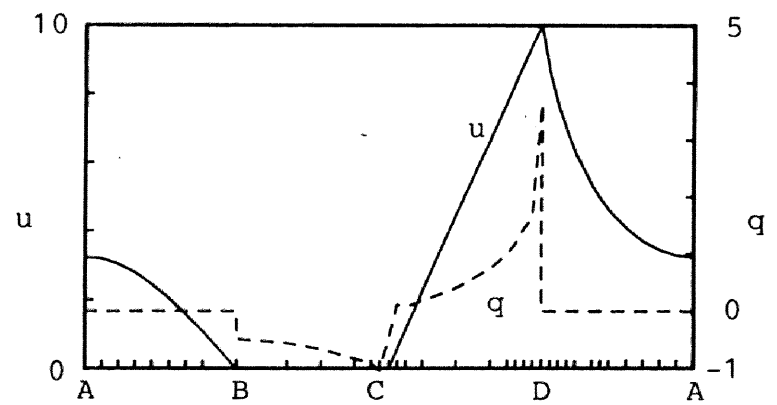
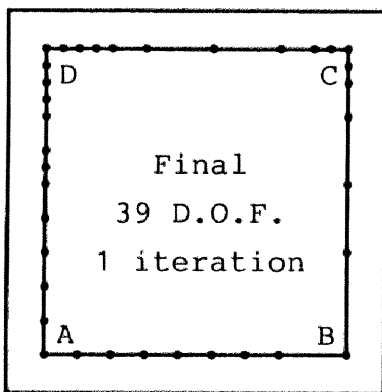


Figure 7.9: Optimal mesh (case-A2)

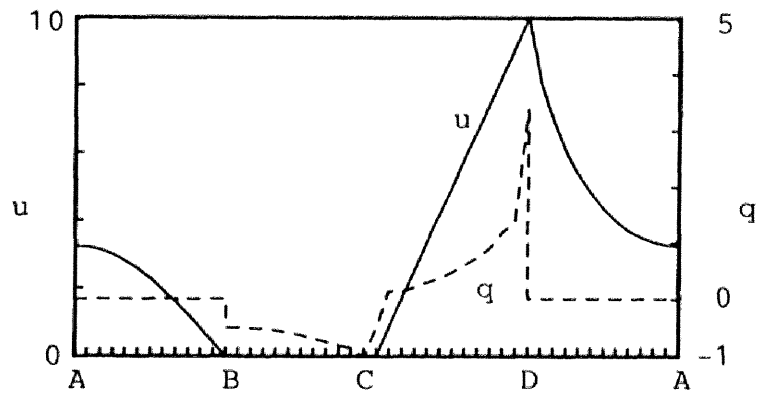
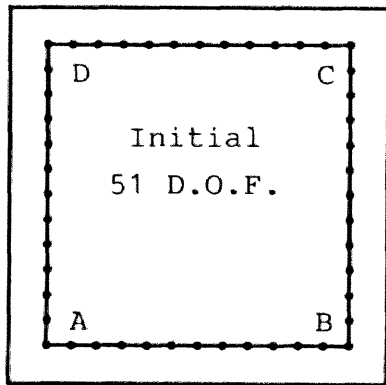


Figure 7.10: Initial mesh (case-A3)

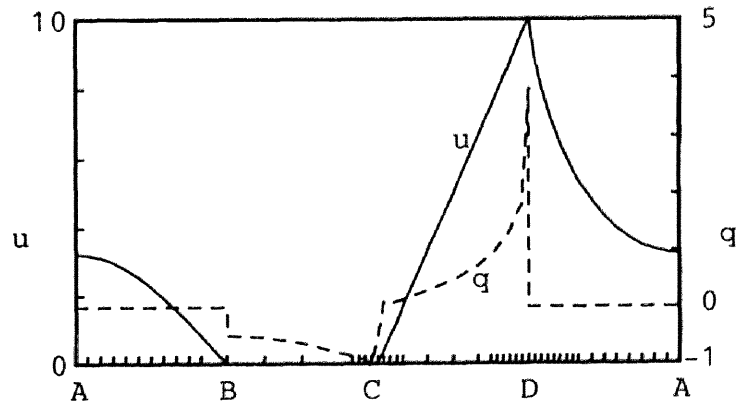
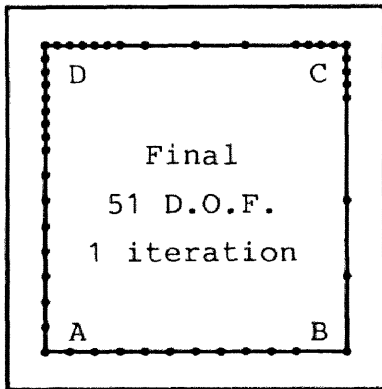


Figure 7.11: Optimal mesh (case-A3)

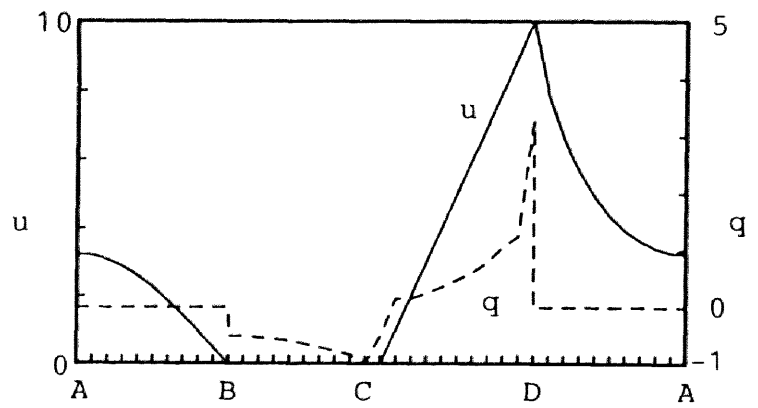
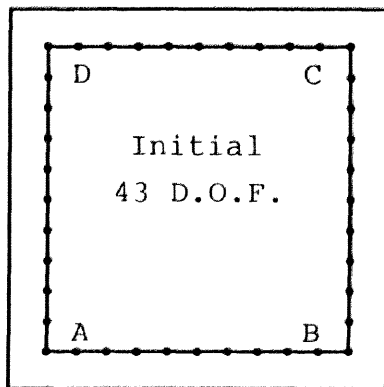


Figure 7.12: Initial mesh (case-B1)

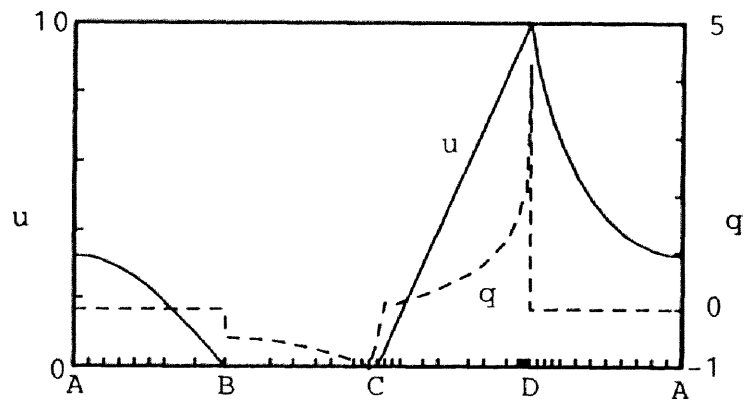
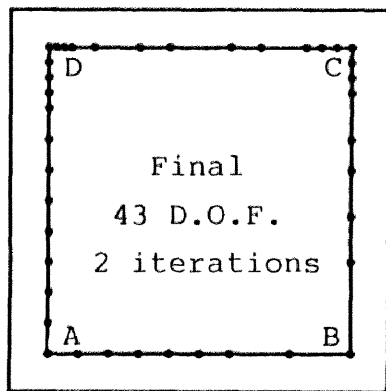


Figure 7.13: Optimal mesh (case-B1)

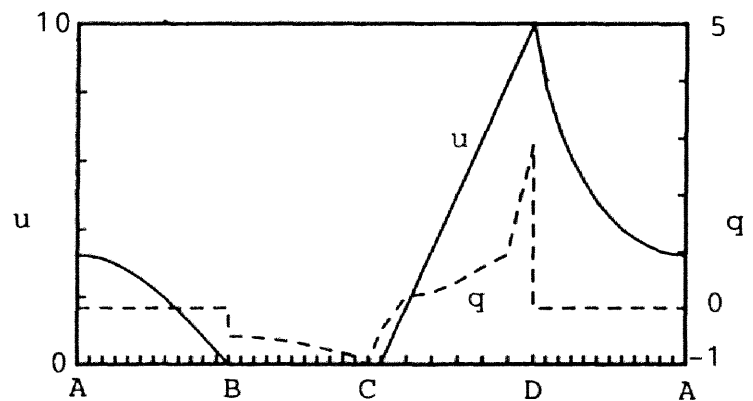
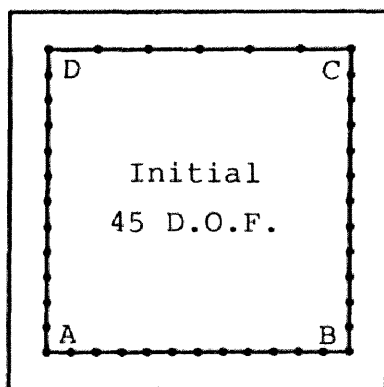


Figure 7.14: Initial mesh (case-B2)

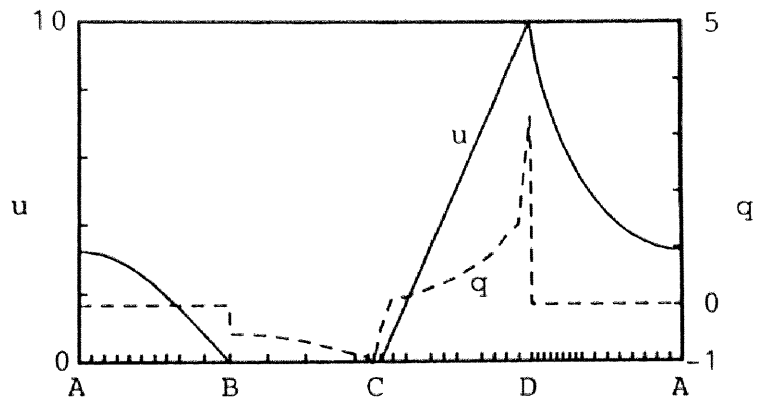
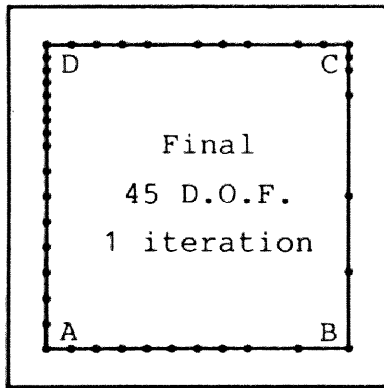


Figure 7.15: Optimal mesh (case-B2)

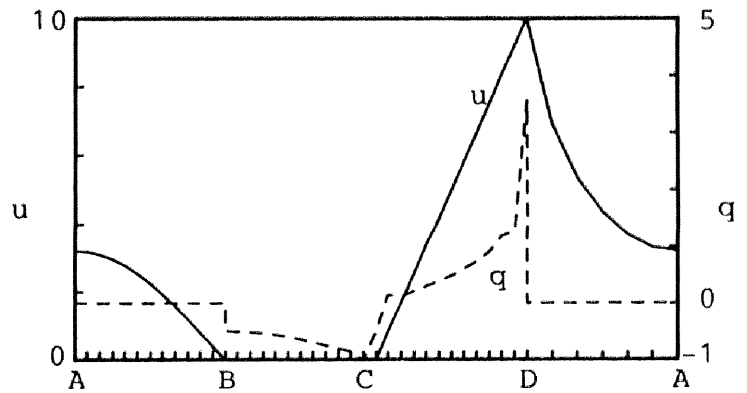
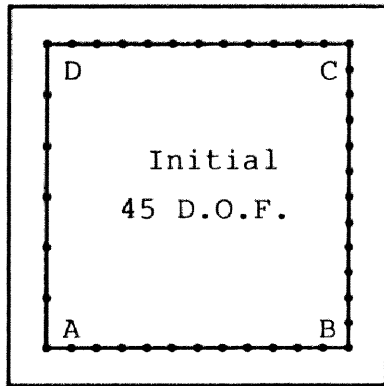


Figure 7.16: Initial mesh (case-B3)

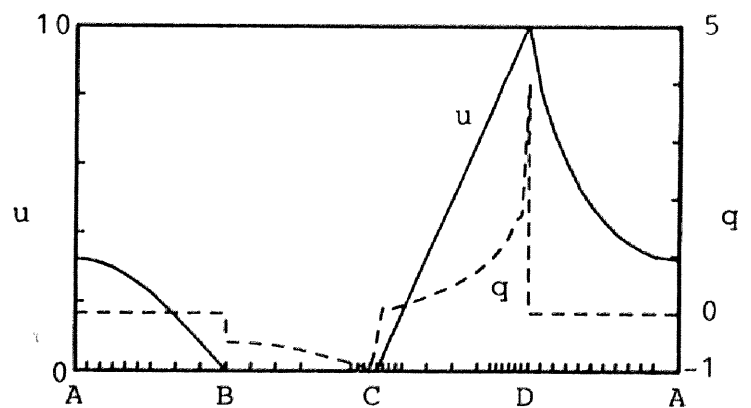
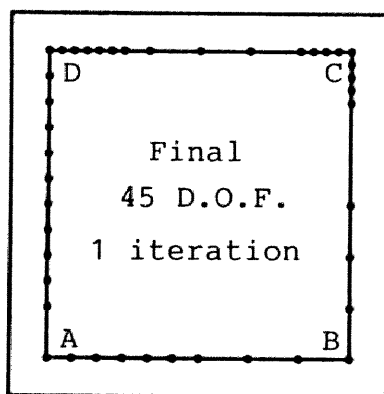


Figure 7.17: Optimal mesh (case-B3)

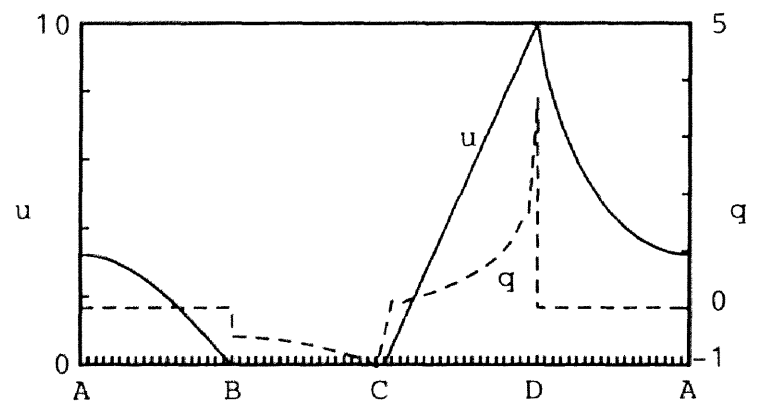
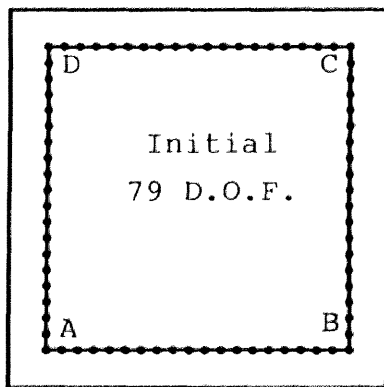


Figure 7.18: Initial mesh (case-C)

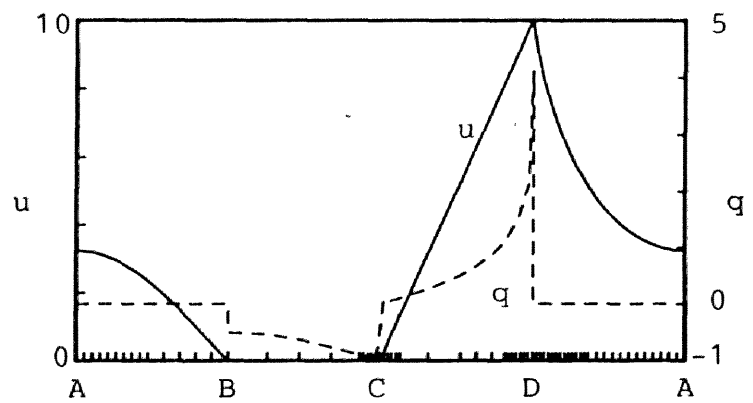
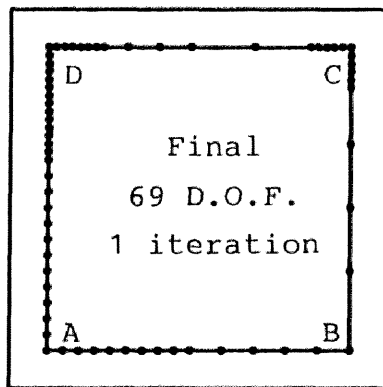


Figure 7.19: Optimal mesh (case-C)

Table 7.2: Results of case B

|                              | case-B1 | case-B2 | case-B3 |
|------------------------------|---------|---------|---------|
| Iteration                    | 2       | 2       | 1       |
| Object function decrease (%) | 36      | 23      | 55      |

まず、それぞれの初期メッシュと最適メッシュを比較すると、自由度総数によらず最適メッシュでは節点が関数変化の激しい点 C、D に集中し、全体の関数分布をより滑らかに近似していることが分かる。次に、最適メッシュを比較すると自由度総数が多いほどより関数分布が滑らかであり目的関数の減少量も大きい。このことから、本論文の適応メッシュ法で得られる最適メッシュの性能は初期メッシュの自由度総数に依存し、自由度総数が多いほど得られる最適メッシュは高精度となることがわかる。

**B. 不等分割初期メッシュ** 次に、初期メッシュのメッシュ分割が最終的に得られる最適メッシュに与える影響を検討するため、自由度総数は大体同じであるがメッシュ分割の異なる3つの初期メッシュを考え、これらを case-B1、case-B2、case-B3 とする。このうち case-B1 は境界全体を 43 自由度で等分割したメッシュであり、これに対して、case-B2 と case-B3 は自由度総数は 45 個で同じであるが、前者では比較的激しい関数分布を示す辺 CD が粗く分割されているのに対して、後者では比較的緩やかな関数分布を示す辺 DA が粗く分割されている点異なる。これらについて、初期メッシュと最適メッシュのメッシュ分割と関数分布を Fig.7.12 から Fig.7.17 に示し、繰り返し計算の回数と目的関数の減少量を Table 7.2 に示す。

最適メッシュを比較すると、case-B3、case-B1、case-B2 の順でより高精度な最適メッシュが得られていることがわかる。このことから、本論文の適応メッシュ法で得られる最適メッシュは初期メッシュのメッシュ分割に依存し、関数分布の激しい部分を他の部分より細分割すれば最適メッシュはより高精度となることがわかる (case-B3)。しかし、反面不適切な不等分割はかえって最適メッシュの性能を悪化させる可能性もある (case-B2) ので、等分割を用いれば不等分割のリスクをある程度回避できる (case-B1)。

**C. 自由度の減少するメッシュ変更** 最後に 79 個の自由度で等分割された初期メッシュから、自由度の減少を可能とする制約条件下で最適メッシュを決定した結果を示す。この場合、最適メッシュは 1 回の試行で決定された。初期メッシュと最適メッシュのメッシュ分割と関数分布を Fig.7.18 及び Fig.7.19 に示す。この操作によって自由度は 79 から 69 となり、10 自由度 (13%) 減少しているにも関わらず、目的関数は 44% 減少している。

#### 7.4.2 解析例 2 : L 形平板の熱伝導解析

2 番目の例題として L 型平板の熱伝導解析を考える (Fig.7.20)。初期メッシュとして 60 自由度で等分割されたものを考え、自由度が減少する条件下で最適メッシュを決定する。こ



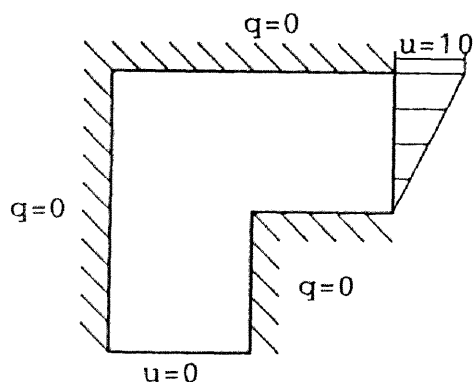


Figure 7.20: Object under consideration

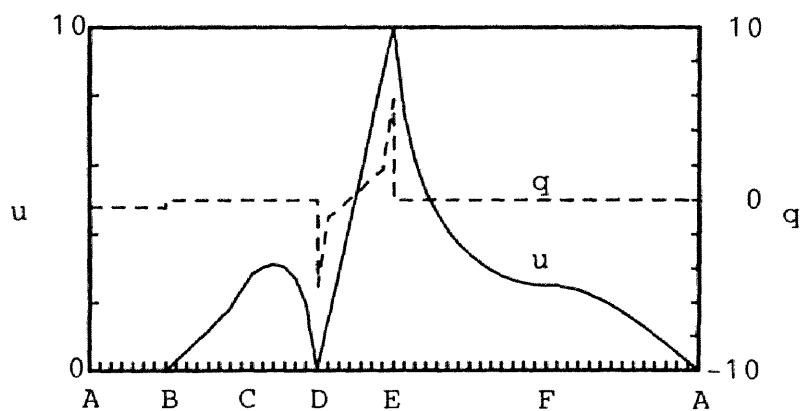
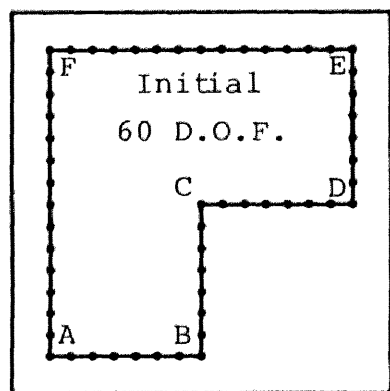


Figure 7.21: Initial mesh

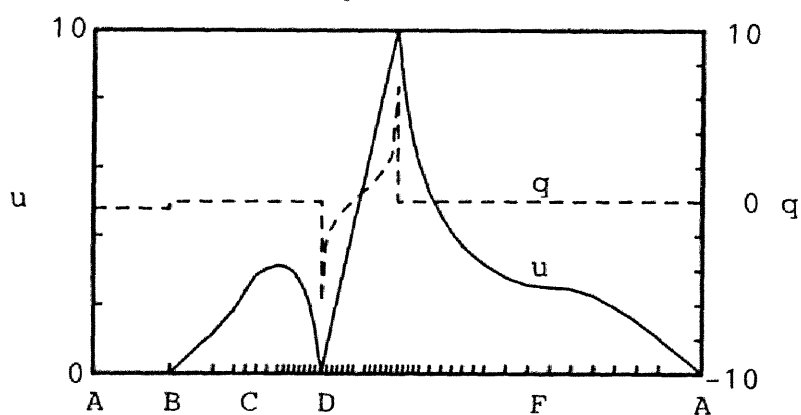
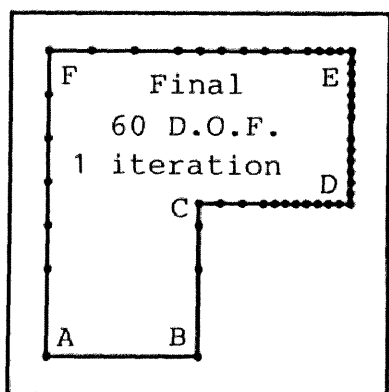


Figure 7.22: Optimal mesh

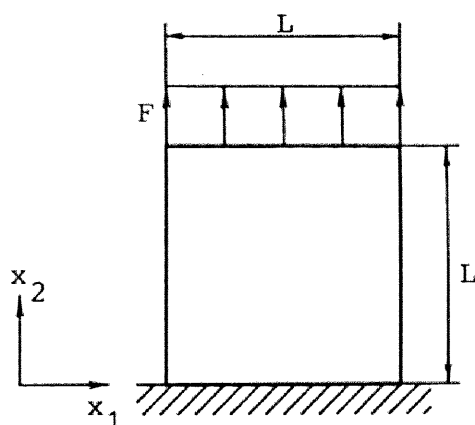


Figure 7.23: Object under consideration

の場合、最適メッシュは1回の試行で決定された。初期メッシュと最適メッシュのメッシュ分割及び関数分布を Fig.7.21 と Fig.7.22 に示す。最適メッシュでは線形な関数分布を示す辺 AB のメッシュが1つの要素に置き換えられる一方で、強い非線形な関数分布を示す辺 DE は細分割されてそこでの関数分布を滑らかに近似している。この操作によって自由度は60から51となり、15%減少しているにも関わらず、目的関数は41%も減少している。

#### 7.4.3 解析例3：一辺が固定された正方形平板の引張り

次にこの適応メッシュ法を2次元弾性問題に対して適用することを考える。まず、解析対象として1辺が固定され、別の1辺に引張り力を受ける正方形平板を考える ( Fig.7.23 )。初期メッシュとして84自由度で等分割されたものを考え、自由度が減少する条件下で最適メッシュを決定する。この場合、最適メッシュは1回の試行で決定された。初期メッシュと最適メッシュのメッシュ分割と関数分布を Fig.7.24 と Fig.7.25 に示す。この場合、自由度は84から68となり16自由度(19%)減少し、目的関数も50%減少している。

#### 7.4.4 解析例4：段差付き平板

次に、解析対象として Fig.7.26 に示される段差付き平板を考える。初期メッシュとして60自由度で等分割されたものを考え、自由度が減少する条件下で最適メッシュを決定する。初期メッシュと最適メッシュのメッシュ分割と関数分布を Fig.7.27 と Fig.7.28 に示す。最適メッシュは1回の試行で決定され、目的関数は16%減少したが、制約条件にも関わらず自由度は減少しなかった。

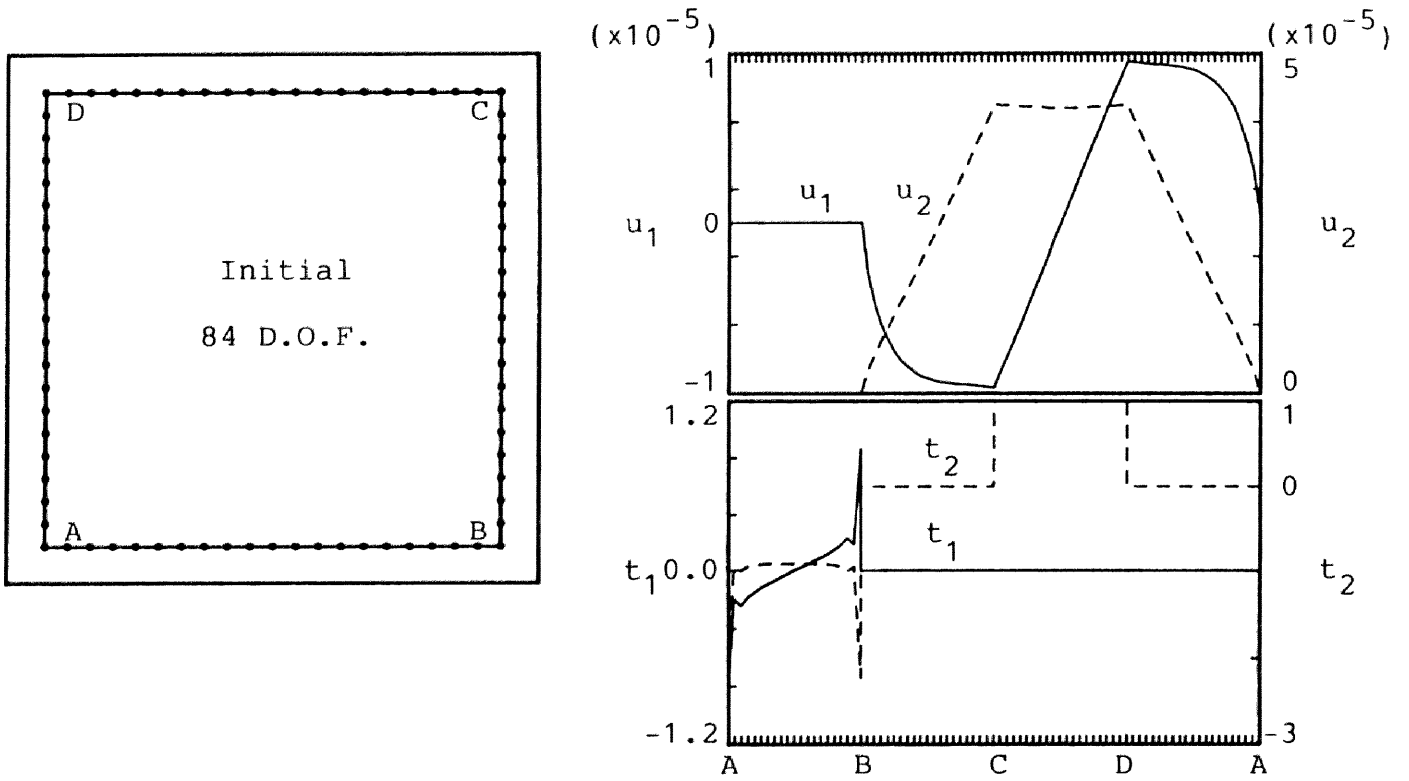


Figure 7.24: Initial mesh

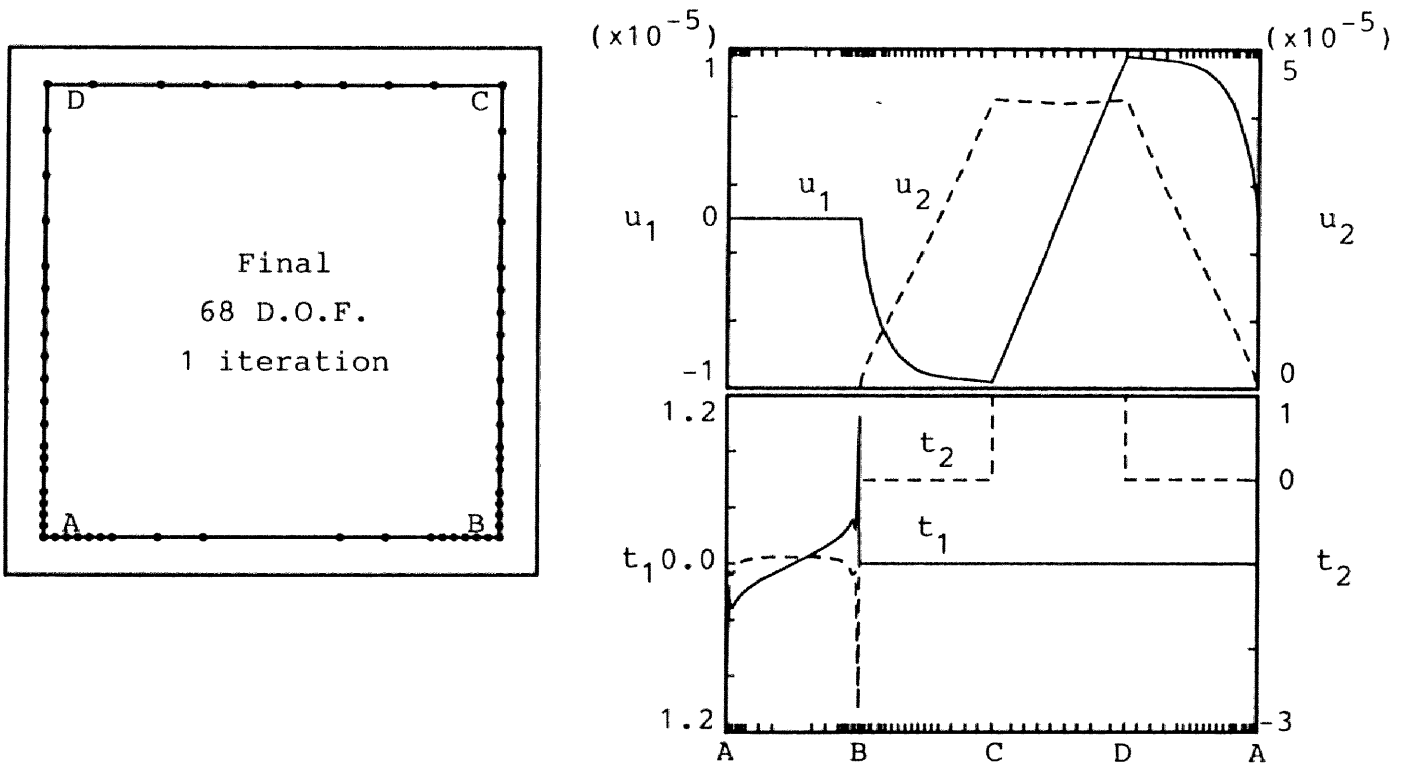


Figure 7.25: Optimal mesh

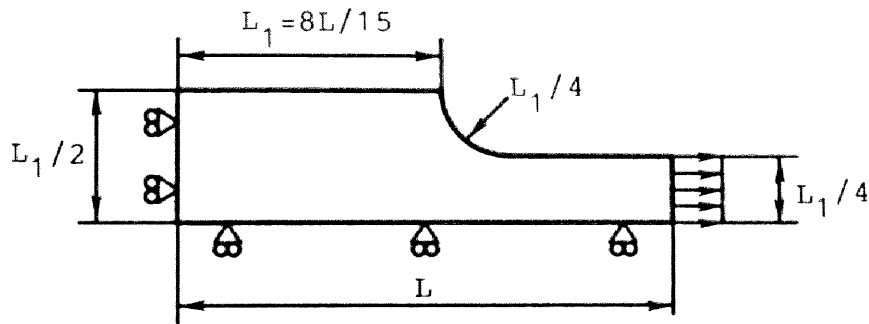


Figure 7.26: Object under consideration

## 7.5 まとめ

この章では、境界要素法に対する新しい適応メッシュ法を提案した。この方法では、従来の方法が誤差評価の結果をメッシュ変更の効果的に反映できていないとの反省に立ち、誤差評価法とメッシュ変更法が一体となった適応メッシュ法を開発するため、プロセス全体を最適化問題として定式化している。この結果、自由度の増加による精度向上だけでなく、自由度減少による精度低下も定量的に扱うことができるので、初期メッシュに細分割されたものを用いても効果的に最適メッシュを得ることができ、必要な計算時間をかなり短縮することができる。この方法を2次元ポテンシャル解析と2次元弾性解析の最適メッシュ決定に用いて、次のような結論を得ることができた。

まず、初期メッシュの選択とそれから得られる最適メッシュとの関連について、

1. 最適メッシュは初期メッシュの自由度総数に依存し、自由度総数が多いほど良好な最適メッシュを得ることができる。
2. 最適メッシュは初期メッシュのメッシュ分割に依存し、関数が激しく変化するような分布を示す境界を他の境界より細分割した初期メッシュを用いれば、良好な最適メッシュを得ることができる。
3. 反面、不適切に不等分割された初期メッシュを用いると、得られる最適メッシュの性能が悪化するので、解析対象の関数分布が予想できないような場合は等分割メッシュを用いたほうがよい。

これらのことから、本論文の方法を用いて最適メッシュを決定する場合の初期メッシュとして、使用するコンピュータの性能限界の要素数で等分割されたものを用いれば良いことが分かる。このことは、限られた条件のもとで最適メッシュを決定する場合に特に有効であることを示している。

この他に、自由度の減少するメッシュ変更と計算時間の問題に関して次の結論を得ることができた。

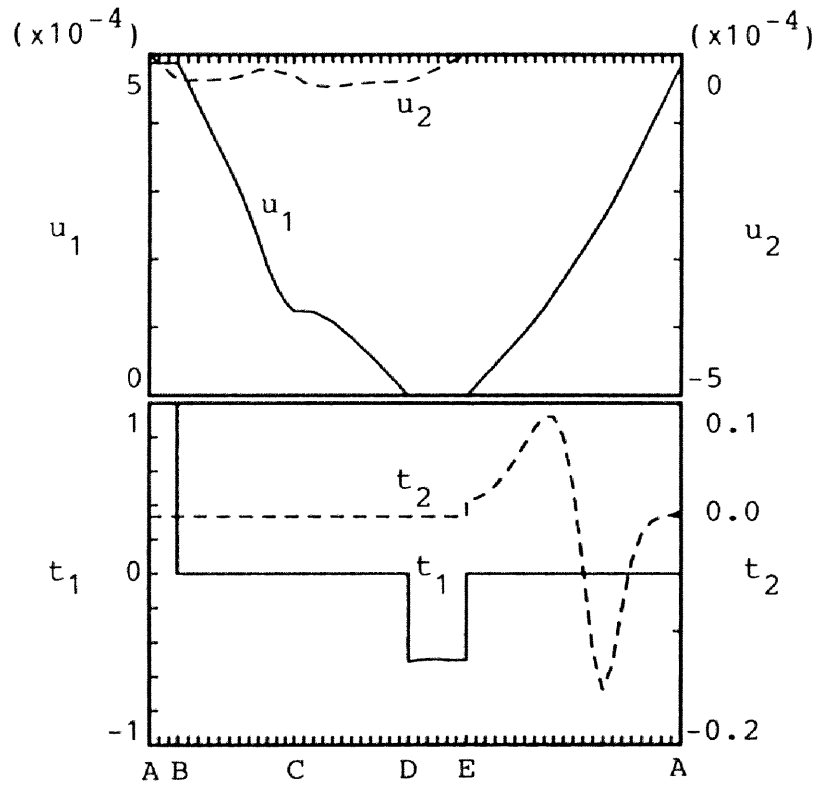
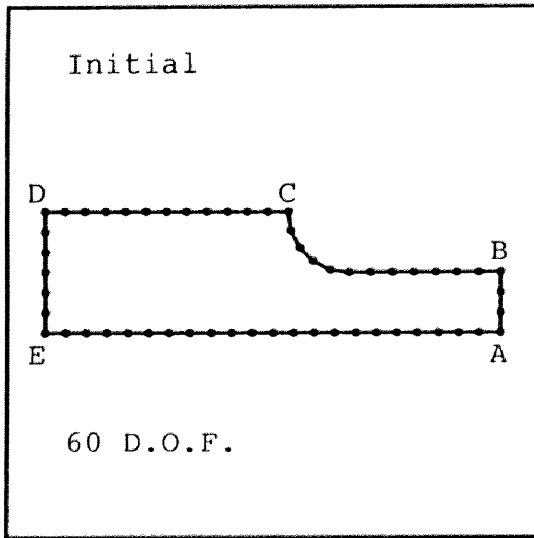


Figure 7.27: Initial mesh

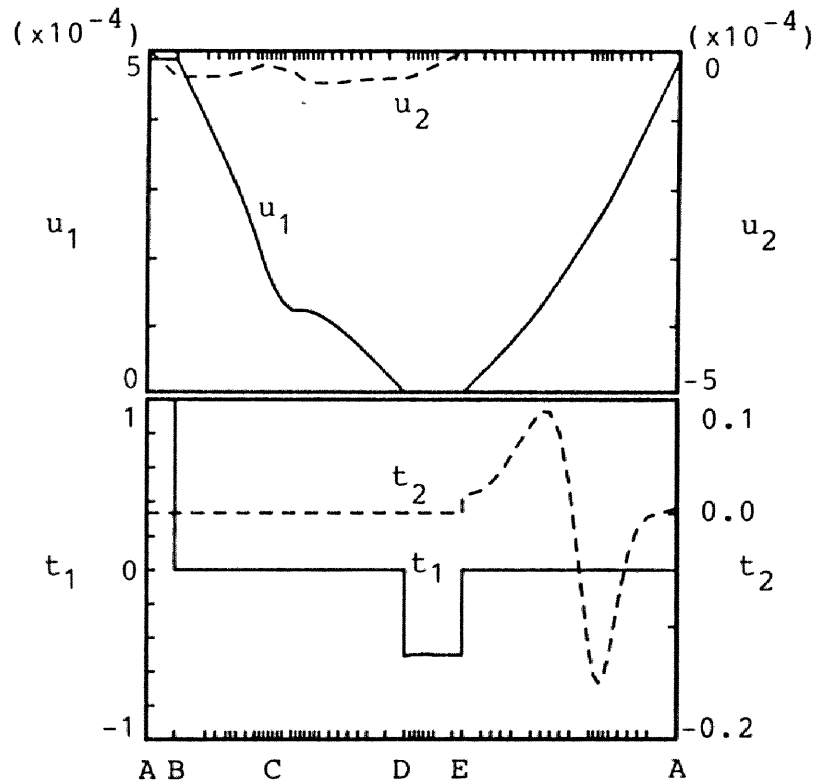
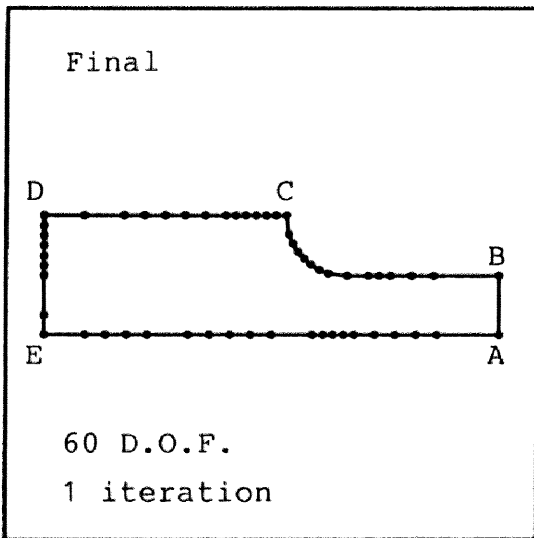


Figure 7.28: Optimal mesh

1. 自由度が減少する条件下で最適メッシュを決定した結果、自由度が減少しているにも関わらず精度の改善された最適メッシュを得ることができた。
2. ここで示した例題では1、2回の試行によって最適メッシュを得ているので、計算時間の短縮にかなり成功している。

以上のことから、この章で提案した最適メッシュ法は2次元ポテンシャル解析や2次元弾性解析の最適メッシュ決定に対してかなり有効であることが分かった。そこで、今後はこの適応メッシュ法を形状最適設計のプロセスに組み込み、形状最適化法の有効性を高めるような研究が進められることが望まれる。



# Chapter 8

## 結論

本論文では、今後数値解析法による応用研究がますます盛んになると予想される CAD (Computer Aided Design)、CAE (Computer Aided Engineering)、CAA (Computer Aided Analysis) などの分野において中心的な研究テーマである形状最適設計問題を取り、これに対するいくつかの新しい試みを提案した。以下では、これまで各章ごとに示していた内容を整理して示し、本論文の最終的な結論とする。

1章では、これまで提出された形状最適設計や適応メッシュ法についての論文を整理し、本論文の位置づけを行った。

2章では、2次元弾性問題と2次元ポテンシャル問題の有限要素解析と境界要素解析について説明し、続いて形状最適設計の理論についても述べた。

3章では、構造物や機械要素の局所形状最適化に有限要素法と境界要素法の結合解法を用いることを提案した。境界要素法は線形で均一な場の問題に対しては境界を要素分割するだけで解析できるので、有限要素法を用いる場合に比べて形状変更が容易で形状変更により計算精度が低下するおそれも少ない。しかし、問題によっては計算効率や精度が問題になる場合もあるので、これを改善するために有限要素法を組み合わせた結合解法を用いる。この方法を、2次元弾性体の局所形状最適化に適用した結果、次のような結論を得ることができた。

1. 理論解のある問題について提案した方法を適用した結果、得られた最適形状は理論解とよく一致したので解析法と最適化法の妥当性が確認できた。
2. さらに、これを他の2次元弾性体の局所形状最適化に適用した結果良好な最適形状を得ることができた。

4章では、前章に続いて有限要素法と境界要素法の結合解法を用いた局所形状最適化法について述べた。前章での議論が、境界要素法の欠点を補うために有限要素法を用いるという点を中心に進めていたのに対して、この章では、提案した手法の有効性をさらに発展させるため、これを不均一な場を含む問題の局所形状最適化に適用することについて述べた。なぜなら、このような問題は境界要素法よりもむしろ有限要素法で解析するのに適し



た問題であるが、その局所形状最適化を有限要素法と境界要素法の結合解法で扱えば有効な解析ができるからである。解析例としては、そのような問題の端的な例として厚さが領域内で不均一な物体を取り上げ、提案した手法を用いればこのような問題を効果的に解析できることを示した。今回扱ったのは厚さ不均一な物体だけであったが、この方法はもちろん不均一な場を含む他の問題、例えば、不均質な物体や非線形な領域を含むような物体に対しても効果的であり、今後そのような問題への適用が望まれる。

5章では、構造物や機械要素の局所形状最適設計のために境界要素法によるズームング法を用いた形状最適化法を提案した。この方法では、まず解析対象全体を有限要素法で解析する。その解析結果に基づいてズームング領域だけを他の部分と分離し、これを境界要素法で解析する。この方法のキーポイントは、どのようにしてズームング領域を設定するかということと、どのようにして有限要素解析のメッシュデータを境界要素解析のメッシュデータに変換するかということである。本論文では第1の点に対して、ひずみエネルギー密度に基づく領域分割指標という基準量の導入を提案し、第2の点に対して、メッシュデータを変換するためのメッシュコンバータの開発と利用について述べた。そして、これらの方法の有効性を検討するために数値実験を行い、次のような結論を得ることができた。

1. 円孔を有する平板の2軸引張りの問題で、異なる領域分割指標の許容値についてズームング領域を決定し、円孔沿いの応力分布が一定となるように円孔形状を決定した。得られた最適形状は、許容値が小さいほど理論的な最適形状に近いものが得られた。これは理論的に妥当な結果であり、これを適切に定めることにより形状最適化を局所問題として扱えることを示している。
2. 複数の応力集中部を有してそれらの相互的な影響を考えなければならない問題に対して、本方法を用いてズームング領域を決定し、応力集中部を別々に形状最適化した結果、得られた最適形状は全体を一度に境界要素法で最適化した結果とよく一致した。このことから、本手法は複数の応力集中部を有する問題にも有効であることがわかる。

最後に、5章で扱った解析例は比較的簡単な例題であるが、この方法は全体解析の負担が大きくなる複雑な解析対象の局所形状最適化に対して効果的な方法と考えられるので、今後はそのような問題に対しての適用が望まれる。

6章では、自動車部品などとして広く用いられているコイルばねの境界要素法による応力解析プログラムを開発し、これを用いてばねの素線断面形状の最適設計を行った。従来ばねの応力解析に用いられていた境界要素法の定式化は、Laplace方程式の基本解を用いるので解析に内部セルを必要としていたが、この章で示した新しい定式化を用いれば境界を要素分割するだけで解析を行うことができるので、非常に効率よく、また精度よくばねの素線形状の最適設計を行うことができる。この解析プログラムを用いて実際に素線断面形状の最適設計を行い、次のような結論を得た。

1. 円形や楕円形などの初期形状から応力集中を緩和するような形状最適化を行い、従来から他の研究者によって提案されているのと同じ楕円形や卵型などの最適形状を得ることができた。

2. 1. の最適形状のばねを同一断面積の円形断面ばねと比較すると、最大応力の低下はあまり大きくないが、断面高さは10数%低下することがわかった。このことから、異形断面ばねは最大応力の低下よりも、ばねの小型化に役立つことがわかる。
3. 円形や楕円形の初期形状から応力分布を滑らかにするような形状最適化を行い、同一の最適形状を得ることができた。そして、その形状は円形からわずかに変形した形であった。
4. 3. の最適形状を同一断面積の円形素線ばねと比較した結果、それらの最大応力、最小応力、応力比にはあまり変化がないことがわかった。この結果から、滑らかな応力分布を得るという点では円形の素線ばねはかなり有効なばねであるといえる。

7章では、境界要素法に対する新しい適応メッシュ法を提案した。この方法では、従来の方法が誤差評価の結果をメッシュ変更の効果的に反映できていないとの反省に立ち、誤差評価法とメッシュ変更法が一体となった適応メッシュ法を開発するため、プロセス全体を最適化問題として定式化している。この結果、自由度の増加による精度向上だけでなく、自由度減少による精度低下も定量的に扱うことができるので、初期メッシュに細分割されたものを用いても効果的に最適メッシュを得ることができ、必要な計算時間をかなり短縮することができる。この方法を2次元ポテンシャル解析と2次元弾性解析の最適メッシュ決定に用いて、次のような結論を得ることができた。

まず、初期メッシュの選択とそれから得られる最適メッシュとの関連について、

1. 最適メッシュは初期メッシュの自由度総数に依存し、自由度総数が多いほど良好な最適メッシュを得ることができる。
2. 最適メッシュは初期メッシュのメッシュ分割に依存し、関数が激しく変化するような分布を示す境界を他の境界より細分割した初期メッシュを用いれば、良好な最適メッシュを得ることができる。
3. 反面、不適切に不等分割された初期メッシュを用いると、得られる最適メッシュの性能が悪化するので、解析対象の関数分布が予想できないような場合は等分割メッシュを用いたほうがよい。

これらのことから、本論文の方法を用いて最適メッシュを決定する場合の初期メッシュとして、使用するコンピュータの性能限界の要素数で等分割されたものを用いれば良いことが分かる。このことは、限られた条件のもとで最適メッシュを決定する場合に特に有効であることを示している。

この他に、自由度の減少するメッシュ変更と計算時間の問題に関して次の結論を得ることができた。

1. 自由度が減少する条件下で最適メッシュを決定した結果、自由度が減少しているにも関わらず精度の改善された最適メッシュを得ることができた。

2. ここで示した例題では1、2回の試行によって最適メッシュを得ているので、計算時間の短縮にかなり成功している。

以上のことから、この章で提案した最適メッシュ法は2次元ポテンシャル解析や2次元弾性解析の最適メッシュ決定に対してかなり有効であることが分かった。そこで、今後はこの適応メッシュ法を他の用途、例えば形状最適設計などのプロセスに組み込み、その有効性を高めるような研究を進めることが望まれる。

## 謝辞

本研究の遂行ならびに本論文をまとめるにあたり、名古屋大学工学部 神谷紀生教授には終始懇切丁寧な御指導ならびに御検討を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。

また、名古屋大学工学部 村上澄男教授、安田仁彦教授には、本論文のとりまとめに際し、御指導及び貴重な御助言を賜りました。ここに厚くお礼申し上げます。

本研究を遂行するにあたり多大な御協力をいただいた、名古屋大学工学部機械工学第2学科第2講座の大野信忠助教授、松室昭仁助手、正中康博技官そして卒業生、在校生の方々に感謝します。なかでも、研究上の問題点について、著者とは異なる視点から貴重なご示唆とご討論を頂いた大野助教授、川口 健氏（昭和64年度卒業、現 YHP 勤務）にお礼申し上げます。

そして最後に、これまで27年間、精神面と物質面の両方から私を支持してくれた両親に心から感謝するとともに、この論文を贈りたいと思います。



# Bibliography

- [1] O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill Ltd., 1971.
- [2] 瀬口靖幸, 北川 浩, 富田佳宏. 有限要素法の基礎. 日刊工業新聞社, 1983.
- [3] 菊池 昇. 研究展望 有限要素法とその応用 – 最近の話題と発展 –. 土木学会論文集, (392/I-9):1–11, 1988.
- [4] M. S. Shephard. Approaches to the automatic generation and control of finite element meshes. *Appl. Mech. Rev.*, 41(4):169–185, 1988.
- [5] 大坪英臣. 有限要素法の最近の動向 (その 1) – 誤差評価と順応型要素分割 –. 日本造船学会誌, (683):263–274, 1986.
- [6] 小林昭一. 境界要素法の歴史から. 数理科学, (234):7–9, 1982.
- [7] F. J. Rizzo. 境界要素法 その初期の歴史 = 私見. 数理科学, (296):62–71, 1988.
- [8] J. C. Lachat. *Further Developments of the Boundary Integral Techniques for Elastostatics*. PhD thesis, Southampton University, 1975.
- [9] J. C. Lachat and J. O. Watson. Effective numerical treatment of boundary integral equations. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10:991–1005, 1976.
- [10] P. K. Banerjee and R. Butterfield. *Boundary Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill Ltd., 1981.
- [11] C. A. Brebbia, J. C. F. Tells, and L. C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer Ver., 1984.
- [12] D. Nardini and C. A. Brebbia. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. In C. A. Brebbia, editor, *Proc. Boundary Elements IV*, pages 312–326, Springer Ver., 1982.
- [13] C. A. Brebbia and D. Nardini. Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element approach. *Int. J. Soil Dyna. Earthq. Eng.*, 2:228–233, 1983.

- [14] C. A. Brebbia. On two different methods for transforming domain integrals to the boundary. In C. A. Brebbia and J. J. Connor, editors, *Proc. Boundary Elements XI*, pages 59–74, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1989.
- [15] 尾田十八. 機械構造設計の最適化手法とその応用(1) – 構造設計をとりまく環境と最適化問題 –. *機械の研究*, 40(5):617–623, 1988.
- [16] 松本敏郎, 田中正隆. 境界要素法による構造物の形状最適化と感度解析. 境界要素法研究会第30回例会研究発表資料, 1990.
- [17] R. T. Haftka and B. Barthelemy. On the accuracy of shape sensitivity derivatives. In H. A. Eschenauer and G. Thierauf, editors, *Discretization Methods and Structural Optimization – Procedures and Applications*, pages 136–144, Springer Ver., 1988.
- [18] 徳増真司, 村川英一, 明神昭紀. 境界要素法を用いた電極の最適形状設計法. *電気学会論文誌 B*, 104(4):253–261, 1984.
- [19] 村川英一, 明神昭紀, 徳増真司, 麻生哲夫. 応力低減を目的とする境界要素法を用いた最適形状設計. *日本機械学会論文集 (A編)*, 49(439):396–402, 1983.
- [20] 美咲隆吉, 坪井 始, 位高光司, 原 柘司. 表面電荷法による一般三次元電解の解析法とその応用. *電気学会論文誌 A*, 101(10):499–506, 1981.
- [21] 坪井 始, 美咲隆吉. 表面電荷法による電極形状の最適化について. *電気学会論文誌 A*, 103(12):675–682, 1983.
- [22] 坪井 始, 美咲隆吉. 表面電荷法による電極及び絶縁物形状の最適化. *境界要素法論文集*, 3:249–254, 1986.
- [23] H. Tsuboi and T. Misaki. The optimum design of electrode and insulato contours by nonlinear programming using the surface charge simulation method. *IEEE Trans. Mag.*, 24(1):35–38, 1988.
- [24] Z. Zhao and R. A. Adey. Shape design sensitivity analysis using the boundary element method. In C. A. Brebbia, editor, *Proc. Boundary Elements X*, pages 515–531, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1988.
- [25] Z. Zhao and R. A. Adey. Shape design sensitivity analysis using the boundary element method. In M. Tanaka, C. A. Brebbia, and T. Honma, editors, *Proc. Boundary Elements XII*, pages 249–266, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1990.
- [26] N. Kamiya, T. Nagai, and E. Kita. Design boundary elements and shape optimization. *Software Eng. Workst.*, 4:11–15, 1988.

- [27] N. Kamiya and E. Kita. Local shape optimization of a two-dimensional elastic body. *Finite Elem. Anal. Des.*, 6:207–216, 1990.
- [28] N. Kamiya and E. Kita. Boundary element method for quasi-harmonic differential equation with application to stress analysis and shape optimization of helical spring. *Comp. Struct.*, 37(1):81–86, 1990.
- [29] 神谷紀生, 北 栄輔. 準調和方程式に対する境界要素法とばね解析・最適化への応用. 日本機械学会論文集 (A編), 56(529):2026–203, 1990.
- [30] N. Kamiya and E. Kita. Shape optimization of elastic body involving inhomogeneous fields. *J. Eng. Des.*, 1(2):207–217, 1990.
- [31] N. Kamiya and E. Kita. Shape optimization by coupled finite and boundary elements. In C. A. Brebbia, W. L. Wendland, and G. Kuhn, editors, *Proc. Boundary Elements IX*, pages 473–482, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1987.
- [32] N. Kamiya and E. Kita. Structural shape optimization by finite and boundary element combination method. In S. N. Atluri and G. Yagawa, editors, *Proc. ICES 88*, pages 45.i.1–45.i.4, Springer Ver., 1988.
- [33] N. Kamiya and E. Kita. Structural optimization by adaptive boundary element method. In M. Tanaka and T. A. Cruse, editors, *Proc. 1st Japan/US Symp. BEM*, pages 393–402, Pergamon Press, 1988.
- [34] N. Kamiya and E. Kita. Optimal design by BEM. In Q.-H. Du and M. Tanaka, editors, *Proc. 2nd China/Japan Symp. BEM*, pages 361–368, Tsinghua Univ. Press, 1988.
- [35] N. Kamiya and E. Kita. Boundary element method for a class of elliptic differential equation and its application : analysis of helical coil spring. In M. Tanaka and Q.-H. Du, editors, *Proc. 3rd Japan/China Symp. BEM*, pages 361–368, Pergamon Press, 1990.
- [36] N. Kamiya and E. Kita. Boundary element optimum design of machine elements. In M. Tanaka, C. A. Brebbia, and T. Honma, editors, *Proc. Boundary Elements XII*, pages 237–248, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1990.
- [37] N. Kamiya and E. Kita. Structural optimization by combined FE and BE methods. In *Proc. WCCM II*, pages 104–107, 1990.
- [38] 神谷紀生, 北 栄輔. FEM/BEM結合解法による形状最適化. 境界要素法論文集, 5:233–237, 1988.



- [39] 神谷紀生, 北 榮輔. コイルばね断面形状の最適化への境界要素法の応用. 境界要素法論文集, 6:155-160, 1989.
- [40] E. J. Haug, K. K. Choi and V. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press Inc., 1986.
- [41] J. B. Cardoso and J. S. Arora. Variational method for design sensitivity analysis in nonlinear structural mechanics. *AIAA J.*, 26(5):595-603, 1988.
- [42] M. E. Botkin and R. J. Yang. Three-dimensional shape optimization with substructuring. In *Proc. 30th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Struc. Dynam. Matl. Conf., 89-1221-CP*, pages 564-568, 1985.
- [43] T. Burczynski and T. Adamczyk. The boundary element formulation for multiparameter structural shape optimization. *Appl. Math. Model.*, 9:195-200, 1985.
- [44] T. C. Cheu. Sensitivity analysis and shape optimization of axisymmetric structures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28:95-108, 1989.
- [45] T. M. Yao and K. K. Choi. 3-D shape optimal design and automatic finite element regriding. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28:369-384, 1989.
- [46] J. L. T. Santos and K. K. Choi. Sizing design sensitivity analysis of non-linear structural systems. Part II:Numerical method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26:2097-2114, 1988.
- [47] J. H. Choi and B. M. Kwak. Boundary integral equation method for shape optimization of elastic structures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26:1579-1595, 1988.
- [48] M. Defouny. Boundary element method and design optimization. In C. A. Brebbia, W. L. Wendland, and G. Kuhn, editors, *Proc. Boundary Elements IX*, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1987.
- [49] M. Defouny. Optimization techniques and boundary element method. In C. A. Brebbia, editor, *Proc. Boundary Elements X*, pages 479-490, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1988.
- [50] Y. M. Yoo, E. J. Haug, and K.K. Choi. Shape optimal design of an engine connecting rod. *Trans. ASME, J. Mech. Trans. Auto. Des.*, 106:415-419, 1984.
- [51] R. J. Yang, K.K. Choi, and E. J. Haug. Numerical considerations in structural component shape optimization. *Trans. ASME, J. Mech. Trans. Auto. Des.*, 107:334-339, 1985.

- [52] J. W. Hou and J. L. Chen. Shape optimization of elastic hollow bars. *Trans. ASME, J. Mech. Trans. Auto. Des.*, 107:100–105, 1985.
- [53] R. A. Meric. Shape design sensitivity analysis for non-linear anisotropic heat conducting solids and shape optimization by the BEM. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26:109–120, 1988.
- [54] R. A. Meric. Shape design sensitivity analysis of dynamic structures. *AIAA J.*, 26(2):206–212, 1988.
- [55] R. P. Leal and C. A. Mota Soares. Adaptive boundary element method for bidimensional elasticity. *Comp. Struct.*, 30(4):841–844, 1988.
- [56] C. A. Mota Soares and K. K. Choi. Boundary elements in shape optimal design of structures. In J. A. Bennett and M. E. Botkin, editors, *The Optimum Shape Automated Structural Design*, pages 199–229, Plenum Press, 1986.
- [57] C. A. Mota Soares, R. P. Leal, and K. K. Choi. Boundary elements in shape optimal design of structural components. In C. A. Mota Soares, editor, *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems*, pages 605–631, Springer Ver., 1986.
- [58] C. W. Park, Y. M. Yoo, and K. H. Kwon. Shape design sensitivity analysis of an axisymmetric turbine disk using the boundary element method. *Comp. Struct.*, 33(1):7–16, 1989.
- [59] J. J. Tsay and J. S. Arora. Optimum design of nonlinear structures with path dependent response. In *Proc. 30th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Struc. Dynam. Matl. Conf., 89-1220-CP*, pages 553–563, 1989.
- [60] J. D. Andrews and E. J. Hearn. An automatic design optimization procedure to minimize fillet bending stresses in involute spur gears. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24:975–991, 1987.
- [61] M. R. Barone and R. J. Yang. A boundary element approach for recovery of shape sensitivities in three-dimensional elastic solids. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 74:69–82, 1989.
- [62] M. R. Barone and R. J. Yang. Boundary integral equations for recovery of design sensitivities in shape optimization. *AIAA J.*, 26(5):589–594, 1989.
- [63] J. A. Bennett and M. E. Botkin. Structural shape optimization with geometric description and adaptive mesh refinement. *AIAA J.*, 23(3):458–464, 1985.

- [64] L. Gracia and M. Doblare. Shape optimization by using boundary element method. In C. A. Brebbia, editor, *Proc. Boundary Elements X*, pages 491–514, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1988.
- [65] J. H. Kane. Shape optimization utilizing boundary element formulation. In J. J. Conner and C. A. Brebbia, editors, *Proc. BETECH 86*, pages 781–803, Comp. Mech. Pub., 1986.
- [66] J. H. Kane. A second generation structural shape optimization capability employing a boundary element formulation. In *Proc. NUMETA 87*, pages D43/1–13, Comp. Mech. Pub., 1987.
- [67] J. H. Kane and S. Saigal. Design sensitivity analysis of solids using BEM. *J. Eng. Mech.*, 114:1703–1722, 1988.
- [68] 松本敏郎, 田中正隆. ポテンシャル問題における感度解析のための境界積分方程式の定式化. 日本機械学会論文集 (A編), 56(525):1262–1268, 1990.
- [69] 中桐 滋, 鈴木敬子. 構造形状の応力基準による境界要素シンセシス. 境界要素法論文集, 5:251–256, 1987.
- [70] E. Sandgren and S.-J. Wu. Shape optimization using the boundary element method with substructuring. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26:1913–1924, 1988.
- [71] 神谷紀生, 永井利典, 阿部淳平, 北 栄輔. 設計境界要素. 境界要素法論文集, 4:257–262, 1987.
- [72] I. Babsūka and W. C. Rheinbolt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Num. Anal.*, 15:736–754, 1978.
- [73] C. Katz. Self-adaptive boundary elements for the shear stress in beams. In J. J. Conner and C. A. Brebbia, editors, *Proc. BETECH 86*, pages 759–769, Comp. Mech. Pub., 1986.
- [74] A. Reverter, A. Gonzalez, and E. Alarcon. Indicators and estimators in p-adaptive boundary elements. In C. A. Brebbia and G. Maier, editors, *Proc. Boundary Elements VII*, pages 12.41–12.53, Springer Ver., 1985.
- [75] E. Alarcon and A. Reverter. p-Adaptive boundary elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23:801–829, 1986.
- [76] M. Cerrolaza and E. Alarcon. p-Adaptive boundary elements for three dimensional potential problems. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 3:335–344, 1987.

- [77] S. Gomez Lera, M. Cerrolaza, and E. Alarcon. Adaptive refinement in BEM. In C. A. Brebbia, W. L. Wendland, and G. Kuhn, editors, *Proc. Boundary Elements IX*, pages 337–349, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1987.
- [78] M. Cerrolaza and E. Alarcon. Further applications of p-adaptive boundary elements. In C. A. Brebbia, editor, *Proc. Boundary Elements X*, pages 123–135, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1988.
- [79] M. Cerrolaza, M. S. Gomez-Lera, and E. Alarcon. Elastostatics p-adaptive boundary elements for micros. *Software Eng. Workst.*, 4:18–24, 1988.
- [80] E. Rank. Adaptive boundary element methods. In C. A. Brebbia, W. L. Wendland, and G. Kuhn, editors, *Proc. Boundary Elements IX*, pages 259–278, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1987.
- [81] E. Rank. Adaptive h-,p- and hp- versions for boundary integral element methods. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28:1335–1349, 1989.
- [82] R. L. Mullen and J. J. Rencis. Adaptive mesh refinement techniques for boundary element methods. In T. A. Cruse, A. B. Pifko, and H. Armen, editors, *Advanced Topics in Boundary Element Analysis*, pages 235–255, ASME, 1985.
- [83] J. J. Rencis and R. L. Mullen. Solution of elasticity problems by a self-adaptive mesh refinement technique for boundary element computation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23:1509–1527, 1986.
- [84] J. J. Rencis and R. L. Mullen. A geometric preprocessor for an h-refinement technique for the boundary element method. In T. A. Cruse, editor, *Advanced Boundary Element Methods*, pages 333–342, Springer Ver., 1987.
- [85] J. J. Rencis and K. Y. Jong. An accuracy postprocessor for boundary element analysis. In C. A. Brebbia, editor, *Proc. Boundary Elements X*, pages 187–203, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1988.
- [86] J. J. Rencis and K. Y. Jong. A self-adaptive boundary element technique for 2D potential analysis. In M. Tanaka and T. A. Cruse, editors, *1st Joint Japan/US Symp. BEM*, pages 81–90, Pergamon Press, 1988.
- [87] T. J. Urekew and J. J. Rencis. Absolute p-refinement of boundary elements for two-dimensional elasticity problems. *Advances in Boundary Elements*, 1:77–93, 1989.
- [88] J. J. Rencis and K. Y. Jong. A self-adaptive h-refinement technique for the boundary element method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 73:295–316, 1989.

- [89] P. Parreira. Self-adaptive p-hierarchical boundary elements in elastostatics. In C. A. Brebbia, W. L. Wendland, and G. Kuhn, editors, *Proc. Boundary Elements IX*, pages 351–373, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1987.
- [90] P. Parreira. Further developments on error indicators and estimators for adaptive hierarchical boundary elements. In C. A. Brebbia and J. J. Connor, editors, *Proc. Boundary Elements XI*, pages 95–103, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1989.
- [91] M. S. Ingber and A. K. Mitra. Grid optimization for the boundary element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23:2121–2136, 1986.
- [92] M. Guiggiani. Error indicators for adaptive mesh refinement in the boundary element method - A new approach. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29:1247–1269, 1990.
- [93] 結城良治, 曹 国強, 上田壮一. DRM法を用いた境界要素解析の誤差評価法. 境界要素法論文集, 6:131–136, 1989.
- [94] 川口 健, 神谷紀生. 代表点誤差解析によるアダプティブBEM. 日本機械学会論文集 (A編), 56(529):2032–2039, 1990.
- [95] 神谷紀生, 川口 健. 適応境界要素メッシュの構成. 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 14:561–566, 1990.
- [96] N. Kamiya and K. Kawaguchi. An attempt of adaptive boundary elements. In M. Tanaka, C. A. Brebbia, and T. Honma, editors, *Proc. Boundary Elements XII*, pages 527–538, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1990.
- [97] E. Kita and N. Kamiya. A new adaptive boundary element refinement based on simple algorithm. *Mech. Res. Comm.* submitted.
- [98] 北 栄輔, 神谷紀生. 適応境界要素の一手法. 境界要素法論文集, 7:29–34, 1990.
- [99] 井上達雄. 弾性力学の基礎. 日刊工業新聞社, 1985.
- [100] F. Warlo. PhD thesis, München Technische Hochschule, 1974.
- [101] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, and P. Bettess. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11(2):355–375, 1977.
- [102] D. W. Kelly, G. G. W. Mustoe, and O. C. Zienkiewicz. *Coupling Boundary Element Methods with Other Numerical Methods*, chapter 10. Appl. Sci. Pub., 1979.
- [103] P. K. Banerjee and R. Butterfield, editors. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill Lmd., 1979.

- [104] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel, editors. *Boundary Element Techniques*. Springer Ver., 1984.
- [105] P. Georgiou. *The Coupling of the Direct Boundary Element Method with the Finite Element Displacement Technique in Elastostatics*. PhD thesis, Univ. Southernpton, 1981.
- [106] M. Margulies. Exact treatment of the exterior problem in the combined fem-bem. In C. A. Brebbia, editor, *Proc. Boundary Elements II*, Butterworths, 1980.
- [107] M. Margulies. *Combination of the boundary element and finite element methods*, chapter 8. Volume 1, Pentech Press, 1981.
- [108] E. Schnack. A hybrid bem model. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24:1015–1025, 1987.
- [109] T. Belyschko and H. S. Chang. A variationally coupled finite element-boundary element method. *Comp. Struct.*, 33(1):17–20, 1989.
- [110] 河野和清, 田中道夫, 綱田知博. スーパーエレメント法による境界-有限要素結合応力解析. 境界要素法論文集, 5:299–304, 1988.
- [111] J. C. L. Telles and C. A. Brebbia. Boundary element solution for half-plane problems. *Int. J. Solids Struct.*, 17(12):1149–1158, 1981.
- [112] S. Ahmad and G. D. Manolis. Dynamic analysis of 3D structures by a transformed boundary element method. *Comp. Mech.*, 2:185–196, 1987.
- [113] P. K. Banerjee, S. Ahmad, and G. D. Manolis. Transient elastodynamic analysis of 3d problems by boundary element method. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 14:933–949, 1986.
- [114] G. D. Manolis and D. E. Beskos. *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, pages 49–50. Unwin Hyman, 1988.
- [115] 神谷紀生. 演習 境界要素法, 120–121 ページ. サイエンス社, 1985.
- [116] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Ltd., third edition, 1982.
- [117] H. O. Fuchs. Ovate cross sections make better coil spring. *Product Eng.*, 86–88, 1969.
- [118] 神谷紀生, 豊福博之. 任意断面素材を用いたコイルばねの設計について. ばね技術研究会、昭和 60 年度秋期報告会前刷集, 25–28, 1985.
- [119] 長屋幸助. 任意形状を有する円筒コイルばねの応力解析 (第 1 報、フーリエ展開境界平均法による解析解). 日本機械学会論文集 (A 編), 51(470):2293–2302, 1985.

- [120] 佐藤雅志, 長屋幸助, 武田定彦, 松本幸夫, 齊藤純幸, 森田国樹. 任意形状を有する円筒コイルばねの応力解析 (第2報、異形断面ばねの開発及び実験). 日本機械学会論文集 (A編), 51(470):2303-2308, 1985.
- [121] 大河内禎一, 今泉敏幸, 中川正治. 円筒コイルばねの素線断面形状の最適化. 日本機械学会論文集 (A編), 55(517):2033-2041, 1989.
- [122] 畔上秀幸, 片峯英次, 今泉敏幸, 沖津昭慶. 成長ひずみ法による円筒コイルばねの素線断面形状最適化解析. 日本機械学会論文集 (A編), 56(531):2339-2346, 1990.
- [123] F. J. Rizzo, A. K. Gupta, and Y. Wu. A boundary integral equation method for torsion of variable diameter circular shafts and related problems. In R. P. Shaw et al., editors, *Innov. Num. Anal. Eng. Sci.*, pages 373-380, Virginia Press, 1980.
- [124] K. Becker and M. Braun. Numerical solution of the torsion problem for axisymmetric bodies using different boundary integral equations. In C. A. Brebbia, W. L. Wendland, and G. Kuhn, editors, *Proc. Boundary Elements IX*, Comp. Mech. Pub. / Spring. Ver., 1987.
- [125] M. K. Huang and X. Y. Lei. On the problem of elastic torsion of variable diameter circular shafts by the boundary integral equation method. *Comp. Struct.*, 19(3):475-478, 1984.