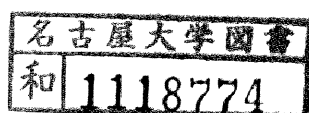


コンクリート構造のポストピーク挙動に 関する解析的研究

平成4年1月

中村 光



- CONTENTS -

1 章. 序論	1
1.1. 概説	1
1.2. 本論文の内容	8
2 章. 材料非線形を考慮した有限変形問題に対する理論的考察	11
2.1. 有限変形問題に対する増分形式の仮想仕事方程式	11
2.2. 構造物の安定性	13
2.3. 有限要素法による離散化	14
2.4. 構造特異点に関する考察	16
2.5. 結論	25
3 章. ひずみ軟化材料で構成される構造物のプレピークおよびポストピーク挙動の解析方法	26
3.1. コンクリート構造を構成する材料の構成則	26
3.1.1. コンクリートの構成則	26
3.1.2. コンクリートの等価一軸応力-ひずみ関係	28
3.1.3. 鉄筋の構成則	30
3.1.4. 鉄筋の応力-ひずみ関係	31
3.2. 変位増分法	31
3.3. post bifurcation 挙動の解析	33
3.4. 結論	35

4 章. コンクリート構造における bifurcation point の物理的意義および post bifurcation 挙動	37
4.1. コンクリート一軸部材のひずみの局所化	37
4.2. 2 軸応力場でのコンクリートの post bifurcation 挙動	43
4.3. 結論	46
5 章. 鉄筋コンクリートはりのポストピーク挙動の解析	47
5.1. 有限変形問題の有限要素解析法の定式化	47
5.2. 鉄筋コンクリートはりのせん断破壊メカニズム	49
5.2.1. 既往の実験と本解析値との比較	50
5.2.2. ポストピーク領域での不安定な鉄筋コンクリートはりの挙動	52
5.3. 結論	59
6 章. 鉄筋コンクリート柱のポストピーク挙動の解析	60
6.1. 概説	60
6.2. せん断変形を考慮した鉄筋コンクリート構造物の大変形解析の定式化	61
6.2.1. せん断変形を考慮した有限変形問題に対する増分形式の仮想仕事方程式	61
6.2.2. 剛性方程式	63
6.2.3. 数値計算プログラム	65
6.3. 軸方向鉄筋の抜け出しによる水平変位	66
6.3.1. 鉄筋降伏後のフーチング内の鉄筋のひずみ分布	67
6.3.2. 繰り返し荷重を受けるフーチング内の鉄筋のひずみ分布挙動	69
6.3.3. 抜け出しによる水平変位	71

6.4.	鉄筋コンクリート柱の大変位繰返し挙動	71
6.4.1.	スレンダーな鉄筋コンクリート柱の正負交番載荷実験	71
6.4.2.	埼玉大学におけるRC柱の正負交番載荷実験	75
6.5.	せん断剛性モデル	78
6.5.1.	圧縮場理論	79
6.5.2.	軸力、モーメント、せん断力を受ける鉄筋コンクリート断面への圧縮場 理論の適用	81
6.5.3.	せん断剛性モデル	85
6.5.4.	せん断変形が構造物に及ぼす影響	86
6.6.	鉄筋コンクリート柱の破壊と構造不安定性	87
6.6.1.	曲げ変形だけを考慮した場合の鉄筋コンクリート柱の不安定性	88
6.6.2.	曲げ変形とせん断変形を考慮した場合の鉄筋コンクリート柱の不安定性	92
6.7.	結論	94
7章.	コンクリート構造物の終局挙動	95
7.1.	概説	95
7.2.	既往の実験と本解析値との比較	95
7.3.	鉄筋コンクリートラーメン構造の靱性評価	100
7.4.	鉄筋コンクリートラーメン構造の靱性率に及ぼす諸要因の影響	102
7.4.1.	軸力の影響	102
7.4.2.	柱の長さ(H) とはりの長さ(B) の影響	104
7.5.	斜張橋タワーの終局挙動	104
7.5.1.	解析モデル	104

7.5.2.	斜張橋タワーの終局挙動と幾何学的非線形性の影響	107
7.6.	結論	107
8 章.	鉄筋の座屈がポストピーク挙動に及ぼす影響	109
8.1.	概説	109
8.2.	鉄筋の引張・圧縮挙動	109
8.3.	スターラップが組み合わさった鉄筋の挙動	112
8.4.	座屈挙動を含む鉄筋の応力-ひずみ関係	114
8.5.	鉄筋の座屈を生じたコンクリート構造物の挙動	118
8.5.1.	座屈が生じた鉄筋コンクリート断面の $M-\phi$ 関係	118
8.5.2.	繰り返し荷重を受ける R C 柱の座屈時の挙動	121
8.6.	結論	124
9 章.	鉄筋コンクリート部材の塑性変形能	125
9.1.	概説	125
9.2.	鉄筋コンクリート柱の靱性率に対応する解析曲線上の特異点	126
9.3.	靱性率に及ぼす諸要因の影響	128
9.3.1.	帯鉄筋比と軸圧縮応力度の影響	130
9.3.2.	引張鉄筋比と軸圧縮応力度の影響	131
9.3.3.	せん断スパン比と軸圧縮応力度の影響	132
9.3.4.	コンクリート強度の影響	134
9.3.5.	軸力の影響	134
9.4.	鉄筋コンクリート部材の靱性評価式の提案	135

9.4.1.	韌性評価式の提案	135
9.4.2.	韌性評価式の評価	136
9.5.	結論	141
10 章.	結論	143
	参考文献	146
	謝辞	

1 章 序論

1.1 概説

コンクリート構造の理論的背景が不十分であったことに対する反省が、現在の FEM をはじめとする非線形理論の構築を精力的に押し進めるきっかけとなり、それらの成果により原子力構造など、幾多の重要構造施設へのコンクリート構造の採用となってきた。今後さらに、コンクリート構造の特性を生かしてより適切な応用を計っていく場合の大きな課題は、最大荷重時およびその点以降のポストピーク挙動の理論的解明にあると考えられる。また、鉄筋コンクリート構造物の耐震設計においては、部材降伏後の大きな塑性変形によって地震エネルギー吸収を図ろうとする設計方法が中心となっており、耐震設計の観点からも、構造物のポストピーク挙動の解析的解明が非常に重要となってきた。

コンクリート構造のポストピーク挙動の解析的解明を行うことは、次のような意義を与えることにもなる。

コンクリート構造のポストピーク挙動に関しては、従来は主に実験的に研究対象とされてきた。しかしながら、その挙動は非常に複雑であり、多様な影響要因を含んでいるため、実験変数が多くなり、現在まで系統的な研究は行われていないのが現状である。したがって、実験的にもポストピーク挙動がなかなか明確にされないことになっている。例えば、鉄筋コンクリート構造物に大きな地震荷重が作用すると、構造物は、柱あるいは橋脚部のコンクリートの剥落劣化等により徐々に荷重低下する性状を示し、最終的には鉄筋の座屈やせん断変形の急増により破壊に至る。このように、コンクリート構造が破壊する場合ポストピーク領域において生じる様々な要因が複雑に作用する。また実験的研究においては、様々な要因が及ぼす影響を個別に分離して取り出すのが困難であるため、構造全体の挙動にとらわれ、局所的なメカニズムの考察は行われてこなかった。

これに対して、もしポストピーク挙動を精度よく評価し得る解析理論が構築されれば、広範囲にわたる解析実験を実施することができ、現象を理解するための多くの情報を与えることになる。

コンクリート構造のポストピーク挙動に関する非線形理論は、コンクリート構造分野においても非常に遅れている分野であるが、ポストピーク挙動に対する重要性が増すにつれ、その理論的解明および解析手法の開発が、最も緊急な課題の一つとして挙げられるようになった。

本研究は、このようなポストピーク挙動の解明を主眼とし、プレピーク、ポストピーク、破壊へと至るコンクリート構造の変形挙動を一貫した数値理論で解析的に評価することを目的と

する。既に述べたように、ポストピーク挙動は様々な要因を含んでいるため、現在に至るまで、各種要因の力学的挙動を精度よく評価し得る非線形理論の構築はほとんどされていないのが現状である。そのため、解析的に評価するには、ポストピーク挙動に影響を及ぼす要因を整理し、既に得られている知見との比較検討を行うとともに、非線形理論構築に必要な概念を考察する必要がある。

以下では、この目的のため、ポストピーク挙動説明に重要な役割を示すと考えられる要因について概観してみる。

ポストピーク領域において構造物は不安定な状態にあるため、構造物は全く別の形の平衡状態に移るか、あるいは急激に荷重低下を生じる可能性を常に持っている。このような現象は、一般に構造不安定問題と呼ばれ、一般論として図-1.1に示すような3つのタイプの不安定現象に分けられる。

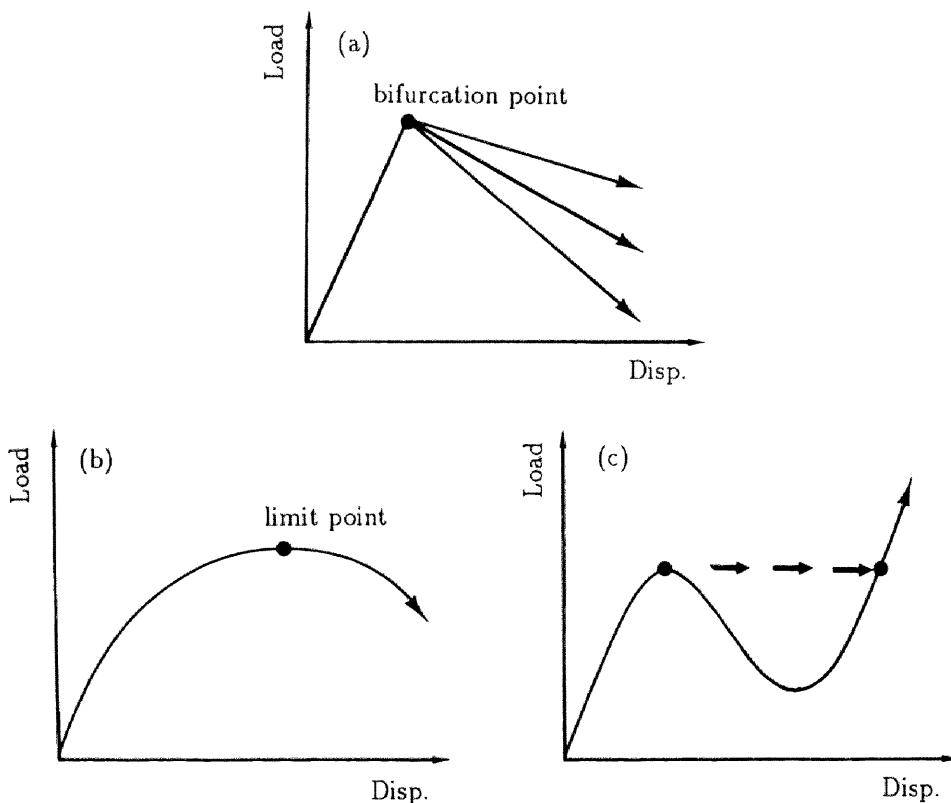


図-1.1 構造物に起こる不安定現象

第一のタイプ（図－1.1(a)）では、いままで存続してきた変形の他に、全く新しい変形様式が現れる不安定現象である。この平衡状態の分岐を生じる点は解析上の特異点であり bifurcation point と言われる。コンクリートのようなひずみ軟化材料を対象とした構造分野では、この bifurcation point に関連した不安定現象が、現在世界的に注目を浴びている。これは、クラックの形成などの局所的なダメージの蓄積で生じるコンクリート構造の破壊が、数学的に分岐問題として表されると考えられるからである。Bazant[11] は、bifurcation 問題は localization 問題と密接な関係を持つことを指摘し、Borst[52] や Ortiz[50] は、ひずみの局所化現象を、分岐解析を行うことで実際に再現している。しかしいずれもコンクリートのみを対象としており、現在まで鉄筋コンクリート構造に対する bifurcation 問題の適用はなされていない。

第二のタイプ（図－1.1(b)）は、平衡状態の枝別れはないが、荷重が最大荷重に達した後、荷重が減少しながらしかも変形が増大する不安定現象である。この時の最大荷重点は、構造特異点の内の limit point に対応する。このタイプの不安定状態は、コンクリート自身の材料特性が不安定であるため、コンクリート構造分野においてはほとんどの場合見られる現象である。コンクリート構造分野でよく用いられる断面のモーメント－曲率関係に基づく解析より得られている荷重－変位曲線の下降域は、limit point 後の不安定な釣合経路に対応するものと言うことができる。

第三のタイプ（図－1.1(c)）は、飛び移りと呼ばれるものであるが、コンクリート構造分野では余り重要な意味を持たない。

ポストピーク領域と密接な関係がある不安定現象は、以上の3つのタイプにより分類でき、ポストピーク挙動の解析的解明を行う場合には、いずれの現象に対しても十分な考察を行う必要があると考えられる。特に、bifurcation point に関連した不安定現象は、現在その重要性が広く認識され始めており、注意が必要である。

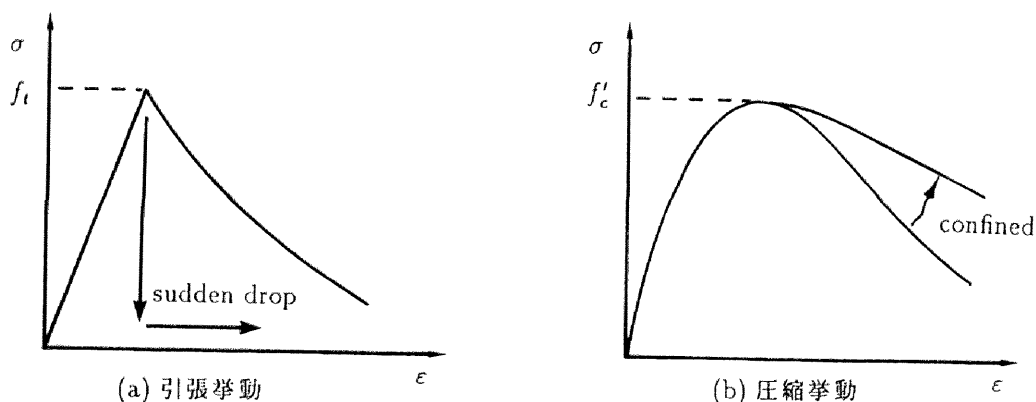
上記の不安定現象は更にそれらに影響を及ぼす要因により、次のように分類し議論されている。

1. 外力の種類（保存力、非保存力、その他）
2. 問題の非線形性（材料非線形性および幾何学的非線形性）
3. 構造物の種類、形態

本研究において、最も重要なのは、2. の問題の非線形性によって起こり得る不安定現象である。以下に、材料非線形性と幾何学的非線形性に関する主たる要因を列挙して現在なお残されている問題点を検討してみる。

(1) 構成則について

コンクリート材料供試体の実験を行えば、引張応力を受ける場合は、最大引張荷重後応力が急激に低下する脆性的な挙動や若干の軟化挙動を示す（図－1.2(a)）。圧縮応力下の応力－ひずみ曲線は、図－1.2(b)に示すように、圧縮強度 f'_c に近づくにつれ徐々に応力の増加率が低下し、著しい非線形挙動を示しながら最高点 f'_c に到達する。そしてこの最高点を越えると応力は下降し軟化性状を示す。また大きな拘束力を受ける場合、延性的な挙動を示すようになり圧縮強度や軟化性状が大きく異なってくる。この性状は構造物レベルでの不安定なポストピーク挙動に大きな影響を及ぼすものである。したがって、これらはいずれも不安定現象の一つと見なすことが出来、その検討を行う場合には、解析に用いるコンクリートの応力－ひずみ挙動を、解析対象、解析目的に応じて適切に選択する必要がある。



図－1.2 コンクリートの応力－ひずみ関係

任意の応力状態にあるコンクリートの複雑な応力－ひずみ挙動を定義する方法はいくつかあるが、代表的なものを挙げれば、

1. 曲線の当てはめによる一次元的な応力－ひずみ曲線の表示
2. 塑性理論に基づく記述

がある。1. は多軸応力下の挙動を等価な一軸の応力－ひずみ曲線を用いて表すもので、表示が簡単であり容易に解析手順に組み込める利点を持っている。この代表的なものが Saenz(1964)[53]

が提案した式であり、多軸応力-ひずみ挙動を模擬するのに多く使われている。また、鉄筋コンクリート構造物内のコンクリートは、構造物内に配置された鉄筋から拘束効果による影響を受けるが、この鉄筋とコンクリートの複合効果（コンファインド効果）をコンクリートの応力-ひずみ曲線に等価的に組み入れた曲線も多数提案されている（例えば Kent and Park(1971)[27]）。2. は 3 次元応力-ひずみ関係を塑性理論により求める方法であるが、ひずみ軟化などの複雑な効果を数多く材料モデルに取り入れる必要があり、その記述は簡単ではない。

(2) 主鉄筋の座屈について

コンクリート構造には、構造を構成する材料の非線形性や構造の変形にともなう幾何学的非線形性以外にもポストピーク挙動に影響を及ぼす要因が存在する。コンクリート構造が地震荷重を受け崩壊した場合や、載荷実験で破壊させた鉄筋コンクリート部材を観察すると、軸方向鉄筋の座屈や X 字状ひび割れをともなうせん断変形の増加によるせん断破壊を生じており、ポストピーク領域にこれらの要因が考慮されなければならないのである。

このうち、主鉄筋の座屈に関しては、これまで主に実験的に研究対象とされてきたが[31][58]、これらの研究では、座屈メカニズムの評価ではなく構造物全体的な破壊メカニズムのみの評価に限られている。これはコンクリート構造物内の主筋の座屈現象には、主筋のみならず、横補強筋およびコンクリートの性質あるいは部材の形状や寸法、載荷状態などの各種要因が相互に影響し合うため、実験において主筋の座屈現象だけを単独に取り出すことができないためである。

一方主鉄筋の座屈に関する解析的アプローチとしては、M.Papia ら [34][35]、島ら [56] の研究がわずかに挙げられる程度である。M.Papia らの研究は、主筋と横補強筋だけに着目したモデルを使い、力の釣合条件および変形の適合条件より、主筋の座屈荷重を解析的に求めようとした点に特徴がある。配筋詳細と主筋座屈という観点の検討には適しているが、座屈が及ぼす構造物の変形特性に対する適用はできない。また島らは、座屈後の鉄筋の応力-ひずみ曲線を仮定し、解析の上でその影響を表し、柱部材の実験と比較検討を行うことで座屈後の主筋が部材性状に寄与する程度の評価を行っているが、鉄筋の応力-ひずみ曲線の仮定の妥当性に対して疑問が残る。以上述べたように、主鉄筋の座屈がポストピーク挙動に及ぼす影響は、実験的にも解析的にもいまだ明らかになっていない分野であるが、破壊時に至るコンクリート構造の挙動を追跡する場合には、その影響を評価しなければならないと考えられる。

(3) せん断変形について

せん断変形がコンクリート構造物のポストピーク挙動に及ぼす影響に関しては、島らが実験結果より得られた鉄筋コンクリート柱の塑性域の変形を曲げ変形とせん断変形とに分離して検

討することで、明らかにしている。一方、解析的にその影響の程度を調べる試みは、Collins ら [63] が力の釣合と変形の適合条件を用いた解析手法を開発することで行ったが、その数値計算は非常に複雑である。したがって、ポストピーク領域でのせん断変形の影響を容易に考慮できる解析手法を開発する必要があると考えられる。

(4) 幾何学的非線形性について

幾何学的非線形性はコンクリート構造分野では従来ほとんど検討されず、Menegotto ら [33] の研究がわずかに挙げられる程度である。これは、コンクリート構造はその材料特性による非線形性が顕著であるため、幾何学的非線形性が及ぼす影響は、それほど大きくないと考えられるためである。しかしながら、構造物が破壊する場合などは当然大きな変形を生じることが予想され、構造物のポストピーク後の不安定挙動も材料非線形性からだけでなく幾何学的非線形性からも生じることが示された。

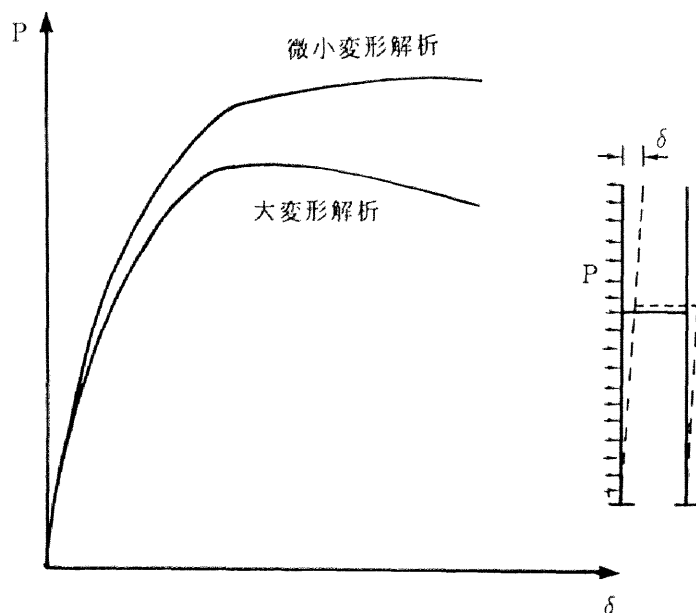


図- 1.3 既存斜張橋の解析より得られた荷重変位関係の一例

例えば、図- 1.3 は既存斜張橋の主塔を対象として著者が行った解析結果の一例であるが、幾何学的非線形性を考慮することで、構造物の最大荷重および構造物自身の荷重-変形関係は、従来行われている幾何学的非線形性を考慮しない解析結果に比べ大きく異なり、ポストピーク挙動に幾何学的非線形性が及ぼす影響も大きいことが分かる。

幾何学的非線形性の効果はコンクリート構造に対し主要な研究課題とされてこなかったが、高橋脚あるいは斜張橋の主塔の様なスレンダーな構造物が増えるにつれ、あるいはポストピーク挙動の解析理論構築の必要が増すにつれ、この影響は必ず考慮されなければならない要因と考えられる。

(5) 破壊点の同定について

最終的にコンクリート構造のポストピーク挙動を解析理論を用いて再現する場合、最も重要なことは構造物の破壊点を明確に表現することであろう。RC構造物の各種の限界点の理論的考察が進めば、靱性設計が合理的、実用的設計として実際の設計に反映される。

しかしながら先に述べたように、コンクリート構造はその材料自身の、あるいは異なる材料による複合効果など力学的挙動に及ぼす影響要因が複雑で多岐にわたるため、破壊点や破壊挙動の研究は実験的研究に限られていた。また、破壊を明確に評価し得るような定義も見あたらない。

これは現在までに行われた実験的研究も、研究者によって対象としている試験体の形状寸法、あるいは載荷方法が異なり、その着目点およびデータの処理の仕方も異なっているためである。既に述べたコンクリート構造物のポストピーク挙動に顕著な影響を与える要因である、材料非線形性、幾何学的非線形性、鉄筋の座屈、せん断変形の急増などもそれぞれが各種限界点と密接な関係を有しているものであり、また各々がカップリングすることの限界点も存在するであろう。

統一的なコンクリート構造の破壊点および各種の限界点を見いだすには、実験的研究に基づけば、現在までに得られた全てのデータを集め、それらを同一の基準により再整理し直すことがその第一歩となろう。

一方、解析的研究に基づけば、解析上生じる数学的、力学的に破壊と密接な関係があると考えられる限界点を定義することが必要である。また解析上生じる限界点は、限界点以降の構造物の挙動も明確に表現し得る点でなければならない。この要件を満たす点としては、先に述べた bifurcation point が考えられる。bifurcation point は数学的には構造物の接線剛性マトリクスの固有値が零となる特異点を形成し、力学的には構造物の挙動が急激に変わる状態に対応するものである。

以上述べてきたように、コンクリート構造のポストピーク挙動は複雑であり、多様な要因を含んだ形で現れてくる。そして、ポストピーク挙動を解析的に評価する研究に関しては、その困難さ故にまだ十分な検討はなされていない。本研究の目的は、このポストピーク挙動の解明を主眼とし、ポストピーク領域で生じるコンクリート構造物の破壊点を明確に定義することで、プレピーク、ポストピーク、破壊へと至るコンクリート構造の挙動を一貫した数値理論で評価することにある。

解析に際し、各現象に対する力学的挙動を正確に表現することは重要であるが、それにもまして、本質を失わずに解析に適した簡単な形で記述することが重要である。この基本的概念に基づき、本研究では以下の問題に対する理論的記述およびモデル化を研究の目的として含んでいる。

1. コンクリート構造を構成する材料の材料非線形問題と幾何学的非線形問題とをカップリングした解析理論
2. せん断変形の影響を簡単に表現し得る解析理論
3. 鉄筋の座屈のモデル化
4. コンクリート構造物の破壊および破壊時の挙動を明確に表現し得る数学理論

これらの理論の構築、モデル化と同時に、数値解析手法の開発を行うことでポストピークさらには破壊時までを解析的に追跡可能にする。

1.2 本論文の内容

本論文は、コンクリート構造のポストピーク挙動を解明するため、コンクリート構造特有の現象のモデル化と、現象に対する解析的検討を行っている。

第2章では、有限変形問題に対する増分形式の仮想仕事方程式を導き、有限要素法による離散化を示す。さらに、構造物の安定性に対する考察を行い、安定性が失われる構造特異点である limit point および bifurcation point に対する理論的検討を行うとともに、その力学的意義について述べる。

第3章では、コンクリート構造を構成する材料に対する構成則の提示を行い、本論文で用いる一軸応力-ひずみ関係を示す。ここで用いる応力-ひずみ関係は、多軸応力を受ける材料を等価な一軸の関係に置き換えたものであり、これにより構成則レベルでの数値解析の簡素化が行われている。

続いて、材料非線形性と幾何学的非線形性を含むコンクリート構造の非線形挙動の数値解析手法について説明を行う。数値解析手法は2つの異なる領域に対して適応される。一つは、ポストピーク挙動を含む連続した釣合経路を追跡する手法であり、もう一つは、bifurcation point後に生じる任意の分岐釣合経路へ移行するための解析手法である。

第4章では、コンクリート構造における bifurcation point の物理的意義および post bifurcation 挙動を簡単な数値例を用いて示す。コンクリート構造のようなひずみ軟化材料は、その材料特性に依存して bifurcation point が生じる。本章では特に材料的側面から bifurcation point の意義について議論を行う。

第5、6、7章はコンクリート構造に対する本手法の適用に関して述べる。

第5章では、鉄筋コンクリートはりに対して本手法を適用し、本手法の妥当性の検討を行うとともに、そのポストピーク挙動および bifurcation point 後での構造物の挙動が実際の鉄筋コンクリートはりの挙動とどのような関係を持つかを調べる。

第6章では、鉄筋コンクリート柱のポストピーク挙動に対して考察を行う。ここでは、棒要素に対しせん断変形の影響を簡単に評価できる大変形解析の定式化を行うとともに、異なる材料が組み合わせられた構造物の解析に適している layered beam の導入がなされている。そして、大きな変形を生じる鉄筋コンクリート柱の正負繰り返し載荷実験を行い、本手法の大変位繰り返し部材への適用を行う。

さらに、圧縮場理論を用いることで鉄筋コンクリート断面のせん断剛性を算定する方法を示し、本解析によりせん断変形が構造物の挙動に及ぼす影響を解析的に調べている。また鉄筋コンクリート柱における構造不安定性を、曲げ変形だけを考慮した場合、せん断変形と曲げ変形の両者を考慮した場合について議論している。

第7章では、鉄筋コンクリートラーメン構造を対象とした解析を行い、不静定構造物の靱性率を評価する方法について述べる。続いて、PC 斜張橋を対象とした解析を行い、幾何学的非線形性がその終局挙動に及ぼす影響について調べている。

第8章では、コンクリート構造の変形挙動に影響を与える、鉄筋の座屈をモデル化している。座屈モデルは、座屈を考慮した応力-ひずみ関係を解析的に求め、容易にその影響を解析手法の中に組み込める形で表している。さらに、提案した座屈を考慮した鉄筋の応力-ひずみ関係を用いて、座屈後の構造物の挙動について考察を行っている。

第9章では、鉄筋コンクリート部材に対し、繰り返し載荷荷重を受ける場合せん断変形が急増し荷重低下が生じる限界点を解析より見だし、解析上の靱性率を定義している。この靱性率より各種パラメーター解析を行い、土木、建築全ての鉄筋コンクリート部材に適用可能な靱

性評価式の提案を行っている。

第10章では、本研究で得られた結論の総括を行っている。

2 章 材料の非線形性を考慮した有限変形問題に対する理論的考察

本章では、材料非線形性および幾何学的非線形性を表現するために、増分形式で記述された仮想仕事方程式を導く。そして、導いた仮想仕事方程式の離散化を行うことで、有限要素解析に用いられる剛性方程式の表示を行う。

構造物の非線形挙動のうち、ポストピーク挙動は構造物が不安定になり、安定性が失われる領域である。そこで、安定性の数学的表現を示し、離散化された系に対してその適用を行う。さらに、安定性が失われる構造特異点である limit point および bifurcation point に対する理論的検討を行い、解析を実行する際の構造特異点の取扱についても述べる。

2.1 有限変形問題に対する増分形式の仮想仕事方程式 [1]

いま、ある荷重状態における応力、変位、体積力、表面力、境界面上での拘束変位をそれぞれ

$$\sigma_{ij}^{(0)}, u_i^{(0)}, p_i^{(0)}, f_i^{(0)}, d_i^{(0)} \quad (2.1)$$

で表し、微小な荷重増分により生じる増分を

$$\sigma_{ij}, u_i, p_i, f_i, d_i \quad (2.2)$$

とする。各増分は、変形前の座標系に関して定義される量であり、 σ_{ij} は第 2 種 Piola-Kirchhoff の応力テンソルである。また、増分量 p_i, f_i, d_i は十分小さく、基礎方程式はこれら増分量に関し線形化できるものとする。増分理論による有限変形問題の仮想仕事方程式は、[26][64]

$$\begin{aligned} & \int \int (\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}) \delta(e_{ij}^{(0)} + e_{ij}) dV - \int \int (p_i^{(0)} + p_i) \delta(u_i^{(0)} + u_i) dV \\ & - \int \int \int \frac{\gamma}{g} (\ddot{u}_i^{(0)} + \ddot{u}_i) \delta(u_i^{(0)} + u_i) dV - \int \int (f_i^{(0)} + f_i) \delta(u_i^{(0)} + u_i) dS = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここに、 $e_{ij}^{(0)}, e_{ij}^{(0)} + e_{ij}$ はそれぞれある荷重状態、微小な荷重増分が作用した状態のひずみ成分を表す。

$$2e_{ij}^{(0)} = u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)} + u_{k,i}^{(0)} u_{k,j}^{(0)} \quad (2.4)$$

$$2(e_{ij}^{(0)} + e_{ij}) = (u_i^{(0)} + u_i)_{,j} + (u_j^{(0)} + u_j)_{,i} + (u_k^{(0)} + u_k)_{,i} (u_k^{(0)} + u_k)_{,j} \quad (2.5)$$

式 (2.3) の左辺の第一項を σ_{ij}, u_i に関する二次項までを残し σ_{ij}, u_i に関し線形化すれば、

$$\begin{aligned}
& (\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij})\delta(e_{ij}^{(0)} + e_{ij}) \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij})\{\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + (u_k^{(0)} + u_k)_{,i}\delta u_{k,j} + (u_k^{(0)} + u_k)_{,j}\delta u_{k,i}\} \\
&= \sigma_{ij}^{(0)}\delta e_{ij}^* + \sigma_{ij}\delta e_{ij}^* + \sigma_{ij}^{(0)}\frac{1}{2}\delta(u_{k,i}u_{k,j})
\end{aligned} \tag{2.6}$$

ここに

$$\delta e_{ij}^* = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{k,i}^{(0)}\delta u_{k,j} + u_{k,j}^{(0)}\delta u_{k,i}) \tag{2.7}$$

(2.6) 式を用いて (2.3) 式を書き直せば、

$$\begin{aligned}
& \int \int \int \left(\sigma_{ij}\delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\frac{1}{2}(u_{k,i}^{(0)}\delta u_{k,j} + u_{k,j}^{(0)}\delta u_{k,i}) + \sigma_{ij}^{(0)}\frac{1}{2}\delta(u_{k,i}u_{k,j}) \right) dV \\
& - \int \int \int (p_i - \frac{\gamma}{g}\ddot{u}_i)dV - \int \int f_i\delta u_i dS = \delta W_r
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_r = & \int \int \int (p_i - \frac{\gamma}{g}\ddot{u}_i)dV + \int \int f_i\delta u_i dS \\
& - \int \int \int \left(\sigma_{ij}^{(0)}\delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}^{(0)}\frac{1}{2}(u_{k,i}^{(0)}\delta u_{k,j} + u_{k,j}^{(0)}\delta u_{k,i}) \right) dV
\end{aligned} \tag{2.9}$$

(2.9) 式は前段階における釣合方程式が完全に満足されないために生じる不平衡力が、 δu_i に対してなす仮想仕事である。この増分理論では、高次項を省略して線形化しているため、安定した数値解析解を得るためにも無視できない項である。また、材料非線形性を考えるときは必ず考慮されなければならない。

(2.8) 式の左辺の各項の物理的意味は、第一項が微小変形理論におけるひずみエネルギーの変分を表し、第二項は変形の進行にともなって生じる付加応力のなす仮想仕事項、第三項は初期応力 $\sigma_{ij}^{(0)}$ のなす仮想仕事項である。

また、ある荷重状態の解を変形の進行にともなって新たな座標系で逐次表現すれば (approximate updated lagrange method)、初期変位に関する (2.8)(2.9) 式の $u_{k,i}^{(0)}$ は無視できるようになる。この時応力増分 σ_{ij} は、新たな座標系に関して定義される量であり、Cauchy の応力テンソルとなる。

$$\begin{aligned} & \int \int \int \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}^{(0)} \frac{1}{2} \delta(u_{k,i} u_{k,j}) \right) dV \\ & - \int \int \int \left(p_i - \frac{\gamma}{g} \ddot{u}_i \right) dV - \int \int f_i \delta u_i dS = \delta W_r \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\delta W_r = \int \int \int \left(p_i - \frac{\gamma}{g} \ddot{u}_i \right) dV + \int \int f_i \delta u_i dS - \int \int \int \sigma_{ij}^{(0)} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (2.11)$$

(2.8) および (2.10) 式が有限変形問題に対する増分形式で書かれた仮想仕事方程式であり、この式を基礎として有限要素解析法を展開することができる。

定式に際して、動的変形の場合にも適用可能な形で表したが、慣性力による仮想仕事項を無視すれば静的変形のみを考慮できる。

2.2 構造物の安定性

安定性の十分条件は次のように述べる事ができる。平衡の位置からの有限の（小さな）近傍内にある任意の変位に対して、内部に蓄えられるかあるいは散逸するエネルギーは、外荷重が物体になす仕事よりも大きくなければならない [22]。すなわち、ある保存力のもとに静的に平衡している物体を考えれば、微小時間における、小さな付加変形の過程 \dot{u} を仮想し、位置エネルギーの増加に対する量

$$\Delta \pi = (\dot{u} \text{ による内力仕事}) - (\dot{u} \text{ による外力の仕事}) \quad (2.12)$$

が可能な全ての \dot{u} に対して正であれば、この平衡状態は安定である [21][22]。

任意時間において、静的に平衡している状態に関して座標系を定義する。したがって、任意時間におけるひずみと変位は定義した座標系に関して零となる。また、外力は大きさ、方向を変えない（死荷重）と仮定すれば、微小時間に対し (2.12) 式は次式のように書ける。

$$\Delta \pi = \int \int \int \left(\sigma_{ij}^{(0)} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int \int f_i^{(0)} \dot{u}_i dS - \int \int \int p_i^{(0)} \dot{u}_i dV > 0 \quad (2.13)$$

任意時間における座標系での釣合式

$$\int \int \int \sigma_{ij}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int \int f_i^{(0)} \dot{u}_i dS - \int \int \int p_i^{(0)} \dot{u}_i dV = 0 \quad (2.14)$$

を (2.13) 式に代入すれば、安定条件は

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \frac{1}{2} \int \int \int \left(\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) dV \\ &> 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。

(2.15) 式の線形化を行えば、最終的に、任意の平衡状態にある構造物の安定性の条件は、

$$\iiint \left(\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dV > 0 \quad (2.16)$$

で与えられる。

2.3 有限要素法による離散化

2.1 節において有限変形理論を支配する仮想仕事方程式を導いたので、次に、有限要素法の標準的手法にしたがって、それと等価な離散形の運動方程式ないしは剛性方程式を導く。まず、与えられた物体を任意個の有限要素に分割し、その一つの要素について定式化を行う。

要素の変位関数、すなわち、変位ベクトル U は一般化座標 a と形状関数 H を介して

$$U = Ha \quad (2.17)$$

の関係を持する。

変位勾配ベクトルは形状関数 H を一階微分して作られる G を使って、

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i} = Ga \quad (2.18)$$

で表される。

要素のひずみ成分 ϵ は形状関数 H を適当に微分して作られる B により、

$$\epsilon = Ba \quad (2.19)$$

で表される。

節点変位ベクトル u と一般化座標 a との間に

$$u = Aa \quad (2.20)$$

の関係が成り立ち、(2.20) 式を (2.17)(2.18)(2.19) 式に代入することにより次式が得られる。

$$U = HA^{-1}u \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = GA^{-1}u \quad (2.22)$$

$$\epsilon = BA^{-1}u \quad (2.23)$$

(2.21)(2.22)(2.23) 式を (2.8) 式の仮想仕事方程式に代入すれば、

$$\begin{aligned} & \delta u^T \left\{ ((A^{-1})^T \int \int \int H^T \frac{\gamma}{g} H dV A^{-1}) \ddot{u} + ((A^{-1})^T \int \int \int B^T D B dV A^{-1} \right. \\ & + (A^{-1})^T \int \int \int G^T [U^{(0)}] D B dV A^{-1} + (A^{-1})^T \int \int \int G^T [\sigma^{(0)}] G dV A^{-1}) u \\ & - (A^{-1})^T (\int \int \int H^T p_i dV + \int \int H^T f_i dS) \\ & - (A^{-1})^T (\int \int \int H^T p_i^{(0)} dV + \int \int H^T f_i^{(0)} dS) - (A^{-1})^T \int \int \int H^T \frac{\gamma}{g} \ddot{u}^{(0)} dV \\ & \left. - (A^{-1})^T (\int \int \int B^T \sigma^{(0)} dV + \int \int \int G^T [U^{(0)}] \sigma^{(0)} dV) \right\} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

任意の仮想変位 δu に対して成り立つ (2.24) 式が導かれる。ここで (2.24) 式中の D は有限要素を構成する材料の応力-ひずみマトリクスを示し、ある荷重状態に対して逐次与えられる。

(2.24) 式のマトリクス表示を行えば、

$$[M]\{\ddot{u}\} + ([K] + [K_0] + [K_g])\{u\} = \{F\} + \{F^{(0)}\} - [M]\{\ddot{u}^{(0)}\} - ([\tilde{K}] + [\tilde{K}_0])\{u^{(0)}\} \quad (2.25)$$

ここで $[M]$ は構造物の質量マトリクス、 $[K]$, $[K_0]$, $[K_g]$ はそれぞれ構造物の剛性マトリクス、初期ひずみマトリクス、幾何剛性マトリクスであり、 $\{F^{(0)}\}$ は変形前の物体に作用する節点力、 $\{F\}$ は節点力増分、 $([\tilde{K}] + [\tilde{K}_0])\{u^{(0)}\}$ は内力から求められる節点力である。この式が有限変形問題に対する離散化された運動方程式である。

動的変形を考慮しなければ (2.25) 式の運動方程式は次式の剛性方程式に書き直される。本論文では、静的変形のみを考慮しているため次式の剛性方程式を解析において用いることになる。

$$([K] + [K_0] + [K_g])\{u\} = \{F\} + \{F^{(0)}\} - ([\tilde{K}] + [\tilde{K}_0])\{u^{(0)}\} \quad (2.26)$$

(2.26) 式を増分理論に基づく解析の形に書き改める。第 (n) 段階の応力、変位の分布が既知であると、第 $(n+1)$ 段階の変形を決定する剛性方程式は、

$$([K] + [K_0] + [K_g])^{(n)}\{u\}^{(n+1)} = \{F\}^{(n+1)} + \{F_r\}^{(n)} \quad (2.27)$$

この式を用い構造全体に合成することで、有限要素解析が行える。ここで、 $\{F_r\}^{(n)}$ は (n) 段階の収束が完全に満足されないために生じる不平衡力であるが、コンクリートのような強非線形材料を扱うときには非常に重要な項となる。 $(n+1)$ 段階へ解析を進めるときに、正しい解を得るためには Newton Raphson 法などを用いて非常に小さな値にしておく必要がある。なお、updated lagrange 法にしたがい、変形の進行にともない座標変換を行えば、座標の更新が初期ひずみマトリクスと近似的に等価になるので $[K_0]$ は無視しても構わなくなる [9]。

2.4 構造特異点に関する考察

2.2 節で述べたように、構造物の安定性の条件は、任意時間に関して定義された座標系のもとで、全ての運動学的に可容なひずみ速度ベクトルに対して、

$$\int \int \int \left(\{\dot{\epsilon}\}^T \{\dot{\sigma}\} + \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right\}^T [\sigma^{(0)}] \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right\} \right) dV > 0 \quad (2.28)$$

で表される。有限要素法の一般的手法にしたがって (2.28) 式を書き換えれば、

$$\begin{aligned} & \int \int \int \left(\{\dot{\epsilon}\}^T \{\dot{\sigma}\} + \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right\}^T [\sigma^{(0)}] \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right\} \right) dV \\ &= \{\dot{u}\}^T \int \int \int \left([A^{-1}]^T [B]^T [D] [B] [A^{-1}] + [A^{-1}]^T [G]^T [\sigma^{(0)}] [G] [A^{-1}] \right) dV \{\dot{u}\} \\ &= \{\dot{u}\}^T \{[K] + [K_g]\} \{\dot{u}\} \\ &= \{\dot{u}\}^T [K_{eff}] \{\dot{u}\} > 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

ここで、 $[K_{eff}]$ は与えられた構造物の有効剛性マトリクスである。

この式が死荷重を受ける場合の離散化された系に対する安定条件となる。

一方、臨界点の条件としては、

$$\{\dot{u}\}^T [K_{eff}] \{\dot{u}\} = 0 \quad (2.30)$$

を満足することである。(2.30) 式が成立するための十分条件は接線有効剛性マトリクスの行列式を用いれば、次のように書くことができる。

$$\det(K_{eff}) = 0 \quad (2.31)$$

あるいは、接線有効剛性マトリクスの固有値を用いれば、

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (2.32)$$

を満足することである。ここで λ_i は接線剛性マトリクスの固有値である。(2.31)式は十分条件であるが、対称マトリクスの時に限り必要十分条件となる。本論文では、以後、対称マトリクスのみを対象として議論を行う。(2.31)(2.32)式は少なくとも一つの固有値が零であることを示している。(2.31)(2.32)式により定義される時点は一般に臨界点 (critical point) と呼ばれている。

臨界点は、limit point と bifurcation point の二つに分類することができる。増分形の方程式 (2.33) 式を利用して、臨界点の分類を行う。

$$[K]\{\dot{d}\} = \dot{\mu}\{f\} \quad (2.33)$$

ここに、 $\{f\}$ は荷重ベクトル、 $\{\dot{d}\}$ は変位増分、 $\dot{\mu}$ は荷重パラメーターの増分である。

接線剛性マトリクスが n 個の固有ベクトル $[v_i]$ を持つと仮定し (2.33) 式を対角化する。

$$[v_i]^T [K] [v_i] [v_i]^T \{\dot{d}\} = \dot{\mu} [v_i]^T \{f\} \quad (2.34)$$

ここで、 $[v_i] = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ である。

剛性マトリクスと固有値、固有ベクトルの関係は、

$$[K]\{v_i\} = \lambda_i \{v_i\} \quad (2.35)$$

(2.35) 式を (2.34) 式に代入し、固有ベクトルの直交性

$$\{v_i\}^T \{v_j\} = 1 \quad (i = j) \quad (2.36)$$

$$\{v_i\}^T \{v_j\} = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.37)$$

を考えれば、

$$\lambda_i [v_i]^T \{\dot{d}\} - \dot{\mu} [v_i]^T \{f\} = 0 \quad (2.38)$$

が全ての固有ベクトルに対して成立する。(2.38) 式を成分表示すれば、

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1\}^T \{\dot{d}\} \\ \{v_2\}^T \{\dot{d}\} \\ \vdots \\ \{v_n\}^T \{\dot{d}\} \end{Bmatrix} = \dot{\mu} \begin{Bmatrix} \{v_1\}^T \{f\} \\ \{v_2\}^T \{f\} \\ \vdots \\ \{v_n\}^T \{f\} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

今、 λ_i は $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ が成り立つと仮定する。臨界点において少なくとも一つの固有値が零である。問題を簡単にするため λ_1 だけが零の場合を考える。

$$\lambda_1 = 0 \quad (2.40)$$

$$\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0 \quad (2.41)$$

(2.38) 式の釣合が成立するためには

$$\dot{\mu}\{v_1\}^T\{f\} = 0 \quad (2.42)$$

が満足されなければならない。(2.42) 式は

$$\dot{\mu} = 0 \quad (2.43)$$

あるいは

$$\{v_1\}^T\{f\} = 0 \quad (2.44)$$

(2.43) 式と (2.44) 式のどちらかが成立するとき、あるいは、両者が成立するときに始めて満足される。(2.43) 式で定義される時点が limit point である。limit point の典型的な例としては、構造物に荷重を作用させた場合の荷重変位曲線で荷重降下を生じる場合の最大荷重点である (図 - 2.1)

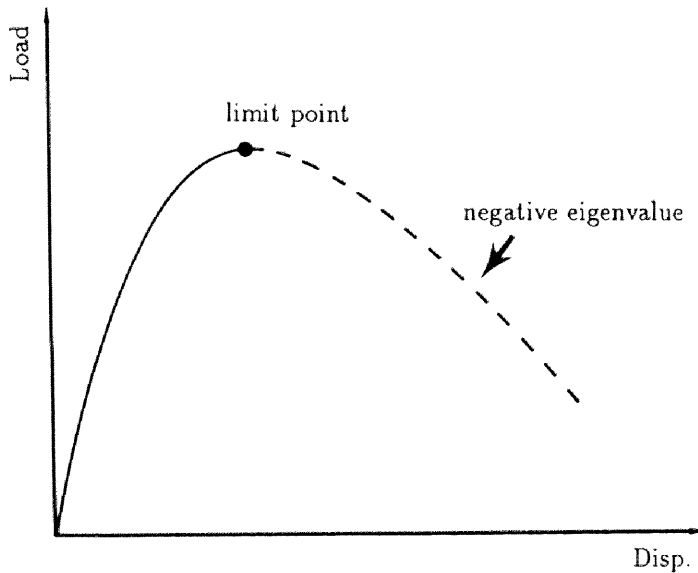


図 - 2.1 limit point と limit point 後の挙動

(2.44) 式で定義される時点が、bifurcation point である。(2.44) 式は零の固有値に対応する固有ベクトルが荷重ベクトルと直交することを示している。(2.44) 式のみが成立する時点が非対称分岐点 (asymmetric bifurcation point) と呼ばれ、(2.43) 式と (2.44) 式が同時に成立する時点が対称分岐点 (symmetric bifurcation point) と呼ばれる。ここで、対称、非対称の区別は、弾性安定問題に対して、釣合曲線を基にして定められた力学的分類を表したものである [1]。分岐点の分類と分岐後の挙動を図に示せば、図-2.2 のように表され、bifurcation point は、構造物には複数の平衡状態が存在することが分かる。

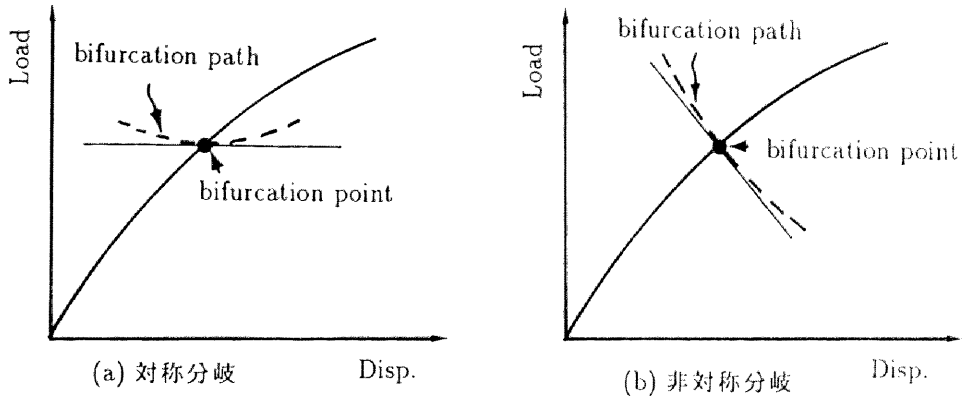


図-2.2 分岐点の分類と分岐後の挙動

臨界点は数学上の特異点であるため、構造物の接線剛性マトリクスは特異となり、剛性方程式を直接解くことができない。そのため、臨界点での変形モードを知る必要が生じる。

limit point に対する $\lambda_1 = 0$ および $\dot{\mu} = 0$ の条件を (2.39) 式に代入すれば、

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_2\}^T \{d\} \\ \vdots \\ \{v_n\}^T \{d\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.45)$$

固有ベクトルの直交性を考えれば (2.45) 式は、

$$\{d\} = \alpha \{v_1\} \quad (2.46)$$

の時にだけ常に成立する。ここで、 α は任意の値を持つスカラーである。つまり、limit point では変位ベクトルは零の固有値に対応する固有ベクトルのみで表されることが分かる。

次に bifurcation point を考える。(2.44) 式を (2.39) 式に代入すれば、

$$\begin{Bmatrix} \{v_1\}^T \\ \{v_2\}^T \\ \vdots \\ \{v_n\}^T \end{Bmatrix} \{d\} = \dot{\mu} \begin{Bmatrix} \beta \\ \frac{\{v_2\}^T}{\lambda_2} \{f\} \\ \vdots \\ \frac{\{v_n\}^T}{\lambda_n} \{f\} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

ここで、 β は任意の値を持つスカラーである。固有ベクトルの直交性を用いれば、bifurcation point での変形モードは

$$\{d\} = \beta \{v_1\} + \dot{\mu} [\{v_2\}, \dots, \{v_n\}] \begin{Bmatrix} \frac{\{v_2\}^T}{\lambda_2} \{f\} \\ \vdots \\ \frac{\{v_n\}^T}{\lambda_n} \{f\} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

で表される。(2.48) 式の右辺の第 2 項は fundamental solution であり、 $\{d^*\}$ で置き換える。

$$\{d\} = \beta \{v_1\} + \{d^*\} \quad (2.49)$$

この式により、bifurcation point で定義される変形モードが、零の固有値に対応する固有モードと fundamental path 上の変位ベクトルの線形結合により表されることが分かる。

対称分岐点の場合、(2.43) 式の条件が付加されるため (2.49) 式は

$$\{d\} = \beta \{v_1\} \quad (2.50)$$

と書き直され、limit point の場合と同様な変形モードを持つ。(2.46)(2.49)(2.50) 式の変形モードは、各臨界点における臨界点後の釣合経路への接線方向を示しているものであり、この変形モードを使い臨界点後の post 挙動を調べることができる。

問題を簡単にするため、 $\lambda_1 = 0$ 、 $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n > 0$ のみの場合を考えてきたが、コンクリートのようなひずみ軟化材料を考える場合、構造物を離散系に置き直すと、その材料特性から複数の固有値が同時に零になる場合は十分考えられる。そこで、次に複数の零の固有値が生じた場合を考え、一つの零の固有値のみを考えた場合と同様の議論を行う。2つの固有値が同時に零となり、残りの固有値は正の場合を考える。

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdots \lambda_n \neq 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

limit point に対して (2.39) 式は

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_3\}^T \{d\} \\ \vdots \\ \{v_n\}^T \{d\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.52)$$

と書き直される。この時、limit point での変形モードは (2.52) 式を常に満たす

$$\{d\} = \alpha \{v_1\} \quad (2.53)$$

$$\{d\} = \beta \{v_2\} \quad (2.54)$$

$$\{d\} = \gamma \{v_1\} + \eta \{v_2\} \quad (2.55)$$

(2.53)(2.54)(2.55) 式のいずれかで表される。この事実は非常に興味深い。複数の零の固有値が同時に生じた場合、limit point において、複数の平衡状態に移行する可能性があることを示している。つまり、コンクリートのようなひずみ軟化材料では、limit point が物理的に（必ずしも (2.37) 式を満たさないという意味において）bifurcation point と同義（複数の平衡状態が生じるという意味において）になる可能性があることを示している。ひずみ軟化材料ではこのようなことはしばしば生じる。一軸引張を受ける棒（図-2.4）を考え、離散化されたこの棒が荷重により uniform な変形をすると仮定すれば、棒を構成する各要素は同時に図-2.3 のひずみ軟化材料の応力-ひずみ曲線の最大点に到達するため、構造物は同時に複数の零の固有値を持つことになる。またこの後の釣合経路も、応力に対してひずみが一義的に決定されないため、除荷される要素と載荷される要素の組合せにより複数の経路を生じることになる。この点に関するより詳しい議論は、第4章で行う。

次に、bifurcation point を考える。(2.47) 式と同様に (2.39) 式が次のように書き直される。

$$\begin{Bmatrix} \{v_1\}^T \\ \{v_2\}^T \\ \{v_3\}^T \\ \vdots \\ \{v_n\}^T \end{Bmatrix} \{d\} = \dot{\mu} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \frac{\{v_3\}^T \{f\}}{\lambda_3} \\ \vdots \\ \frac{\{v_n\}^T \{f\}}{\lambda_n} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

従って、

$$\{d\} = \alpha \{v_1\} + \beta \{v_2\} + \{d^*\} \quad (2.57)$$

臨界点では、構造物の接線剛性マトリクスは特異であり、少なくとも一つの零の固有値を持ち、構造物が安定な状態であれば、接線剛性マトリクスは正定値であり、全ての固有値が正であることは既に述べた。一方、構造物が不安定である条件は少なくとも一つの運動学的に可容な場合において

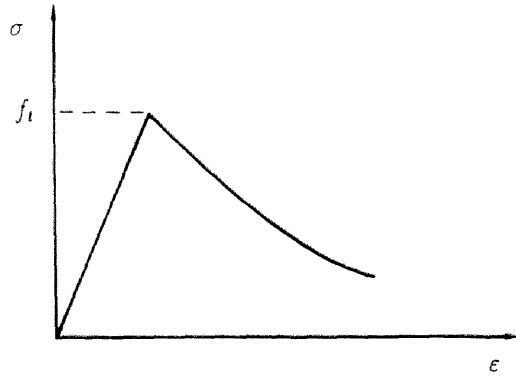


図- 2.3 ひずみ軟化材料の応力-ひずみ曲線



図- 2.4 離散化された棒部材 (4 要素)

$$\{\dot{u}\}^T [K_{eff}] \{\dot{u}\} < 0 \quad (2.58)$$

である。また (2.58) 式を固有値、固有ベクトルを用いて書き直せば次式のようなになる。

$$\lambda_i (\{\dot{u}\}^T \{v_i\}) (\{v_i\}^T \{\dot{u}\}) < 0 \quad (2.59)$$

(2.59) 式は、少なくとも一つの負の固有値に対して成立する。それゆえ、不安定な状態は構造物の負の固有値が存在することで判定できる。

今、2つの負の固有値 λ_1, λ_2 と対応する固有ベクトル v_1, v_2 が存在すると仮定する。 $\{\dot{u}\} = \alpha \{v_1\}$ である運動学的に可容な場を選べば、(2.59) 式は

$$\alpha^2 \lambda_1 \{v_1\}^T \{v_1\} < 0 \quad (2.60)$$

となり、負の固有値 λ_1 に対し、構造物は確かに不安定な状態にある。

同様に、 $\{\dot{u}\} = \beta \{v_2\}$ を仮定すれば、

$$\beta^2 \lambda_2 \{v_2\}^T \{v_2\} < 0 \quad (2.61)$$

となる。したがって、(2.60)(2.61) 式より、2つの負の固有値に対し、2つの異なる不安定状態が定義され、任意の釣合経路が負の固有値に関連して存在することが分かる。構造解析を行う際には、負の固有値の存在の有無によって安定、不安定の判別を行うことができ、負の固有値の数の変化を調べることによって、特異点の存在を知ることができる。

負の固有値に対して2つの状態が存在する。一つは limit point 後の釣合経路であり、もう一つは bifurcation point 後の釣合経路である。limit point を越えると構造物の荷重は図-2.1に示すように徐々に低下する。この時、荷重低下している釣合曲線上で構造物には一つの負の固有値が存在している。

bifurcation point を越えると複数の釣合曲線が存在し得るが、新たに生じた平衡状態に対応し複数の負の固有値が生じる。bifurcation point 後の釣合経路と対応する負の固有値に関する簡単な例を次に示す。弾性挙動を示す棒に対し、軸圧縮力を作用させる場合を考える(図-2.5)。図-2.5中のA点を越えると、一つの負の固有値が生じ、bifurcation point が一つ生じたことが分かる。この bifurcation point から新たに生じる釣合経路は図-2.5の破線に示すものである。さらに載荷を続けると、B点を越えたところで2つ目の負の固有値が生じる。この点で構造物には、A点から発生するものとB点から発生する2つの異なる釣合経路が新たに存在していることになる。

もう一つの例として、先に示した図-2.3、図-2.4の問題を考える。この時、最大荷重点を越えると構造物には4つの経路を任意に取り得る可能性が生じる(図-2.6)。図-2.6の一番緩やかな曲線は、構造物全体が uniform に変形する挙動に対応する。この時構造物には4つの負の固有値が存在している。そのうち一つは、荷重低下を生じる不安定な挙動を示す自分自身の経路に対応するもの(uniform deformation)であり、残りの3つが、その他の釣合経路の存在を示すものである。残り3つの釣合経路がどのような変形挙動に対応するかを言及すれば、一番急激に荷重低下を生じる経路は一つの要素だけにひずみの局所化が生じる場合であり、他の2つはそれぞれ、2つの要素、3つの要素にひずみの局所化が生じる場合に対応する。

以上のように、bifurcation point で構造物には今までと全く異なる変形状態に移行する可能性が生じる。もし実際の構造物において、破壊時に変形挙動が急変すると仮定すれば、bifurcation point は破壊を数学的に定義し得る有力な限界点であると推論される。

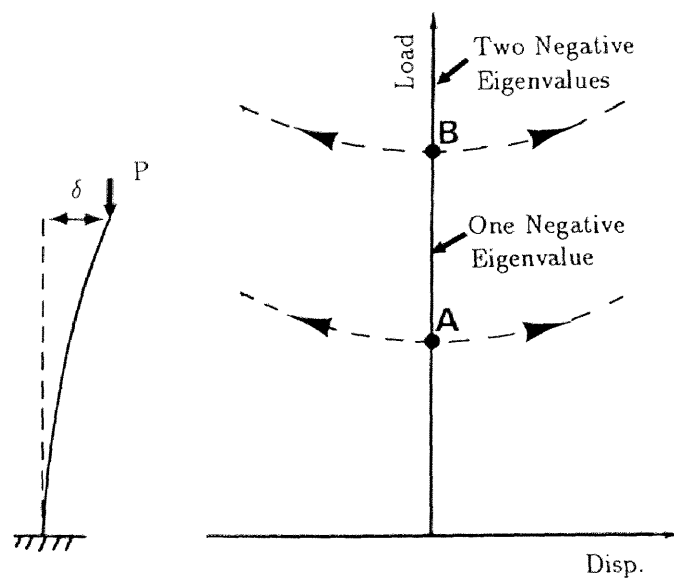


図 - 2.5 弾性挙動を示す棒の荷重変位関係

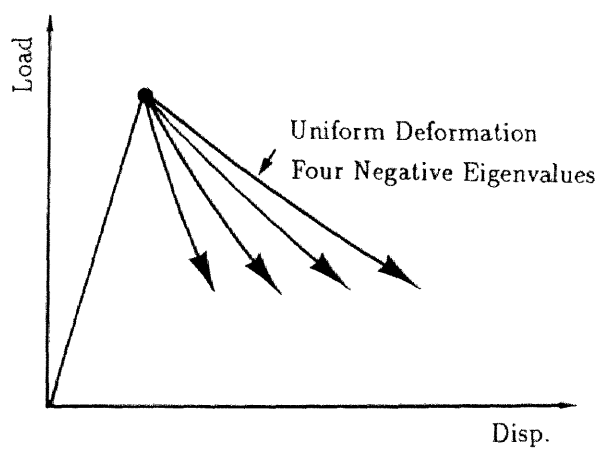


図 - 2.6 ひずみ軟化材料の荷重変位関係

2.5 結論

本章では、コンクリート構造を解析的に解明するために必要となる基礎方程式を示すとともに、構造物の安定性に対する理論的検討を行った。

まず、コンクリート構造の材料非線形性および幾何学的非線形性を表現するための基礎方程式として、有限変形問題に対する増分形式で記述された仮想仕事方程式を導き、その離散化を行うことで、有限要素解析に用いられる有限変位理論に基づく剛性方程式の表示を行った。

ポストピーク領域は構造物が不安定になり安定性が失われる領域であるため、安定性の数学的表現を示し、離散化された系に対するその適用を行った。さらに安定性が失われる構造特異点である limit point および bifurcation point に対する理論的検討を行い、解析を実行する際の構造特異点の取扱およびその力学的意義を明確にした。

3 章 ひずみ軟化材料で構成される構造物のプレピークおよびポストピーク挙動の解析方法

本章では、まずコンクリート構造を構成する材料（コンクリートおよび鉄筋）に対する構成則の提示を行い、本論文で用いる一軸応力－ひずみ関係を示す。本章で示す応力ひずみ関係は、多軸応力を受ける材料を等価一軸の関係に置き換えたものと定義される。

続いて、材料非線形性と幾何学的非線形性を含むコンクリート構造の非線形挙動の数値解析手法について説明を行う。数値解析手法は2つの異なる領域に対して適用され、1つは、ポストピーク挙動を含む連続した釣合経路を追跡する手法であり、もう一つは、bifurcation point後に生じる任意の分岐釣合経路へ移行するための解析手法である。

本章で示す構成則および解析手法は、本論文を通して解析に用いられるものであり、次章からは、応力－ひずみ関係などの具体的な表示は行わず、解析パラメーターの値だけ（ f'_c, f_t など）を示すことにする。

3.1 コンクリート構造を構成する材料の構成則

3.1.1 コンクリートの構成則

a) ひび割れのないコンクリート

コンクリートは応力が作用する以前に、粗骨材とモルタルの境界に多数のマイクロクラックが発生している。その結果、このマイクロクラックの方向性によりコンクリートは等方体でなくなり異方性を持つようになる。これはコンクリート材料の大きな特徴の一つであり、コンクリート構造物の挙動を正しく理解するためには、この効果は必ず考慮しなければならない。

そこで本論文においては、コンクリートは直交異方性材料であると考え、Darwin ら [11] が提案した、増分形の構成関係式を用いる。Darwin らによれば、異方性主軸方向に対して、

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1+E_2-2\nu\sqrt{E_1E_2}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

のように書ける。ここで、添字 1, 2 は異方性の主軸を表し、 $d\sigma_1, d\sigma_2, d\tau_{12}$ は応力増分、 $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\gamma_{12}$ はひずみ増分、 E_1, E_2 は接線剛性、 ν は等価ポアソン比を表す。

(3.1) 式の増分形の構成関係式の中の係数の決定は、等価一軸ひずみと呼ばれる量を用いる。等価一軸ひずみは、

$$d\varepsilon_{iu} = \frac{d\sigma_i}{E_i} \quad (3.2)$$

$d\varepsilon_{iu}$: i 方向の等価増分一軸ひずみ
 $d\sigma_i$: i 方向の増分主応力
 E_i : i 方向の接線ヤング係数

と定義される。この等価増分一軸ひずみは、応力増分が（一軸） $d\sigma_i$ だけであって他の応力増分は 0 の時、材料に生じる i 方向のひずみ増分である。また $d\varepsilon_{iu}$ は、他の見方をすると、現在の応力比に依存する量でもあり、応力のような変換則は成り立たず、材料パラメーターの変化をはかる量としてのみ意味を持つ。この概念を用いると、全等価一軸ひずみは、上式を載荷経路に沿って積分することにより、次のように得られる。

$$\varepsilon_{iu} = \int \frac{d\sigma_i}{E_i} = \sum \frac{\Delta\sigma_i}{E_i} \quad (3.3)$$

ε_{iu} : i 方向の等価一軸ひずみ
 $\Delta\sigma_i$: i 方向の増分主応力

(3.3) 式から分かるように、等価一軸ひずみは主応力方向に求められているが、一般に主応力方向は載荷に応じて変化する。したがって、たとえば σ_1 は固定された方向の変形履歴を表すのではなく、連続的に方向を変えながら ε_{1u} に対応する変形履歴を示している。

基本的な考え方は、多軸下での応力－ひずみ関係が一軸の場合のものと同じに書けたならば、等価一軸ひずみを用いることにより応力－ひずみ曲線に一軸の応力－ひずみ応答と同様なものを使える。

(b) ひび割れを生じたコンクリート

ひとたびひび割れが生じれば、コンクリートの異方性の主軸の一つはひび割れ方向に一致する。コンクリートの応力－ひずみ関係は、ひび割れ方向にのみ依存すると仮定すれば、ひび割れたコンクリートの構成関係式は平面応力に対して、

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_n \\ d\sigma_t \\ d\tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_n \\ d\varepsilon_t \\ d\gamma \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

と書ける。ここで E_n はひび割れ直角方向のコンクリートの引張剛性、 E_t はひび割れ方向のコンクリートの圧縮剛性、 G はひび割れたコンクリートのせん断剛性を表す。

解析において (3.1)(3.4) 式の構成マトリクスは全体座標系に変換しなければならない。それには応力テンソルならびにひずみテンソルの変換法則を用いれば、

$$[D_T] = [T_1(\theta)]^{-1} [D_L] [T_2(\theta)] \quad (3.5)$$

$$T_1(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$T_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ここで $[T_1(\theta)]$ 、 $[T_2(\theta)]$ は、ひび割れが入っていない場合、現在の主応力方向と全体座標の方向および現在の主ひずみ方向と全体座標の方向を関係づける変換行列である。また、ひび割れが入った後は、ひび割れの方向と全体座標の方向を関係づける変換行列であり、ひび割れ後は一定の角度 (θ) が与えられる。

コンクリートの構成則を 2 次元で記述を行ってきたが、コンクリート構造物の種類により、解析においては一次元の構成則も用いる。一次元問題を考える場合、等価一軸ひずみとして定義される量は、それ自身実ひずみとしての意味を持つ。

3.1.2 コンクリートの等価一軸応力-ひずみ関係

解析に用いる等価一軸応力-ひずみ関係は図-3.1 に示すように、圧縮領域にあっては、ひずみが ε_{c0} (圧縮強度時 f'_c のひずみ) までは 2 次曲線で応力は上昇し、それ以降 ε_u まで直線的に応力が減少するモデルである。

$$\sigma = f'_c \left\{ 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right\} \quad (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{c0}) \quad (3.8)$$

$$\sigma = f'_c \frac{\varepsilon - \varepsilon_u}{\varepsilon_{c0} - \varepsilon_u} \quad (\varepsilon_{c0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u) \quad (3.9)$$

応力降下曲線の勾配はスターラップ量および、コンクリートの圧縮強度によって影響され、その影響の程度は (3.10) 式に示す Kent and Park モデル [27] により定式化した。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_u &= 2(\varepsilon_{50h} + \varepsilon_{50u}) - \varepsilon_{c0} \\
\varepsilon_{50h} &= 0.75\rho_w\sqrt{b/s} \\
\varepsilon_{50u} &= (0.21 + 0.002f'_c)/(f'_c - 70)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

ここで、 ρ_w は帯鉄筋比、 b は帯鉄筋に囲まれるコンクリートの辺の長さ、 S は帯鉄筋の間隔を表す。また、 f'_c は kgf/cm^2 の単位を持つものである。

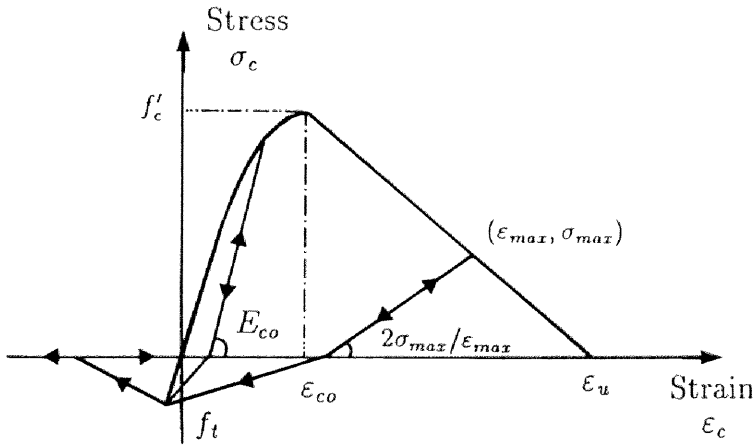


図 - 3.1 Stress-Strain Relation for Concrete

一般にコンクリートは、スタースラップなどにより拘束を受けるため3次元応力状態になる。本モデルでは応力降下曲線の勾配をその拘束量により変えることで、このような3次元応力状態を等価な1次元応力状態として模擬していると言える。

繰り返し応力下の挙動は、繰り返しによってこれまでに経験した圧縮側の最大ひずみを ε_{max} とすると、 ε_{max} が ε_{c0} 以下の場合は傾き $E_{c0} = 2f'_c/\varepsilon_{c0}$ の直線に沿って応力が減少するとし、 ε_{max} が ε_{c0} 以上の場合はスケルトンカーブ上の点 $(\varepsilon_{max}, \sigma_{max})$ と横軸の ε_c 軸上の点 $(0, \varepsilon_{max}/2)$ とを結ぶ傾き $2\sigma_{max}/\varepsilon_{max}$ の直線に沿って応力は変化するとした。

また、圧縮強度 f'_c は、2軸応力場で引張-圧縮を受ける場合、引張ひずみにしたがって圧縮応力は低減することが知られている。そこで、2軸応力場を考える場合はCollinsら[63]が提案している式

$$\frac{f_{2max}}{f'_c} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{c0}}} \leq 1.0 \tag{3.11}$$

引張領域にあっては、応力は最大引張応力 (f_t) までは傾き E_c で増加し、最大引張応力を越えるとそれ以降、引張応力が徐々に低減すると仮定した。コンクリート内に鉄筋が存在する場合、コンクリートにひび割れが生じても鉄筋とコンクリートの付着作用により、tension stiffening 効果が生じる。この効果は引張応力の低下の程度を変えることにより間接的に導入できる。

3.1.3 鉄筋の構成則

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x E_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & p_y E_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

30

対して与える。またスターラップのように分散して配置されている場合は、腹鉄筋比として平均的に取り扱う。

コンクリート構造物中の鉄筋要素は大部分が一次元挙動を表すので、 E_{sx}, E_{sy} も一軸の応力-ひずみ関係より得られる接線係数を用いる。

3.1.4 鉄筋の応力-ひずみ関係

鉄筋の応力ひずみ関係は図-3.2 に示すように、単調増加荷重の場合は、引張側・圧縮側ともに、降伏点までは線形を保ち、降伏点を越えると初期勾配の $1/100$ の傾きで応力は上昇するとした。除荷する場合には、応力が逆転しない間は降伏前と同じ傾きで進行し、応力の符号が変化したら図中に示す傾き $E_{B,i} (= -E_s \log_{10}(\epsilon_i - \epsilon_y)/6)$ (i は繰り返し履歴を表している) [39] で単調増加荷重時の降伏曲線に交わるまで応力は上昇し、それ以降降伏曲線上を移動すると仮定した。

3.2 変位増分法

鉄筋コンクリート構造物は鋼構造物に比べて非常に強い非線形性を示し、解析を行うにあたり常に繰り返し計算が必要となる。また鉄筋コンクリート構造物の終局状態を解析により再現する場合、コンクリート材料の軟化特性あるいは、構造物の幾何学的非線形性のために、荷重降下の性状が生じる。このような性状を解析するのに有用な方法の一つとして、変位増分法がある。変位増分法を行えば、容易に最大荷重点を越えることができ、荷重降下挙動を追跡することが可能になる。

以下に変位増分法に基づく繰り返し計算の概説を示す。

釣合段階での非線形方程式は、

$$[K]\{\Delta D\} = \{\Delta F\} + \{R\} \quad (3.13)$$

ここに $[K]$ は各繰り返しステップで更新される増分形の剛性マトリクス、 $\{R\}$ は前回のステップで完全に収束しないために残る不平衡力を示す。

(3.13) 式を部分行列に分けマトリクス表示すると、

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^{(0)} \begin{Bmatrix} \Delta D_k \\ \Delta D_u \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \Delta P_u \\ \Delta P_k \end{Bmatrix}^{(1)} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}^{(0)} \quad (3.14)$$

ここで、 $\{\Delta D_k\}$ は既知の変位ベクトルであり、変位制御点の変位がここに含まれる。 $\{\Delta D_u\}$ は未知の変位ベクトル、 $\{\Delta P_u\}$ は未知の荷重ベクトル、 $\{\Delta P_k\}$ は既知の荷重ベクトルである。

上付きの () 内は収束ステップを示し、(0) は前段階の収束後に評価した状態を示し、(1) は 1 回目の収束時に与えられる量を示す。

変位制御点に任意の増分変位を与えて (3.14) 式を解く。

$$\{\Delta D_u\} = [K_{22}]^{-1} (\{\Delta P_k\} + \{R_2\} - [K_{21}] \{\Delta D_k\}) \quad (3.15)$$

$$\{\Delta P_u\} = [K_{11}] \{\Delta D_k\} + [K_{12}] \{\Delta D_u\} - \{R_1\} \quad (3.16)$$

(3.15)(3.16) 式により、未知の変位、未知の荷重が求まる。しかしながら、(3.15)(3.16) 式は任意の変位増分に対して得られた線形化した解であるので、正解とはならず構造物には不平衡力が生じることになる。すなわち、

$$\{R\}^{(1)} = \{R\}^{(0)} - \{\Delta P\}^{(1)} - \int [B]^T \{\Delta \sigma\}^{(1)} dV \quad (3.17)$$

この式が、変位増分後の形状に対し、構造物に生じている不平衡力であり、 $\{R\}^{(0)}$ は前段階の収束後の不平衡力の残差で、 $\{\Delta P\}^{(1)}$ は一回目の収束ステップの荷重増分、 $\{\Delta \sigma\}^{(1)}$ は形状変化にともなって生じた要素内の応力増分である。

収束計算の第二ステップとしては、接線剛性マトリクスを現在の変形状態に対して書き直し、(3.17) 式的不平衡力ベクトルを荷重ベクトルとして作用させる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^{(1)} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta D_u \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}^{(1)} \quad (3.18)$$

ここで変位制御点の変位は確定量 (収束量) であるので、この後の収束ステップでは、 $\{\Delta D_k\}=0$ とおく。

以下同様の計算を、必要とする精度で解が収束するまで繰り返す。収束計算の第 n ステップを書けば、

$$\{R\}^{(n)} = \{R\}^{(0)} - \sum_{i=1}^n \{\Delta P\}^{(i)} - \int [B]^T \sum_{i=1}^n \{\Delta \sigma\}^{(i)} dV \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta D_u \end{Bmatrix}^{(n+1)} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (3.20)$$

以上が本解析で用いた繰り返し手順の、Newton-Raphson 法に基づく変位増分法である。ただし本解析は、変位制御点の変位の比が分かっている場合には有効な方法であるが、複数の荷重が作用する場合には、直接的に解を求めることはできない。

ここで、収束の判定としては、全外力の 2 乗和の平方根に対して不平衡力の 2 乗和の平方根が 10^{-4} 以下になるとした。

$$\sqrt{\{R_i\}^T \{R_i\}} \leq 10^{-4} \sqrt{\{P_i\}^T \{P_i\}} \quad (3.21)$$

3.3 Post Bifurcation 挙動の解析

変位増分法を用いれば、limit point を越えることは可能になり、最大荷重点後の挙動を求めることができる。一方、もし bifurcation point が生じた場合、多くの場合基本パスを trace してしまい、bifurcation point 後に生じる新たな bifurcation path を直接的に得ることはできない。したがって、bifurcation path を得るためには、基本パス上の分岐点からいかにして分岐パスへ移らせるかが問題となる。

bifurcation path を得る方法は、

1. 固有値問題を解く [32]
2. 増分の 2 次項以上の高次項を計算する [54][61]
3. 初期不整モードを正しく推定する [10]

1. から 3. のいずれかの手法もしくはそれらを組み合わせて行うことになる。ここで 2. の方法に関しては、bifurcation point における解を増分の高次項展開を含んだ形で表現する摂動的な方法を解析手順に組み入れなければならないため、有限要素解析手法の一計算過程として bifurcation path を計算する場合、解析方法としては実用的でない。また 3. の方法は、コンクリートのように幾何学的にだけでなく材料的側面より bifurcation point が生じる場合利用することは困難である。そこで本研究では、1. の方法を用い、bifurcation point で固有値問題を解いて得られる固有値、固有ベクトルにより推定した変形モードにより、bifurcation path を得ることを試みる。固有値問題を解く方法は、任意の釣合状態に対する bifurcation path 方向を逐次表現できるので、コンクリートのような材料非線形問題を取り扱うときは最も有効と考えられる（経路依存型の構成則を用いた場合も同様に扱う）。

bifurcation point から生じる bifurcation path 方向のベクトルは、第 2 章で述べたように零の固有値に対応する固有モード（ $\{V\}$ ）と fundamental solution（ $\{d^*\}$ ）の線形結合により表すことができる。したがって、bifurcation path 方向への初期増分変位置は、

$$\{\Delta d\} = \alpha(\{\Delta d^*\} + \beta\{V\}) \quad (3.22)$$

与えられる。ここで α 、 β はスカラーである。この α 、 β の大きさは、増分の 2 次の項を考えれば決定することができるが、本論文では細野 [14][15] と同様に、増分の 2 次項を計算しないで α と β の値を推定し試行錯誤的に bifurcation path を求めていく解析手法を開発した。

以下にその手順を示す。

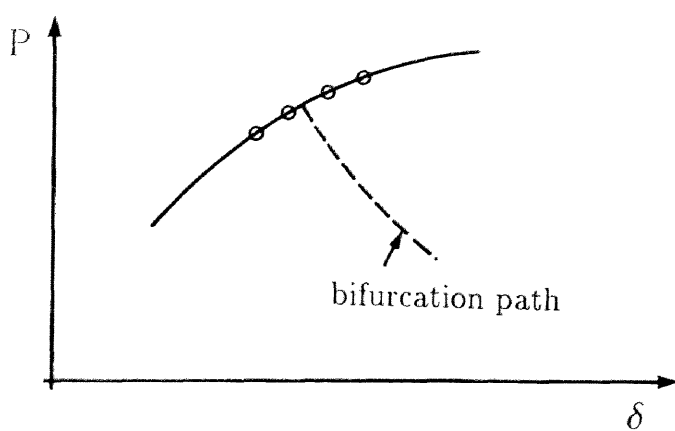


图 - 3.3(a) Selection of Bifurcation Point

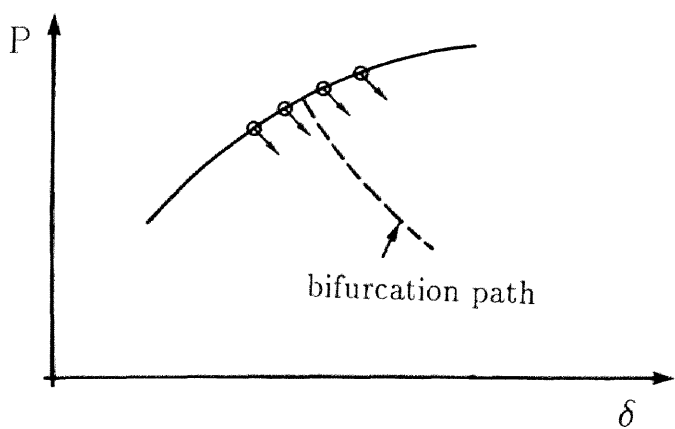


图 - 3.3(b) Selection of Incremental Displacement from Bifurcation Point

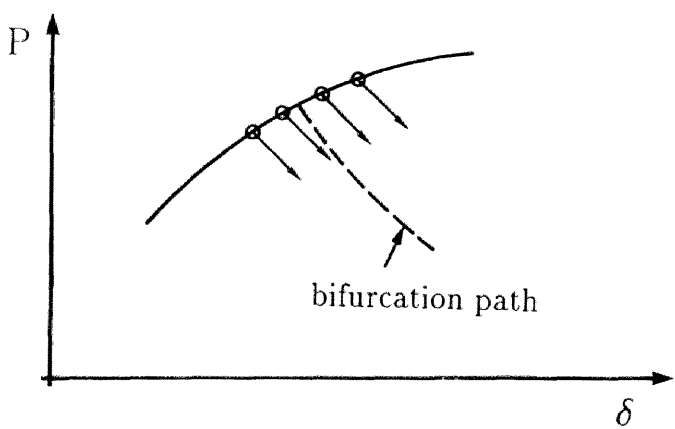


图 - 3.3(c) Modification of Incremental Displacement from Bifurcation Point

1. bifurcation point での零の固有値に対応する固有ベクトルを計算する。しかしながら、零の固有値を解析上捜すことは非常に困難である。そこで解析上では、ある程度零に近い負の固有値が生じた時点を見かけ上の bifurcation point と考え、その時の固有ベクトルを計算する。
2. bifurcation point からの増分変位を、零の固有値に対応する固有ベクトルで表す。

$$\{\Delta d\} = \alpha \{V\} \quad (3.23)$$

非対称分岐の場合、この仮定は正しくない。しかし本方法は試行錯誤的であるため最終的な結果にこの仮定が及ぼす影響はそれほど大きくないと考えられる。

3. bifurcation point 前後で、解析上の分岐点を数個仮定する（図－3.3(a)）。これは (1)(2) の仮定で、増分変位ベクトルの方向が、bifurcation path の方向と必ずしも一致しないことなどの誤差を、見かけ上の分岐点を動かすことにより考慮するものである。
4. 任意の α を与え、Newton Raphson 法に基づく変位増分法により収束計算を (3) で仮定した各分岐点より行う。この時の増分変位は、各点とも等しいものである（図－3.3(b)）。
5. 収束に成功しなければ、 α の値を変え上記の手順を繰り返す（図－3.3(c)）。ただし、 α の値が小さければ構造物は基本パスに収束する可能性が高く、 α の値が大きければ、解は発散する可能性が高くなる。そのため α の選択には注意が必要である。

ひとたび、bifurcation path 上へ移行することに成功すればそれ以降は、基本パス上と同様な計算を行えばよい。

基本的に、(3.22) 式は分岐後の釣合経路の接線方向の変位であるので、この変位は分岐後の釣合式を満たさないため収束計算が必要となる。したがって、求めようとする分岐方向に近づき得るという大勢を把握できれば十分と考えられる。つまり、起こり得る可能性は分岐するか基本パスへ戻るかのどちらかである。したがって、たとえ精度が粗くても、一度分岐させることに成功させれば、以後 Newton-Raphson 法を用いて、初期推定値の精度の悪さを訂正し、正しい分岐パスを捉えることは十分可能であると考えられる。

3.4 結論

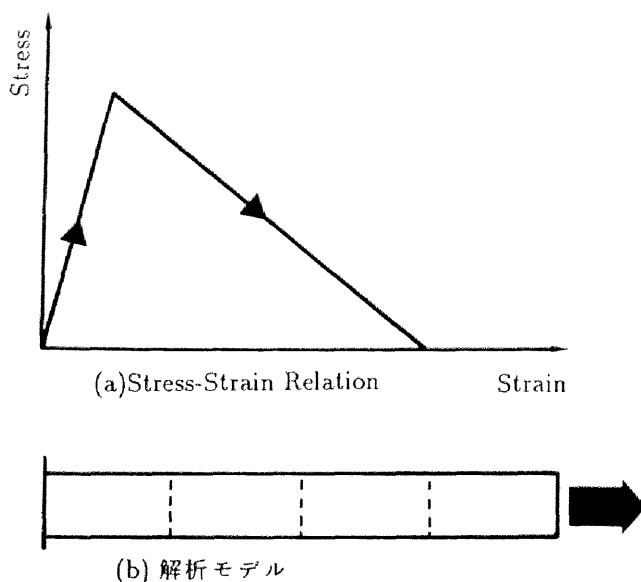
本章では、解析を実行する際に必要となる、本論文で用いる材料の構成則および数値解析手法の提示を行った。

数値解析手法としては、ポストピーク挙動を含む連続した釣合経路を追跡する手法と、bifurcation point 後に生じる任意の釣合経路へ移行するための解析手法を示した。特に、bifurcation point 後の任意の分岐経路追跡手法として、固有値問題を解いて得られる固有ベクトルにより変形モードを推定し試行錯誤的に bifurcation path を求めていく方法を提案した。提案した方法は、コンクリートのような材料非線形性問題を取り扱うときには最も有効な方法と考えられる。

4 章 コンクリート構造における bifurcation point の物理的意義および post bifurcation 挙動

本章では、コンクリート構造における bifurcation point の物理的意義および post bifurcation 挙動を、簡単な数値計算例を用いて示す。コンクリート構造のようなひずみ軟化材料は、その材料特性に依存して bifurcation point が生じる。本章では特に、材料的側面から bifurcation point の意義について議論を行う。

4.1 コンクリート一軸部材のひずみの局所化



図－4.1 弾性軟化性状を示す一軸コンクリート部材

図－4.1 に示す弾性軟化の応力－ひずみ関係で表されるコンクリートの一軸部材に、引張力が作用する場合を考える。一例として、この一軸部材を4要素に分割し有限要素法を実行する。一端の変位を制御して解析を行えば、図－4.2 の(1)の実線の荷重変位関係が得られる。この時、部材は全ての荷重段階において uniform な変形をし、各要素でのひずみおよび応力はすべて等しい。また、解析中に構造物の安定性を調べるための固有値解析を行えば、最大荷重点を越え荷重低下領域に入ると、構造物には4つの負の固有値が発生することが分かる。この最大荷重点は、弾性安定の分類に従えば、limit point であるが、第2章で述べたように、コンクリー

トのようなひずみ軟化材料では、この最大荷重点後 uniform な変形以外の変形挙動を示す複数の平衡状態が存在するという意味において bifurcation point と定義される。

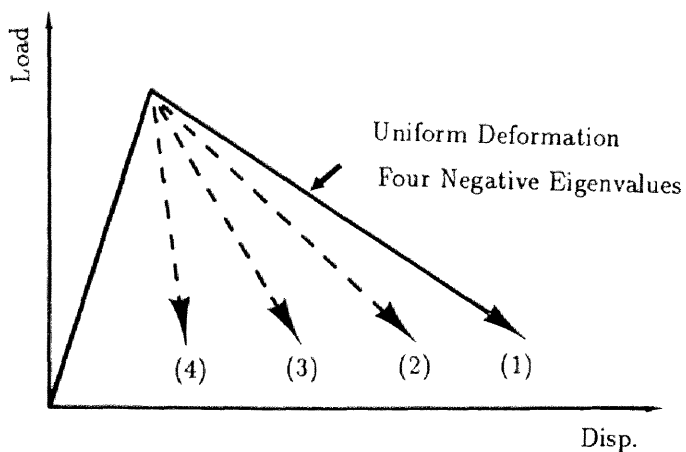


図 - 4.2 Post Bifurcation 挙動

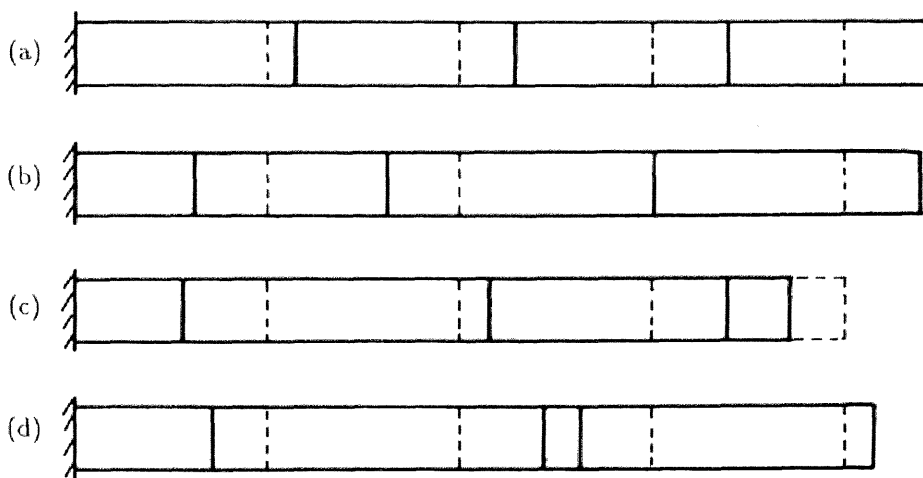


図 - 4.3 4 つの負の固有値に対応する固有モード

(a)Fourth Eigenmode (b)Third Eigenmode

(c)Second Eigenmode (d)First Eigenmode

複数の負の固有値の発生により、それぞれの固有値と関連する複数の平衡状態が同時に発生する。4つの負の固有値のうち一つは、図-4.2の(1)の実線の荷重低下する不安定な釣合曲線上に構造物が存在していることを示すものである。そして残りの3つの負の固有値が、異なる3つのbifurcation pathの存在を示している。

bifurcation pointから発生する新たな釣合経路は、零の固有値に対応する固有モードを使い求めることができる。しかしながら、純粋なbifurcation pointを解析上見いだすことは不可能に近い。その結果、一般的にはbifurcation pointをわずかに越えた点での、零ではなく負の値の固有値に対応する固有モードを使って、post bifurcation挙動を評価することになる。

そこで、図-4.2の実線上で生じている4つの負の固有値に対応する固有モードを示せば、図-4.3のようである。図-4.3の点線は、初期の部材形状であり、実線は固有モードを表す。図中、(a)(b)(c)(d)順に絶対値の小さな負の固有値に対応する固有モードである。これらの固有モードを使えば図-4.2の(2)(3)(4)の点線に示す任意のbifurcation pathを得ることができる。以下に、その手順を簡単に述べる。

今、一番小さな固有値に対応する固有ベクトル(図-4.3(d))をbifurcation pointからの変位増分として部材に与え、第3章で示した分岐解析を行えば、図-4.2の(3)の点線で示す直線を得ることができる。この時の一軸部材の変位状態は図-4.4に示すようになり、4要素のうち2要素が載荷され(strain localization)、残りの2要素が除荷されるモードへ構造物が移行していることが分かる。

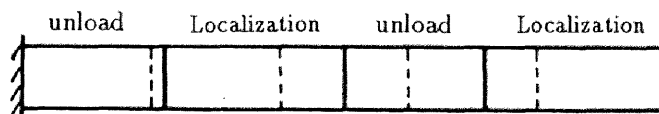


図-4.4 図-4.2の(3)の経路上の構造物の変形

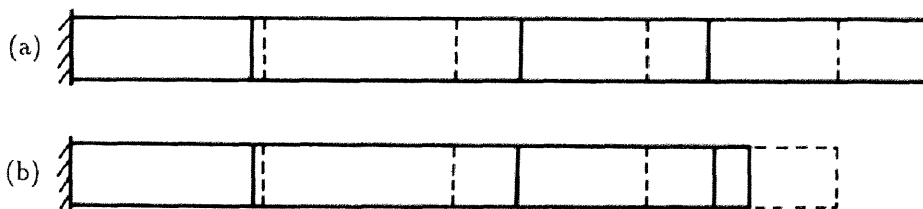


図-4.5 2つの負の固有値に対応する固有モード

(a)Second Eigenmode (b)First Eigenmode

さらに、図-4.4の変形状態に対し固有値解析を行えば、構造物には2つの負の固有値が存在しているのが分かる。一つの負の固有値は、構造物が荷重低下を示す直線(3)上の不安定な釣合状態にあることを示し、残りの一つの負の固有値がbifurcation pathの存在を示しているものである。

図-4.4の変形状態に対し作り直された剛性マトリクスより得られる固有モードのうち、2つの負の固有値に対応するモードを示せば図-4.5のようである。図-4.5の一番小さな固有値に対応する固有モードを変位増分として図-4.4の変形状態に加えて収束計算を行うと、図-4.6に示すように一要素にひずみが局所化する変形モードを得ることができる。この時の荷重-変位関係は図-4.2の(4)の点線となる。この変形状態に対しては、負の固有値は一つだけであり、その固有値は荷重低下する(4)の点線上に構造物が存在していることを示すものである。また図-4.2の(2)の点線も任意の固有モードを組み合わせることで、同様に得ることができる。

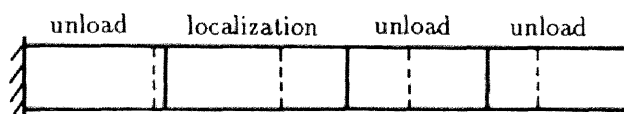


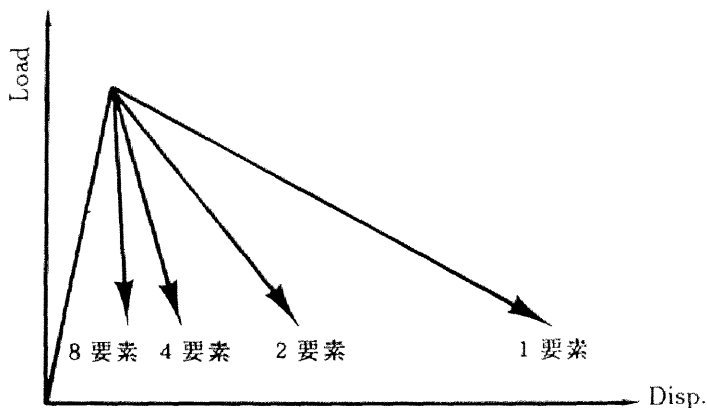
図-4.6 図-4.2の(4)の経路上の構造物の変形

実際のコンクリート構造はコンクリート内部の初期欠陥により、構造内部で一様な応力-ひずみ関係を持たない(imperfection)。初期欠陥を導入すれば、上記のbifurcation問題はlimit pointの問題へと代わり、一要素だけがstrain localizeする性状を見ることができる。例えば、任意の一要素だけが他の要素に比べ小さなひずみでひずみ軟化性状を示すと仮定すれば、解析上得られる荷重-変位関係は、図-4.2の(4)と同じものであり、最大荷重点後負の固有値は一つしか発生しない。それゆえ、この時得られる荷重-変位曲線の最大荷重点は明らかにlimit pointであり、一要素だけがlocalizeする変形だけが構造物に許される唯一の変形モードとなる。

ここで、この問題に対する重要性に鑑みて、上記の内容を再度整理しておく。即ち、imperfectionを導入したときのlimit point後の挙動は、bifurcation pointから一要素だけがlocalizeするbifurcation pathを選択した結果と同じものであり、最大荷重点は純粋なlimit pointではなく、bifurcation pointが変化した見かけ上のlimit pointであるということである。ただしこの見かけ上のlimit pointが生じた場合には、分岐解析を含まない一般的な解析により得られたポストピーク挙動は、自動的にuniformでない変形挙動を示し、bifurcation point後のbifurcation pathの一つを選択したことと同義になる。上に述べた例においても、最大荷重点までは、構造

物は uniform な変形をするが、この見かけ上の limit point の後のポストピーク領域では今までとは全く異なる uniform でない変形挙動を構造物が示すことになる。

以上に示す手順で、離散化されたコンクリート一軸部材の bifurcation 問題に対し、bifurcation path とその時の固有値の関係が分かる。ここで、何番目の要素でひずみの局所化が生じるのかは重要な問題ではなく（任意に取り替え可能だから）、ひずみの局所化が何個の要素で生じるかが重要になる。しかしながら、ポストピーク挙動に関しては、最も意味のある解はエネルギー吸収が最も小さくなる bifurcation path である。すなわち、今の例においては一要素だけにひずみの局所化が生じる場合である。m 要素に離散化されたコンクリート一軸部材の一要素だけにひずみの局所化を生じる変形モードを捜す作業は、あまり簡単とは言えない。しかし、4 要素に離散化された例と同様に、一番小さな固有値に対応する固有モードを変形増分として、現在の変形状態に逐次加えることで、達成することが可能になる。



図－4.7 要素にひずみが局所化する場合の要素分割が荷重変位関係に及ぼす影響

一要素だけに strain localization を生じる事実は、非常に重要な結果を導く。図－4.7 は一軸部材の要素数を変えたときに一要素だけが localize する時の荷重変位関係を示したものである。この図から分かるように、コンクリートのようなひずみ軟化材料では、要素サイズに依存して解析結果が大きく異なるということである。すなわち、要素サイズの選択を誤れば、ポストピーク挙動後に得られた数値解は意味を持たなくなる可能性があることを、また同様に bifurcation path の選択の仕方によってもその数値解が意味を持たなくなる可能性があることを示している。

今までは、弾性-軟化挙動を示す応力-ひずみ関係に対し考察を行ったが、実際のコンクリートは弾性-塑性-軟化性状を示す。そこで図－4.8 に示す繰り返し履歴を持つ応力-ひずみ曲線に

対して考察を行う。

図-4.8は、最大応力点までは応力ひずみ関係は弾性と仮定し、最大荷重後の荷重低下域においては荷重が除荷される場合、応力は弾性剛性と等しい傾きで低下すると仮定している。先ほど同様に構造物は uniform な変形をすると仮定すれば、最大荷重点を越えたところで変形状態に依存して書き直された構造物の剛性マトリクスには、4つの負の固有値が発生する。またその後も引続き uniform な変形を仮定すれば構造物は4つの負の固有値を持ち続ける。

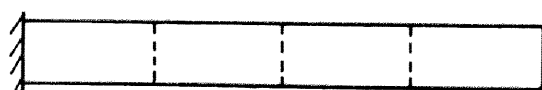
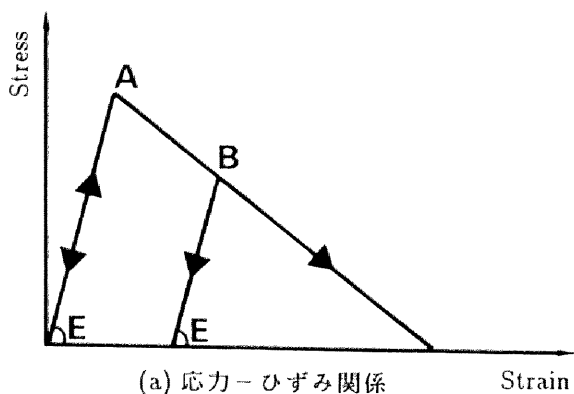
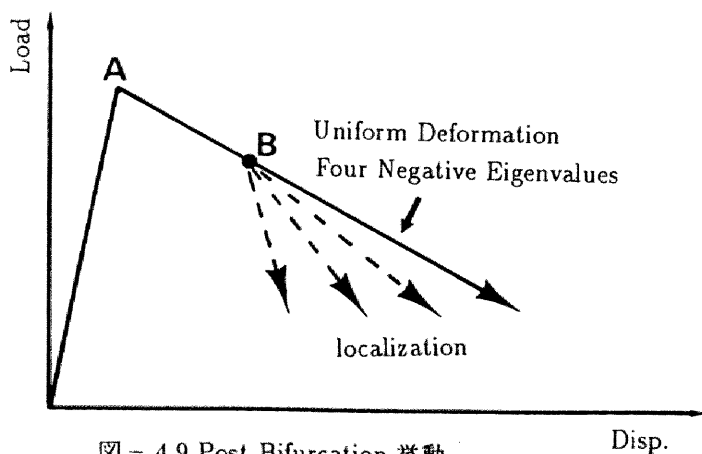


図-4.8 弾性塑性軟化性状を示す一軸コンクリート部材



この時、要素内のひずみがB点まで進んだときに負の固有値に対応する固有モードを変位増分として、その時の変形状態に加えれば、図-4.9の点線で示すように3本の bifurcation path を解析上得ることができる。これは、ひずみ軟化域においては、繰り返し履歴経路のために構造物が、常に負の剛性を持つ経路と正の剛性を持つ経路を任意に選択し得る可能性を持っているためである。この結果より以下の結論が導かれる。すなわち、コンクリートのようなひずみ軟化材料では、複数の負の固有値の存在が、常に不安定な平衡状態から bifurcation path へ移行する可能性を示すということである。一般には、構造物はA点で bifurcation point 発生とともに、任意の bifurcation path へ移行する可能性が最も大きいためこの問題は余り重要な意味を持たないが、ひずみ軟化材料の特徴的な挙動として注意しておく必要がある。

4.2 2軸応力場でのコンクリートの post bifurcation 挙動

前節では、軸方向に uniform な変形をする一軸応力下の部材を対象としたが、実際の構造物でそのような変形をする場合は少ない。そこで本節では、2次元応力下の平面応力状態にあるコンクリート部材に引張応力が作用したときの post bifurcation 挙動について調べる。

解析は図-4.10に示すように4分の1モデルを長方形双一次要素により分割し、一端の節点変位をすべて同じ値で制御して行った。解析条件としては、 $f'_c = 30(MPa)$ 、 $f_t = 3(MPa)$ 、 $\varepsilon_{co} = -0.002$ 、 $\varepsilon_{cr} = 0.0001$ 、 $\nu = 0.2$ とし、クラック発生後の引張応力は次式で与えた。

$$\sigma = f_t \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon} \right)^{0.4} \quad (4.1)$$

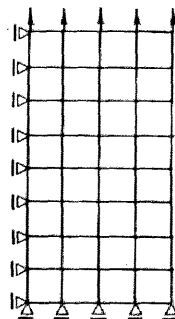
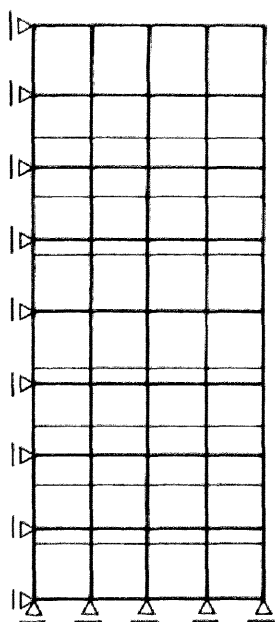
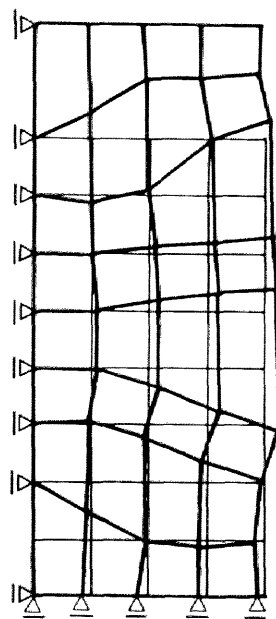


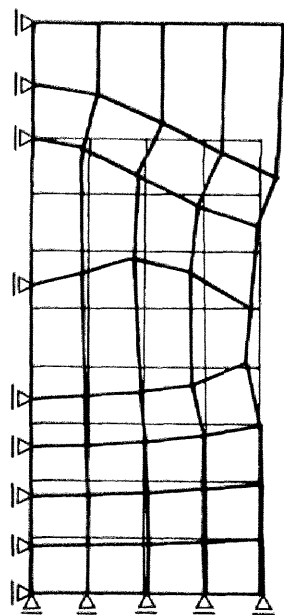
図-4.10 解析モデル



(a) Uniform Deformation



(b) Incremental Displacement
on Bifurcation Path for
First Eigen Mode



(c) Incremental Displacement
on Bifurcation Path for
Second Eigen Mode

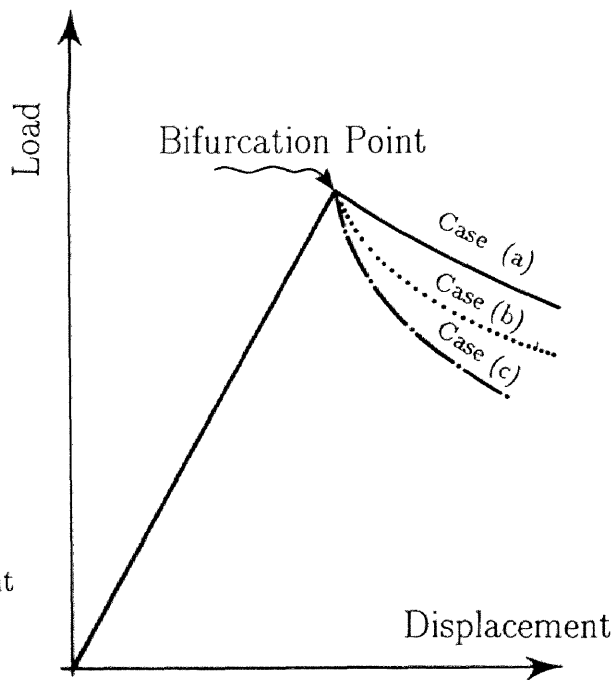
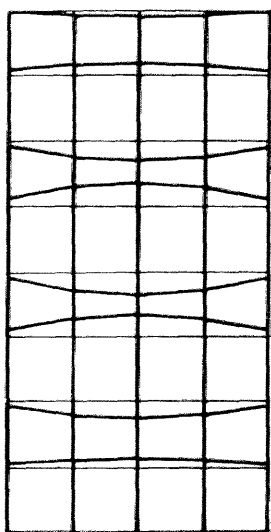
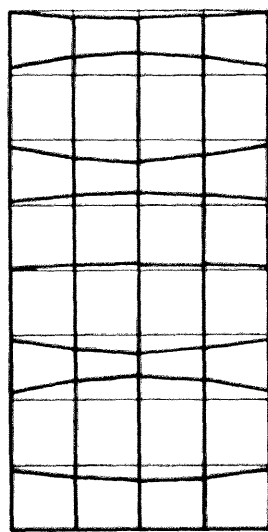


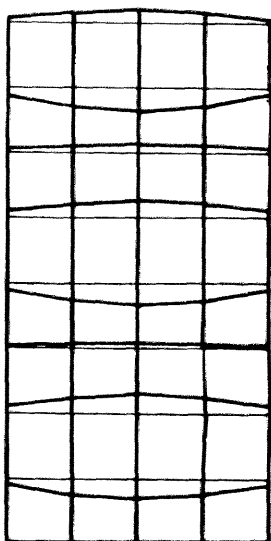
図 - 4.11 荷重変位関係および変形増分



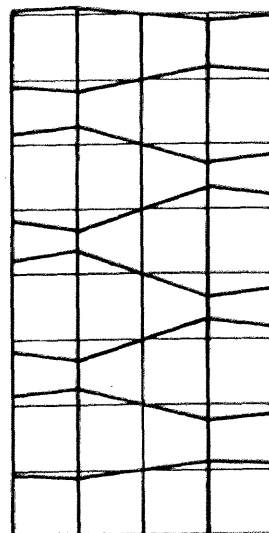
(a) First Eigen Mode



(b) Second Eigen Mode



(c) Third Eigen Mode



(d) Fourth Eigen Mode

図 - 4.12 負の固有値に対応する一次、二次、三次、四次の固有モード

また、クラック発生後のせん断剛性は山田、青柳のモデルを使った。

解析結果は図-4.11に示す。単に変位を制御して解析を行えば一軸部材と同様に uniform な変形をする (a) の曲線が得られる。したがってクラックも荷重と垂直な方向へ一様に発生している。(a) の曲線上では、最大荷重点を越えたところで構造物には複数の負の固有値が発生する。その時の4次までの固有モードは図-4.12に示すようである。この固有モードのうち一次、二次モードを使って bifurcation 解析を行った結果が図-4.11の荷重-変位曲線の (b)(c) の曲線である。(b) は一次モードを (c) は二次モードを bifurcation point で増分変位として与えた結果得られた釣合曲線である。任意の bifurcation path を選択することで、より荷重が急激に低下する変形モードが構造物に存在することを示している。また図-4.11には、(a)(b)(c) の曲線上の変位増分もそれぞれ示しているが、二次元応力場にあるため、bifurcation 後の変形挙動は非常に複雑になる。実際、コンクリートの引張試験を行えば、コンクリート内部の不連続な材料特性により、コンクリートは対称な形で破壊することはなく、その挙動は複雑で破壊形態も一つでない。この解析結果は、コンクリートが引張力を受け破壊する場合の可能な破壊形態の一つを模擬したものと考えられるが、さらに多くの bifurcation path の追跡を行えば、実際の破壊現象と非常に近い変形モードを解析的に得ることができると思われる。

4.3 結論

本章では、コンクリート構造における bifurcation point の物理的意義および post bifurcation 挙動を材料的側面から簡単な数値例を用いて示した。

まずコンクリート一軸部材を考え、負の固有値および負の固有値に対応する固有モードと bifurcation point 後の挙動の関係を明らかにするとともに、imperfection の導入や localization 問題の bifurcation 問題に対する位置づけを行った。また、コンクリートのようなひずみ軟化材料では、弾性安定の分類に従う limit point が、その材料特性に依存して複数の平衡状態が存在するという意味で bifurcation point となる場合があることを示した。さらに、2軸応力下にあるコンクリートに引張応力が作用した場合の post bifurcation 挙動を調べ、2軸応力下の構造物は bifurcation point 後 uniform な変形挙動から非常に複雑な変形挙動に移行する可能性を示した。

5 章 鉄筋コンクリートはりのポストピーク挙動の解析

本章では、鉄筋コンクリートはりを対象とし、解析的にポストピーク挙動を求めるとともに、limit point、bifurcation point での構造物の挙動が実際の鉄筋コンクリートはりの挙動とどのような関係を持つかを調べる。そして、従来未解明であったはりのせん断破壊メカニズムに新たな知見を提供する。解析は、第2章で導いた有限変形問題に対する増分形式の仮想仕事方程式に基づく有限要素解析を面内変形を行う平面要素に適応して行った。

5.1 有限変形問題の有限要素解析法の定式化

面内変形を行う平面要素に対し、図-5.1に示すような座標系を取り、平面要素の x, y 方向の各々の変位関数として以下の関数を用いる。

$$\begin{aligned} U(x, y) &= u(x, y) \\ V(x, y) &= v(x, y) \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで、 u, v はそれぞれ x, y 方向の変位である。

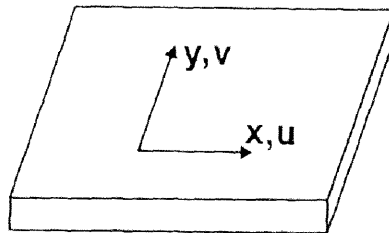


図-5.1 平面要素

(5.1) の変位関数に対して、平面要素のひずみ成分 ϵ_x 、 ϵ_y 、 γ_{xy} は以下のように表される。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (5.2)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (5.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \quad (5.4)$$

今、ある荷重状態における応力、ひずみ、表面力、変位をそれぞれ $(\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)})$ 、 $(\varepsilon_x^{(0)}, \varepsilon_y^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)})$ 、 $(f_x^{(0)}, f_y^{(0)})$ 、 $(u^{(0)}, v^{(0)})$ で表し、微小な荷重増分により生じる各増分を $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ 、 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ 、 (f_x, f_y) 、 (u, v) とする。第2章で導いた増分形式の仮想仕事方程式に代入すれば、最終的に、面内変形をする平面要素に対し次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy} + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy} \right] dV \\
& + \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \sigma_x \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \sigma_y \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) \right. \\
& + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \tau_{xy} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right) \\
& + \left. \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \tau_{xy} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \right) \right] dV \\
& + \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\
& + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
& + \left. \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dV = \delta W_r, \tag{5.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_r = & - \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \right] dV \\
& - \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) \right. \\
& + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right) \\
& + \left. \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \right) \right] dV \\
& + \int \int [(\delta u)^T f_x + (\delta v)^T f_y] dS + \int \int [(\delta u)^T f_x^{(0)} + (\delta v)^T f_y^{(0)}] dS \tag{5.6}
\end{aligned}$$

これより、次式の有限要素解析に用いる増分形の剛性方程式が導かれる。

$$([K] + [K_0] + [K_g])^{(n)} \{\Delta d\}^{(n+1)} = \{\Delta F\}^{(n+1)} + \{F_r\}^{(n)} \tag{5.7}$$

ここに $[K]$ は接線剛性マトリクス, $[K_0]$ は初期ひずみマトリクス, $[K_g]$ は幾何剛性マトリクス, $\{F_r\}^{(n)}$ は n 段階において釣合方程式が完全に満足されないために生じる不平衡力である。 $[K], [K_0], [K_g]$ の具体的な形を以下に示す。

$$[K] = \int \int \int [B]^T [D] [B] dV \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} [K_0] = & \int \int \int [B]^T [D] [\xi^{(0)}] [G] dV + \int \int \int [G]^T [\xi^{(0)}]^T [D] [B] dV \\ & + \int \int \int [G]^T [\xi^{(0)}]^T [D] [\xi^{(0)}] [G] dV \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$[K_g] = \int \int \int [G]^T [\sigma^{(0)}] [G] dV \quad (5.10)$$

本解析では長方形双一次要素を対象としたため、 $[G], [\xi^{(0)}], [\sigma^{(0)}]$ は次のように書き表される。

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A]^{-1} & 0 \\ 0 & [A]^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$[\xi^{(0)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} & \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} & \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$[\sigma^{(0)}] = \begin{bmatrix} \sigma_x^{(0)} & \tau_{xy}^{(0)} & 0 & 0 \\ \tau_{xy}^{(0)} & \sigma_y^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x^{(0)} & \tau_{xy}^{(0)} \\ 0 & 0 & \tau_{xy}^{(0)} & \sigma_y^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

なお、 $[B]$ は線形のひずみ-変位マトリクス, $[D]$ は材料の構成マトリクス, $[A]$ は一般化座標マトリクスである。

5.2 鉄筋コンクリートはりのせん断破壊メカニズム

鉄筋コンクリートはりのせん断破壊は、現在もなお十分に解明されておらず、特に各種のせん断破壊モードが、どの様な要因によって支配されるかが明らかではなかった。本節では、このメカニズムに対して解析的な面から考察を加える。

5.2.1 既往の実験と本解析値との比較

解析に用いた供試体は、代表的に池田らが行った実験[23]のものとした。供試体の形状および配筋は図-5.2に示すようである。供試体は $a/d=1.3$ の比較的短いディープビーム状のはりである。ここで、 a はせん断支間、 d は断面有効高さである。実験は対称2点集中荷重による単調載荷で行われたものである。一方、解析は実験の荷重作用点の変位を等しく制御することにより行った。解析条件としては、コンクリートは圧縮強度 $26.4(MPa)$ 、引張強度 $2.69(MPa)$ とし、鉄筋は降伏強度 $354(MPa)$ 、初期剛性 $1.99 \times 10^5(MPa)$ とした。またクラック発生後のコンクリートの引張応力の軟化性状は次式で与え、クラック発生後のせん断剛性は山田、青柳のモデルを用いた。

$$\sigma = f_t \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon} \right)^{0.4} \quad (5.14)$$

ここで、 f_t は引張強度、 ϵ_{cr} はクラック発生時の引張ひずみ、 ϵ はクラックと垂直方向のひずみである。

供試体の支間中央における荷重-変位曲線に関する、実験値と解析値の比較を図-5.4に示す。図中、実線が解析結果を示し、△印が実験値を表している。解析結果は、最大荷重後のポストピーク領域に至るまで実験値を非常に精度よく再現している。また、図-5.3に最大荷重近傍での供試体の実験および解析から得られたひび割れ状況図を対比させて示す。解析によって得られたひび割れ発生領域は、実験結果よりも広く分布しているが、ひび割れ方向については実験値とよく一致しており、ひび割れ状況も解析結果はよく再現している。

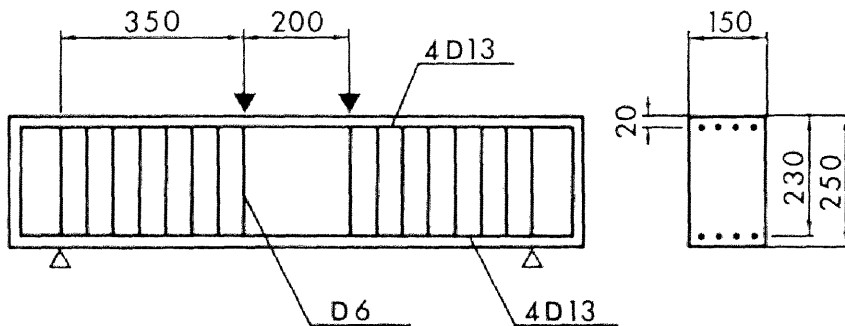


図-5.2 解析モデル (unit:mm)

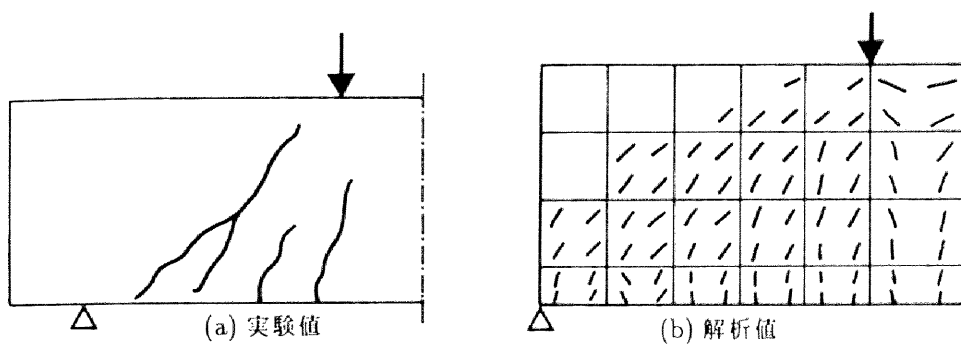


図 - 5.3 ひび割れ状況

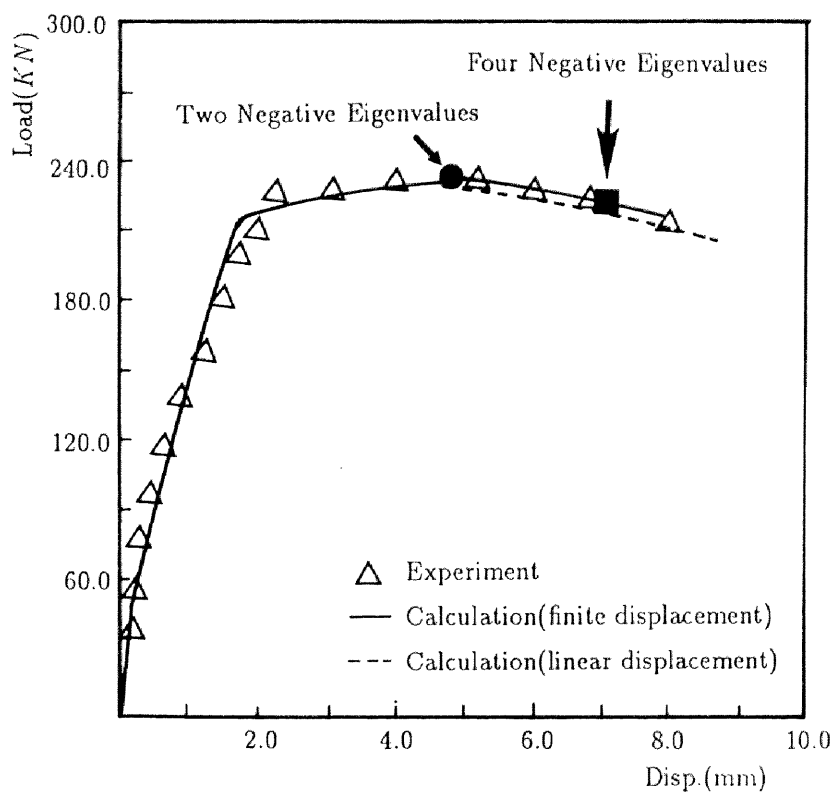


図 - 5.4 荷重 - 変位関係

ここで、微小変形理論に基づく解析も同時に行い、有限変形理論に基づく解析値と比較を行った。図－5.4の点線が微小変形理論に基づく解析値である。有限変形理論によるものと微小変形理論による結果を比べると、最大荷重点近傍までは両者はほぼ一致した。しかしながら、最大荷重点近傍で荷重載荷点近くのコンクリートひずみが圧縮軟化領域に入ると、有限変形理論による解析値は微小変形理論による解析値より若干上昇することが分かった。今回の解析では両者の差はそれほど大きく現れなかったが、この理由としては解析の対象としたRCはりが比較的短いものであり、その変形量も小さかったためと考えられる。

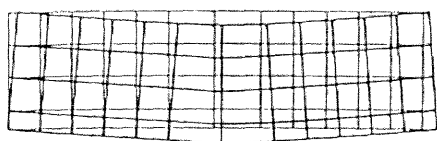
5.2.2 ポストピーク領域での不安定な鉄筋コンクリートはりの挙動

解析を実行する際に、図－5.4中に示す●印を越えたところで2つの負の固有値が発生し、その後■印までは構造物は2つの負の固有値を持ち続け、■印を越えたところで4つの負の固有値が発生した。第2章で述べたように、負の固有値の発生により構造物は不安定な釣合状態にある。また負の固有値の存在は我々に、limit pointあるいはbifurcation pointの存在を教える。

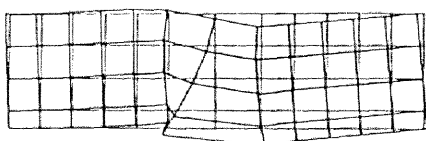
図－5.5に●印直前での4次までの固有値、固有モードと変形増分を図－5.6に●印直後での4次までの固有値、固有モードと変形増分を図－5.7に■印直後での4次までの固有値、固有モードと変形増分を示す。

図－5.4中●印は荷重-変位曲線の最大荷重点に対応しており、limit pointであると思われる。しかしながら、●印では2つの負の固有値が発生しているため、第4章で示したように、bifurcation pointでの挙動と同様に図－5.4中の荷重低下する平衡状態とは異なる変形状態が存在することが予測できる。この点からの分岐経路を求めるには、既に何度も述べているように、負の固有値に対応する固有モードを増分変位とした分岐解析を行えばよい。そこで、図－5.6に示す●印直後に生じる負の固有値に対応する固有モードを見てみると、一次モードには非対称な変形挙動を予測させる固有モードが発生し、二次モードには変形増分と同様な対称な変形挙動を予測させる固有モードが発生していることが分かる。この点から新たに生じる分岐経路は、この一次モードを増分変位とした分岐解析を行うことで得られると考えられ、分岐釣合経路上では構造物は明らかに非対称な変形挙動を示すモードへ移行すると思われる。しかしながら本解析では、2点の変位を等しく制御した解析を行っているため、非対称になり変位制御点の変位がそれぞれ異なるような解析を行うことはできない。また、対象とした実験では、2点の変位を制御しているため、非対称な変形モードへの移行はあまり現実的ではない。したがって、構造物が対称な挙動を示す場合だけを考えれば、この点はbifurcation pointではなくlimit pointと限定される。

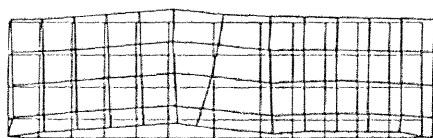
First Mode Eigenvalue=61.0



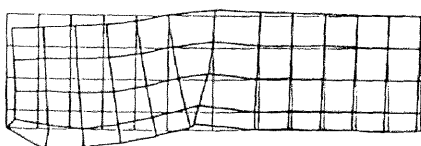
Second Mode Eigenvalue=9714.9



Third Mode Eigenvalue=22797.0



Fourth Mode Eigenvalue=25797.0



Incremental Displacement

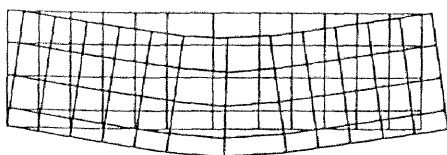
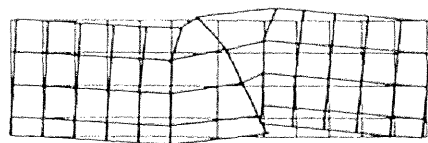
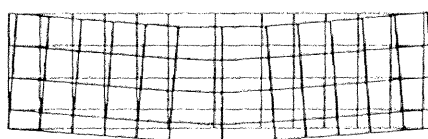


図-5.5 ●印直前での4次までの
固有値・固有モードおよび変形増分

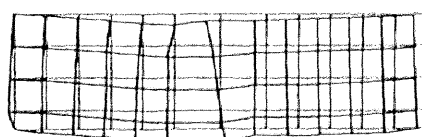
First Mode Eigenvalue=-2862.7



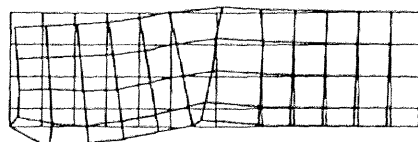
Second Mode Eigenvalue=-90.5



Third Mode Eigenvalue=7802.4



Fourth Mode Eigenvalue=22529.0



Incremental Displacement

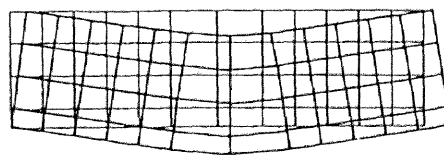


図-5.6 ●印直後での4次までの
固有値・固有モードおよび変形増分

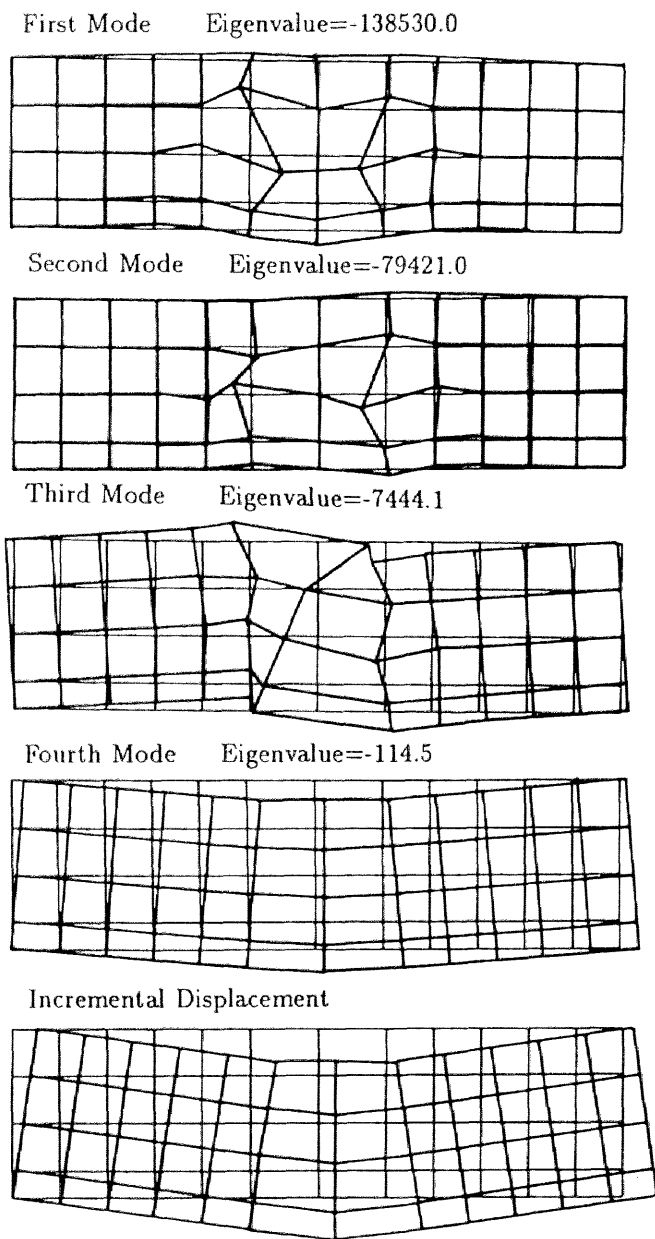


図 - 5.7 ■印直前での4次までの固有値・固有モードおよび変形増分

ここで注意すべきことは、第4章で述べたように、limit point には imperfection の導入で bifurcation 問題から limit point の問題へと移行した結果により生じる見かけ上の limit point が存在することである。構造物の変形解析を行う場合、変形の進行に伴う構造物内部のひずみ分布などの imperfection や数値解析上の誤差により、このような問題はしばしば発生する。しかしながら、この点以降の変形挙動（図-5.6）を見れば、●印以前と変化はなく、また●印前後の固有モードも変わることがない。したがって、●印は純粋な limit point であり、この点以降も対称な変形モードに限定すれば、構造物に許される釣合経路は一つしか存在せず、その変形挙動は図-5.6 に示す変位増分と同様なものになる。

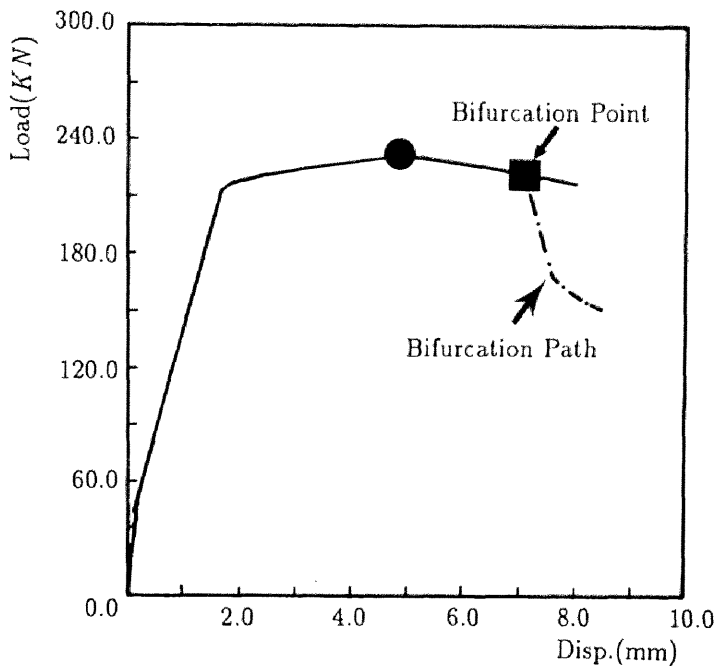


図-5.8 Bifurcation Point 後の分岐枝

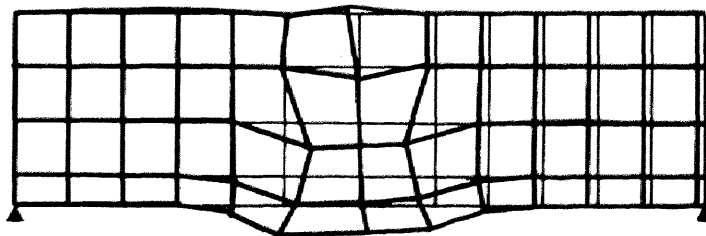


図-5.9 分岐枝状の構造物の変形増分

さらに計算を進めると、■印以後で構造物には4つの負の固有値が生じた。この時の固有モードを見ると、一次・二次モードに今までと全く無関係のように思われる固有モードが現れていることは非常に興味深い。一次モードは対称形に近いモードが、二次モードには非対称なモードが生じている。新たな負の固有値の発生によりこの点は明らかに bifurcation point と定義され、この点から今までとは全く変形状態が異なる釣合経路が発生する。■印以後の実線上的の変形増分は、■印以前と大きく変わることはなく、実線で示される釣合経路は、■点前後でも連続な釣合経路と考えられる。

次に、■印で図-5.7に示す1次モードを初期変位とする分岐解析を行うと、図-5.8の一点鎖線となる釣合経路を解析上得ることができた。これが bifurcation point 後に生じる新たな釣合経路の一つである。この釣合経路によれば、荷重が急激に低下してゆき、解析上構造物が破壊に至る性状を表現し得たと考えられる。急激に荷重低下を生じているときの鉄筋コンクリートはりの変形挙動は図-5.9のようであった。図によれば、RCはりが荷重載荷点下部に局所的な変形の集中を生じる変形挙動を示すことで、荷重が急激に低下し構造物が破壊に至る性状を示していることが分かる。

今までの例はスターラップがあるRCはりであり、構造物の挙動も比較的曲げ挙動が卓越していた。そこで次に、スターラップがなくせん断変形が卓越すると考えられるRCはりを対象とした解析を行う。

解析モデルを図-5.10に示す。モデルは先ほどと同様に $a/d = 1.3$ の比較的短いディープビーム状のはりである。また荷重は、非対称な変形モードを認めるために、供試体中央への一点集中載荷と仮定した。解析は、この荷重載荷点の変位を制御して行った。解析に用いた材料の機械的性質などは、すべて先の例と同様な値を用いている。

解析より得られた荷重-変位曲線は、図-5.11に示すものである。ただしこの時の変位は、荷重載荷点下方の供試体下端で定義している。解析を実行する際に図中(3)の時点に対応する変位で一つの負の固有値が発生し、この時構造物の荷重も低下し始めた。したがって、(3)の時点では、limit point が定義される。図-5.11の荷重変位曲線上の(1)(2)(3)(4)点での解析より得られた構造物の変形増分を示せば図-5.12のようであった。limit point 後の荷重が急激に低下する釣合曲線上の構造物の変形増分(3)(4)は、limit point 前の変形増分とは大きく変化していることが分かる。この荷重-変位曲線の最大荷重点は、数値解析上は limit point を定義するが、最大荷重点後の変形挙動が最大荷重点前とは大きく異なることから、bifurcation point が変化した見かけ上の limit point であると考察される。したがって、今回得られた最大荷重点後の釣合経路は、変形の進行に伴う imperfection の導入により得られた bifurcation path の一つと考え

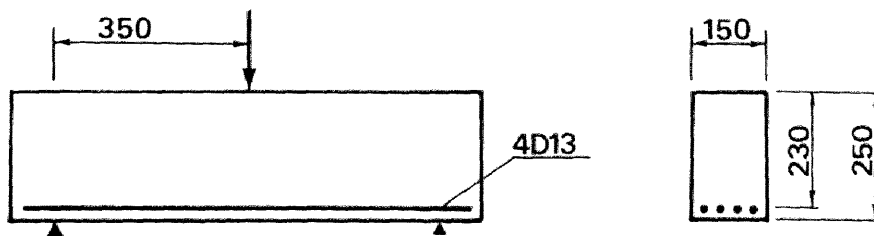


図 - 5.10 解析モデル (unit:mm)

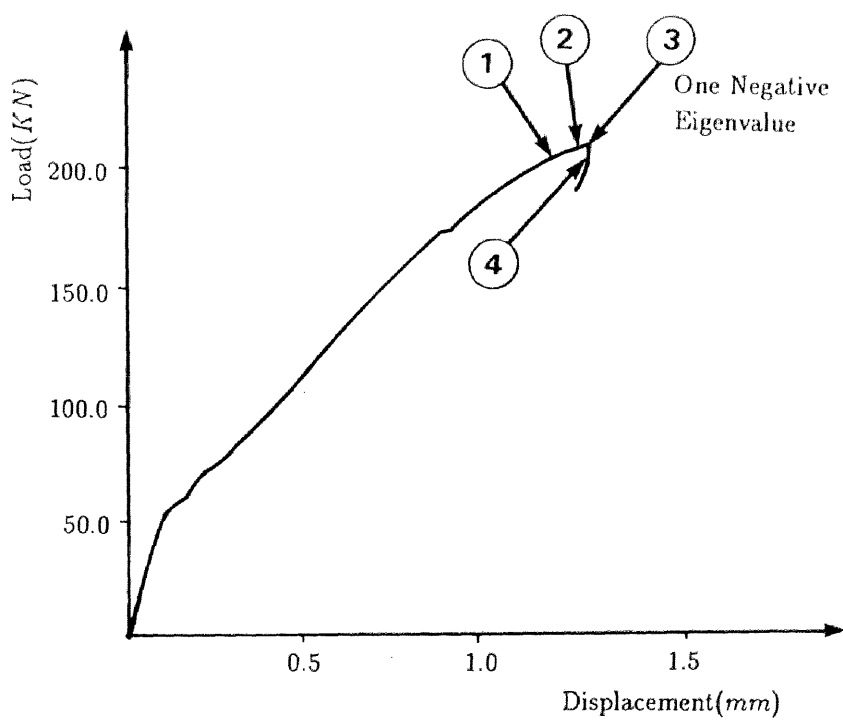


図 - 5.11 荷重 - 変位関係

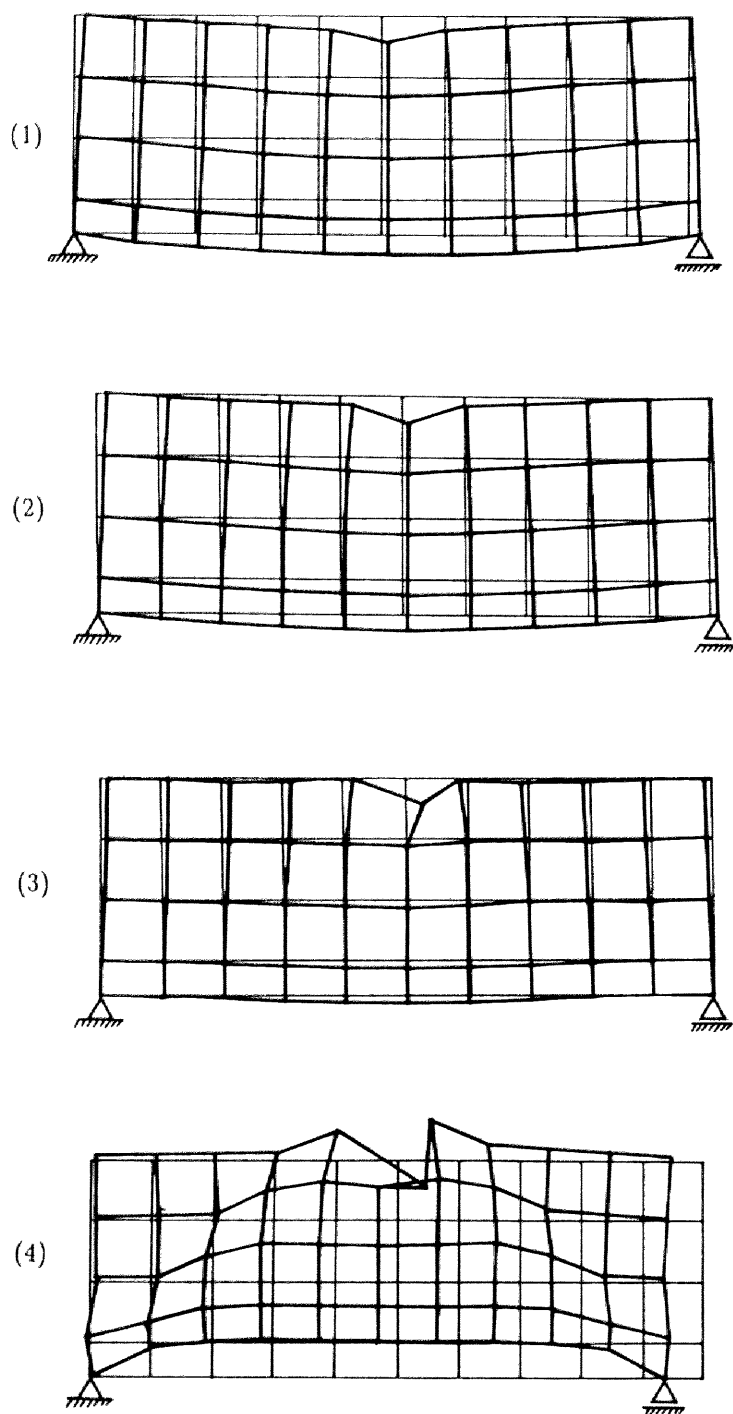


図 - 5.12 図 - 5.11 の (1)(2)(3)(4) の時点に対応する構造物の変形増分

られる。すなわち、bifurcation point 後に新たに生じる釣合経路を示していると考えることができる。

ここで、最大荷重点後の解析より得られた変形増分を見れば、(4) の変形増分に対して構造物には、shear band が発生していることが分かる。本解析で示された、構造物が急激に荷重低下する性状は、この shear band の発生により生じたものと推測される。今回解析の対象としたようなスターラップのない RC はりが実際に破壊する場合、その多くはせん断クラックの急激な発達の原因となっている。したがって、ここに示した結果は、実際の構造物がせん断破壊する挙動を bifurcation path 上で得られた変形モードにより、解析的に再現できる可能性を示したものである。

ここまで示した RC はりのポストピーク挙動のうち、図-5.9、図-5.11(4) の変形挙動は、構造物の実際の破壊現象を解析的に再現できる可能性を示したものである。したがってこの結果は、構造物の破壊時の性状は、bifurcation point 後の bifurcation path を追跡することで解析的に得ることができることを示唆している。またこのことは、構造物の破壊点が、解析上は bifurcation point で定義することが妥当であることを示唆する。

5.3 結論

本章では、RC はり構造を対象とした有限変位理論に基づく有限要素解析を行い、構造物のポストピーク領域での挙動を構造安定性を考慮して詳細に調べた。その結果、bifurcation point が RC はり構造のせん断破壊に密接な関係があり、bifurcation point 後の bifurcation path を選択することで構造物が破壊に至る可能性を解析的に示した。本章では2つのケースについて解析を行ったが、スターラップのない RC はりを対象とした場合には、shear band が生じることで構造物が破壊に至ることを示しており、この結果は実際の現象ともよく一致するものである。一方スターラップのある RC はりの場合、荷重載荷点下部に局所的な変形の集中が生じる変形挙動を示すことで、荷重が急激に低下することを示している。しかしながら、本解析ではコンクリートのひずみが softening 領域にあるため、得られた結果は要素分割などの影響を受けると考えられる。本解析では、その影響の程度についての検討はしておらず、今後より詳細な検討が必要と考えている。

6 章 鉄筋コンクリート柱のポストピーク挙動の解析

6.1 概説

鉄筋コンクリート構造物の耐震設計の基本的な考え方として、大地震時の入力に対しては鉄筋降伏後の大きな塑性変形によって、エネルギー吸収を図ろうとする考え方がある。そのために、RC構造物の復元力特性を求める実験から更に歩を進めて、最終的な変形能力を求める静的正負繰返し載荷実験が数多く行われるようになった [37][49]。特に土木分野では、過去数年精力的な研究が進められていると言ってよい。建築構造については土木よりも先行して同様の試みがなされている [6]。そしてその結果を基にしたRC部材の塑性変形能を定量化する試みも、何人かの研究者によってなされている [20][24][36]。

しかしながら、RC構造物は土木・建築の両分野でその諸元等がかなり異なり、両分野で得られた成果が有機的に結び付いていないのが現状である。したがって、いずれの研究も塑性変形能を精度よく評価するには到っていないと思われる。このことは、過去になされた研究の多くがおもに実験に基づいたものであったためと考えられる。

土木・建築両分野のRC構造物に一般的に適用し得る結論を得るためには、部材降伏後のメカニズムや各種要因が終局変位に及ぼす影響を解析的に評価する必要があるが、これまで行われた解析的研究は、ほとんどが部材断面のモーメント-曲率関係に基づいたものであり、上記の問題を詳細に検討することは不可能であるばかりでなく、軸力が作用する場合の構造物自身の大変形効果、終局破壊点の予測に対して極めて重要と思われる分岐、不安定問題に対する解析的機能も有していない。

そこで本章では、上記の点を鑑みて、その前半部分において鉄筋コンクリート柱のポストピーク領域に至るまでの挙動を明らかにし得る解析手法の開発を行った。解析手法は、第2章で導いた有限変形問題に対する増分形式の仮想仕事方程式を基礎とする有限要素法である。ただし本章では、せん断変形の影響を考慮できるように新たな定式化を行っている。さらに、大きな変形を生じる鉄筋コンクリート柱の正負繰返し載荷実験を行い、開発した解析手法の大変位繰返し部材への適用を行うとともに、各種要因を変化させた既存の実験結果との比較により、各種要因が塑性変形挙動に及ぼす影響を解析的に評価した。

また後半部分では、鉄筋コンクリート断面のせん断剛性モデルを圧縮場理論を用いて作成し、せん断変形が構造物に及ぼす影響を考察している。コンクリート構造物の変形および破壊性状にせん断変形が及ぼす影響は非常に大きく、この影響を如何に評価するのかがコンクリート構造分野での大きな目標の一つであるが、本手法を用いればその影響が簡単に評価できることを

示している。最終的には、鉄筋コンクリート柱における構造不安定性を、曲げ変形だけを考慮した場合およびせん断変形と曲げ変形の両者を考慮した場合について議論し、鉄筋コンクリート柱の終局時の挙動の解析的説明を行っている。

6.2 せん断変形を考慮した鉄筋コンクリート構造物の大変形解析の定式化

6.2.1 せん断変形を考慮した有限変形問題に対する増分形式の仮想仕事方程式

図-6.1 に示すような座標系を取り、軸力、せん断力、モーメントが作用しているはり部材を考える。せん断変形を考慮するためはり要素の x 、 y 方向の各々の変位増分 $W(x, y)$ 、 $V(x, y)$ を曲げ変形成分並びにせん断変形成分を用いて以下のように表す。この時、Timoshenko はりの理論に基づき断面は変形後も平面を保つと仮定している。

$$W(x, y) = w - y \frac{\partial v_b}{\partial x} \quad (6.1)$$

$$V(x, y) = v_b + v_s \quad (6.2)$$

ここで w : 軸力による軸方向変位増分
 v_b : 曲げによるたわみ変位増分,
 v_s : せん断によるたわみ変位増分

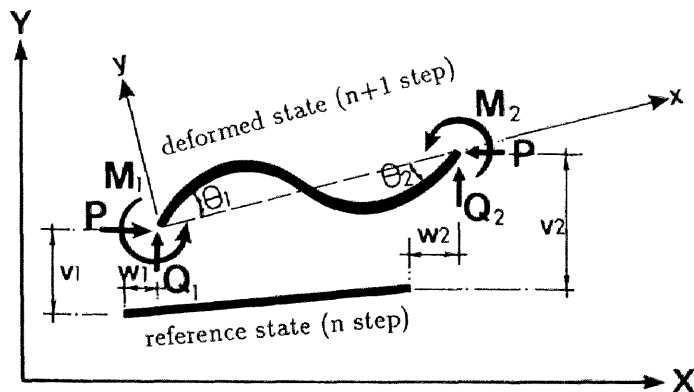


図-6.1 部材の変形

(6.1)(6.2) 式に示した変位場を用いると、軸ひずみ、せん断ひずみ成分はそれぞれ次式で与えられる。

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 \quad (6.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_s}{\partial x} \quad (6.4)$$

(6.3) 式で $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$ は微小量なので省略している。

ある荷重状態においては要素に生じている応力、ひずみ、表面力、変位をそれぞれ $(\sigma_x^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)})$ 、 $(\varepsilon_x^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)})$ 、 $(f_x^{(0)}, f_y^{(0)})$ 、 $(u_x^{(0)}, u_y^{(0)})$ で表し、微小な荷重増分により生じる各増分を (σ_x, τ_{xy}) 、 $(\varepsilon_x, \gamma_{xy})$ 、 (f_x, f_y) 、 (u_x, u_y) とする。第二章で導いた増分形の仮想仕事方程式に代入すれば、せん断変形を考慮したはり要素に対し、次式の仮想仕事方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \iiint \left\{ \sigma_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \right) + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} \right) \right\} dV \\ & + \iiint \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x \delta \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_b^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_s^{(0)}}{\partial x} \right) \right\} dV \\ & + \iiint \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x^{(0)} \delta \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 \right\} dV \\ & + \int \int (f_x \delta u_x + f_y \delta u_y) dS = \delta W_r \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \delta W_r &= \int \int (f_x^{(0)} \delta u_x + f_y^{(0)} \delta u_y) ds \\ &- \iiint \left\{ \sigma_x^{(0)} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \right) + \tau_{xy}^{(0)} \delta \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} \right) \right\} dV \\ &+ \iiint \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x^{(0)} \delta \left(\frac{\partial v_b^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_s^{(0)}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) \right\} dV \end{aligned} \quad (6.6)$$

(6.5) 式の第 1 項が微小変形理論におけるひずみエネルギーの変分で応力がなす仮想仕事を表し、第 2 項は変形の進行にともなう生じる付加応力成分のなす仮想仕事項、第 3 項は初期応力 $\sigma_x^{(0)}$ のなす仮想仕事項である。また (6.6) 式は前段階における釣合い方程式が完全に満足されないために生じる不平衡力がなす仮想仕事である。(6.5)(6.6) 式を基礎として有限要素解析に用いる剛性方程式を導くことができる。

6.2.2 剛性方程式

有限変形理論を支配する仮想仕事方程式を導いたので、次のように、等価な増分形剛性方程式を求める。

せん断変形による、はりのたわみ v_s は釣合を考えることで次のようになる [16]。

$$\begin{aligned}\frac{dv_s}{dx} &= -\frac{1}{GA} \frac{dM}{dx} \\ &= -\frac{EI}{GA} \frac{d^3 v_b}{dx^3}\end{aligned}\quad (6.7)$$

ここで、 EI は断面の曲げ剛性、 GA は有効断面のせん断剛性であり、RC 部材のクラック状態などに依存する。

(6.7) 式は曲げ変形とせん断変形との関係式であり、部材の変位増分を 3 次多項式と仮定すると、各変位増分の変位関数は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}w &= [N_u]\{du\} \\ v_b &= [N_{vb}]\{dv\} \\ v_s &= [N_{vs}]\{db\}\end{aligned}\right\} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}N_u &= \left[1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L}\right] \\ N_{vb} &= \frac{1}{1 + \frac{12k}{L^2}} \left[1 + \frac{6k}{L^2} - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3, \right. \\ &\quad \left. -\frac{12k^2}{L^3} - \frac{4k}{L} + \left(\frac{12k}{L^2} + 1\right)x + \left(-\frac{6k}{L^3} - \frac{2}{L}\right)x^2 + \frac{1}{L^2}x^3, \right. \\ &\quad \left. \frac{6k}{L^2} - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3, \frac{12k^2}{L^3} - \frac{2k}{L} + \left(\frac{6k}{L^3} - \frac{1}{L}\right)x^2 + \frac{1}{L^2}x^3\right] \\ N_{vs} &= \frac{1}{1 + \frac{12k}{L^2}} \left[\frac{6k}{L^2} - \frac{12k}{L^3}x, \frac{12k^2}{L^3} + \frac{4k}{L} - \frac{6k}{L^2}x, \right. \\ &\quad \left. -\frac{6k}{L^2} + \frac{12k}{L^3}x, -\frac{12k^2}{L^3} + \frac{2k}{L} - \frac{6k}{L^2}x\right]\end{aligned}$$

ここに、 $k(= EI/GA)$ はせん断剛性と曲げ剛性の比を表す係数である。(6.8) 式の変位関数は、せん断剛性が無限大ならば一般によく知られているものと一致する。また、 $\{du\}, \{dv\}$ はそれぞれ部材の軸方向および鉛直方向の節点変位増分ベクトルで次式で表される。

$$\left\{ \begin{aligned}\{du\}^T &= [w_1, w_2] \\ \{dv\}^T &= [v_1, \theta_{b1}, v_2, \theta_{b2}]\end{aligned}\right\} \quad (6.9)$$

上式中、 v_i , θ_{ix} ($i=1,2$) はそれぞれ i 節点におけるたわみ増分、曲げによるたわみ角増分である。節点のせん断回転角は、(6.7) 式より曲げによる回転角に依存しており、節点の回転角増分を曲げによる回転角増分で表すことで、はり要素は (6.9) 式の 6 自由度を考えるだけになる。

(6.8) 式を (6.5) 式に代入することにより次式のはり要素の増分形剛性方程式を得る。

$$([K] + [K_0] + [K_g])^{(n)} \{\Delta d\}^{(n+1)} = \{\Delta F\}^{(n+1)} + \{F_r\}^{(n)} \quad (6.10)$$

ここに、上付きの $(n+1)$ 又は (n) はそれぞれ、第 $(n+1)$ あるいは第 (n) 段階における諸量を表す。また $[K]$, $[K_0]$, $[K_g]$ はそれぞれ、構造物の剛性マトリクス、初期ひずみマトリクス、幾何剛性マトリクスであり、(6.5) 式の第一項、第二項、第三項に対応するものである。部材の長さで積分したときの剛性マトリクス $[K]$ 、幾何剛性マトリクス $[K_g]$ の具体的な形を示せば、(6.11)(6.12) 式のようなのである。

$$[K] = \frac{EI}{L^3(1+T)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & (4+T)L^2 & -6L & (2-T)L^2 \\ & & 12 & -6L \\ sym & & & (4+T)L^2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$[K_g] = \frac{P}{(1+T)^2} \begin{bmatrix} \frac{6}{5}A & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5}A & \frac{1}{10} \\ & \frac{2}{15}L+B & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}L-B \\ & & \frac{6}{5}A & \frac{1}{10} \\ sym & & & \frac{2}{15}L+B \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{L} + \frac{20}{L^3} \frac{EI}{GA} + \frac{120}{L^5} \left(\frac{EI}{GA} \right)^2 \\ B &= \frac{2}{L} \frac{EI}{GA} + \frac{12}{L^3} \left(\frac{EI}{GA} \right)^2 \\ T &= \frac{12}{L^2} \frac{EI}{GA} \end{aligned}$$

せん断変形の影響は、マトリクス中のせん断剛性 (GA) により考慮できる。 $\{F_r\}$ は n 段階における釣合方程式が完全に満足されないために生じる不平衡力であり (6.6) 式に対応するものである。なお本解法では後で述べるように、updated lagrange 法にしたがい、変形の進行とともに各荷重段階に対して座標変換を行っている。そのため座標の更新が、初期ひずみマトリクスと等価になるので $[K_0]$ の影響は非常に小さくなり無視しても構わなくなる [9]。

6.2.3 数値計算プログラム

前節までに示した手順により、数値計算プログラムを作成した。この中で (6.10) 式における各剛性マトリクスおよび不平衡力を求めるために行う積分計算法としては、各要素の任意部分を図-6.2 に示すように、x 方向に m 等分、y 方向に n 等分し、各微小要素ごとに第3章に示した応力-ひずみ関係を導入し積分形式を各微小要素の総和として表す (Layered Beam)[62]。鉄筋コンクリート構造物のように断面高さ方向に対し応力の変化が著しい場合や断面内に異なる材料を有している場合には、このような層分割法は構造物の挙動を正しく評価するための有効な方法である。層分割法に基づき作られた任意要素における剛性マトリクス (6×6) の 2 行 2 列の成分 K_{22} (水平変位のせん断力への寄与分) について具体的に示す。

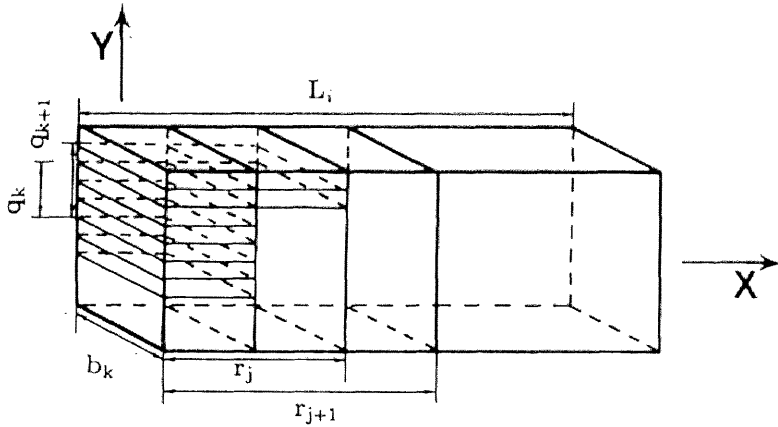


図- 6.2 Subdivided Element

$$K_{22} = \sum_{j=1}^m \frac{EI(j)}{L_i^6 (1 + T_j)^2} \left\{ (36L_i^2 + 144k_j)(r_{j+1} - r_j) - 72L_i(r_{j+1}^2 - r_j^2) + 48(r_{j+1}^3 - r_j^3) \right\} \quad (6.13)$$

$$EI(j) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} E(i, j, k) b_k (q_{k+1}^3 - q_k^3) \quad (6.14)$$

$$T(j) = \frac{12k(j)}{L_i^2} \quad (6.15)$$

$$k(j) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{GA(j)} E(i, j, k) b(k) \left\{ \frac{1}{3} (q_{k+1}^3 - q_k^3) \right\}$$

$$+y_0(q_{k+1}^2 - q_k^2) + y_0^2(q_{k+1} - q_k)\} \quad (6.16)$$

ここで、 y_0 は、中立軸と中心軸との距離である。

断面のひずみ分布より任意の微小部分のヤング係数 $E(i, j, k)$ が求まり、それに中心軸に対する微小部分の断面 2 次モーメントを乗ずることで任意の微小部分の曲げ剛性が求まる。この操作を任意断面の全ての微小要素について行い、それらの和をとることで任意断面の曲げ剛性 $EI(j)$ が正確に把握できる ((6.14) 式参照)。求めた部材方向の各分割位置での曲げ剛性を軸方向に和をとることで、解析に用いる剛性マトリクスの成分が求まる ((6.13) 式参照)。なお $GA(j)$ は鉄筋コンクリート断面に対し定義される値である。

ここで鉄筋コンクリートのように変形に従い中立軸が移動する断面では、部材方向の軸線が一定である条件を満たす必要がある。そのため断面 2 次モーメントは常に中心軸回りで考え、中立軸の移動は断面 1 次モーメントにより考慮する。

解析は以上のようにして求めた各要素の増分形剛性方程式を各変位段階ごとに部材座標系から全体座標系に変換し、構造物全体の増分形の剛性方程式を用い、Newton-Raphson 法に基づく変位増分法により行っている。また各変位段階では、構造物の安定性および limit point、bifurcation point の発生の有無を調べるため固有値解析を行い、接線剛性マトリクス ($[K] + [K_g]$) の固有値、固有ベクトルを求めている。

6.3 軸方向鉄筋の抜け出しによる水平変位

コンクリートを基礎とする、柱、橋脚あるいは壁などが水平力を受け変形するとき、コンクリート基礎に定着された鉄筋が引き抜ける現象を生じる。鉄筋コンクリート橋脚を対象とした実験では、このフーチングからの抜け出しによる軀体部の回転によって生じる水平変位が、全水平変位中に占める割合は非常に大きいといわれている。例えば太田は [48]、小型供試体を用いた鉄筋コンクリート柱部材の実験で、抜け出しによって生じる水平変位は全水平変位の約 50% に及ぶと報告している。そのため、鉄筋コンクリート構造物のポストピーク領域まで至る変形挙動を正確に算定するためには、主鉄筋の基礎からの抜け出しを正しく評価する必要がある。

また大規模な地震による力を鉄筋コンクリート構造物が受けるとき、鉄筋は降伏しさらに繰返し挙動を示す。そのため、鉄筋の抜け出し挙動も弾性時だけでなく塑性領域までを連続的に評価し、さらに履歴を考慮した繰返し挙動をも考慮する必要がある。

そこで本節では、降伏荷重以上の繰返し载荷を受ける鉄筋の抜け出し量を算定する手法を提案する。本節で示す軸方向鉄筋の抜け出し量算定方法は、以下に示す仮定および計算手順に従うものである。

6.3.1 鉄筋降伏後のフーチング内の鉄筋のひずみ分布

鉄筋の抜け出し量を求めるためには、フーチング内の鉄筋のひずみの分布形を決定する必要がある。ひずみ分布形が決定すれば、そのひずみ分布を軸方向に積分することで、抜け出し量は求めることができる。本研究では、ひずみ分布形状を既往の実験結果を参考にし、図-6.3に示すものと仮定した。すなわち、鉄筋降伏前は三角形分布を、鉄筋降伏後はフーチング内で鉄筋降伏位置において2つの傾きをもつ形状とした。ここで、 L_e は弾性ひずみ分布長、 L_{ey} は降伏時弾性ひずみ分布長、 L_p は塑性ひずみ分布長である。

鉄筋のひずみ分布形状が与えられれば、次にひずみ分布長を決定すれば、フーチング内のひずみ分布が求まる。

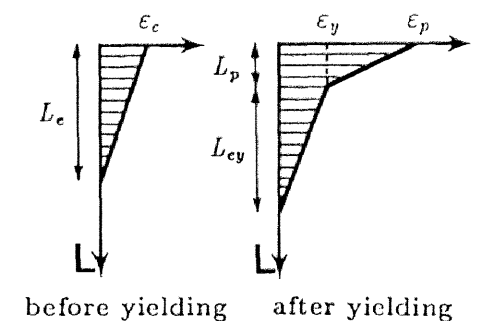


図-6.3 フーチング内の鉄筋のひずみ分布

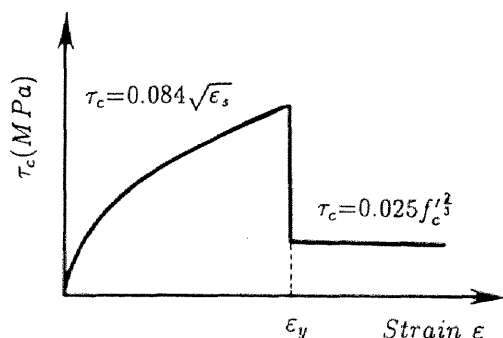


図-6.4 付着応力-ひずみ関係

ひずみ分布長（ L ）は、鉄筋に沿った任意の点における付着応力 τ_x を用いて、

$$\int_0^L \pi D \tau_x dx = \frac{\pi D^2}{4} \sigma \quad (6.17)$$

で求められる。ここで、 x 方向は鉄筋軸方向を定義し、 σ は鉄筋とコンクリートの付着応力と釣り合う鉄筋の軸方向応力度、 D は鉄筋径である。

付着応力 τ_x は、図－6.4 に示す付着応力－ひずみ関係より求まると仮定する。付着応力は島、周、岡村らの研究 [56] によれば鉄筋が降伏すると大きく低下することが明らかになっている。図－6.4 は、既往の実験資料を参考にして、鉄筋降伏前 [43] と後 [56] で 2 つの曲線を組み合わせ、鉄筋降伏後の付着応力の低下を考慮したものである。ただし、図－6.4 中の f'_c は kgf/cm^2 の単位を持つものである。

(6.17) 式を用い鉄筋の付着応力度とフーチング上面での鉄筋応力を釣り合わせることで、ひずみ分布長が決定される。ここで、弾性ひずみ分布長 (L_e) と塑性ひずみ分布長 (L_p) を鉄筋降伏により明確に区別するため、 L_e 部分の付着応力度は鉄筋の弾性ひずみに対応する応力 (σ_e) と、 L_p 部分の付着応力度は、鉄筋降伏後の塑性ひずみ増分に対応する応力増分 ($d\sigma_p$) と釣り合うと仮定すれば、(6.17) 式は弾性ひずみ分布長 (L_e) および塑性ひずみ分布長 (L_p) に対し、次式のように書き直すことができる。

$$\int_0^{L_e} \pi D \tau_x dx = \frac{\pi D^2}{4} \sigma_e \quad (6.18)$$

$$\int_0^{L_p} \pi D \tau_x dx = \frac{\pi D^2}{4} d\sigma_p \quad (6.19)$$

この式に、図－6.4 中の付着応力－ひずみ関係を代入すれば (6.18)(6.19) 式はそれぞれ次式のようにになる。

$$L_e = \frac{3}{4 \times 0.084 \times 1000} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_e}} \frac{D}{2} \sigma_e \quad (6.20)$$

$$L_p = \frac{D}{10 f_c'^{2/3}} d\sigma_p \quad (6.21)$$

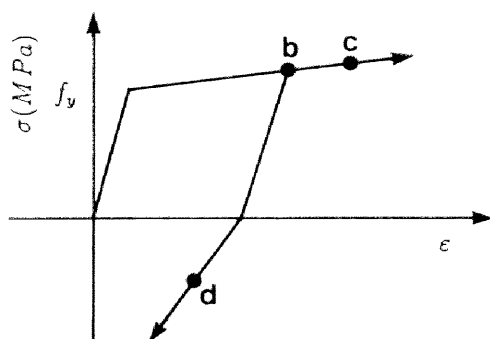
(6.20)(6.21) 式より得られる弾性ひずみ分布長および塑性ひずみ分布長を用いれば、フーチング内の鉄筋のひずみ分布が決定される。

抜け出し量 S は、上記の手順により決定した鉄筋のひずみ分布を鉄筋軸方向に積分することで求められる。

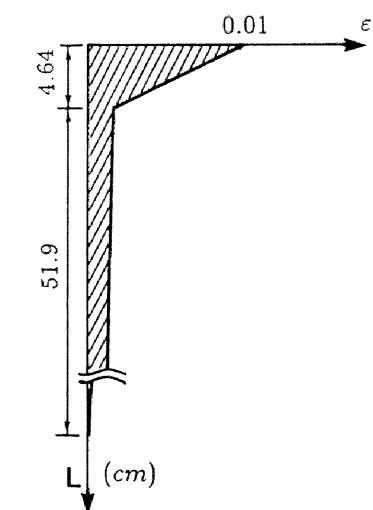
$$S = \int \epsilon dx \quad (6.22)$$

6.3.2 繰り返し荷重を受けるフーチング内の鉄筋のひずみ分布挙動

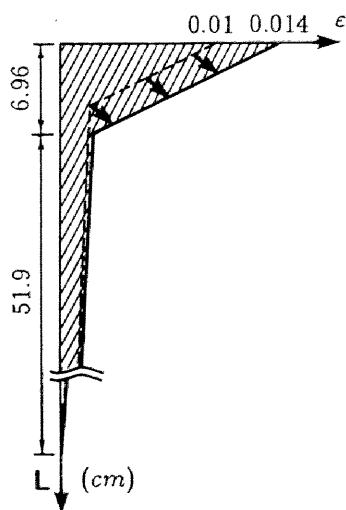
繰り返し荷重を受ける場合、フーチング内のひずみ分布は一方向荷重の場合と異なり複雑な挙動を示す [12][13]。例えば、引張降伏後に圧縮荷重を受けるような場合には、フーチング上面直下の鉄筋塑性領域では、塑性領域の上部で前回の引張荷重時に受けた引張の残留ひずみが残っているが、下部では圧縮ひずみを生じているような、圧縮荷重時であるにもかかわらず見かけ上引張ひずみと圧縮ひずみが混在したひずみ分布挙動を示す。



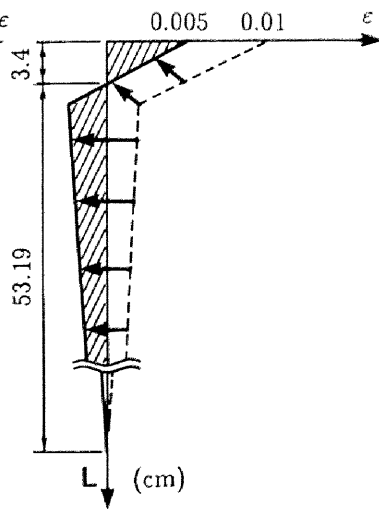
(a) 鉄筋の応力-ひずみ関係



(b) b点でのひずみ分布



(c) c点でのひずみ分布



(d) d点でのひずみ分布

図-6.5 繰り返し荷重を受けるフーチング内の鉄筋のひずみ分布挙動

本研究では、繰り返し時の鉄筋とコンクリートの付着応力を、除荷時を基準とする増分形式で表現することで、実際の繰り返し時のフーチング内のひずみ分布性状のモデル化を可能としている。すなわち、除荷時の鉄筋ひずみを ϵ_t とすれば、図-6.4の付着応力(τ) - ひずみ(ϵ)関係は、 $\tau - (\epsilon - \epsilon_t)$ 関係に置き換わると仮定した。これは、除荷時には鉄筋は弾性挙動を示すことを考慮し、この時の付着応力も弾性時と同様に図-6.4の原点からの挙動と同様になると仮定したものである。

このような仮定のもとで得られる、繰り返し荷重を受けるフーチング内の鉄筋のひずみ分布挙動の一例を図-6.5に示す。図-6.5(a)に、フーチング上面での鉄筋の応力ひずみ履歴挙動を示し、図-6.5(b)(c)(d)に、図-6.5(a)中のb点,c点,d点における本モデルにより得られたひずみ分布形状を示す。なお、図-6.5(c)(d)には、b点でのひずみ分布を点線で示している。前回の引張荷重よりも大きな引張荷重を受ける場合(b点→c点)、ひずみ分布はこれまで生じていた塑性領域を拡大して、塑性ひずみが鉄筋の下部へと伝搬していく様子が本モデルにより示されることが分かる(図-6.5(c))。一方、圧縮荷重を受ける場合には(b点→d点)、塑性ひずみ領域では引張ひずみの残留により見かけ上引張ひずみが分布するが、下部の弾性ひずみ領域では、圧縮の弾性ひずみが分布する形状を示す(図-6.5(d))。この結果は実験結果とも定性的に一致するものであり、本モデルによりフーチング内のひずみ分布挙動が概ね再現できると推測される。

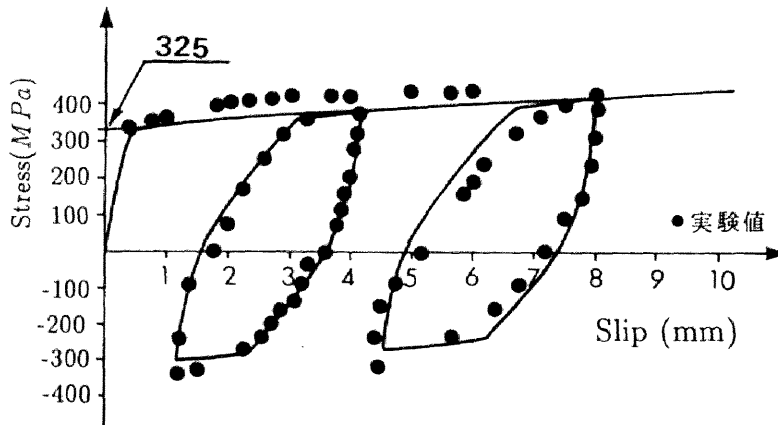


図-6.6 繰り返し荷重を受ける鉄筋の応力-抜け出し量関係

本モデルを、島ら [57] が行った繰返し載荷引き抜け試験に適用した。実験は、D13 で $f_y = 325$ (MPa)、 $E_s = 1.66 \times 10^5$ (MPa) の普通異形棒鋼を圧縮強度 19.4 (MPa) のマッシュなコンクリート供試体に配置したものである。図- 6.6 に実験値および解析値を示す。図中●印が実験値、実線が解析値である。解析値は実験値をよく追随しており、本モデルが繰返し載荷を受ける場合の鉄筋の抜け出し量を妥当に評価できることが分かる。

6.3.3 抜け出しによる水平変位

鉄筋の抜け出し量 (S) が求めれば、鉄筋の抜け出しによる躯体の回転に伴う水平変位 δ_{slip} は、

$$\delta_{slip} = \frac{hS}{x} \quad (6.23)$$

により決定される。ここで、 x は中立軸から引張主鉄筋までの距離、 h はフーチング上面から任意点までの距離である。

一般に鉄筋が抜け出すことは、構造物の幾何学的非線形性に影響を与えられるが、本研究では鉄筋の抜け出しによる変形は、部材の変形とは独立と仮定した。

6.4 鉄筋コンクリート柱の大変位繰返し挙動

6.4.1 スレンダーな鉄筋コンクリート柱の正負交番載荷実験

前節までに開発した鉄筋コンクリート構造物の大変形解析手法の妥当性および鉄筋コンクリート柱に軸力が作用したときの軸力が構造物に及ぼす影響を検討するため、RC 柱の正負交番載荷実験を行った [44]。

(1) 供試体

破壊時にかなり大きな変形をさせるためスレンダーな柱を想定して、供試体の諸元を決定した。供試体の形状は図- 6.7 に示すような I 形断面を有し、高さ 100 (cm)、せん断スパン比 12.5 の RC 柱である。なお、本供試体の引張鉄筋比は、0.67 (%)、帯鉄筋 ($A_s = 0.0078$ (cm²), 4cm ピッチ) 比は 0.45 (%) である。表- 6.1 に使用したコンクリートおよび鉄筋の機械的性質を示したが、コンクリートの圧縮強度および鉄筋の降伏点強度は、それぞれ 30.5 (MPa), 241.2 (MPa) である。図- 6.8 は、実験で用いた異形鉄筋 (D3) の引張試験により得られた応力-ひずみの関係で、解析に用いた応力-ひずみ関係は図中に実線で示した。

なお、供試体は柱部分とフーチングを別々に作成した後、フーチング中心部にかけておいた穴に柱部分を差し込み、両者の隙間をモルタルで埋め一体化することにより作成した。

表-6.1 材料の機械的性質

鉄筋		コンクリート	
$E_s (MPa)$	$f_y (MPa)$	$E_c (MPa)$	$f'_c (MPa)$
1.6×10^5	241.2	2.05×10^4	30.5

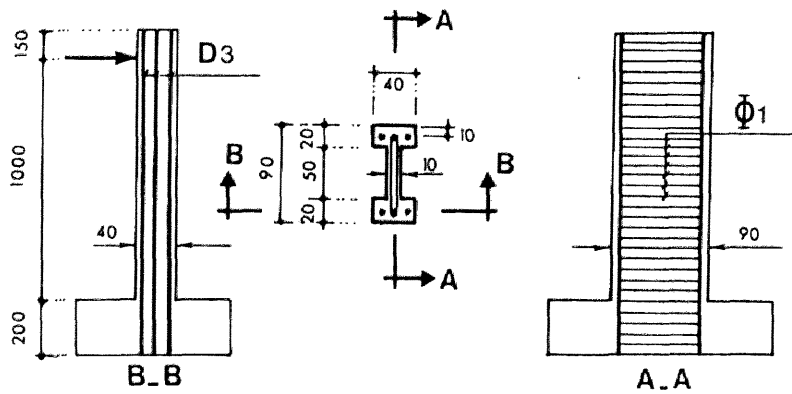


図-6.7 供試体の形状および配筋状態 (unit;mm)

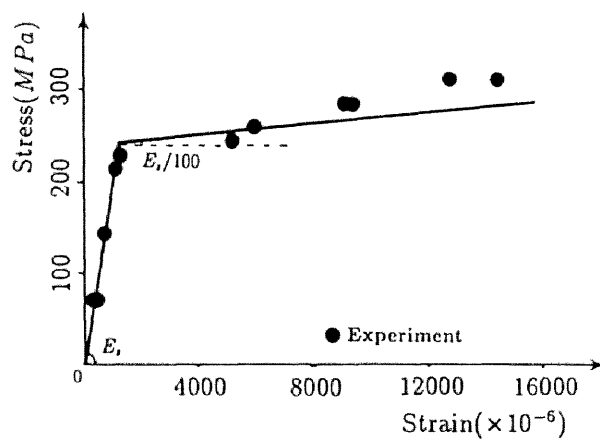


図-6.8 鉄筋 (D3) の応力-ひずみ関係

(2) 載荷方法

載荷装置図を図-6.9に示したが、載荷は軸力を一定の値($\sigma_0 = 2MPa$)に保ち、柱頭部に正負繰り返し水平荷重を漸増加力しながら静的に加えた。作用軸力はヒンジを介して供試体頭部に加えた。供試体頭部が水平荷重によって大きく変位しても、軸力が頭部より正しく鉛直下方に作用する条件を満たすために、鉛直方向ジャッキと上部のはりとの間にローラーを挿入して、供試体頭部の水平変位量と等しい距離だけ鉛直方向ジャッキを平行移動させた。

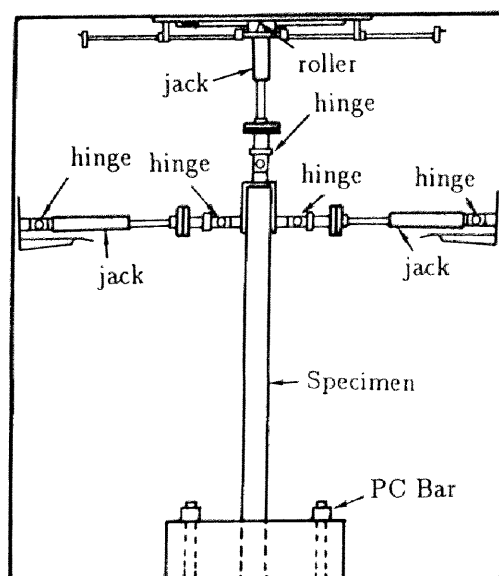


図-6.9 載荷装置の概略

(3) RC柱の終局変位と耐荷力

実験結果のうち、水平変位と水平荷重の関係を図-6.10の破線で示した。供試体はかなり靱性に富んだ傾向を示し、部材角が1/10の大変形を生じている。供試体は、引張鉄筋降伏を越えた変位での加力を数回繰り返すと、各繰り返しごとにクラックの発生、進展などが顕著になってくるがかぶりコンクリートの剝落は認められなかった。最終的な破壊は、塑性化した圧縮側鉄筋の座屈と同時に、かぶりコンクリートが剝落することで生じた。座屈以降は耐力の低下が著しくなるが、所定軸力を保持することはしばらくできた。しかし、実際にはこの時には構造物の機能を果たさずここで破壊と定義した。また実験において鉄筋の抜け出しはほとんど認められなかった。

本解析手法による解析結果を図-6.10の実線で示す。ここで実験においてせん断変形の影響はほとんど認められなかったことから、せん断剛性は無限大として解析を行った。解析値と実験値の比較を行えば、解析値は部材角が約1/10となるポストピーク領域である大変形域まで実験値をよく追従しており、大きな変形をするRC構造に対する本解析手法の妥当性がうかがえる。また解析値は、繰返しループの性状もよく捉えている。本章では解析は鉄筋座屈時までしか行っていない。鉄筋座屈後の構造物の挙動については、第8章で詳しく述べることにする。

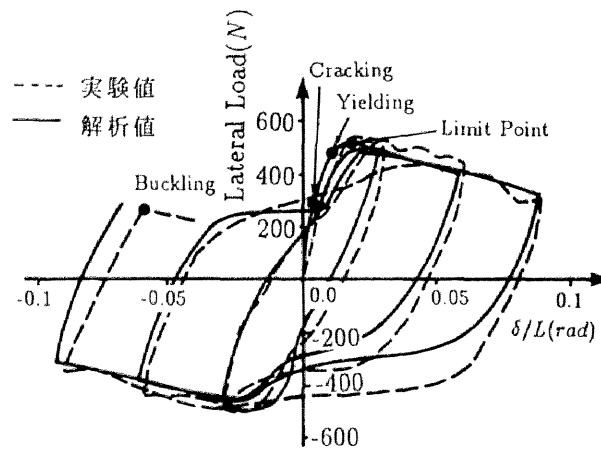


図-6.10 大変位繰返しを受ける鉄筋コンクリート柱の荷重-変位関係

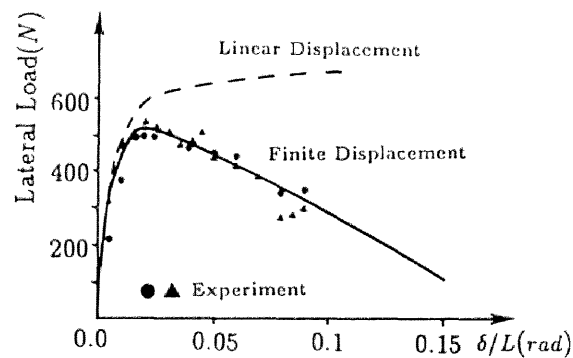


図-6.11 幾何学的非線形性の影響

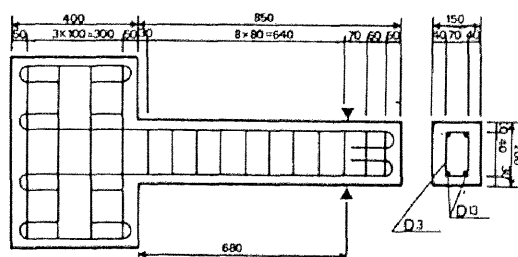
図－6.11 は、実験値の包絡線と、本解析で行った単調載荷解析とを比較したものである。図中●印が正加力側の実験値、▲印が負荷力側の実験値を示し、実線が本解析値、破線が微小変形理論による解析解である。本実験のように大きな変形をする供試体に対しては、構造物の幾何学的非線形性の影響は非常に顕著に現れ、微小変形理論による解析では追従が不可能であり、有限変形解析を行うことにより実験値をかなり正確に追従できるようになる事が判る。

6.4.2 埼玉大学におけるＲＣ柱の正負交番載荷実験

上述のＲＣ柱は、実構造物に比べれば断面は相当小さく、使用した鉄筋も実験用の直径 3mm のものであった。一方、埼玉大学がＲＣ橋脚を想定して行った、正負交番載荷実験 [37] で用いた供試体は図－6.12 に示すように、比較的大型な断面寸法（20×15cm）を有している。そこで、軸力・帯筋量・せん断支間比を変数として行った埼玉大学の実験結果に、単調載荷解析を適用して各種パラメーターの影響に対する本手法の適合性を検討してみる。解析に用いた材料特性は、表－6.2 に示す。

表－6.2 解析条件

コンクリート			鉄筋	
圧縮強度, f'_c (MPa)	引張強度, f_t (MPa)	圧縮強度時のひずみ, ϵ_{c0}	降伏点応力, f_y (MPa)	降伏ひずみ, ϵ_y
30.0	3.0	0.002	400.0	0.0025



図－6.12 埼玉大学の供試体 (unit; mm)

(1) 軸力が柱の終局変位に及ぼす影響

鉄筋コンクリート柱の変形性能に影響を与える因子のうち、軸力は最も影響の大きい要因と考えられる。図-6.13の実線は、軸応力(σ_0)が0および2(MPa)の実験値の包絡線を示している。繰り返し載荷を行っているので、その包絡線のみを示したものである。解析の結果は図-6.13の破線で示している。適用した解析は単調載荷解析なので、荷重最大になった後で徐々に実験と解析値との差が大きくなっている。これは、鉄筋コンクリート部材が正負繰り返し載荷を受ける場合、鉄筋降伏後ある程度まで変形が進んだ状態で繰り返し載荷を行うとX字状のせん断ひび割れが生じ各サイクルでの耐力が徐々に低下するような、一方向載荷あるいは単調増加載荷ではみられない挙動を示すためである。したがって、本解析は単調載荷解析を適用しているため、図に示すように繰り返しの影響により徐々に解析値と実験値の差が大きくなるのである。しかしながら、この検討の範囲であっても、実験値と解析値との整合性はかなり良い。要するに、軸力の影響を解析値は妥当に評価していると言える。

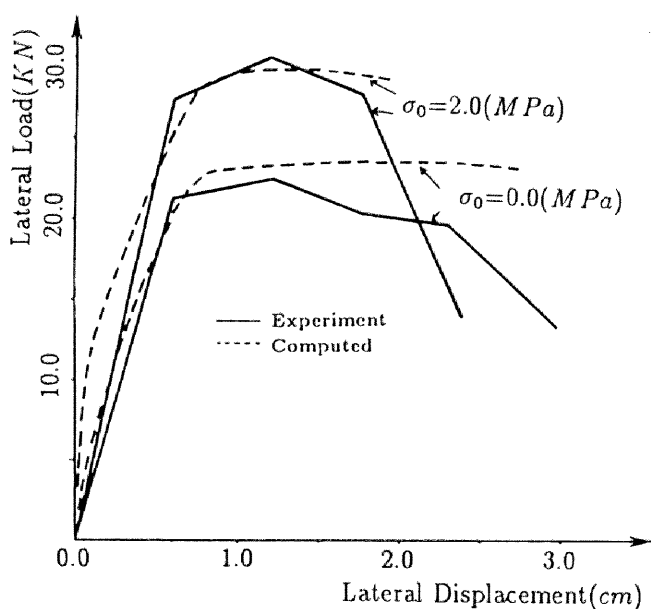


図-6.13 軸力が鉄筋コンクリート柱に及ぼす影響

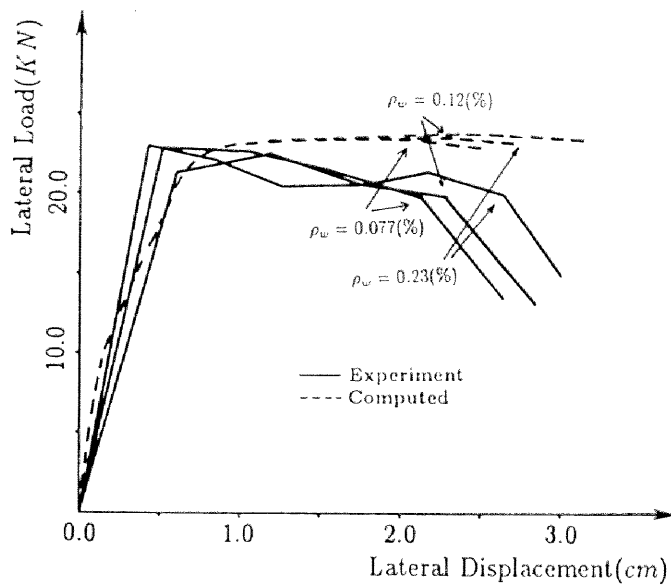


図 - 6.14 帯鉄筋比が鉄筋コンクリート柱に及ぼす影響

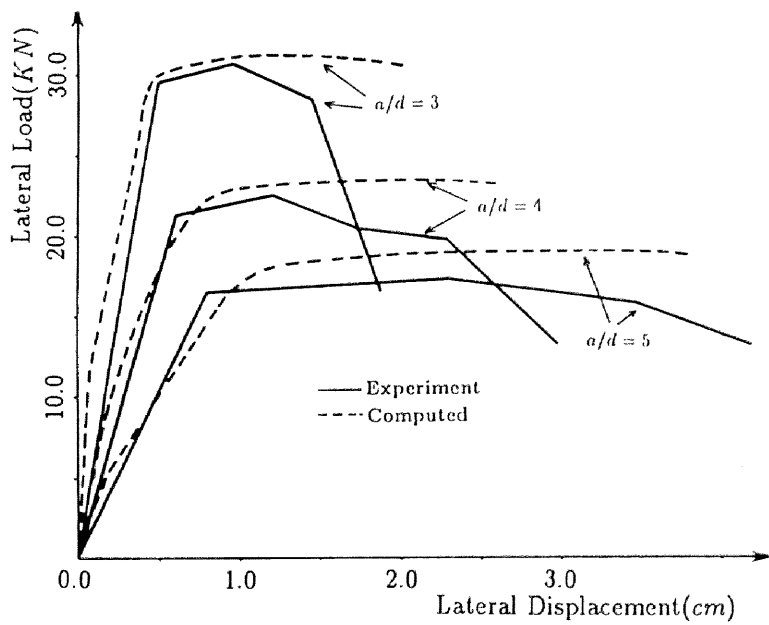


図 - 6.15 せん断支間比が鉄筋コンクリート柱に及ぼす影響

(2) 帯鉄筋比 (ρ_w) が柱の終局変位に及ぼす影響

図- 6.14 の実線で、埼玉大学の実験結果を示す。帯鉄筋比は、それぞれ 0.077(%), 0.12(%), 0.23(%) である。これに対応する解析は図- 6.14 の破線で示している。帯鉄筋量の影響は、コンクリートの応力-ひずみ曲線の応力降下直線の勾配を第3章に示した Kent and Park のモデルにより変化させることで考慮している。帯鉄筋の拘束効果は主に、拘束されたコンクリートの

(1) 最大強度の増加

(2) 最大強度以降の応力低下率の軽減

が挙げられるが、本解析では (2) のみを考慮しているので、鉄筋降伏時の荷重は実験と若干異なり、3本の破線も圧縮側のコンクリートが応力低下域に入るまでは一致しているが、解析値と実験値は終局変位に到るまでいずれの帯鉄筋比に対しても概ねよく一致している。

(3) セン断支間比 (a/d) が柱の終局変位に及ぼす影響

軸圧縮応力を $0(MPa)$ 、帯鉄筋比を 0.12(%) と一定にして、 a/d だけを 3~5 に変えた場合の実験結果を図- 6.15 の実線で示した。実験では、せん断支間比が小さいほど耐力は増加し、靱性率が小さくなる傾向を示している。対応する解析結果を図- 6.15 の破線で示したが、解析もこの傾向を非常によく表している。軸力あるいは帯鉄筋比の場合と同様に実験は繰り返し載荷に対する包絡線であり、解析は単調載荷に対する結果であるため最大荷重以降は実験値と解析値との差が大きくなっている。しかし a/d の影響を解析が明瞭に捉えている事は確かなようである。

6.5 セン断剛性モデル

コンクリート構造物の変形および破壊性状にせん断変形が及ぼす影響は非常に大きく、この影響を如何に評価するかが、コンクリート構造分野での大きな目標の一つである。そこで本節では、Collins ら [8] が提案した圧縮場理論を用いることで、曲げ、せん断、軸力を受ける鉄筋コンクリート断面に対するせん断剛性の評価を試み、せん断変形がコンクリート構造に及ぼす影響を解析的に調べた。

6.5.1 圧縮場理論

圧縮場理論は、せん断力を受ける鉄筋コンクリート要素に対する、Collins の提案による解析方法である。その特徴としては、ひび割れを離散的に捉えるのではなく、ひび割れの発生している鉄筋コンクリート要素の平均ひずみ、平均応力を考えることにより、これを一様な性質を持つ連続的な要素として捉え、そのような要素内での力の釣合条件および変形の適合条件を用いて、せん断問題を一般的に解くことにある。従来、この方法は応力が一様な単純部材について解析されていたが、ここでは、応力が部材断面内で変化する場合について拡張してみる。

(a) ひずみの適合条件

図-6.16 のような一様なせん断力と軸力を受け、一様なひび割れを持つ鉄筋コンクリート要素を考える。要素内でひび割れを平均的に取扱ひ、コンクリート要素は一様に変形すると仮定すれば、ひずみとしては、軸方向ひずみ ε_x 、軸直角方向ひずみ ε_y およびせん断ひずみ γ_{xy} 、または主圧縮ひずみ ε_2 および主引張ひずみ ε_1 とその角度を θ を考慮すればよい。このような要素についてのひずみの適合条件は図-6.17 に示すモールのひずみ円より次式のように書ける。

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_x - \varepsilon_2)/\tan\theta \quad (6.24)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_2)/\tan^2\theta \quad (6.25)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2 \quad (6.26)$$

(b) 力の釣合条件

コンクリート要素に一様なせん断応力(τ_{xy})、一様な軸方向応力(σ_x)が作用すると仮定する。また、要素に働くせん断応力はすべてコンクリートが受け持ち、コンクリートは引張応力を受け持たない($\sigma_1 = 0$)と仮定する。この時コンクリート要素の平均応力の関係は図-6.18 に示すモールの応力円のように描ける。ここで σ_x は軸方向応力、 σ_y は軸直角方向応力、 τ_{xy} はせん断応力、 σ_2 は主圧縮応力であり θ' の傾きを持つ。コンクリートの主圧縮ひずみ方向と主圧縮応力方向が等しいと仮定すれば、 $\theta' = \theta$ とおける(ひび割れ面でのせん断伝達を無視する)。

モールの応力円より、コンクリート要素に作用する軸方向、軸直角方向の応力およびコンクリートに作用する主圧縮応力が、せん断応力と θ より次式で表される。

$$\sigma_x = -\tau_{xy}/\tan\theta \quad (6.27)$$

$$\sigma_y = -\tau_{xy} \tan \theta \quad (6.28)$$

$$\sigma_2 = -\tau_{xy} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \quad (6.29)$$

この時、軸方向の力の釣合条件は、次式で書くことができる。

$$N = A_{sx} f_{sx} + \sigma_x B_w j d \quad (6.30)$$

ここで、 N は要素に作用している軸力、 A_{sx} は軸方向鉄筋の断面積、 f_{sx} は軸方向鉄筋の応力、 B_w はコンクリート要素の幅、 $j d$ はコンクリート要素の高さである。

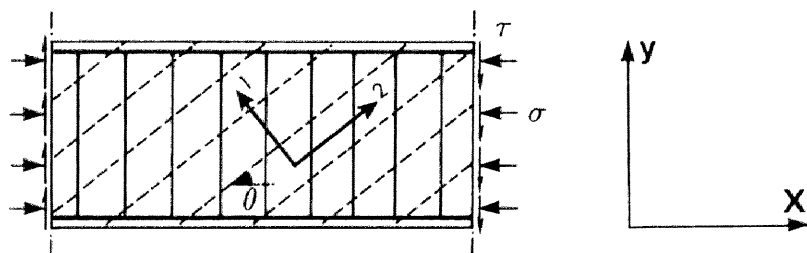


図- 6.16 斜めひび割れが発生した鉄筋コンクリート要素

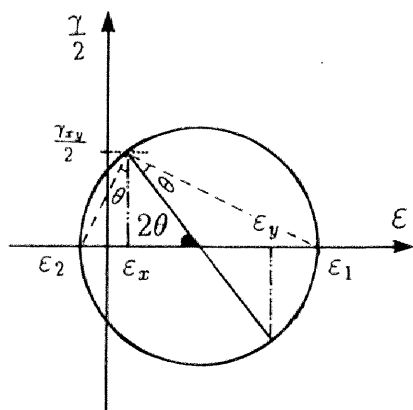


図- 6.17 モールのひずみ円

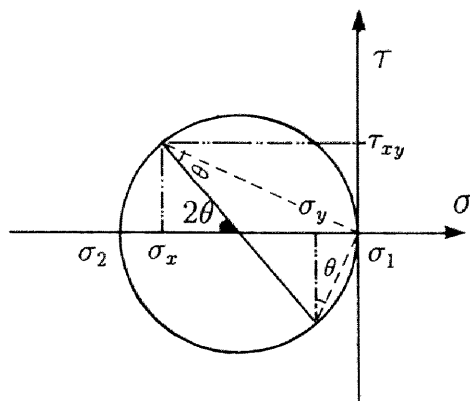


図- 6.18 モールの応力円

一方、軸直角方向の力の釣合条件式は、コンクリート要素に鉛直外力が作用しないと仮定すれば、コンクリートに発生する軸直角応力はコンクリート要素内に配置されたスターラップ応力と釣り合い、次式のように書ける。

$$\frac{A_{sy}f_{sy}}{B_w S} = -\sigma_y \quad (6.31)$$

ここで、 A_{sy} はスターラップの断面積、 f_{sy} はスターラップ応力、 S はスターラップ間隔である。

さらにこの時、コンクリートの主圧縮応力、軸方向鉄筋応力およびスターラップ応力とひずみに関係づける構成方程式を仮定し、コンクリートの主圧縮応力、軸方向鉄筋応力およびスターラップ応力を、仮定した構成方程式から得られる応力と釣り合わせれば、ひずみの適合条件および力の釣合条件を同時に満足するひずみ、応力の値が求まる。ただし、圧縮場理論による解は、陽な形で表現することはできないので、実際に解を求める場合には、繰り返し計算を行う必要がある。

6.5.2 軸力、モーメント、せん断力を受ける鉄筋コンクリート断面への圧縮場理論の適用

前述の方法は、一様なせん断力を受ける鉄筋コンクリート要素に対するものであるため、実際のはりや柱のように曲げモーメントとせん断力を同時に受ける断面に対してはそのまま適用することができない。Collins らは、このような場合には、断面を薄い層に分割し、各々の層を一樣な軸方向力とせん断力を受けるコンクリート要素と見なして圧縮場理論を適用すれば解析が可能であるとしている [63]。そこで本研究では、図- 6.19 に示す断面に圧縮場理論を適用し、軸力、曲げモーメント、せん断力が作用する場合に対するせん断剛性の評価を試みた。図- 6.19 の鉄筋コンクリート断面は、図- 6.12 の帯鉄筋比 0.12(%) の埼玉大学の供試体と同じ断面である。また、コンクリートおよび鉄筋の力学的特性も同一としている。

図- 6.19 の鉄筋コンクリート断面に対する解析手順を詳しく示せば以下の通りである。なおこの時、コンクリート、軸方向鉄筋、スターラップの応力-ひずみ関係は材料の力学的特性から既に与えている。

1. 断面を m 等分し、各層での幾何学的条件を与える。図- 6.19 の場合、幅 B_w 、高さ jd/m 、断面下端から任意層までの距離を y_{α} とする。ここで、かぶり部分のコンクリートはせん断力を抵抗することができないとし無視している (図- 6.19(b))。
2. 断面に作用するせん断力 (V) を与える。せん断応力は断面内で等しく分布すると仮定すれば (図- 6.19(d))、各層に働くせん断応力は次式で表される。

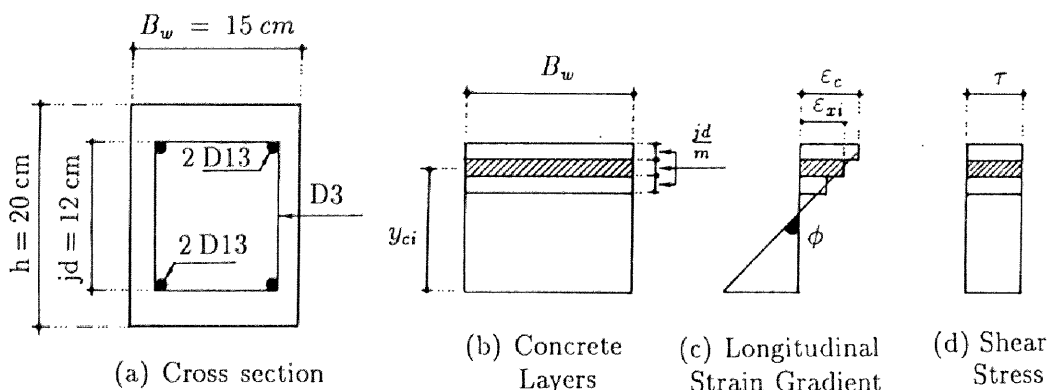


図-6.19 層分割した鉄筋コンクリート断面の性状

$$\tau_{xy} = \frac{V}{B_w jd} \quad (6.32)$$

3. 軸方向ひずみの分布形を仮定する。軸方向ひずみを直線分布と仮定すれば、各層での軸方向ひずみは曲率と圧縮最外縁でのひずみ ϵ_c を用いて次式で表すことができる(図-6.19(c))。

$$\epsilon_{xi} = (jd - y_{ci})\phi + \epsilon_c \quad (6.33)$$

4. 2. および 3. の手順で与えられた、 τ_{xy}, ϵ_{xi} に対して各層で圧縮場理論を適用し、力の釣合条件とひずみの適合条件を満足させる。

以下の手順は各層に対してそれぞれ行うものである。

- 主圧縮ひずみ(ϵ_2)を仮定する。
- 主圧縮ひずみおよび主圧縮応力の傾斜角(θ)を仮定する。
- (6.24)(6.25)(6.26)式のひずみの適合条件式を用い、主引張りひずみ ϵ_1 、鉛直方向ひずみ ϵ_y およびせん断ひずみ γ_{xy} を求める。
- スターラップの応力-ひずみ関係を用い、 ϵ_y よりスターラップ応力 f'_{sy} を計算する。

- (e) (6.28)(6.31) 式を用い、各層に作用するせん断応力につり合うスターラップ応力 f_{sy} を計算する。
- (f) f'_{sy} と f_{sy} が等しくなければ、(b) に戻り θ を仮定し直す。
- (g) コンクリートの応力-ひずみ関係を用い、主圧縮ひずみ ϵ_2 より主圧縮応力 σ_2 を計算する。この時コンクリート要素は 2 軸応力状態にあるため、圧縮強度の低減を ϵ_1 より考慮する。
- (h) (6.29) 式を用い、各層に作用するせん断応力に対する主圧縮応力 σ'_2 を求める。
- (i) σ_2 と σ'_2 が等しくなければ (a) に戻り ϵ_2 を仮定し直す。
5. (a) ~ (i) の手順を繰り返すことで、ひずみの適合条件および力の釣合条件を各層が満足する。その状態での各層での軸方向応力を (6.27) 式より求める。
6. 軸方向鉄筋の応力 (σ_{xsi}) を、鉄筋位置での軸方向ひずみより求める。
7. 断面に発生する軸力を求める。

$$N' = \sum_{i=1}^m \sigma_{xi} B_w j d / m + \sum_{i=1}^n \sigma_{xsi} A_{sxi} \quad (6.34)$$

ここで、 m はコンクリートの分割数、 n は鉄筋層の数である。

8. (6.34) 式より得られた断面に発生する軸力 N' と断面に作用する軸力 N との釣合を考える。この時、釣合条件が満たされなければ 3. に戻り ϵ_c を仮定し直す。
9. 断面に作用するモーメントを求める。

$$M' = \sum_{i=1}^m \sigma_{xi} B_w j d / m (y_{ci} - j d / 2) + \sum_{i=1}^n \sigma_{xsi} A_{sxi} (y_{si} - j d / 2) \quad (6.35)$$

(6.35) 式で得られた M' が断面に作用するモーメントと釣り合わなければ、3. に戻り ϕ を仮定し直す。

以上の手順により任意のせん断力、モーメント、軸力が作用している鉄筋コンクリート断面でのせん断ひずみ分布、ひび割れの角度分布などが既知となる。

図-6.20 に本手法より得られた結果の一部を示す。図-6.20 は図-6.19 の断面に対し $V = 10(KN)$ 、 $M = 0.95 \times 10^6(N \cdot cm)$ 、 $N = 0(N)$ が作用したときの軸方向ひずみ分布、せん断ひずみ分布、角度分布を示したものである。

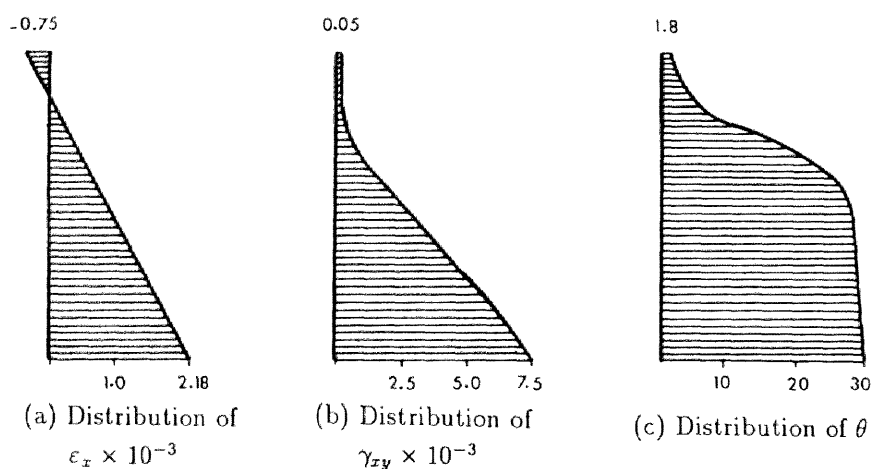


図-6.20 モーメント、せん断力が作用する断面に対する圧縮場理論の適用例

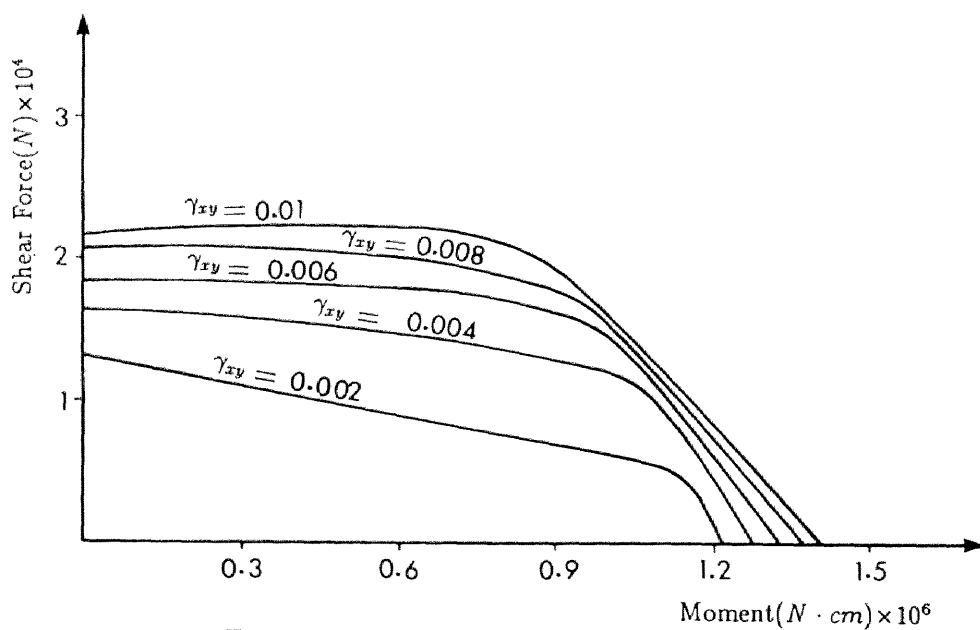


図-6.21 せん断力-モーメント関係

軸ひずみが小さくなるにつれ、せん断ひずみ、ひび割れ角度も急激に小さくなることが分かる。またその性状は、軸ひずみが負の値になるとより顕著になる。以上の計算を系統的に行えば、任意の鉄筋コンクリート断面に対する軸力－せん断力－曲げモーメント－せん断ひずみ関係を求めることができ、これよりせん断剛性劣化モデルを導くことが可能になる。ただし、本解析においてコンクリートは引張応力を受け持たないと仮定しているため、求められるせん断剛性モデルは、せん断クラックが発生している状態のものである。

6.5.3 せん断剛性モデル

図－6.19の断面に軸力が作用しない場合 ($N = 0$) の数値実験より得られた結果を図－6.21に示す。図－6.21は、一定せん断ひずみに対する曲げモーメントとせん断力の相関関係を示している。ここでせん断ひずみは、断面内で図－6.20のように分布するが、この分布を平均したものをも断面全体のせん断ひずみの値としている。

図を見れば、せん断ひずみ一定の時、作用するモーメントが増えればせん断力は徐々に低下し始め、あるところから急激に低下することが分かる。このせん断力が急激に低下する時点は、断面内でスターラップが降伏する時点と一致する。したがって、大きな曲げモーメントが作用している場合には、小さなせん断力でもスターラップが降伏する可能性をこの結果は示している。

図－6.21に示す数値実験結果を補間することで軸力が作用していない場合の図－6.19の断面に対するせん断力－せん断ひずみ関係は次式で得られた。

$$\gamma_{xy} = 2.365 \times 10^{-13} V(M + 16.0V - 1.22 \times 10^6) + 4.0 \times 10^{-7} V \quad (6.36)$$

ただし、 $M \leq -16.0V + 1.22 \times 10^6$

$$\gamma_{xy} = 1.02 \times 10^{-11} V(M + 16.0V - 1.22 \times 10^6) + 4.0 \times 10^{-7} V \quad (6.37)$$

ただし、 $M > -16.0V + 1.22 \times 10^6$

断面のせん断剛性 (GA) は、(6.36)(6.37)式を変形し、 γ_{xy} で微分することで求めることができる。今、 $M = Vl$ の関係が成り立っているとすれば、軸力が作用していない場合の図－6.19の断面に対するせん断剛性が次式で得られる。

$$GA = \frac{1.0 \times 10^6}{\sqrt{1.24 \times 10^{-2} + (0.95l + 15.0)\gamma_{xy}}} \quad (6.38)$$

ただし、 $Vl \leq -16.0V + 1.22 \times 10^6$

$$GA = \frac{1.0 \times 10^6}{\sqrt{146.0 + (40.8l + 653.0)\gamma_{xy}}} \quad (6.39)$$

ただし、 $Vl > -16.0V + 1.22 \times 10^6$

図-6.21の結果を求める際にコンクリートおよび鉄筋の応力-ひずみ関係は、繰り返しの影響を考慮していない。したがって、(6.38)(6.39)式は単調載荷した場合のせん断剛性モデルとなる。また先に述べたように、このせん断剛性はせん断クラックが発生している状態に対して与えられるものである。

鉄筋コンクリート柱のせん断破壊は、鉄筋降伏後ある程度まで変形が進んだ状態で繰り返し載荷を行うことで、X字状のせん断ひび割れとともに生じるもので、一方向繰り返し載荷あるいは単調載荷時にはみられない特徴である。したがって、上記の性状を解析的に考える場合には、せん断剛性の劣化法則は履歴の影響を考慮したものでなければならない。それに対して、本モデルは履歴の影響を考慮しておらず、また初期状態からせん断クラックが発生していると仮定している。そのため、本モデルは実際の現象と必ずしも対応しておらず、解決しなければならない多くの問題を含んでいる。しかしながら、先に示した手順をコンクリートの引張応力や材料の履歴特性を取り込んだ形に拡張することは可能であり、今後より詳細な検討を行えば鉄筋コンクリート柱が繰り返し荷重を受ける場合のせん断剛性モデルを導くことができると思われる。

6.5.4 せん断変形が構造物に及ぼす影響

本章で開発したせん断変形の影響を考慮し得る鉄筋コンクリート部材の有限要素解析手法より、せん断変形が構造物にどのような影響を与えるかを調べる。

せん断剛性モデルは(6.38)(6.39)式により与える。解析モデルとしては、図-6.19の断面を持つ $a/d = 4.0$ の鉄筋コンクリート柱である。解析は一番下側の要素のせん断剛性のみが劣化すると仮定して行った。

図-6.22が解析より得られた荷重-変位関係である。せん断剛性の劣化を考慮することで、構造物にはかなりのせん断変形が生じることが分かる。図-6.22中のハッチした部分がせん断変形による影響を表している。またスターラップが降伏し、せん断剛性が著しく低下すれば、全体変形に占めるせん断変形の割合は急激に増え、構造物の挙動は曲げ変形のみを考えた場合と大きく異なることが分かる。図-6.23に水平変位に対する柱下端部での曲率の変化を示す。曲げ変形のみを考慮した場合、柱下端の曲率は変形に比例し増加していく。一方、せん断剛性の劣化を考えた場合、曲率の増加は曲げ変形の場合に比べ少なく、スターラップ降伏後に

は曲率は殆ど増加しないことが分かる。曲率の増加は曲げ変形の増加と密接な関係があるが、この結果より、スターラップが降伏すればその後の構造物の挙動はせん断変形により決定することが分かる。

本解析手法を用いれば、せん断剛性劣化モデルさえ与えれば容易にせん断変形が構造物に及ぼす影響を調べられることが分かる。ただし、図-6.22、図-6.23で示した結果は(6.38)(6.39)式のせん断剛性モデルに依存するものであることに注意する必要がある。

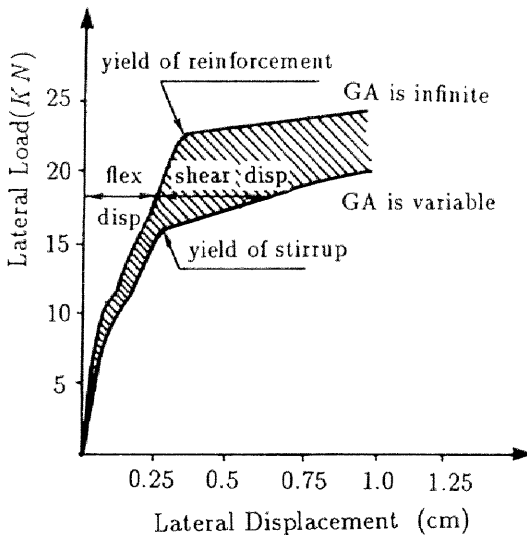


図-6.22 せん断変形が鉄筋コンクリート柱の挙動に及ぼす影響

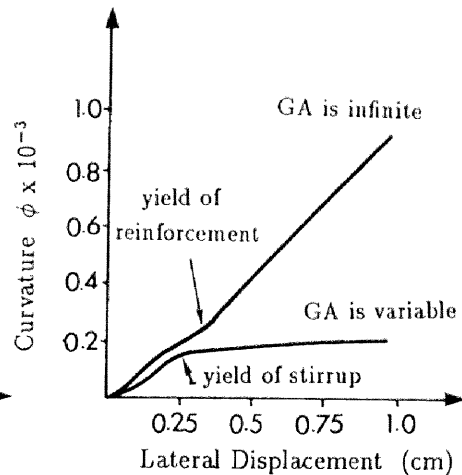


図-6.23 水平変位-曲率関係

6.6 鉄筋コンクリート柱の破壊と構造不安定性

鉄筋コンクリート柱の塑性変形挙動を精度よく評価し得る解析手法を前節までに開発した。本節では、その解析手法を用い、鉄筋コンクリート柱の構造不安定性に対する考察を行うとともに、不安定性が構造物に及ぼす影響を調べることで鉄筋コンクリート柱の終局時の挙動の解析的解明を行う。

6.6.1 曲げ変形だけを考慮した場合の鉄筋コンクリート柱の不安定性

せん断剛性 (GA) を無限大にして、曲げ変形だけを考慮した場合を考える。解析に用いたモデルは、図-6.12 に示す埼玉大学の供試体と同じ断面および材料定数を持つものとした。またモデルは、 $\sigma_0 = 2(MPa)$, $\rho_w = 0.12(\%)$, $a/d = 4.0$ の諸元を持つと仮定した。

図-6.24 に単調載荷解析を行った結果得られた、水平変位-水平荷重の関係を示す。なお図-6.24 は抜け出し量を加えていない構造物だけの変位に対するものである。構造不安定性に対する考察は、第二章で述べたように負の固有値の存在を調べることで行うことができる。図-6.25 に図-6.24 に示す (1) ~ (5) までの各荷重段階に対し、3 次までの接線剛性マトリクスの固有値、固有モードを示す。図-6.25 は軸方向および水平方向の正規化した固有モードを示し、各モードに対応する固有値はそれぞれのモード図の下に示している。

解析においては、(2) の時点を越えたところで一つの負の固有値が発生し、その後 (5) の時点までは構造物は一つの負の固有値を持続けた。そして、(5) の時点を越えたところで二つ目の負の固有値が発生した。

一つの負の固有値が発生した (2) の時点は、荷重-変位曲線の最大荷重点に対応し、この点以降荷重が低下していく。したがって、この時点で limit point が定義され、一つの負の固有値は、荷重低下する不安定な釣合経路上に構造物が存在することを示すものである。また (2) の時点前後の固有モードおよび変形挙動を見れば、負の固有値発生後も変化することではなく、この点は純粋な limit point であることが分かる。したがって、二つ目の負の固有値が発生する (5) の時点までは、構造物に許される釣合経路は解析より得られた経路のみである。また、この範囲では、構造物は水平荷重に対しては不安定であるが鉛直荷重は十分支えており、地震のような慣性力が水平荷重である場合には、構造物の崩壊とはならない。

(5) の時点を過ぎると二つ目の負の固有値が生じるが、新たな負の固有値の発生によりこの点は明らかに bifurcation point と定義される。従って構造物は、この点から今までと全く異なる変形挙動に移行する可能性が生じる。この時の負の固有値に対応する固有モードを見れば、前段階に比べ大きく変化していることが分かる。bifurcation point 後の bifurcation path は、負の固有値に対応する固有モードを使い得ることができるが、図-6.25 の (5) の時点で生じた一番小さな固有値に対応する固有モードによれば、この点以降構造物は、鉛直方向の変形が急激に増え柱下端部に変形が集中する挙動を示すことが予想される。このような変形形式は、実際に構造物が曲げ型の崩壊を生じた場合に認められるもので、そのような現象を解析的に捉えたものと考えられる。従って、第五章で示した鉄筋コンクリートはりの場合と同様に、曲げ変形する鉄筋コンクリート柱に対しても、bifurcation point が構造物の破壊点と密接な関係がある

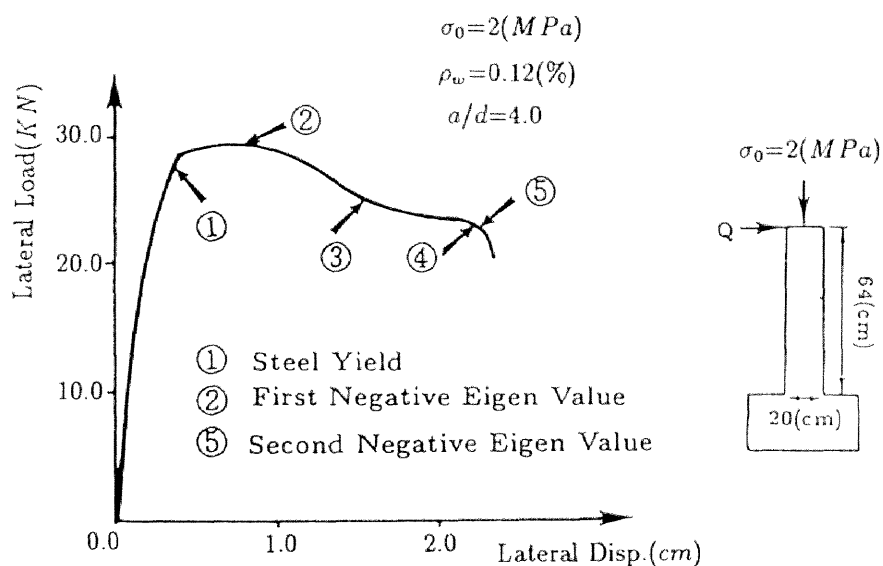


図 - 6.24 曲げ変形だけを考慮した場合の荷重 - 変位関係

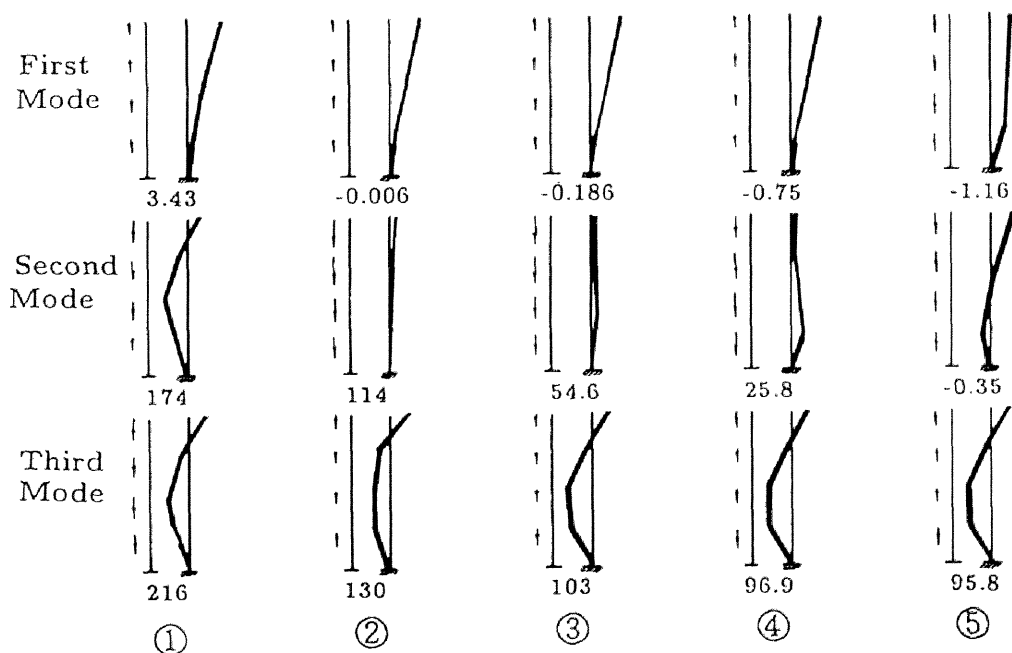


図 - 6.25 各荷重段階における固有モードおよび固有値

ことを示唆している。

そこで、鉄筋コンクリート柱の単調載荷実験を行った供試体に本解析手法を適用し、実際の構造物の破壊点と bifurcation point の適合性に対する考察を行った。対象とした実験は、村上、今井ら [42] が鉄筋コンクリート柱に対して行った単調載荷実験である。供試体は、建物の一階柱中脚部を想定し、曲げ降伏するよう設計されたものである。

供試体の形状および配筋図は図－6.26 に、使用された材料の力学的性質は表－6.3 に示す。

表－6.3 材料の力学的性質

コンクリート			鉄筋	
圧縮強度, f'_c (MPa)	引張強度, f_t (MPa)	圧縮強度時のひずみ, ϵ_{c0}	降伏点, f_y (MPa)	初期剛性, E_s (MPa)
24.7	2.37	0.002	361.8	1.91×10^5

図－6.27 に水平方向の荷重－変位曲線の実験値と解析値を示す。図中●印が実験値を、実線および破線が解析値を示している。実験では供試体は水平変位 13.6(cm) の時点で軸方向の縮みが生じることで破壊に至っている。解析では水平変位 10.2(cm) の時点で 2 目目の負の固有値が発生し、この時点で bifurcation point が生じた。

bifurcation point で分岐解析を行わなければ、構造物は図中の破線に示す釣合経路上を移動し、荷重が急激に低下することはなかった。また破線で示す釣合経路上では変形挙動も bifurcation point 後に変化することはなかった。

一方、bifurcation point で分岐解析を行うと、図中の実線で示される bifurcation path を解析上得ることができた。bifurcation path を通れば、荷重は急激に低下し構造物が破壊にいたる性状が示されおり、解析においては bifurcation point で構造物の破壊点を定義すればよいことが推測される。解析における破壊点 (10.2cm) と実験における破壊時 (13.6cm) は若干異なっているものの、解析において得られる bifurcation point で実際の構造物の破壊点を概ね評価できることは確かなようである。

6.6.2 曲げ変形とせん断変形を考慮した場合の鉄筋コンクリート柱の不安定性

次に曲げ変形並びにせん断変形を考慮した場合を考えてみる。せん断剛性モデルは、前節で導いたものと同じである。ただし、解析においてせん断剛性が劣化するのとは一番下側の要素だけとしている。解析に用いたモデルは、図-6.12に示す埼玉大学の供試体と同じ断面および材料定数を持つものとした。またモデルは、 $\sigma_0 = 0(MPa)$ 、 $\rho_w = 0.12(\%)$ 、 $a/d = 4.0$ の諸元を持つと仮定した。

図-6.28に単調載荷解析を行った結果得られた水平変位-水平荷重の関係を、図-6.29に図-6.28に示す(1)～(5)までの各荷重段階に対する3次までの各段階の接線剛性マトリクスより得られた水平方向の固有モードを示す。

各荷重段階の一次の固有モードを見れば、(1)の時点では固有モードは曲げ変形が卓越した形状を示す。この時点ではまだ、スターラップは降伏しておらず、コンクリートも比較的健全なためであると思われる。しかし(2)の時点では、一番下側の要素のせん断変形が急激に増えるモードへと移行している。この時点では、スターラップは既に降伏しておりせん断剛性は初期のものに比べかなり低下している。本解析では、一番下側の要素だけにせん断剛性の劣化を考えているため、下側の要素にせん断変形が集中する。さらに荷重を加え引張鉄筋降伏後は、再び曲げ変形が卓越するモードへと移行する(3)の時点)。これは、引張鉄筋降伏により断面の曲げ剛性の劣化が著しくなるため、曲げ変形の影響がせん断変形の影響に比べ相対的に大きくなるためである。そして(4)の時点において構造物には負の固有値が発生し、同時に固有モードも大きく変化した。

(4)の時点で構造物には2つの負の固有値が発生した。この時点は荷重-変位曲線の最大荷重点に対応しており、一つの負の固有値はlimit pointをもう一つの負の固有値はbifurcation pointを定義するものと考えられる。負の固有値に対応する固有モードを見れば、2次モードに今までの一次モードと同様なものが発生している。このモードがlimit point後の釣合経路に対応するものである。そして、一次のモードはbifurcation pointに対応する固有モードとなる。bifurcation pointに対応する固有モードは、前段階までに生じている固有モードと大きく異なる。また、このようなモードはせん断剛性を無限大にし曲げ変形だけを考慮した場合には得られなかったものである。これは明らかにせん断剛性(GA)の劣化を考慮した影響と考えられ、せん断変形を考えることで曲げ変形だけを考慮した場合と異なる破壊形態が構造物に生じる可能性を本解析結果が示している。

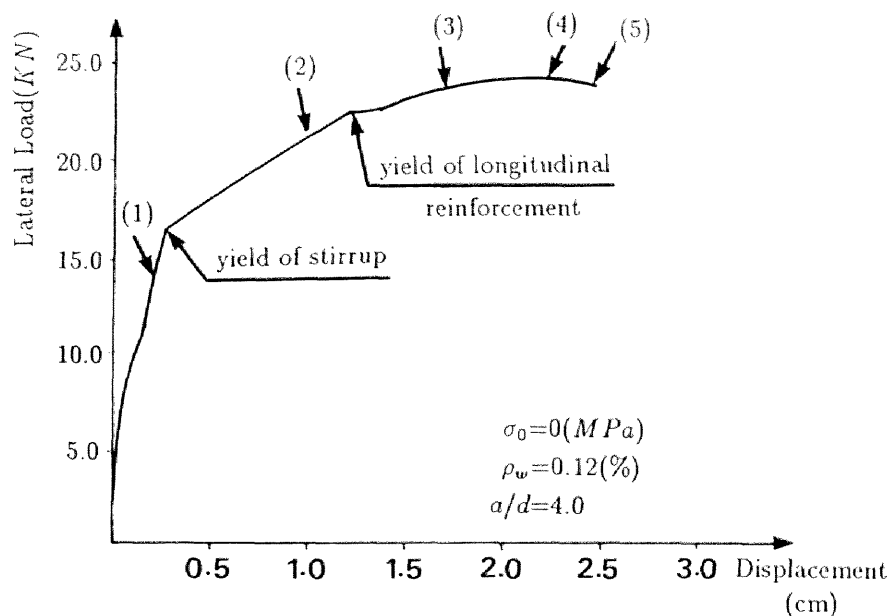


図- 6.28 曲げ変形およびせん断変形を考慮した場合の荷重-変位関係

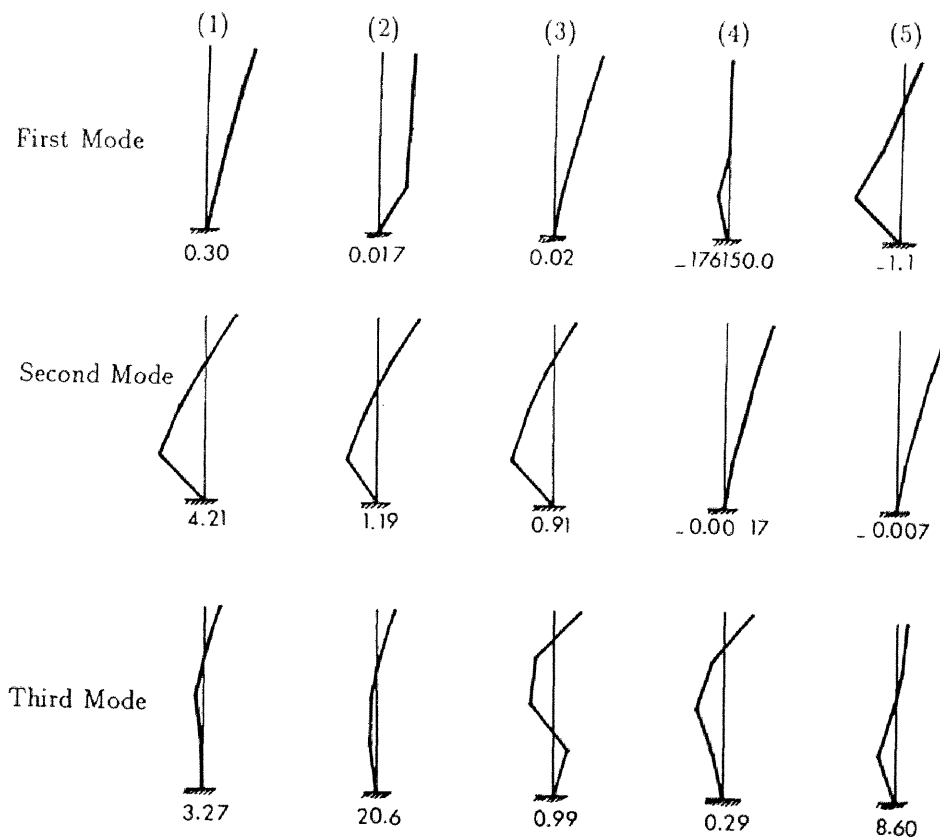


図- 6.29 各荷重段階における固有モードおよび固有値

6.7 結論

鉄筋コンクリート構造物の塑性変形挙動およびポストピーク挙動に対する解析的検討を行い、以下の結論を得た。

1. せん断変形を考慮した有限変形理論に基づく仮想仕事方程式を導き、鉄筋コンクリート柱部材に対する有限要素解析手法を開発した。そして、鉄筋コンクリート柱の大変形繰返し載荷実験との比較を行うことで、本解析手法が部材角が $1/10$ の大変形に到るまで、RC柱の履歴挙動を解析的に精度よく再現できることを示した。また軸力、帯鉄筋量、せん断支間比をパラメーターとした実験結果との比較より、各種要因が塑性変形挙動に及ぼす影響も本解析により評価できることが分かった。
2. 降伏荷重以上の繰返し載荷を受ける軸方向鉄筋の抜け出し量を精度よく算定する方法の提案を行った。
3. 鉄筋コンクリート断面のせん断剛性モデルを圧縮場理論を用いて作成し、せん断変形が構造物に及ぼす影響を調べた。せん断変形が構造物に及ぼす影響はスターラップが降伏すると非常に顕著になり、スターラップ降伏後は構造物の変形はせん断変形に支配されることが分かった。また、せん断剛性劣化モデルさえ与えれば、本章で開発したせん断変形を考慮し得る有限要素解析手法により、せん断変形が構造物に及ぼす影響を容易に求めることができる。ただし、本章で作成したせん断剛性モデルはいまだ不十分であり、今後より詳細な検討を行う必要がある。
4. 鉄筋コンクリート柱の構造不安定性に対する考察を行い、不安定性が構造物に及ぼす影響を調べた。その結果、鉄筋コンクリート柱の終局破壊点は解析上 bifurcation point で定義することが妥当であると思われる。

7章 コンクリート構造物の終局挙動

7.1 概説

鉄筋コンクリート構造物の耐震性状に関する研究はこれまで数多く行われている。しかしながら、これらの研究の多くは、主に橋脚などの静定構造物および単一部材に関するものである。橋脚などの静定な鉄筋コンクリート構造に関するポストピーク領域の終局挙動は、数多くの実験結果に基づき、実験的にはかなり明らかにされている。また、塑性変形能（靱性）の算定手法についても、精度や適用範囲に問題を残しながらもいくつかの実験式が提案されている[20][36]。一方、鉄道の高架橋などに多くみられるRCラーメン構造のような不静定構造物における非線形挙動は、土木の分野では、町田ら[38]、鈴木ら[60]、松本ら[40]の報告があるに過ぎず、その靱性はいまだ定量化されていない。また、靱性の概念を如何に耐震設計に取り入れるか、あるいは各部材の靱性、耐力、剛性をどの様に配置するかに関しては、ほとんど検討されていない。これは、ラーメン構造物では、複数の部材の組合せや部材内部に生じる軸力変動などによりその変形性能が大きく異なってくるためと思われる。

一般に、ラーメンのような不静定構造物は、橋脚などの静定構造物とは異なり一つの部材が破壊しても、構造物全体が崩壊するわけではない。そのためRCラーメン構造物の靱性を考える場合は、部材単体としてではなく、構造物全体の靱性を考える必要が生じる。

本章では、その前半部分において、不静定な鉄筋コンクリート構造物である一層RCラーメン構造を対象とし、解析的にポストピーク挙動を含む構造物の非線形挙動を調べ、複数の部材の組合せや部材内部の軸力変動が変形性能に及ぼす影響について考察する。さらに、RCラーメン構造の靱性の評価方法について解析的な観点から述べる。また後半部分では、鉄道高架橋に用いられるRCラーメン構造と同様に不静定な構造物であり、近年その採用が急増しているPC斜張橋タワーを対象とした解析を行い、幾何学的非線形性が終局挙動に及ぼす影響について調べる。ここで、解析手法としては、第6章で示した、有限変形理論に基づく、材料非線形性と幾何学的非線形性を考慮した有限要素解析を曲げ変形のみを考慮して適用する。

7.2 既往の実験と本解析値との比較

不静定構造物に対する解析手法の妥当性を評価するため、松本ら[40]の行った一層RCラーメン構造の水平交番載荷試験に単調載荷解析を適用して、実験結果との適合性を検討した。この実験は、実際の鉄道RCラーメン高架橋を模擬した約1/5の縮小モデルであり、不静定構造物の靱性について定量的に把握することを目的として行われたものである。荷重は、上層梁の

軸線に作用するように載荷されている。載荷方法は正負交番載荷で、降伏荷重（この時点の変位 $=\pm\delta_y$ ）， $\pm2\delta_y$ ， $\pm3\delta_y$ ， \dots ，破壊という段階で行われ、降伏荷重に達するまでは荷重制御により、それ以降は変位制御により行われている。降伏荷重，降伏変位は、試験体の中でいずれかの部材の引張側軸方向鉄筋が降伏ひずみに達した荷重、およびその時点の載荷点側の柱・上層梁接合部中心点の水平変位置で定義されている。

表－ 7.1 試験体諸元

供試体 No.	全体寸法 (mm)		部材寸法 (mm)	
	H	B	はり (H1×B1)	柱 (H2×B2)
1	2190	1850	300×400	250×250
2	1750	2700	300×400	左柱 350×250 右柱 250×250

表－ 7.2 試験体の軸方向鉄筋比およびせん断補強筋比

供試体 No.	部材名称	A_s	$P_t(\%)$	A_{sw}	$P_w(\%)$	$f'_c(MPa)$
1	上層はり 柱	D16-6 D13-4	0.99(2.41) 1.01(3.24)	D6 D6	0.2 0.4	28.6
2	上層はり 左柱 右柱	D16-6 D16-4 D13-4	0.99(2.41) 0.91(2.72) 0.81(2.43)	D6 D6 D6	0.2 0.2 0.2	26.9

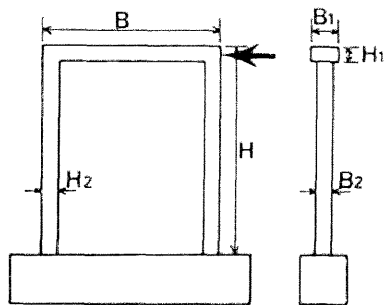


図 - 7.1 供試体形状

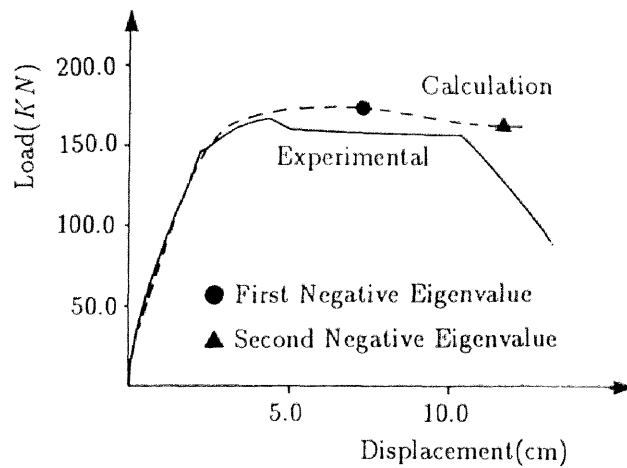


図 - 7.2 実験値と解析値の比較 (供試体 No.1)

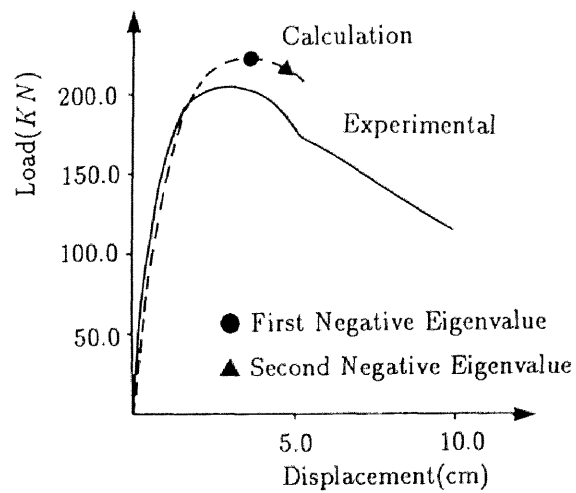
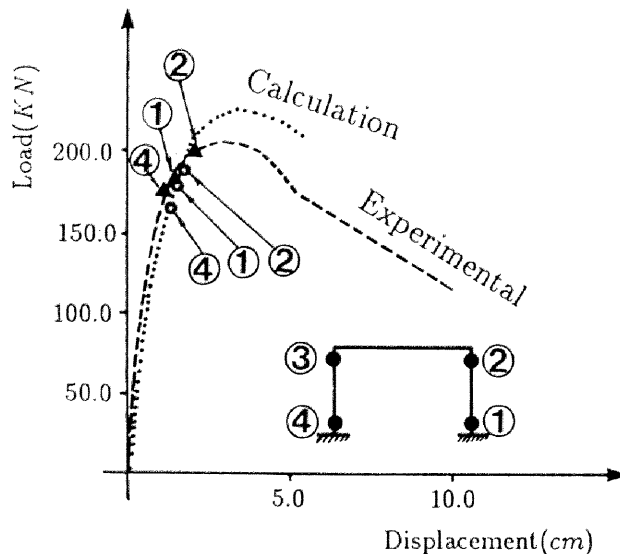


図 - 7.3 実験値と解析値の比較 (供試体 No.2)



図－7.4 実験値と解析値の鉄筋降伏時の比較（供試体 No.2）

供試体の形状および諸元をそれぞれ図－7.1、表－7.1 に示す。供試体 No.1 は左右の剛度が等しく、No.2 は左右の柱の剛度が異なる供試体である。供試体の軸方向鉄筋比およびせん断補強筋比は表－7.2 に示す。表－7.2 における軸方向鉄筋比（ P_t ）は、この引張領域の最外縁に配置されている軸方向鉄筋のみに対する値である。また、表中（ ）内の値は軸方向鉄筋の全量に対する値である。

図－7.2、図－7.3 に No.1 と No.2 の載荷点における水平方向の荷重-変位曲線の実験値の包絡線と解析値との比較を示す。実線が実験値を、破線が解析値を表している。解析は右側柱上端部の水平方向変位を制御して行った。ここで解析モデルは、供試体断面の中心線によりモデル化している。

解析値は、実験で繰り返しにより耐力が急激に低下するまでは、実験値を概ねよく追従している。また供試体 No.2 の実験結果によれば、軸方向鉄筋の降伏は $1\delta_y$ ループ時に剛度の大きい左柱下端に生じ、そして $2\delta_y$ ループ時に剛度の小さい右柱の上下端で生じているが、本解析でも図－7.4 に示すようにはほぼ同様の結果が得られた。図－7.4 の○印は同図中右下にあるラーメン各部材断面における、実験中に生じた各々の軸方向鉄筋の降伏時点を示し、▲印は、解析より得られた結果を示したものである。本解析が構造物の荷重変位関係のみならず、各部材断面のひずみ挙動も、よく再現していることが分かる。また、No.2 では解析値の最大耐力が実験

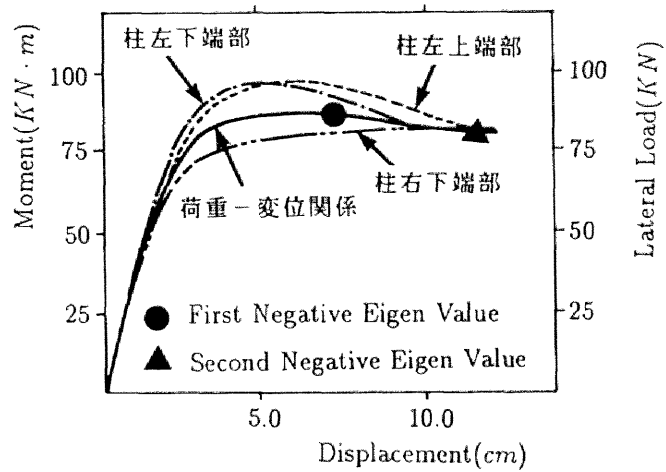


図-7.5 変形にともない各断面に生じるモーメント（供試体 No.1）

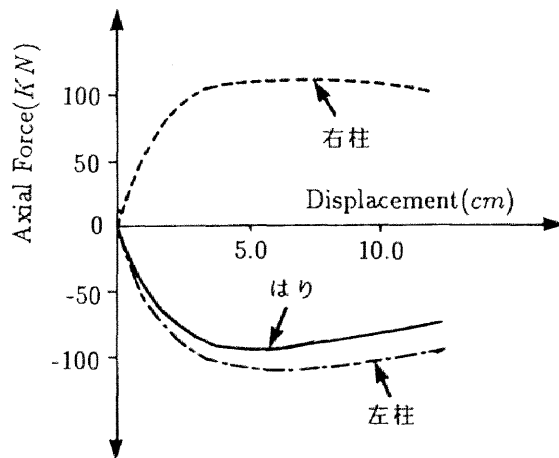


図-7.6 変形にともない各部材に生じる軸方向力（供試体 No.1）

値よりやや大きくなっているが、その差は10%程度であり、解析結果は良好である。いずれにしても、形状・剛度の異なる一層RCラーメン構造に対し、解析値は実験値を良く追随していると言え、本解析手法の妥当性が示されたものと考えられる。

7.3 鉄筋コンクリートラーメン構造の靱性評価

橋脚などの静定構造物および部材に関する靱性や靱性率の算定手法については、様々な報告がなされている。しかし、RCラーメン構造等の不静定構造に対する靱性および靱性率の算定手法は、現在のところ定量化されているとは言えない。これは、ラーメンのような不静定構造物は、複数の部材の組合せや部材に生じる軸力変動などにより、その変形挙動が大きく異なってくるためと思われる。

図-7.5に供試体No.1の解析より得られた、各水平変位段階における左側の柱の上下端部のモーメントを破線と一点鎖線で、右側の柱の下端のモーメントを2点鎖線で示す。併せてその時の荷重-変位曲線を実線で表している。左側の柱では、軸圧縮力の影響により右側の柱より大きなモーメントが生じている。水平変位が約4(cm)で左側の柱下端部の断面耐荷力が低下し始め、続いて水平変位が約6(cm)で左側柱上端部の断面耐荷力も低下している。しかしながら、構造物の水平耐荷力は低下しておらず、●点で初めて低下し始めている。この点で水平耐荷力は最大となり、その後耐荷力は徐々に減少していく。また右側の柱の断面耐荷力は、この範囲では低下することにはなかった。このように、ラーメンのような不静定構造物は、一部材の耐荷能力が構造物としての耐荷能力に必ずしも一致しないことが分かる。橋脚などの静定構造物に対し解析的に終局変位を求める場合に、圧縮縁のコンクリートひずみが0.35%に達するとき、あるいは最大モーメント時などというように仮定されているが、RCラーメン構造に対してこれらの仮定は物理的意味を持たないと考えられる。

また橋脚などにより得られた成果を、仮にRCラーメン構造に用いるとしても、RCラーメン構造では各部材(柱、はり)に作用する軸力が、各変位段階により大きく異なっており、この影響を正しく評価することは非常に困難であると思われる。図-7.6に、供試体No.1の解析より得られた各水平方向変位段階における、各部材に作用する軸力を示す。構造物の変形にしたがい、部材が約 $\pm 100(KN)$ (柱部材の応力が $\sigma_0=1.6(MPa)$)の軸力の変動を受けていることが認められる。鉄筋コンクリート部材を対象とした実験では、軸力は靱性に最も大きな影響を及ぼす要因と報告されているが、RCラーメン構造では、変形の進行にともなって生じる軸応力のために、各部材の保有する靱性自身が変形状態によって大きく変化することが分かる。

以上のようにRCラーメン構造のような不静定構造物は、構造物を構成する各部材の靱性が

確保されても、そのことが構造全体の靱性率とは必ずしも一致しない。また各部材の靱性も変形状態により変化する。したがって、現在までに得られている静定構造物および部材の靱性評価法をRCラーメン構造に適用することは困難と考えられる。ラーメン構造の場合は、構造系全体としての靱性を評価する何等かの基準が必要になると思われる。

そこで、本解析結果と実験結果を比較すると、実験により水平荷重が急激に低下する変位が、構造物全体の接線剛性マトリクスの固有値が負となる変位と良く一致しているのが判明した。図-7.2, 図-7.3の●点が一番小さな固有値が負になる点で、▲点が2つ目の固有値が負となる点である。

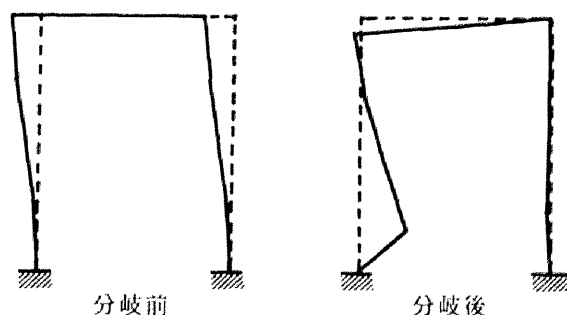


図-7.7 bifurcation point 前後の一次の固有モード

負の固有値の発生は、第2章で述べたように、我々に limit point あるいは bifurcation point が発生したことを教える。本解析では、●印が limit point に対応しており、この点以降構造物には一つの負の固有値が生じる。一方、▲印は bifurcation point であり、この点以降構造物には今までとは全く異なる変形モードに移行する可能性が生じる。実験値との比較を行えば、荷重が急激に低下する点は後者の bifurcation point とよく一致しているのが分かる。図-7.7に分岐前と後の接線剛性マトリクスから得られる一次の固有モードを示す。既に何度も述べているように、負の固有値に対応する固有モードを使い bifurcation point 後の bifurcation path を得ることができるが、図-7.7に示す固有モードは、構造物が変形の進行にともない軸圧縮力が生じる柱下部で破壊することを予想させる。柱下部で破壊する性状は、実験結果とも定性的に一致するものであり、本解析で生じた bifurcation point が、対象としたRC一層ラーメン構造の破壊点を的確に捉えていると考えられる。すなわち、最終破壊点が bifurcation point で表される可能性が、第5章、第6章と同様にこの場合にも示されたのである。

部材の終局変位を分岐点 (δ_{bf}) で定義し、靱性率を δ_{bf} と解析上部材のいずれかの軸方向鉄

筋が降伏した変位 (δ_y) の比で定義する。

$$\mu = \delta_{bif} / \delta_y \quad (7.1)$$

(7.1) 式は、構造物の接線剛性マトリクスの固有値を用いて R C ラーメン構造の靱性を評価するものであり、各部材ではなく構造系全体に対して定義される靱性率と行うことができる。

7.4 鉄筋コンクリートラーメン構造の靱性率に及ぼす諸要因の影響

R C ラーメンに対する靱性率を (7.1) 式により定義したので、No.1 の供試体をモデルにして、各種パラメーターの靱性率への影響を調べた。

7.4.1 軸力の影響

軸力を左右柱の上部に作用させて、軸力が R C 一層ラーメン構造に及ぼす影響を調べた。軸力による柱断面の軸圧縮応力度が $0(MPa)$ と $2(MPa)$ の場合の解析より得られた荷重変位関係を図-7.8 に示す。橋脚で得られている知見と同じように、軸力が大きければ、構造物としての耐力は上昇するが、その変形性能はかなり減少することが分かった。 $\sigma_0=0, 2(MPa)$ の時の (7.1) 式で評価した靱性率はそれぞれ、5.76, 2.8 であり、靱性率は約半分に減少する。R C ラーメン構造では変形の進行にしたがい部材内部に軸圧縮力が発生するため、軸力の影響は単一形式の柱よりもより顕著になると考えられ、この点に関しては更に詳細な検討が必要と思われる。

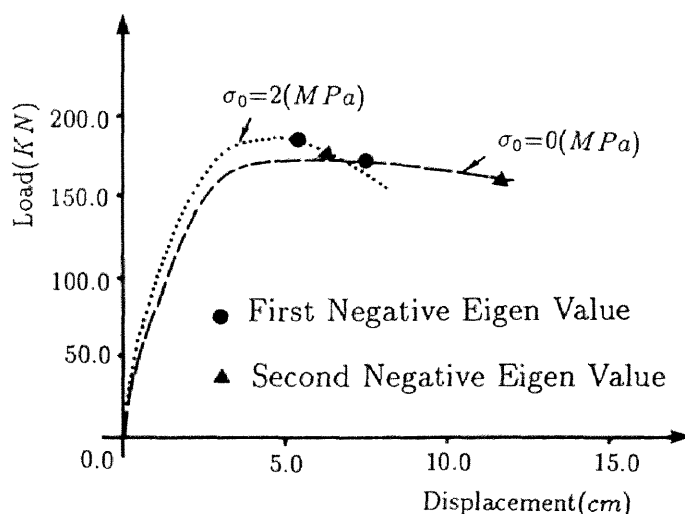


図-7.8 軸力が R C 一層ラーメンの終局挙動に及ぼす影響

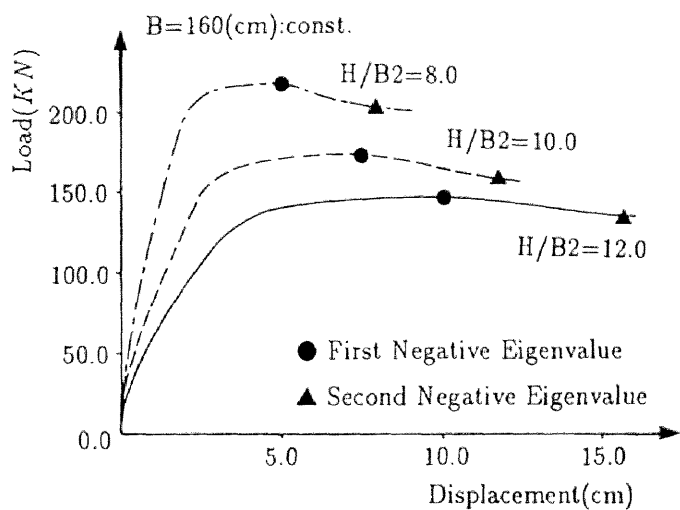


図-7.9 柱の長さがRC一層ラーメンの終局挙動に及ぼす影響

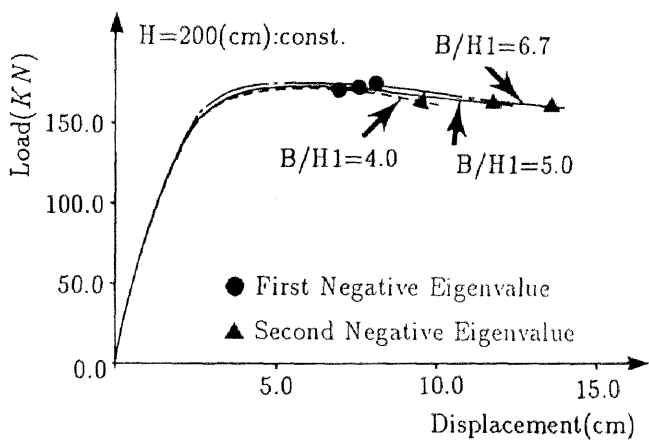


図-7.10 はりの長さがRC一層ラーメンの終局挙動に及ぼす影響

7.4.2 柱の長さ (H) とはりの長さ (B) の影響

はりの長さを一定にして、柱の長さを変化させた時の影響を調べた。柱のせん断支間比 (H/H_2) は、8.0, 10.0, 12.0 の3通りである。図-7.9に解析より得られた荷重変位関係を示す。せん断支間比が小さいほど耐力は増加し、終局変位は小さくなる傾向を示した。しかしながら、(7.1)式で評価した靱性率はそれぞれ5.3, 5.7, 5.8であり、靱性率は柱の長さに関係なくほぼ一定の値であった。

次に柱の長さを一定にして、梁の長さを変化させた時の影響を調べた。梁のせん断支間比 (B/H_1) は、4.0, 5.3, 6.7 の3通りである。図-7.10に解析より得られた荷重変位曲線を示す。梁の長さが、水平耐力に及ぼす影響はほとんど見られなかった。しかし梁の長さが長くなるにつれ、終局変位は非常に増大している。この時の解析より得られた靱性率はそれぞれ7.4, 5.8, 6.4であった。本解析において構造系の破壊は、図-7.7の固有モードからも分かるように、圧縮側柱の下端の性状により大きく影響されると思われる。実際の実験においても、破壊は主に柱下端に集中している。したがって、構造系としての靱性率を大きくするには、この柱部の破壊を遅らせることが重要と思われる。本解析では、はりを長くすることにより、はりが大きく変形することで柱の破壊が遅れ、構造系の靱性が増大することが示されている。

7.5 斜張橋タワーの終局挙動

鉄道高架橋に用いられるRCラーメン構造と同様に不静定な構造物であり、近年その採用が急増しているコンクリート構造物に斜張橋タワーがある。斜張橋タワーはその形式上、軸力レベルが高く大きな変形が予想されるため、有限変形理論に基づく解析が必要と思われる。

そこで本節では、既存PC斜張橋タワーを対象とした解析を行い、微小変形理論に基づく解析と有限要素法変形理論に基づく解析との比較を行い、終局域における両者の差について検討を行った。

7.5.1 解析モデル

対象とした構造物は、既に石川ら[25]が断面の $M-\phi$ 関係に基づいて解析をしている。そこで、本解析でも石川らと同様な構造系および荷重のモデル化を行った。

石川らは、用いた解析手法の今後の課題として、

1. 軸力変動を考慮した $M-\phi$ 曲線の適用
2. 拘束コンクリートの $\sigma-\epsilon$ 曲線の適用

3. 柱の変形に伴う付加モーメントの考慮

4. 動的解析手法の適用

等を挙げているが、本解析では (1)(2)(3) の課題を既に含んでいる。解析に用いた材料特性はコンクリートに対しては、 $f'_c=35(MPa)$ 、 $\epsilon_{\infty}=2000(\mu)$ とし、鉄筋に対しては $f_y=350(MPa)$ 、 $E_s=2.1 \times 10^5(MPa)$ である。解析は、塔頂部の水平変位を制御して行っているため、荷重作用点は1点だけである。そのため、水平荷重を塔の水平方向に等しく分布させるために、変位制御点の水平荷重を各節点に等しく分配し、分配した荷重に対する収束計算を新たに組み込むことで、いくつかの節点に比例荷重が作用する場合の解析を可能にしている。

対象とした構造物のモデル化は以下の通りである。

1. 構造系

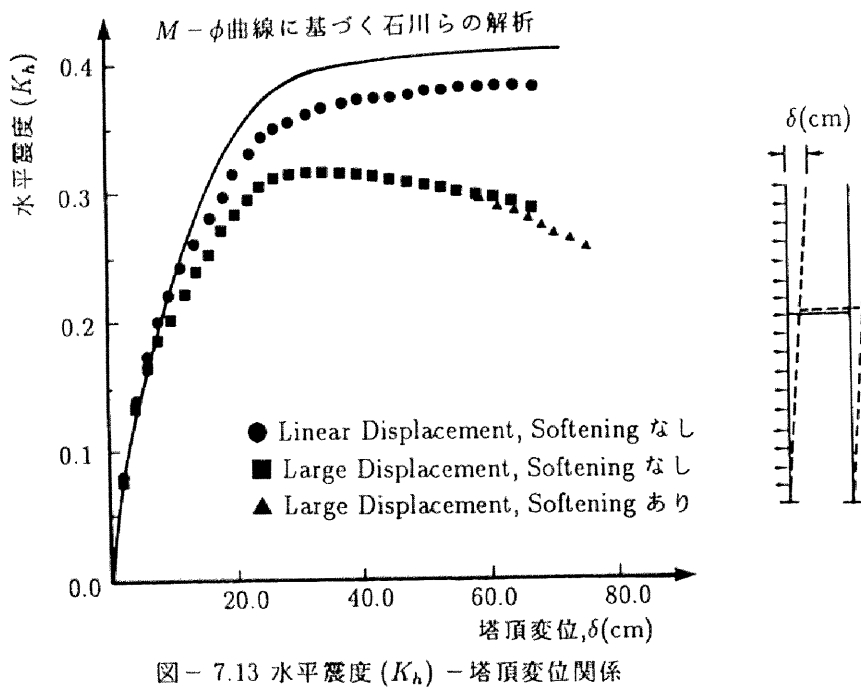
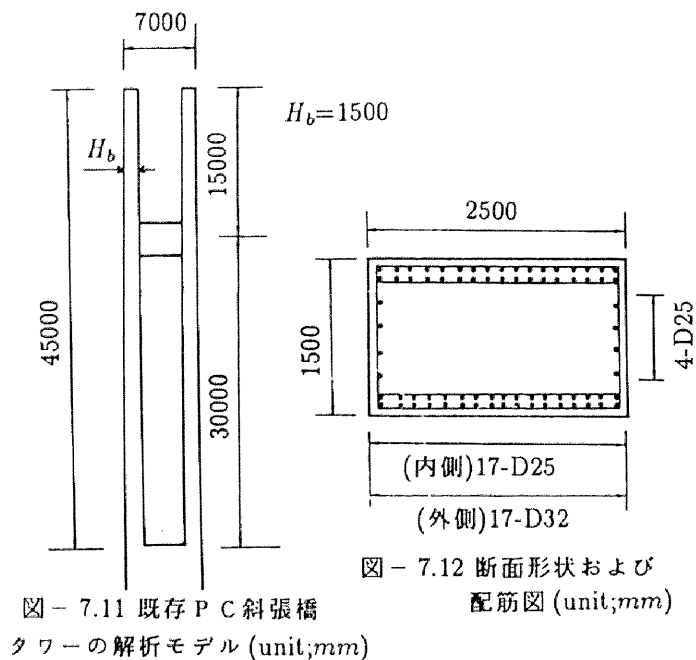
- (a) 塔と橋脚の接合部を固定とした平面骨組みモデルとした。図－7.11 にモデルの形状を示す。
- (b) ケーブルによる横方向拘束は、僅少であると考えられるため無視した。
- (c) 柱部材に着目するという観点から横ばりは弾性部材として扱った。

2. 断面モデル

- (a) 断面形状と配筋状態は全ての塔断面に対し図－7.12 に示すものを与えた。
- (b) 柱部に存在するケーブル切欠部は考慮せず矩形断面として扱った。これは、ケーブル切欠部が分散配置されており、全体系に及ぼす断面欠損の影響はないものと判断したためである。

3. 荷重

- (a) 自重は $\gamma_c=2.5t/m^3$ として節点荷重を算出した。
- (b) 節点の初期軸力は、自重とケーブル張力鉛直成分の和とした。
- (c) 水平荷重は自重に係数（水平震度 K_h ）を乗じたものとした。
- (d) 水平震度の分布は、主塔高さに関係なく一定とした。



7.5.2 斜張橋タワーの終局挙動と幾何学的非線形性の影響

先に示したモデルに対し本解析手法を適用した。本解析手法より得られた解析結果は、図-7.13 に示す。図中、●印は微小変形理論に基づく解析結果を示し、■印▲印は有限変形理論に基づく解析結果である。ここで、●印■印の結果はコンクリートのひずみ軟化を考慮しないもので、コンクリートは最大強度到達後 f'_c を維持すると仮定した解析結果である。また、図中実線で、石川らの $M-\phi$ 関係に基づく解析結果を併せて示す。

●印と■印を比べれば、幾何学的非線形性を考えることで、変形の進行にともなう 2 次効果により、荷重-変形関係は大きく異なることが分かる。すなわち、最大水平震度の値はかなり小さくなり、最大荷重後も構造物の耐力が徐々に減少する性状を示した。最大水平震度としては、幾何学的非線形性を考えることで約 25 % 低下している。また、同荷重レベルにおいても幾何学的非線形性を考えた場合は、構造物には大きな変形が生じ、 $K_h=0.3$ の時で幾何学的非線形性を考慮しない場合に比べて約 30 % の変位増加がみられる。このように、幾何学的非線形性を考えることで、斜張橋タワーの変形挙動は大きく変わるため、この影響は正しく考慮される必要があることが明らかになった。

また、■印と▲印を比べれば、コンクリートの応力-ひずみ関係により終局状態で、構造物は影響を受けるが、今回考えた範囲ではそれほど大きいものではなかった。

7.6 結論

本章では、不静定な鉄筋コンクリート構造物を対象とし、解析的にその終局挙動を調べ以下の結論を得た。

1. 第 6 章で示した解析手法をフレーム構造に適用し、実験値と解析値を比較することで、フレーム構造に対する本解析手法の妥当性が確認された。
2. ラーメンのような不静定部材の靱性を考える場合、橋脚のような単一部材より得られた成果をそのままラーメン構造物に取り込むことは困難であることを示し、構造物全体の剛性マトリクスから得られる固有値によりその靱性を定義することを提案した。つまり、一層 R C ラーメン構造物の終局変位を解析的に評価する場合、構造物の破壊と密接な関係を持つ bifurcation point で定義することが合理的であることが分かった。
3. 一層 R C ラーメン構造物の靱性率に及ぼす諸要因の影響を解析的に調べることができ、特に柱、梁などの長さの影響を解析的に示した。

4. 既存 P C 斜張橋に対し有限変形理論に基づく解析を行った結果、幾何学的非線形性の影響は非常に大きく、その影響を正確に考慮する必要があることを示した。

8 章 鉄筋の座屈がポストピーク挙動に及ぼす影響

8.1 概説

地震により崩壊した鉄筋コンクリート柱や、載荷実験で破壊させた鉄筋コンクリート部材を観察すると、軸方向鉄筋が座屈しており、主筋の座屈がコンクリート構造のポストピーク挙動に及ぼす影響は大きいと推測される。しかし現状では、実際に、主筋の座屈により耐荷力を失ったのか、あるいはコンクリートの荷重支持能力が低下し、変形の急増により主筋が座屈したのかは、必ずしも明らかではない。

主鉄筋の座屈に関しては、鈴木・中塚 [58]、小柳・六郷ら [31] が実験的に研究対象としたが、これらの研究では、座屈メカニズムの評価ではなく構造物全体的な破壊メカニズムのみの評価に限られている。これはコンクリート構造物内の主筋の座屈現象には、主筋のみならず、横補強筋およびコンクリートの性質、あるいは部材の形状や寸法、載荷状態などの各種要因が相互に影響し合うため、実験において主筋の座屈現象だけを単独に取り出すことができないためである。

一方各種要因の影響を検討するには、解析的アプローチが有効と思われるが、現在までに行われた解析的研究としては、M.Papia ら [34][35] および島ら [57] の研究がわずかに挙げられる程度である。M.Papia らの研究は、主筋と横補強筋だけに着目してモデル化し、力の釣合条件および変形の適合条件より、主筋の座屈荷重を求めようとした点に特徴がある。配筋詳細と主筋座屈という観点の検討には適しているが、座屈が及ぼす構造物の変形特性に対する適用はできない。また島らは、座屈後の鉄筋の応力ひずみ曲線を仮定し、解析の上でその影響を表し、柱部材の実験と比較検討することで座屈後の主筋が部材性状に寄与する程度の評価を行っているが、仮定した鉄筋の応力-ひずみ曲線の妥当性に対して疑問が残る。

そのような現状を踏まえ、本章では、スターラップが組合わさった主鉄筋の座屈性状を有限変形理論に基づく解析より明確にし、座屈挙動を含む鉄筋の応力-ひずみ関係をモデル化することで、鉄筋の座屈がコンクリート構造に及ぼす影響について解析的に考察を行った。さらに、既往の実験結果との比較を行うとともに、鉄筋座屈後のコンクリート構造の挙動の解明を行った。

8.2 鉄筋の引張・圧縮挙動

解析に先立ち鉄筋に対する引張試験および圧縮試験を行った。実験は D13, D16, D19 の鉄筋それぞれ 3 本づつを対象に行った。端部の条件は両端固定とし荷重を制御して行った。試験の

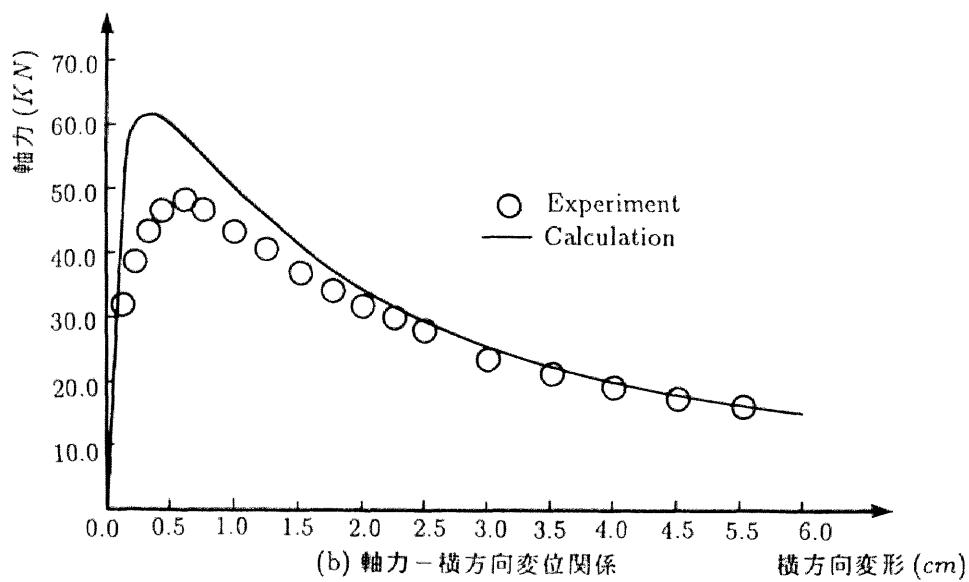
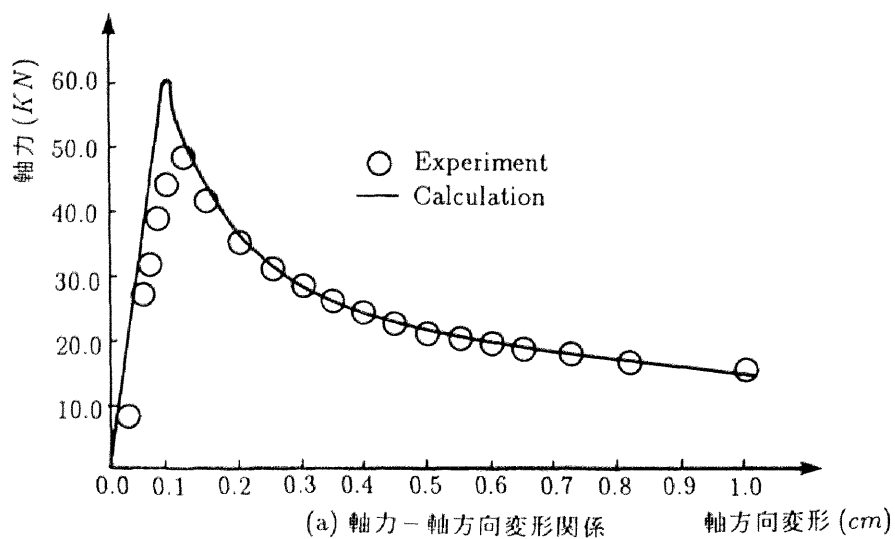


図- 8.1 座屈する鉄筋の実験値と解析値の比較

結果は、表－8.1 に示す。圧縮荷重を受ける場合、鉄筋に座屈が生じるために、最大荷重は降伏強度に比べかなり小さくなる。

次に、圧縮試験の D19NO.1 試験体を対象とした鉄筋一本分に対する解析を行った。解析は第 6 章で示した鉄筋コンクリート柱に対する解析手法を鉄筋一本に対し適用したものである。解析条件は表－8.2 に示す。この時水平方向に鉄筋が変位を起こすようにするため、微小な水平力(100N)を鉄筋まん中に常に作用させた。また、異形鉄筋の断面は円形とし、その直径は公称直径より決定した。解析結果は図－8.1 に示す。図－8.1(a) は軸方向変位－軸力関係を、図－8.1(b) は横方向変位－軸力関係を示す。図中○印で実験値を、実線で解析値を示す。解析値は実験値を終局状態に至るまでよく追従しており、本解析により圧縮力を受け座屈挙動を示す鉄筋の挙動を精度よく再現できることが分かる。実験値と解析値で最大荷重が若干異なっているが、これは支持条件が両端固定といえども、それぞれ微妙に異なるために座屈荷重が変わってしまったことが原因と考えられる。表－8.1 をみれば、ほぼ同じ長さの供試体に対して、座屈荷重の実験値がかなりばらついていることが分かる。

表－8.1(a) 圧縮試験

鉄筋 No.	細長比	降伏荷重 (KN)
D19 No.1	154.3	48.5
No.2	149.5	62.0
No.3	149.5	54.8
D16 No.1	176.8	25.0
No.2	177.8	24.5
No.3	178.0	30.6
D13 No.1	218.2	14.0
No.2	220.0	14.5
No.3	221.2	14.6

表－8.1(b) 引張試験

鉄筋 No.	降伏応力 (MPa)
D19 No.1	372.7
No.2	376.3
No.3	376.9
D16 No.1	342.3
No.2	338.3
No.3	349.3
D13 No.1	349.6
No.2	345.9
No.3	347.4

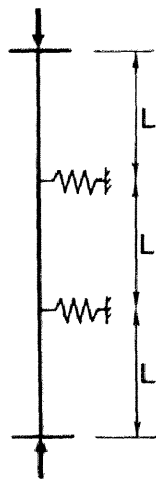
表－ 8.2 解析条件

D(cm)	L(cm)	$f_y(MPa)$	ε_y
1.91	73.3	373.0	0.002

8.3 スターラップが組合わさった鉄筋の挙動

実際の R C 構造物ではコンクリートおよび鉄筋を拘束するためスターラップが用いられる。そこで、スターラップが鉄筋の座屈後の挙動に及ぼす影響について調べる。

解析モデルを図－ 8.2 に示す。図に示すようにスターラップはばね要素にモデル化した。鉄筋頭部の軸方向変位を制御して解析を行った結果、図－ 8.3 のような鉄筋がスターラップ位置を節として波打つような変形挙動を示した。しかし実際の構造物においては、コンクリートが存在するため、鉄筋はスターラップ側に変形をすることはできず、図－ 8.3 の解析結果は非現実的である。したがって本研究では、鉄筋のコンクリート内部への変形をなくすため、コンクリートが鉄筋に及ぼす反力をモデル化し鉄筋に与えることで、上記の境界条件を満足させた。



図－ 8.2 スターラップのある鉄筋の解析モデル (L=10cm)



図－ 8.3 鉄筋の変形挙動

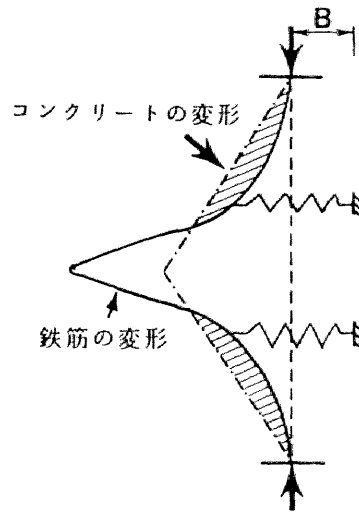


図-8.4 鉄筋およびコンクリートの変形

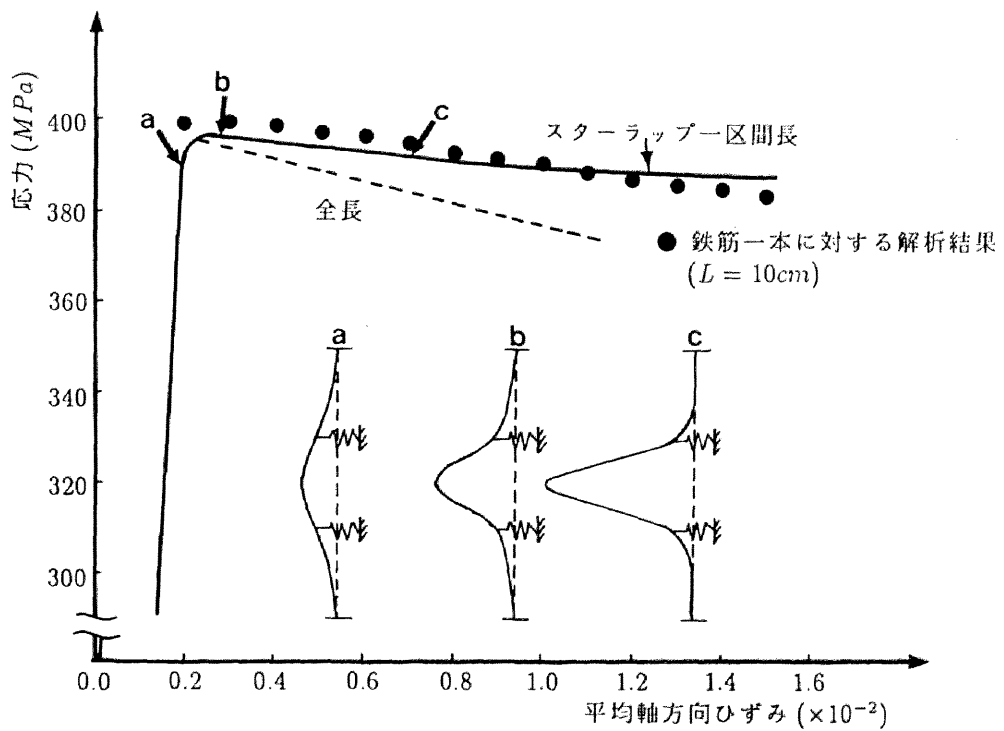


図-8.5 スターラップのある鉄筋の応力-平均軸方向ひずみ関係

コンクリートが鉄筋に及ぼす反力のモデル化は以下のように行った。鉄筋とコンクリートの挙動を図-8.4に示すように別々に考慮する。鉄筋は解析により得られた変形 δ_s を、コンクリートはポアソン効果($\nu=0.2$)を考慮した変形挙動 δ_c をすると仮定した。そして2つの独立な変形を合わせ、図の斜線部分だけ、鉄筋の変形をコンクリートが拘束していると考え、斜線部分の変位差に応じた水平力を鉄筋に作用させた。

$$Q = \frac{\delta_s - \delta_c}{B} E_c \quad (8.1)$$

ここで、 B はコンクリートの断面幅(=10cm)、 E_c はコンクリートの初期剛性(=3.0×10⁴MPa)である。

この方法により、鉄筋が内部へ変形しない境界条件を満足させることが可能となった。ただし、本解析はあくまで鉄筋単体の挙動を調べるために行ったものであり、コンクリートと鉄筋の相互作用を考慮したものではない。したがって反力は、あくまでも鉄筋が内部に変形しない境界条件を満足させるために作用させたものであり、反力によりスターラップが降伏し鉄筋の変形挙動が大きく変わるような性状は考慮していない。

図-8.5に、スターラップの影響を考慮にいれた解析を行い得られた応力-平均軸方向ひずみ関係を示す。図中、実線がスターラップ区間(中央のL区間)での平均軸方向ひずみと応力の関係を、破線が鉄筋全長(3L)に対する平均軸方向ひずみと応力との関係を示している。

解析を進めると、鉄筋の挙動は最初鉄筋全体が水平方向に膨らむ挙動を示し、軸方向ひずみは各部でほぼ等しい値であった。しかしその後、スターラップに挟まれた中央の部分は大きく外に変形し、その部分の軸方向ひずみが急増するとともに、両側の鉄筋が除荷する挙動を示した。図-8.5のa, b, c各点での解析より得られた鉄筋の変形状態を図中に示す。最大荷重後、スターラップに囲まれた区間の変位だけが急増していることが分かる。この結果は、鉄筋一本だけの挙動を考える場合、鉄筋の座屈はあるスターラップ間に局所的に生じることを示し、スターラップ2区間、3区間にわたって生じないことを示唆している。しかし、実験では鉄筋の座屈は、スターラップ2区間、3区間にわたって起きている。このことから、鉄筋の座屈長はスターラップよりもむしろ、コンクリートの破壊領域にかなり依存することが推測される。また逆に、コンクリートの破壊領域は鉄筋の座屈により決定されるのではなく、あくまでも拘束領域などを考慮した、構造物の材料的・幾何学的条件から決まるものと推測できる。

8.4 座屈挙動を含む鉄筋の応力-ひずみ関係

鉄筋単体を考えた場合、スターラップ区間に座屈挙動が集中することが分かった。そこでスターラップを考慮しない両端固定の鉄筋一本の解析より得られた平均軸ひずみ-軸応力関係

を図-8.5の●印で示し、スターラップがある場合の解析結果と比較を行った。図によれば、スターラップを考慮しない場合の平均軸ひずみ-応力関係は、スターラップ区間での平均軸ひずみ-応力関係とはほぼ一致していることが分かり、座屈区間の平均軸ひずみ-応力関係は、両端固定条件の鉄筋単体の解析で十分模擬できる。そこでこれ以降の解析は、スターラップをモデル化せずに鉄筋単体で行うことで、鉄筋の座屈後の挙動を調べた。

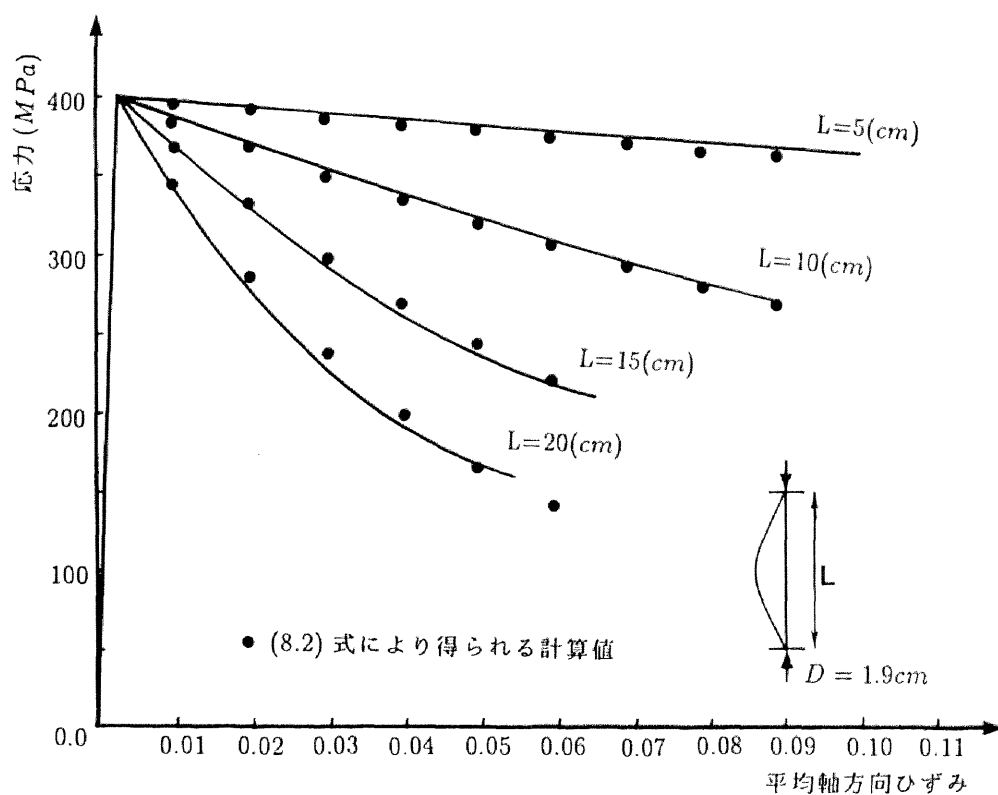


図-8.6 座屈後の鉄筋の応力-平均軸方向ひずみ関係

表-8.3 解析条件

D(cm)	f_y (MPa)	ϵ_y
1.9	400.0	0.002

図-8.6 に他の条件を一定とし、鉄筋の長さだけを変えたときの平均軸ひずみ-応力関係を示す。鉄筋の長さは、5cm、10cm、15cm、20cm の4通りであり、細長比はそれぞれ 10.5、21.0、31.6、42.1 である。解析条件は表-8.3 に示す。解析は鉄筋の応力-ひずみ関係を完全弾塑性と仮定し、降伏後の応力増加を無視して行った。図によれば、解析で考慮した範囲の鉄筋長さでは、鉄筋の最大圧縮応力は全ての場合で Euler の座屈荷重よりも小さいため、いずれも鉄筋の降伏応力とほぼ一致している。最大応力で降だが、鉄筋の平均応力は、座屈による鉄筋の横方向変位増加にともない低下する。しかしながら応力は急激に低下するわけではなく、座屈後もかなりの負担力を有している。また応力の低下は鉄筋長が長くなればなるほど急激になることが示されている。

最小2乗法を用いて図-8.6 の結果を補間することで、鉄筋が圧縮力を受けて座屈する場合の応力-ひずみ関係を次式で定式化した。

$$\sigma = f_y \exp\{0.17(L/D)^2(\epsilon - \epsilon_b)\} \quad (8.2)$$

この式が、座屈後の鉄筋の座屈区間での平均応力-平均軸方向ひずみ関係式である。ここで、 L は両端固定条件での鉄筋長さ、 D は鉄筋径、 ϵ_b は座屈開始時の平均軸方向ひずみである。今回の解析では、 ϵ_b はすべて鉄筋の降伏ひずみ (ϵ_y) と一致した。上式を求めるにあたり、上記の解析以外に鉄筋径を変数とした解析および降伏強度を変数とした解析を行ったが、その結果、座屈後の挙動は細長比が同じならほぼ同じであること、降伏強度が変われば挙動は単に降伏強度に比例して現れることを確かめている。(8.2) 式より得られる値を示せば、図-8.6 の●印のようである。(8.2) 式は、細長比 42.1 の場合までの解析値を補間した物であるので、その適用範囲も細長比 40 程度までと考えられる。

単純圧縮を受ける鉄筋の座屈挙動をモデル化したので、次に繰り返し荷重を受ける場合を考える。図-8.7 に細長比 42.1、降伏強度 400(MPa) の鉄筋に対する解析結果を示す。解析結果は、引張降伏後圧縮載荷したもの(図-8.7 の曲線(1))、座屈後に引張載荷しさらに圧縮載荷したもの(図-8.7 の曲線(2)(3))の3通りを示した。解析によれば、引張降伏後圧縮載荷した場合(曲線(1))では、鉄筋の座屈挙動は単に塑性ひずみと等しい量だけ引張ひずみ側に平行移動するだけであった。次に、座屈後の繰り返し挙動(曲線(2)(3))だが、座屈後引張載荷される場合、鉄筋は初期剛性で除荷されそして徐々に剛性が小さくなり単調載荷時の応力-ひずみ曲線に近づいていく挙動を示す。さらにそこから圧縮応力を作用させると、応力は初期剛性で変化し、最終的には、最初の座屈曲線に一致する性状を示した。

このように複雑な挙動を繰り返し荷重下では鉄筋が示すが、解析に容易に取り込めるように、この挙動を図-8.8に示すように簡素化してモデル化した。すなわち、圧縮載荷後引張載荷を行うときは応力は初期剛性と等しい傾きで移動し、引張降伏時の直線に一致する（a点→b点）。また引張降伏後、圧縮載荷を受ける場合は、ひずみが過去に経験した最大ひずみを越えない場合は、初期の圧縮側座屈曲線へ初期剛性で向かいその後座屈曲線上を移動する（c点→d点→a点）。過去に経験した最大ひずみを越えてから圧縮載荷を受ける場合、鉄筋は降伏強度まで初期剛性で応力増加し、その後新たな座屈曲線を移動すると仮定した（e点→f点→g点）。

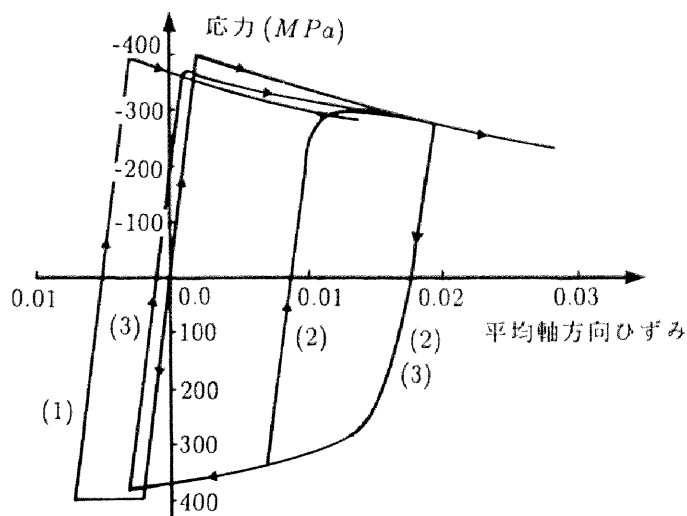


図-8.7 繰り返し荷重下での鉄筋の挙動

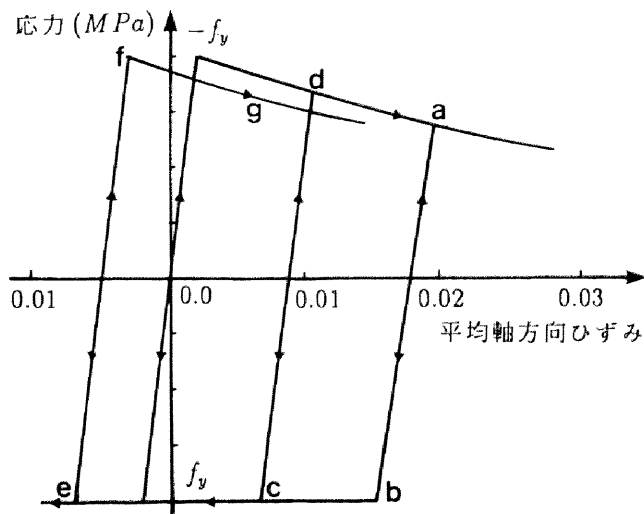
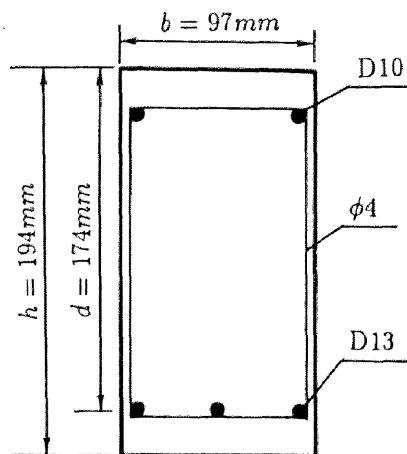


図-8.8 繰り返し荷重下での鉄筋の座屈モデル

8.5 鉄筋の座屈を生じたコンクリート構造物の挙動

8.5.1 座屈が生じた鉄筋コンクリート断面の $M-\phi$ 関係



図－8.9 断面形状

表－8.3(a) 解析条件（コンクリート）

	$f'_c (MPa)$	ϵ_{c0}	ϵ_u
05N1	40.0	0.002	0.05
10N1	35.0	0.002	0.025

表－8.3(b) 解析条件（鉄筋）

	ϵ_y	$f_y (MPa)$	D(mm)
圧縮鉄筋	0.0018	420.0	10
引張鉄筋	0.002	360.0	13

既往の実験結果と本座屈モデルを用いた鉄筋コンクリート部材の挙動とを比較する。比較する実験は、畑中ら[17]がRCはりの塑性挙動を調べるために行ったものである。試験体は曲げ破壊がせん断破壊に先行するように設計されたものである。実験は一方向繰返し載荷で行われ、最終的には圧縮側鉄筋が座屈することで破壊に至っている。実験供試体の断面形状を図－8.9に示す。図－8.9の断面に対し、スターラップ間隔5cmの供試体に対する結果を図－8.10に、スターラップ間隔10cmの供試体に対する結果を図－8.11に示す。図中●印は実験値であり、最大モーメント断面から1h区間の断面のモーメント指数（ M/bd^2 ）－曲率指数（ $d \cdot \phi$ ）曲線の平均値を示したものである。また図－8.10、図－8.11中に示す実線は先に提案した座屈モデルを用いた解析結果を示し、破線が座屈を考慮しない場合の解析結果である。これらの解

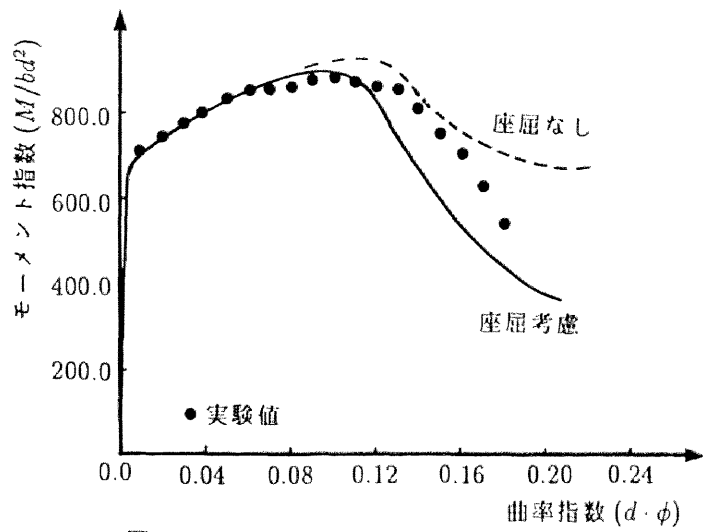


図- 8.10 モーメント-曲率関係 (05N1 供試体)

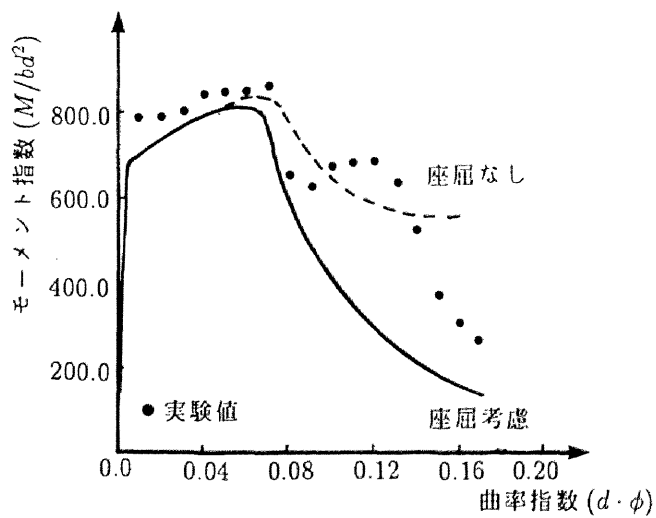


図- 8.11 モーメント-曲率関係 (10N1 供試体)

析条件は表-8.3に示す。

図によれば、圧縮側鉄筋の座屈を考慮することにより、RCはり構造の終局状態における耐荷力の減少の傾向をうまく表していることが分かる。また鉄筋の座屈長さは実験結果を参考にし、10N1供試体で10cm、05N1供試体で6cmとしている。

図-8.12(a)に10N1試験体の解析より得られた圧縮鉄筋の挙動を鉄筋応力-曲率指数曲線で示し、図-8.12(b)に圧縮側最外縁のコンクリートひずみ-曲率指数曲線を示す。図中a点は引張鉄筋降伏時、b点は圧縮鉄筋降伏時、c点は図-8.12(b)中で圧縮側最外縁のコンクリートひずみが急激に増加する点である。また図-8.12(b)の●点は実験より得られた値である。座屈を考慮した場合、b点を越え圧縮鉄筋降伏後、鉄筋の負担力は徐々に減少するが、その程度は余り著しくない。また $M/bd^2 - d \cdot \phi$ 関係にもその影響は顕著に現れず、断面のモーメント耐荷力も増加している。これはまだ圧縮側コンクリートがかなり負担力を持つためである。しかしc点を過ぎ、圧縮側コンクリートが劣化した領域では、圧縮側コンクリートの負担力が徐々に低下していくため、図-8.12(b)に示すように圧縮側のひずみが急激に増加ようになる。この時鉄筋は既に座屈しているため、コンクリートの応力低下分を負担することができず、逆に圧縮ひずみの急増に伴い鉄筋自身の応力が急激に低下する性状を示す。断面耐荷力の急激な低下は、このように圧縮側のコンクリートおよび鉄筋の座屈により荷重支持能力が急激に減少するために生じることが分かる。

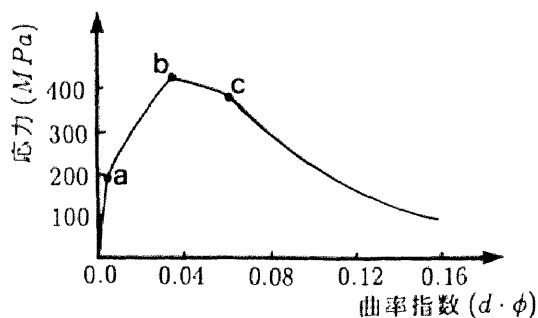


図-8.12(a) 鉄筋応力-曲率関係

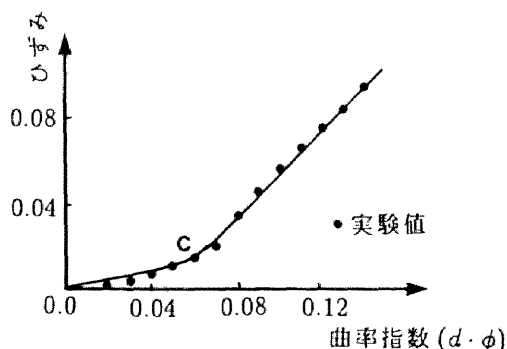


図-8.12(b) ひずみ-曲率関係

本解析において鉄筋の座屈発生点は、鉄筋単体の解析結果より圧縮鉄筋降伏と同時に生じると仮定している。一方、実際の構造物には、かぶりコンクリートの存在により鉄筋の横方向変形は強く拘束されているため、降伏後も鉄筋は自由な変形をすることができず、必ずしも鉄筋降伏時が座屈発生時と一致しないと考えられる。しかしながら、かぶりコンクリートの荷重支持能力が大きい間は、座屈による鉄筋の応力低下はわずかであり、上記の仮定が解析値に及ぼす影響はそれほど大きくない。実質的に座屈の影響が生じるのは図－8.12の圧縮側ひずみが急激に生じるc点と考えることができる。

また本解析は、コンクリートの応力－ひずみ関係および鉄筋の応力－ひずみ関係は独立に与えたものであり、鉄筋の座屈によりコンクリートのかぶりの剝落やコンクリートの応力－ひずみ関係の変化は一切考えていない。それにもかかわらず、解析値は実験値をよく評価できるのである。このことより、本解析結果のみに限れば、鉄筋の座屈はあくまでもかぶりコンクリートの軟化などによりコンクリートの荷重支持能力が低下した後に生じるものであるという結論が導かれる。

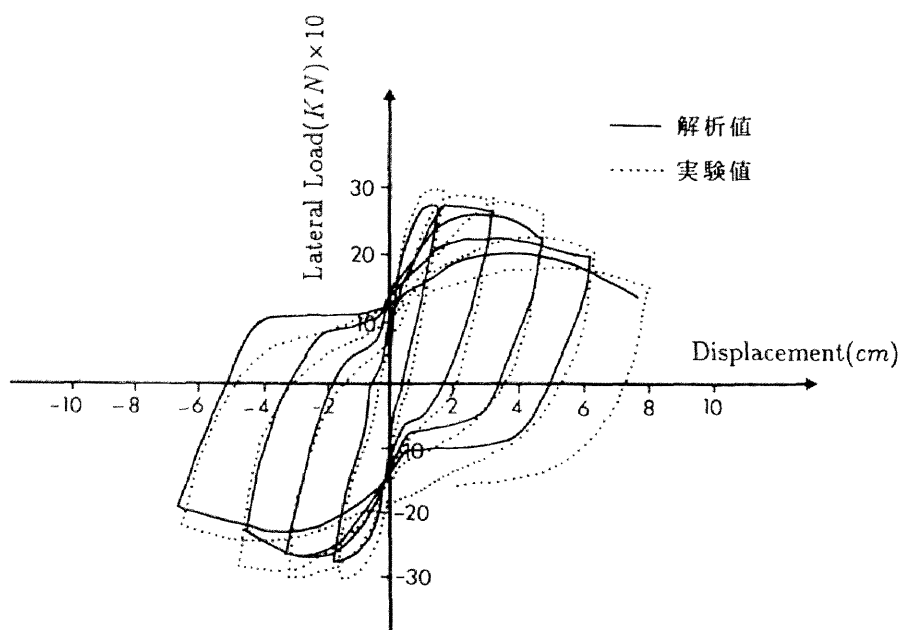
8.5.2 繰り返し荷重を受けるRC柱の座屈時の挙動

次に繰り返し荷重を受けるRC柱を対象とした解析を行った。解析に用いたモデルは、村上ら[42]が曲げ降伏するRC柱を対象として行った正負交番載荷実験のC22供試体と同様なものとした。実験は、軸力($\sigma_0=3MPa$)を加力した後、 $\pm 2\delta_y$ ($1\delta_y=8mm$)、 $\pm 4\delta_y$ 、 $\pm 6\delta_y$ 、 $\pm 8\delta_y$ 、 $\pm 10\delta_y$ の漸増加力を行ったものである。

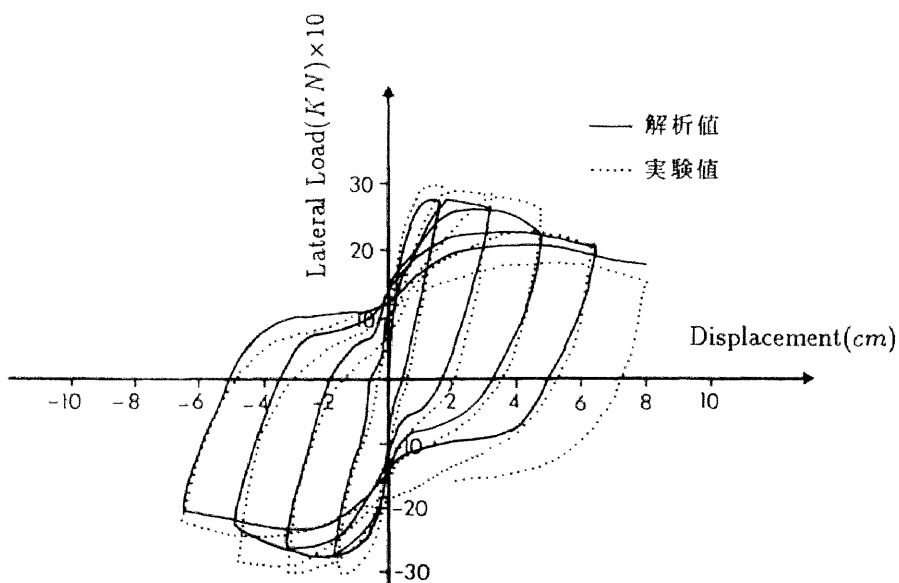
図－8.13に実験結果および解析結果の水平荷重－水平変位関係を示す。図中実線が解析値を、点線が実験値を示している。図－8.13(a)が鉄筋の座屈を考慮した解析結果と実験値の比較を、図－8.13(b)が鉄筋の座屈を考慮しない解析結果と実験値との比較を示している。鉄筋の座屈長さは実験結果より20(cm)と仮定した。

座屈を考慮した場合と考慮しなかった場合での両者の差はそれほど大きく現れることはなかった。しかし、 $10\delta_y$ 載荷時の曲線において鉄筋の座屈の影響が現れるようになった。本解析では、鉄筋の座屈による圧縮側鉄筋の耐力力の減少は、 $4\delta_y \rightarrow 6\delta_y$ 載荷時に既に生じているが、被りコンクリートにある程度の耐力能力がある間は、座屈の影響は殆ど現れないことが分かる。

実験においては、 $2\delta_y$ で圧壊が始まり、 $-2\delta_y$ では全域に曲げひび割れおよび曲げせん断ひびわれが生じ、 $\pm 6\delta_y$ で曲げひび割れ幅の増大および圧壊と付着ひびわれの進行、さらに $8\delta_y$ では圧縮鉄筋の座屈にともない被りコンクリートの落下がみられ、 $10\delta_y$ ではその影響がさらに激し



(a) 鉄筋の座屈を考慮した解析結果と実験値の比較



(b) 鉄筋の座屈を考慮しない解析結果と実験値の比較

図- 8.13 繰り返し荷重を受けるRC柱の荷重-変位関係

くなったと報告されている。本解析においてもほぼ同様な傾向がみられた。また $8\delta_y$ から $10\delta_y$ にいたる座屈が急激に発達する状況は、図-13(a)を見れば分かるように、本座屈モデルを用いることで精度よく再現されていることが分かる。

次に、第6章で示したRC柱の大変形実験での座屈後の挙動と本解析との比較を行った。図-8.14に実験値および解析値の荷重-変位関係を示す。図中、実線が解析値を、破線が実験値を示している。実験においては、終局状態は被りコンクリートが剝落すると同時に鉄筋が座屈することで生じた。しかしながら、鉄筋座屈までは被りコンクリートの圧壊や付着ひびわれなどの現象は確認されなかった。そこで解析においては、荷重-変位曲線の最大ループにおいて初めて、圧縮側鉄筋の座屈が生じると仮定し、それ以前では鉄筋の座屈を考慮しなかった。解析は鉄筋の座屈長さを実験結果からスターラップ区間(4cm, 細長比53.3)とした。

解析結果を見ると、圧縮側鉄筋降伏時で座屈発生を定義することにより、実験値の座屈発生時をほぼ妥当に評価できていることが分かる。また、座屈後の構造物が破壊にいたる性状もよく再現していることが分かる。

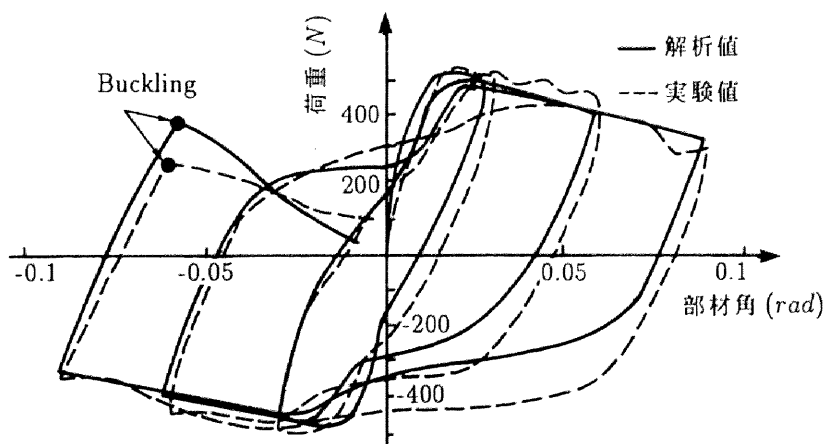


図-8.14 繰り返し荷重を受けるRC柱の荷重-変位関係

8.6 結論

本章では、鉄筋の座屈が鉄筋コンクリート構造の終局挙動に及ぼす影響を解析的に調べ以下の結論を得た。

1. 鉄筋一本の座屈時の挙動を有限変形解析を用いて明らかにし、座屈を考慮した鉄筋の応力－ひずみ関係を提案した。
2. 提案した座屈を考慮した鉄筋の応力－ひずみ関係を用いれば、座屈後の構造物の挙動も正確に把握できることを示した。
3. 解析結果の考察より、鉄筋の座屈区間は、スターラップの影響よりもむしろ構造物の破壊領域に密接に関係することが分かった。また、鉄筋の座屈は被りコンクリートの劣化によるコンクリートの荷重支持能力が低下した後に生じることが示された。

鉄筋の座屈は鉄筋コンクリート構造物の終局挙動に大きな影響を及ぼす要因であり、鉄筋が座屈すれば、構造物の耐荷力は急激に低下し、その時点で構造物は破壊したと考えられる。

9 章 鉄筋コンクリート部材の塑性変形能

9.1 概説

鉄筋コンクリート構造物の耐震設計にあたっては、その構造物が保有する塑性変形性能が正しく評価されなくてはならない。そのために、繰り返し荷重を受ける鉄筋コンクリート部材の最終的な変形能力に関する研究が過去に数多く行われ、塑性変形性能を定量的に推定する推定式の提案も、既に何人かの研究者によってなされている。例えば、建築構造の分野では、荒川ら[6]等が建築構造物を対象とした塑性変形能を評価する方法の提案を行っている。一方、土木構造物の分野でも、石橋ら[24]、太田ら[48]、檜貝ら[20]、町田ら[36]により、土木構造物を対象とした、塑性変形能定量化の試みがなされている。しかし、これらの提案式はいずれも、比較的数の限られた実験結果に基づくものであり、その適用範囲が狭いのが実状である。

また、土木・建築の各々の分野で行われた実験では、供試体の諸元ならび荷重の種類がかなり異なる場合が多い。例えば、軸力に関しては、建築構造物に用いられる柱は、比較的大きな軸力を受け、靱性に及ぼすその影響が大きい。土木構造物に用いられる橋脚の場合、作用する軸力は比較的小さく靱性に対して主要因とはならない。このような荷重の大きさの違いばかりでなく、部材の諸元が相当に異なっているために、両分野で得られた実験の成果を相互に比較することが難しいのが現状である。したがって、統一的な評価式が実験的にはなかなか得られないということになっている。このことが、鉄筋コンクリート構造物の塑性変形能評価の方法が確立されていない大きな原因の一つとなっている。

この理由から、鉄筋コンクリート部材の塑性変形能に対し解析的研究に基づいて普遍的な結論を得、靱性の評価をする必要があることが、以前から指摘されていた。解析的研究に基づけば、土木・建築両分野を有機的に結び付け、統一的な靱性評価法を確立する上で大きな助けになると考えられているのである。

本章では、以上のような観点から、第6章で示した鉄筋コンクリート柱に対する解析手法を用いて、解析的に鉄筋コンクリート部材の塑性変形能を評価することで、一般的に適用可能な塑性変形能算定式を得ようとして行ったものである。塑性変形能算定式は、塑性変形に影響を及ぼすと考えられる各種要因を変数とした解析結果に基づき、各種要因の塑性変形能への影響を考察し、その影響を数式化することで作成している。

9.2 鉄筋コンクリート柱の靱性率に対応する解析曲線上の特異点

鉄筋コンクリート部材が正負繰返し荷重を受ける場合、主鉄筋降伏後にX字状のせん断ひび割れが生じ急速に耐力を失うことが認められている。このような破壊形態は、一方向繰返し載荷あるいは単調増加載荷の場合にはみられない現象で、正負繰返し荷重下での大きな特徴の一つである。鉄筋コンクリート部材の靱性は、この繰返し荷重下で急激に荷重が低下する変位をもとにして評価されるのが一般的である。

町田らは実験結果に基づいて、靱性率を、最大水平荷重の80(%)点の変位(δ_{80max})と鉄筋降伏時の水平変位(δ_y)の比で定義することを提案している[36]。

$$\mu = \frac{\delta_{80max}}{\delta_y} \quad (9.1)$$

この水平荷重の80(%)とした理由は、水平荷重が急速に減少する点がほぼ最大荷重の80(%)程度になっていたためと思われる。

実験結果に基づいて、(9.1)式のような靱性率は提案されているが、解析的研究に基づく(9.1)式と同様な定義は見あたらない。

そこで、第6章で示した埼玉大学の実験結果と本解析結果の比較を行った結果、繰返し中に水平荷重が急激に低下する荷重-変位曲線の変曲点の変位が、曲げ変形のみを考慮した本解析結果の最大モーメント点によく一致することが判明した。最大モーメントは、水平荷重によるモーメントとP-Δ効果によるモーメントの和である。解析により得られる最大モーメント点は図-9.1, 図-9.2, 図-9.3の●点で、実験より得られる水平荷重が急激に減少する荷重変位曲線の変曲点は▲点で示してある。図でみると●印は水平線上にあって明瞭に定め難いとい一見感じられるが、数値解析上では明らかに最大点は判別できる。軸力, 帯鉄筋比, せん断支間比のいずれを変化させた場合にも上記の最大モーメント点と実験上の変曲点はよく対応しているのが認められる。

したがって、鉄筋コンクリート部材が繰返し荷重を受ける場合の靱性率を解析的に評価する場合には、解析で断面のモーメントが最大になる変位(δ_{Mmax})と軸方向鉄筋が降伏したときの水平変位(δ_y)の比で定義することが合理的であると思われる。

$$\mu = \frac{\delta_{Mmax}}{\delta_y} \quad (9.2)$$

先にも述べたように、鉄筋コンクリート部材の繰返し荷重下でのせん断破壊は、鉄筋降伏後ある程度まで変形が進んだ状態で繰返し加力を行うことで、耐力が各サイクルで低下する性状を示し、一方向繰返し載荷あるいは単調増加載加では見られないものである。しかしな

がら、この耐力低下が著しくなる変位レベルまでは、繰り返し载荷による耐力低下はわずかで
あり、単調増加载荷の曲線とほぼ一致することが報告されている。

(9.2) 式の $\delta_{M_{max}}$ は、解析より得られた単調増加载荷時の曲線から、繰り返し载荷時に急激に
荷重低下する変位の限界を表しているものと考えられる。すなわち、単調载荷時の曲線と繰り
返し载荷時の曲線との差が急激に大きくなる水平変位に対応している。

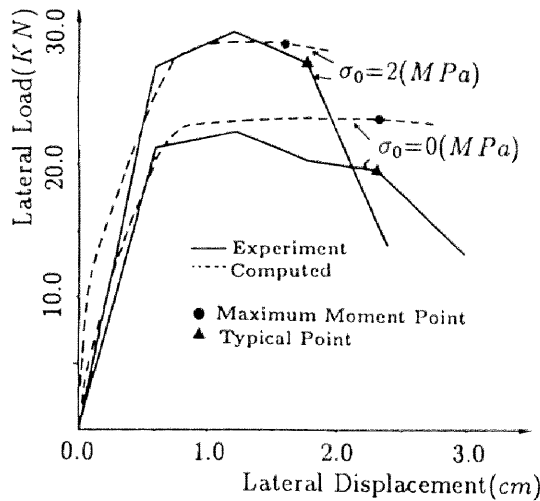


図 - 9.1 軸力が荷重-変位関係に及ぼす影響

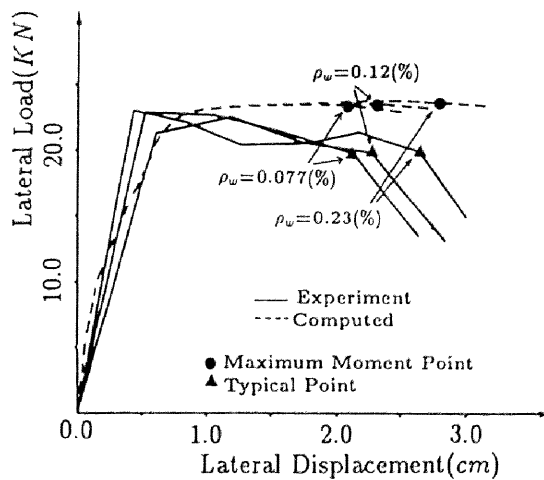


図 - 9.2 帯鉄筋比が荷重-変位関係に及ぼす影響

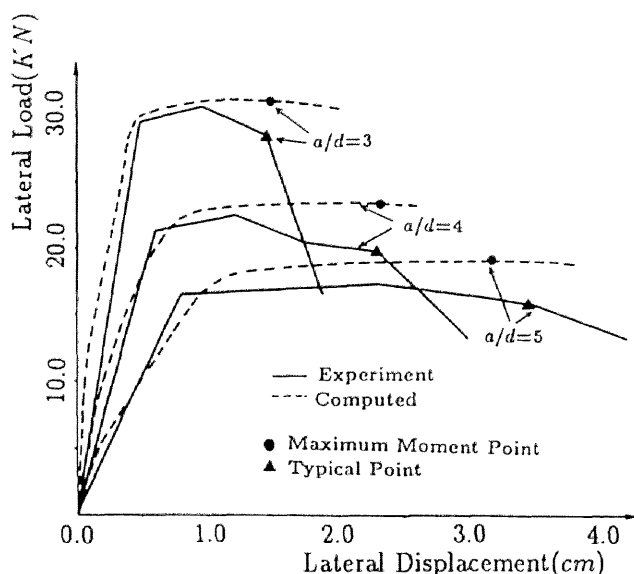


図- 9.3 セン断スパン比が荷重-変位関係に及ぼす影響

この最大曲げモーメントを生じる水平変位が、繰返し載荷時の耐力低下点とよく一致する理由の一つとしては、最大モーメントを越えた範囲では、圧縮側コンクリートが応力低下領域にあるためと考えられる。すなわち、この領域で繰返しを行えば、コンクリートの抵抗応力は繰返しごとに減少し、部材の耐力も低下する。またかぶりコンクリートの剥落などが生じ、繰返し中にせん断変形が急増するためと思われる。

鉄筋コンクリート部材の靱性率を(9.2)式で定義することで、各種要因が靱性率に及ぼす影響を解析的に評価することができるようになる。

9.3 靱性率に及ぼす諸要因の影響

提案式作成に先立ち行った解析の変動要因としては、軸圧縮応力度(σ_0)、引張鉄筋比(P_t)、帯鉄筋比(ρ_w)、せん断スパン比(A/D)とした。これらの要因は、一般に鉄筋コンクリート部材の靱性に及ぼす影響が大きいといわれているものである。解析モデルは一つだけで、図- 9.4に示す断面寸法(20×15cm)を有し、有効高さ $d=16$ cmのRC柱である。ただ一種類のみである理由として、推定式はいずれも無次元量で表示されること、また推定式がパラメーターが大きく変動する各種の実験値と最終的に比較されるということが挙げられる。

解析条件としては、コンクリートに対しては、 $f'_c=30(MPa)$ 、 $f_t=3(MPa)$ 、 $\varepsilon_{co}=2000(\mu)$ と

し、一方鉄筋に対しては、 $f_y=400(MPa)$ 、 $\epsilon_y=2500(\mu)$ とし、降伏後は応力は初期勾配の 1/100 の傾きで上昇するとした。

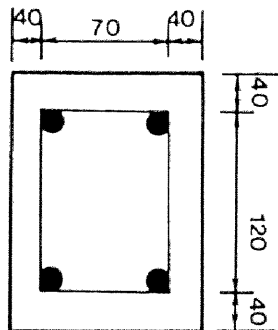


図- 9.4 解析モデルの断面寸法 (単位 : mm)

解析は軸圧縮応力度を $-2.0 \sim 8.0(MPa)$ の6通り、引張鉄筋比を $0.3 \sim 1.5\%$ の5通り、帯鉄筋比を $0.0 \sim 1.0\%$ の6通り、せん断スパン比を $1 \sim 6$ までの6通りに変動させて行った。これらのパラメーターの範囲は、過去に行われた土木建築両分野のRC柱実験の範囲を含むように決定した。

また、この時一般的に適用可能な結論を得るために、土木・建築両分野で提案されている靱性評価式の検討を行った結果、軸力の影響を最も正確に評価すべきという結論に至った。すなわち、土木分野の橋脚は、その作用する軸力が比較的小さく、実験もほとんどが小さな軸力下で行われたため、現在までに橋脚を対象として提案されている靱性評価式はいずれも軸力の影響を過小評価していると思われる。一方、建築分野の柱は、その作用する軸力は大きく、実験も比較的大きな軸力下で行われるため、提案されている靱性評価式では軸力が主要因となっており、大きな軸力の時はよいが、軸力が小さくその影響が主要因とならないときは、軸力以外の要因の影響を過小評価することになる。

そこで本解析を行うにあたり軸力の影響を最もよく反映させるため、引張鉄筋比 (P_t)、帯鉄筋比 (ρ_w)、せん断スパン比 (A/D) が靱性に及ぼす影響はすべて軸力との関係で調べることを試みた。つまり、帯鉄筋比-軸力-靱性率関係というように、各要因の影響と軸力の影響の2変数により、各要因が靱性率へ及ぼす影響を定量的に調べたのである。以下各要因ごとに靱性率に及ぼす影響を論ずるとともに、これを定式化した結果を述べることにする。

式の形式としては、帯鉄筋比 (ρ_w) と軸力比 (σ_0/f'_c) を変数とした靱性率 (μ_w) をまず求め、

その後 P_t , A/D の影響を μ_w の各係数 ($\beta_{P_t} = \mu/\mu_{P_t=1.0}$, $\beta_{AD} = \mu/\mu_{AD=4}$) とし同定している。したがって以下の記述は、この順序に従ったものとなっている。

9.3.1 帯鉄筋比と軸圧縮応力度の影響

引張鉄筋比を 1.0(%), せん断スパン比を 4 と一定に保ち、帯鉄筋比 (ρ_w), 軸圧縮応力度 (σ_0) を変化させた解析を行った。帯鉄筋比の影響は、コンクリートの応力-ひずみ曲線の応力降下直線の勾配を変化させることで考慮される。

解析結果を図-9.5 に示す。他の条件が同じで ρ_w が増せば、靱性率は増加する。このことは実験結果とも定性的に一致する。また軸力との関係を見れば、軸力が大きくなれば靱性率は相対的に小さくなり、帯筋量を増やしても靱性率は著しく増加しないことが分かる。

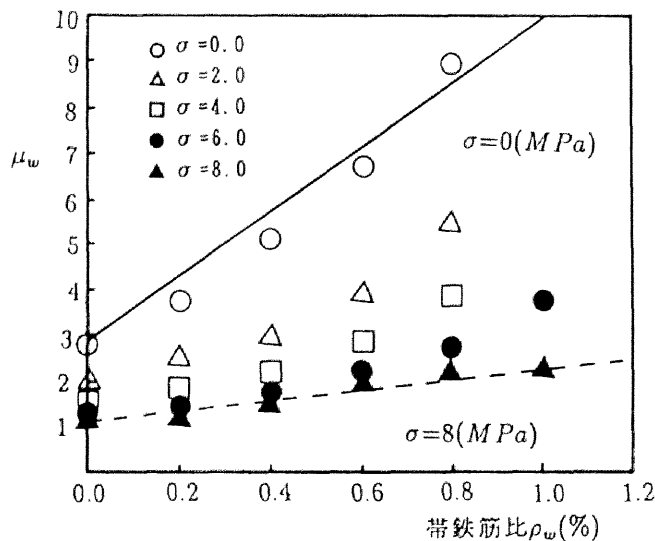


図-9.5 帯鉄筋比と靱性率の関係

各軸力段階で、帯筋比と靱性率の関係を線形とすれば、次式が得られる。ただし、(9.3) 式を無次元量にするため、軸力の影響は軸力比 (σ_0/f'_c) を用いて表している。

$$\mu_w = a + b\rho_w \quad (9.3)$$

$$a = 2.9e^{-10/3(\sigma_0/f'_c)}$$

$$b = 7.0e^{-7.0(\sigma_0/f'_c)}$$

図-9.5に(9.3)式より得られる $\sigma_0 = 0(MPa)$ と $\sigma_0 = 8(MPa)$ の時の直線を示す。ここで(9.3)式は $\rho_w = 0.0 \sim 1.0(\%)$ の範囲の解析値を直線回帰したものであるため、軸圧縮応力度の値によって異なるが、 ρ_w が $1.0(\%)$ 以下になると必ずしも同程度の精度が確保されないおそれがある。

9.3.2 引張鉄筋比と軸圧縮応力度の影響

帯鉄筋比(ρ_w)を 0.2% 、せん断スパン比(A/D)を 4 と一定に保ち、引張鉄筋比(P_t)、軸圧縮応力度(σ_0)を変化させて解析を行った。解析より得られた各軸力段階での引張鉄筋比と靱性率との関係を図-9.6に示す。町田らが行った実験によれば、靱性率は引張鉄筋比が小さいほど増加し、増加の程度は $P_t \leq 1.0\%$ の場合に著しくなることが認められている。

本解析でも、引張鉄筋比が小さいほど靱性率が増加するという実験と同様な傾向を示し、軸力が小さな範囲では、町田ら[36]と同様に $P_t \leq 1.0\%$ の場合に著しく靱性率が増加する性状を示した。しかしながら、大きな軸力が作用した場合には、 $P_t \leq 1.0\%$ の範囲で靱性率が急増することはなく、 P_t が靱性率に及ぼす影響も顕著でなくなる。

$P_t = 1.0\%$ の時の靱性率に対する任意の P_t の時の靱性率の比 β_{P_t} を図-9.7に示す。図-9.7から、各軸力段階での引張鉄筋比の影響が次式のように表される。

$$\beta_{P_t} = a(P_t)^b \quad (9.4)$$

$$a = 1.03$$

$$b = -0.85e^{-9.0(\sigma_0/f'_c)}$$

ここに、 β_{P_t} は靱性率に及ぼす P_t の影響を表す係数である。

(9.4)式は、解析より得られた結果を最小二乗法で回帰して得られたものであるが、関数の性質上、引張鉄筋比の小さい領域あるいは大きい領域で解析値を過大あるいは過小に評価してしまう。そのためこの誤差を少なくするために、 β_{P_t} の範囲を設定する。基本的に β_{P_t} の範囲は軸圧縮応力度によって異なるべきだが、簡単のため次式に示すように、軸圧縮応力度に依存しない形で与えた。

$$\beta_{P_t} \geq 1.0 \quad (9.5)$$

$$\beta_{P_t} \leq 2.8 \quad (9.6)$$

(9.5) 式は $\beta_{Pt} > 1.0(\%)$ 以下で靱性率が大きく変化しないことを考慮し、そして(9.6) 式は解析で得られた β_{Pt} の最大値により決定した。

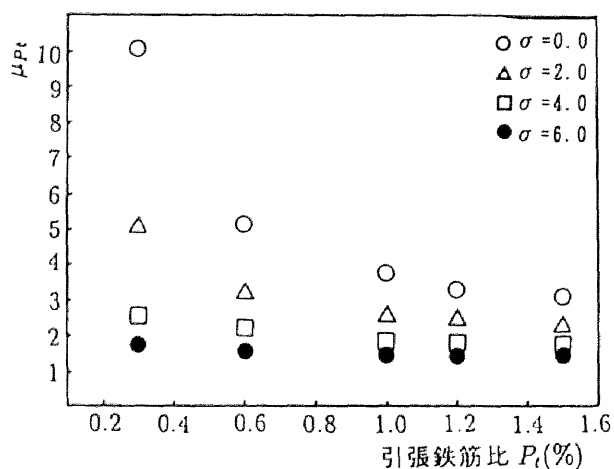


図-9.6 引張鉄筋比と靱性率の関係

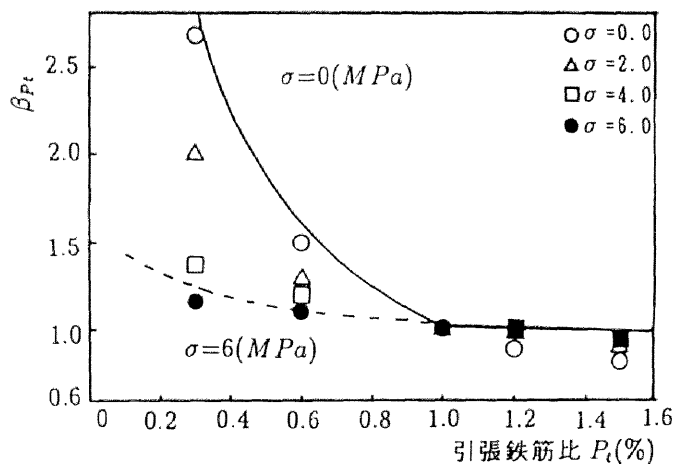


図-9.7 引張鉄筋比と靱性率比の関係

9.3.3 セン断スパン比と軸力圧縮応力度の影響

引張鉄筋比 (P_t) が 1.0 %, 帯鉄筋比 (ρ_w) が 0.2 % の一定の条件の基で、せん断スパン比を 1.0 ~ 6.0 の 6 通りに、またそれぞれの場合に軸圧縮応力度を 0 ~ 8(MPa) の 5 通りに変化させて、せん断スパン比と軸力とが靱性率にどの様に影響するのかを調べた。

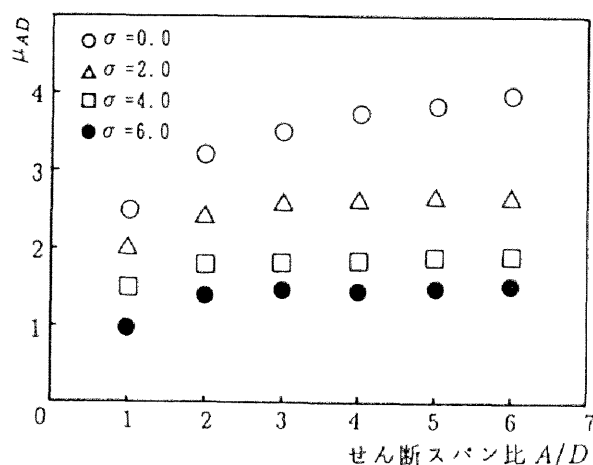


図-9.8 せん断スパン比と靱性率の関係

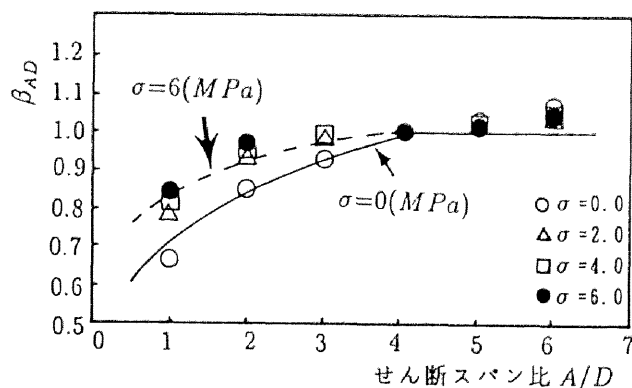


図-9.9 せん断スパン比と靱性率比の関係

解析結果を図-9.8に示す。解析結果はどの軸力段階でも、 A/D が小さいほど靱性率が小さくなる傾向を示した。また、 $A/D < 2$ の範囲で靱性率が急激に低下する性状を示した。一方、 A/D が4以上の場合では、 A/D が靱性率に及ぼす影響はそれほど見られなかった。 A/D が4.0の時の靱性率を基準とした靱性率比を図-9.9に示す。この図によれば、軸力が小さいほど、 A/D が小さくなるにつれてその靱性率の低下が著しくなり、軸力が大きいときには、 A/D は靱性率に大きな影響を及ぼさないのが分かる。図-9.9の結果より A/D と σ_0 が靱性に及ぼす影響を定式化したのが次式である。

$$\beta_{AD} = a(A/D)^b \quad (9.7)$$

$$a = 5/7 e^{8/7(\sigma_0/f'_c)}$$

$$b = 7/30 e^{-4.2(\sigma_0/f'_c)}$$

この式は解析結果を用いて最小二乗法により得た式であるが、 A/D が大きい範囲では、解析値を過大評価してしまう。そこで A/D が4以上では靱性率に大きな変化がないことを考慮して、 β_{AD} の最大値を次のように仮定した。

$$\beta_{AD} \leq 1.0 \quad (9.8)$$

9.3.4 コンクリート強度の影響

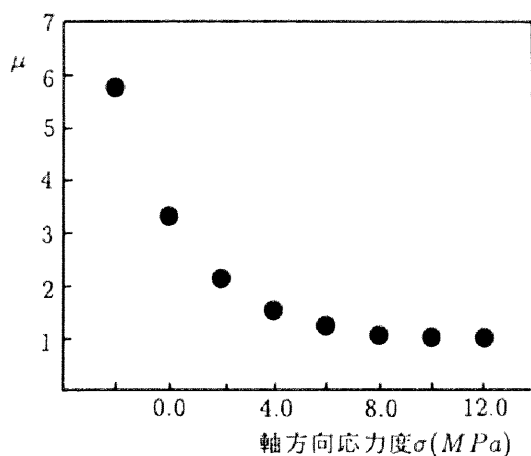
本解析ではコンクリート強度は一定として行ったため、解析によりその影響を考察はしていない。しかしながら、先に示した(9.3)～(9.8)式で、各種パラメーターの影響を軸力比(σ_0/f'_c)で評価しているため、間接的に各式中でコンクリート強度の影響は考慮されることになる。すなわち、軸力比で考えれば、 f'_c が小さくなれば見かけ上の軸圧縮応力度を大きく評価することと同義になるため、靱性は相対的に小さく評価されることになる。また f'_c が大きくなれば靱性は大きく評価される。

9.3.5 軸力の影響

軸力の影響については既に $P_t, \rho_w, A/D$ との関係で述べてきた。既に述べたところをまとめると次のようである。すなわち、軸力が大きくなればなるほど、軸力が靱性率に及ぼす影響が大きくなり、その他の要因の影響は顕著に現れなくなる。

建築構造物を対象として行われた実験では、軸力の影響が最も大きな要因であり、その他の要因は軸力に比較して小さいと報告されているが、これらの結果はそれを裏付けるものである。またこのことは、土木構造物のように比較的小さな軸力が作用するものは、軸力以外の要因を正確に評価する必要があることを示すものである。

$A/D=4$, $P_t=1.0(\%)$, $\rho_w=0.1(\%)$ の条件下で σ_0 を $-2 \sim 12(MPa)$ まで変化させたときの解析より得られた靱性率を図-9.10示す。軸力が大きくなれば靱性率は当然小さくなるが、軸圧縮応力が、 $10(MPa)$ 以上すなわち軸力比(σ_0/f'_c) $1/3$ 以上で引張鉄筋より先に圧縮側の鉄筋が降伏する性状を示した。また部材に引張力が作用する場合は、変形能力は急激に大きくなる結果となった。



図～ 9.10 軸方向応力度と靱性率の関係

本提案式では、圧縮鉄筋が引張鉄筋より先に降伏する場合、および部材に引張力が作用する場合などは考慮にいてないが、これらに関しては更に詳細な検討が必要と思われる。

9.4 鉄筋コンクリート部材の靱性評価式の提案

9.4.1 靱性評価式の提案

前節で鉄筋コンクリート部材の靱性に影響を及ぼすと思われる各種要因について、著者らが既に報告している解析手法により得られた結果から、その影響を定量的に評価した。すなわち、各種要因が靱性率に及ぼす影響を示す次の靱性評価式を提案する。

$$\mu = \mu_w \cdot \beta_{P_t} \cdot \beta_{AD} \quad (9.9)$$

$$\mu_w = a + b\rho_w$$

$$a = 2.9e^{-10/3(\sigma_0/f'_c)}$$

$$b = 7.0e^{-7.0(\sigma_0/f'_c)}$$

$$\beta_{P_t} = a(P_t)^b$$

$$a = 1.03$$

$$\begin{aligned}
b &= -0.85e^{-9.0(\sigma_0/f'_c)} \\
\beta_{P_t} &\geq 1.0 \\
\beta_{P_t} &\leq 2.8 \\
\beta_{AD} &= a(A/D)^b \\
a &= 5/7e^{8/7(\sigma_0/f'_c)} \\
b &= 7/30e^{-4.2(\sigma_0/f'_c)} \\
\beta_{AD} &\leq 1.0
\end{aligned}$$

前節で述べたように、本研究では軸力が靱性に及ぼす影響を最も正確に評価すべきという考え方を基本としているため、この式の各項はすべて軸力比 (σ_0/f'_c) との関数になっている。

この式の形式は、まず $A/D=4.0, P_t=1.0$ % の R C 部材に対する靱性率を $\rho_w, \sigma_0/f'_c$ の関数として μ_w で与えた後に、 β_{P_t}, β_{AD} で μ_w が引張鉄筋比 (Pt), セン断スパン比 (A/D) によりどの程度影響されるのかを表している。式の形式上、各種要因の影響を (9.9) 式の各項別に表しているのので、各種要因が靱性率に及ぼす影響を容易に理解することができる。

9.4.2 靱性評価式の評価

提案した靱性評価式の精度の評価を行う。評価にあたって用いた実験データは、町田ら [36] によるもの、尾坂ら [49] によるもの、石橋ら [24] によるもの、太田ら [48] によるもの、秋元ら [1] によるもの、檜貝ら [18][19][20] によるもの、荒川ら [2][3][4][5][6] によるものである。ただし、各実験で得られた靱性率の値は各研究者の定義に従ったものを使用した。各試験体の特性を表 9.1 に示す。実験データは総数 170 である。そのうち、町田ら、檜貝ら、尾坂ら、石橋ら、太田ら、秋元らのデータは橋脚を対象として行ったものである。また、荒川らのデータは、建物の柱を対象としたものであり、橋脚を対象としたものに比べ、 ρ_w, σ_0 が大きく、 A/D が小さい傾向にある。ここで本解析で用いた終局変位の定義 ($\delta_{M_{max}}$) は、多数回繰返しを行った場合に有効であると考え、荒川らの実験のうち、 $1 \cdot \delta_y$ 変位増分に対し繰返し回数 1 回のものは使用していない。このように、今回比較に用いた実験データは、その総数が多く、各要因とも広範囲に及んでいることを指摘しておきたい。

図 9.11 提案式による靱性率の推定値と実験値との比を各種要因別に示した。また図 9.12, 図 9.13 には町田らの靱性評価式および荒川らの靱性評価式を用いて同様な試みを行ったものである。なお図中○印は、R C 橋脚を対象として行われた実験結果に、△印は建物中柱を対象として行われた実験結果に対応している。

表－9.1 実験データの特徴

	町田ら	檜貝ら	石橋ら	尾坂ら	太田ら	秋元ら	荒川ら
$P_t(\%)$	0.59 ～ 1.06	0.40 ～ 1.90	0.12 ～ 1.66	0.32 ～ 1.26	0.82	0.82 ～ 0.86	0.34 ～ 0.82
$\rho_w(\%)$	0.0 ～ 0.23	0.0 ～ 0.99	0.0 ～ 0.58	0.18 ～ 0.36	0.04 ～ 0.16	0.16 ～ 0.32	0.15 ～ 1.5
a/d	3.0 ～ 6.0	3.29 ～ 6.25	1.5 ～ 4.0	4.0	4.0	4.0	1.7 ～ 2.8
$\sigma_0(MPa)$	0.0 ～ 2.0	0.0	0.0 ～ 4.0	0.0 ～ 4.0	1.0	0.0 ～ 1.0	2.5 ～ 7.0
$f'_c(MPa)$	23.0 ～ 41.3	15.6 ～ 55.2	24.0 ～ 42.0	20.2 ～ 33.8	29.2	30.5 ～ 31.5	20.4 ～ 34.5
供試体数	15	37	38	12	5	13	50

町田らの式は、せん断スパン比、引張鉄筋比が大きく、軸圧縮応力度、帯鉄筋比が小さい範囲では比較的精度よく靱性率を評価している。しかしそれ以外の範囲では、その推定精度はかなり悪くなっている。また荒川らの式は、町田らの式とは逆にせん断スパン比、引張鉄筋比が小さく軸圧縮応力度、帯鉄筋比が大きい範囲では比較的精度良く靱性率を推定している。このことは、町田ら、荒川らの式を含む提案されている靱性評価式のいずれもが、比較的限られた数の実験結果に基づくものであり、その適用範囲も実験で行った変動範囲を越えないためである。町田らの提案式は、橋脚を対象として行った実験結果に基づいて得られたものであり、橋脚を対象とした実験結果に対しては比較的精度良く靱性率を推定するが、建物の柱については、適用することができない。また、荒川らの式は建物の柱を対象として行った実験結果に基づく式であり、柱を対象とした実験結果に対しては比較的精度良く靱性率を推定するが、橋脚を対象としたものでは推定精度はかなり悪い。

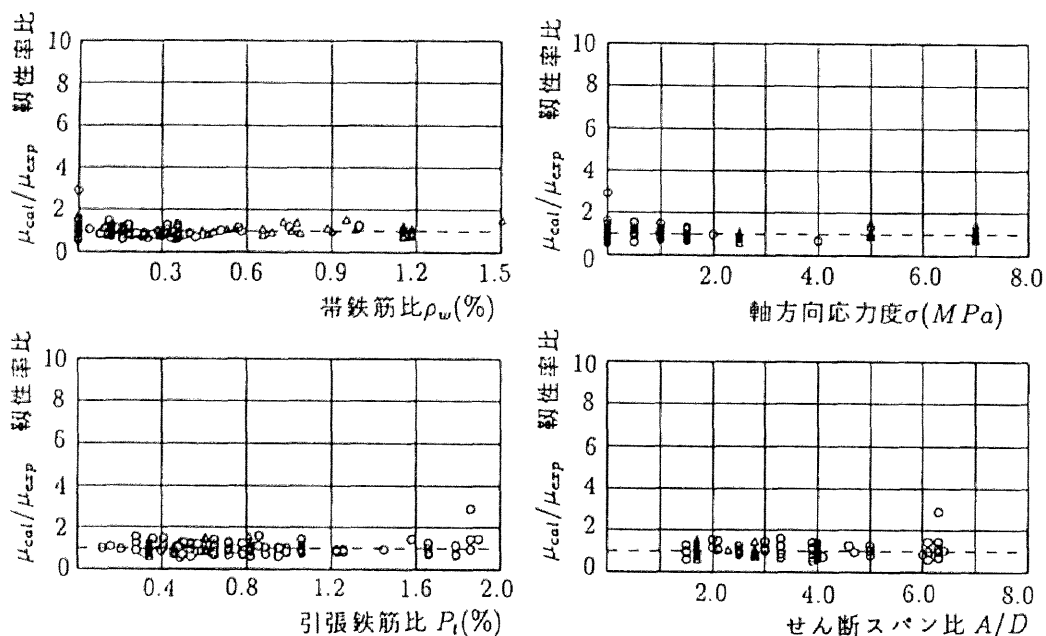


図- 9.11 靱性率の推定値と実験値の比と各種要因の関係 (著者)
(○:土木データ, △:建築データ)

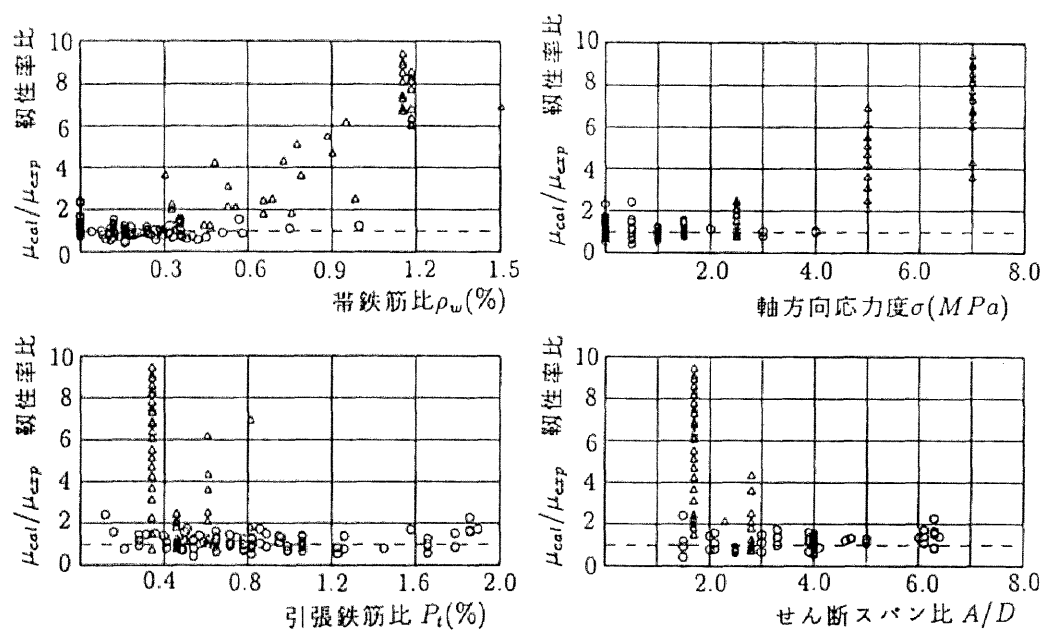


図- 9.12 靱性率の推定値と実験値の比と各種要因の関係 (町田ら)
(○:土木データ, △:建築データ)

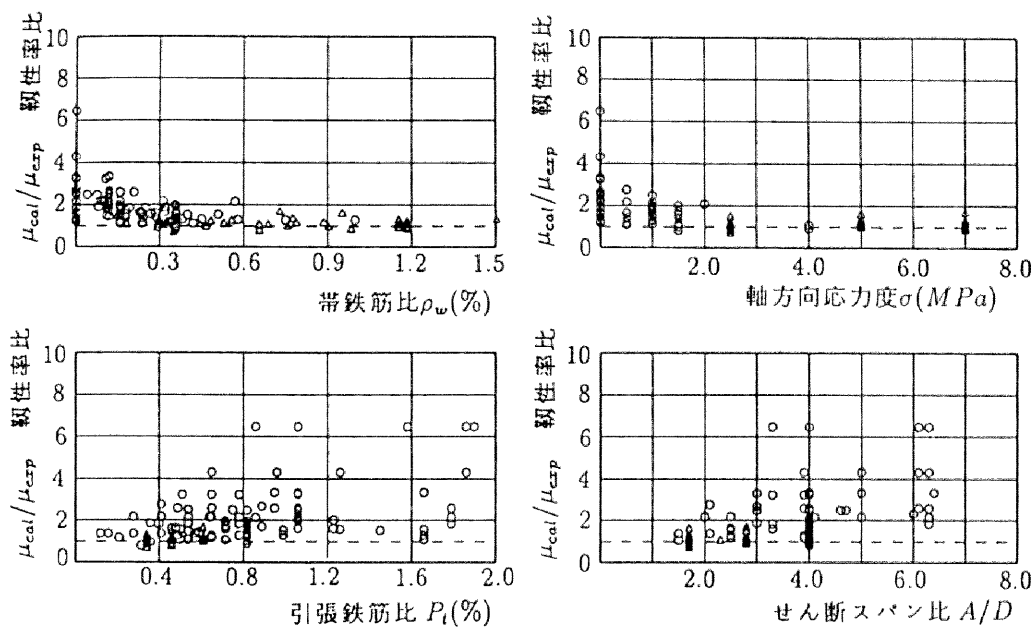


図-9.13 靱性率の推定値と実験値の比と各種要因の関係(荒川ら)
(○:土木データ, △:建築データ)

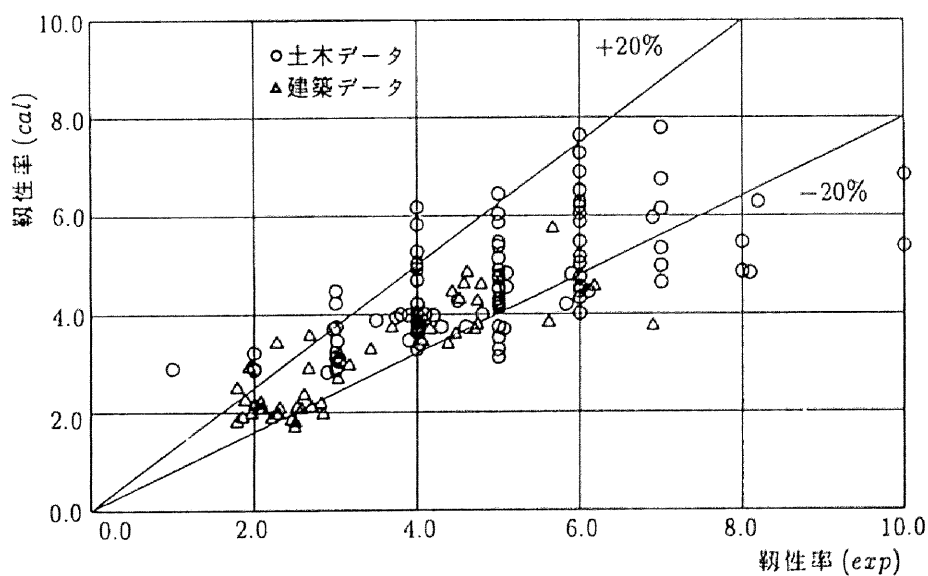
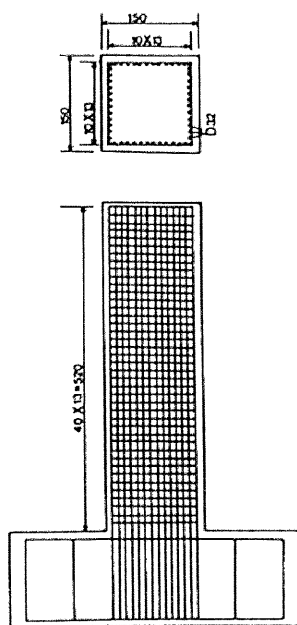


図-9.14 靱性率の推定値と実験の比較

一方、図－9.11 に示した本解析手法により靱性率を評価したものは、せん断スパン比，引張鉄筋比，軸力，帯鉄筋比のどの変動要因に対しても各種要因の影響を精度良く評価しているのが分かる。

次に、実験より得られた靱性率と提案式によって推定した靱性率とを比較したのが図－9.14 である。靱性率の推定値に対する実験値の比は平均 0.99，変動係数 26.7 %であった。また実験値と推定値の重相関係数は 0.80 である。本提案式が靱性率の大小にかかわらず、また土木・建築のどの諸元に対しても靱性率を精度良く推定できることが分かる。また、今回本提案式の妥当性を評価するために用いた実験データとはほぼ同様のデータから、 $A/D, \rho_w/P_t, P_t, \rho_w, d, \sigma_0$ を説明変数とした実験データによる重回帰分析が、コンクリート構造物の靱性評価委員会で行われ[30]、その時に得られた重相関係数は 0.66 であった。本提案式は、実験値とはまったく独立に解析的に得られた結果より評価したものであり、このことよりも本解析手法および提案式の妥当性が推察される。



図－9.15 解析モデル (単位：cm)

最終的に、実験を行うことは不可能と思われる実規模の大断面の橋脚の靱性率を解析的に求め、本提案式と比較してみる。図-9.15に解析モデルを示す。解析モデルは断面 $1.5 \times 1.5(\text{m})$ 、長さ $5.2(\text{m})$ のRC橋脚である。鉄筋は、主鉄筋としてD32が四方に配置され、帯鉄筋はD13が $12.5(\text{cm})$ 間隔で配置されているとした。このようなモデルは、一般に道路橋などに使われるRC橋脚とはほぼ同じ形状寸法、配筋を持つものである。コンクリートの圧縮強度は $30(\text{MPa})$ 、軸圧縮応力度は $1.0(\text{MPa})$ と仮定した。本解析手法により得られた靱性率(μ)は4.5であった。一方、提案した評価式より得られた靱性率は4.9($P_t=0.55(\%)$, $A/D=3.7$, $\rho_w=0.14(\%)$, $\sigma_0=1.0(\text{MPa})$, $f'_c=30.0(\text{MPa})$)となり、実構造物に対しても本提案式が靱性率を妥当に評価していることが分かる。

土木・建築の両分野にまたがる鉄筋コンクリート構造物の場合、各々の分野で行われる実験が同じ部位でも試験体の諸元がかなり異なるため、現在までに得られた実験結果を基にした靱性評価式では鉄筋コンクリート構造一般に適用することは不可能であった。しかし、本研究では、解析的研究に基づき各種要因の影響を調べ、さらに土木・建築両分野での構造物に対し最も大きな影響を与えると考えられる軸力を主要因とした靱性評価式を作成することで、土木・建築両分野を有機的に結び付け一般的適用可能な結論が得られたと考える。

9.5 結論

本章では、鉄筋コンクリート部材の塑性変形能力を解析的に評価することを試み、以下の結論を得た。

1. 第6章で示した解析手法を用い解析を行った結果、本解析中に生じる最大曲げモーメント点を繰り返し荷重を受けるRC部材の終局変位と定義することで解析による靱性率を定義した。
2. 帯鉄筋比、引張鉄筋比、せん断スパン比、軸方向応力度が靱性率に及ぼす影響を解析的に検討した結果以下のことが分かった。小さな軸力が作用する場合は、帯鉄筋が増加すれば、靱性率もそれに比例して増加すること、引張鉄筋比が小さくなれば靱性率は大きくなるがその増加の割合は引張鉄筋比 $1.0(\%)$ 以下で急激になること、せん断スパン比が小さくなれば靱性率は低下しせん断スパン比2以下で急激に低下する、しかしせん断スパン比が大きくなっても靱性率にはそれほど大きな影響を及ぼさないことなどを示した。また大きな軸力が作用する場合は、軸力が靱性率に及ぼす影響が卓越し、帯鉄筋比、引張鉄筋比、せん断スパン比などの要因の影響がほとんど現れないことも判明した。

3. 解析的に調べた結果に基づき、靱性評価式を各種要因の影響を組み合わせることで作成した。影響要因としては、軸方向応力度、帯鉄筋比、引張鉄筋比、せん断スパン比、コンクリート圧縮強度とした。また、軸方向応力度が靱性に及ぼす影響が最も大きいと考え、各要因はすべて軸方向応力度の影響を含む形式とした。
4. 提案した R C 部材の靱性評価式の精度の評価を、現在までに得られている土木・建築の実験データ 170 個を用いて行った。その結果、推定値に対する実験値の比の平均値は 0.99、推定値と実験値の重相関係数は 0.80 であって、本提案式が靱性率の大小にかかわらず、また土木・建築のどの諸元に対しても靱性率を精度よく推定できることが分かった。
5. 本解析手法により得られた靱性評価式は、土木・建築両分野の実験結果を統一的に評価しており R C 構造物の塑性変形能を解明する上でより有用な知見を与えるものとする。

10 章 結論

本論文は、コンクリート構造のポストピーク挙動を解明することを目的として、コンクリート構造特有の現象をモデル化し、ポストピーク領域で生じるコンクリート構造の不安定な挙動に対する解析的検討を行ったものである。その結果、従来は実験的手法による定式化がもっぱらであったコンクリート構造のポストピークあるいは破壊時の挙動を一貫した数値理論で再現することを可能にし、ポストピーク挙動の理論的解明に対し多くの知見を提供した。以下に各章で得られた結論を述べ、本研究の総括とする。

第1章では、ポストピーク挙動解明に重要な役割を示すと考えられる要因について概観するとともに、本研究の目的および本研究の内容について述べた。

第2章では、コンクリート構造を解析的に解明するために必要となる基礎方程式を示すとともに、構造物の安定性に対する理論的検討を行った。

まず、コンクリート構造の材料非線形性および幾何学的非線形性を表現するための基礎方程式として、有限変形問題に対する増分形式で記述された仮想仕事方程式を導びき、その離散化を行うことで、有限要素解析に用いられる有限変位理論に基づく剛性方程式の定式化を行った。また、ポストピーク領域は構造物が不安定になり安定性が失われる領域であるため、安定性の数学的表現を示し、離散化された系に対するその適用を行った。さらに安定性が失われる構造特異点である limit point および bifurcation point に対する理論的検討を行い、解析を実行する際の構造特異点の取扱およびその力学的意義を明確にした。

第3章では、解析を実行する際に必要となる、本論文で用いる材料の構成則および数値解析手法の提示を行った。

数値解析手法としては、ポストピーク挙動を含む連続した釣合経路を追跡する手法と、bifurcation point 後に生じる任意の釣合経路へ移行するための解析手法を示した。特に bifurcation point 後の任意の分岐経路解析手法として、固有値問題を解いて得られる固有ベクトルにより変形モードを推定し試行錯誤的に bifurcation path を求めていく方法を提案した。提案した方法は、コンクリートのような材料非線形性問題を取り扱うときには最も有効な方法と考えられる。

第4章では、コンクリート構造における bifurcation point の物理的意義および post bifurcation 挙動を材料的側面から簡単な数値例を用いて示した。

まずコンクリート一軸部材を考え、負の固有値および負の固有値に対応する固有モードと bifurcation point 後の挙動の関係を明らかにするとともに、imperfection の導入や localization 問題の bifurcation 問題に対する位置づけを行った。またコンクリートのようなひずみ軟化材料では、弾性安定の分類に従う limit point が、その材料特性に依存して複数の平行状態が存在す

るという意味で bifurcation point となる場合があることを示した。さらに、2 軸応力下にあるコンクリートに引張応力が作用した場合の post bifurcation 挙動を調べ、2 軸応力下の構造物は bifurcation point 後 uniform な変形挙動から非常に複雑な変形挙動に移行する可能性を示した。

第5章、第6章および第7章では、各種のコンクリート構造に対する本手法の適用を行い、構造不安定性が構造物の実際の挙動とどのような関係にあるのかを示した。

第5章では、鉄筋コンクリートはりを対象とし、解析手法の妥当性を検討するとともに、limit point および bifurcation point での構造物の挙動が実際の鉄筋コンクリートはりの挙動とどのような関係を持つのかを調べた。

その結果、bifurcation point が鉄筋コンクリートはり構造のせん断破壊に密接な関係があり、bifurcation point 後の bifurcation path を選択することで構造物が破壊に至る可能性を示した。解析は2つのケースについて適用を行ったが、スターラップのない鉄筋コンクリートはりを対象とした場合には、shear band が生じることで構造物が破壊にいたること、スターラップのあるはりの場合、荷重載荷点下部に局所的な変形の集中が生じる変形挙動を示すことで、破壊に至ることを示している。

第6章では、せん断変形を考慮できる鉄筋コンクリート柱部材に対する有限要素解析手法を開発し、鉄筋コンクリート柱の塑性変形挙動およびポストピーク挙動に対する解析的検討を行った。

既往の実験結果との比較より、本解析手法が部材角が $1/10$ の大变位に至るまで鉄筋コンクリート柱の履歴挙動や各種要因が鉄筋コンクリート柱の塑性変形挙動に及ぼす影響を精度よく評価できることを示した。さらに、圧縮場理論を曲げ、せん断、軸力を受ける鉄筋コンクリート断面に拡張することで、鉄筋コンクリート断面のせん断剛性劣化モデルを作成し、せん断変形が構造物に及ぼす影響を調べた。せん断変形の影響はスターラップが降伏すると非常に顕著になり、スターラップ降伏後は構造物の変形はせん断変形に支配される。本章で開発したせん断変形を考慮し得る有限要素解析手法は、せん断変形が構造物に及ぼす影響を容易に求めることができるものである。さらに鉄筋コンクリート柱の構造不安定性に対する考察を行い、鉄筋コンクリート柱の終局破壊点は、bifurcation point により定義できる可能性を示した。

第7章では、第6章で開発した鉄筋コンクリート柱に対する手法をラーメンのような不静定構造物に適用し、解析的にコンクリート構造のポストピーク挙動を含む構造物の非線形挙動を示した。

その結果、ラーメンのような不静定構造物の靱性を考える場合には、複数の部材の組合せや部材に生じる軸力変動の影響で、変形の進行に伴い各部材の靱性が大きく変化するため、橋脚

のような単一部材より得られた成果をそのままラーメン構造物に取り込むことはできないことが明らかになった。そこで実験結果との比較より、bifurcation point でその靱性を評価することを提案した。bifurcation point を用いれば、各部材ではなく構造系全体に対して靱性が定義される。さらに、既存 P C 斜張橋に本解析手法を適用した結果、幾何学的非線形性が斜張橋に及ぼす影響は非常に大きく、その影響を正確に考慮する必要があることを示した。

5 章 6 章および 7 章では、各種の構造物に対し構造不安定性が構造物の実際の挙動とどのような関係にあるかを調べたが、いずれの場合にも構造物の破壊は bifurcation point で定義すればよいこと、bifurcation point 後の bifurcation path により破壊時のコンクリート構造の挙動を再現できることが明らかになった。

第 8 章では、スターラップが組合わさった主鉄筋の座屈性状を有限変形理論に基づく解析より明確にし、座屈挙動を含む鉄筋の応力-ひずみ関係を提案した。さらに鉄筋の座屈がコンクリート構造物に及ぼす影響について解析的検討を行い、鉄筋の座屈区間はスターラップの影響よりもむしろ構造物の破壊領域に密接に関係すること、および鉄筋の座屈は被りコンクリートの劣化によるコンクリートの荷重支持能力が低下した後に生じることを明らかにした。また、提案した鉄筋の座屈モデルを用いれば、座屈後の構造物の挙動を精度よく評価できることを実験結果との比較より示した。

第 9 章では、第 6 章で開発した解析手法を用い、鉄筋コンクリート部材の靱性に及ぼすと考えられる要因に対するパラメーター解析を行い、繰り返し荷重を受ける鉄筋コンクリート部材の終局変位を最大曲げモーメント点で定義することで、帯鉄筋比、引張鉄筋比、せん断スパン比、軸方向応力度が靱性に及ぼす影響を解析的に検討した。そして、本解析結果より得られた各種要因の影響を組み合わせることで、鉄筋コンクリート部材に対する靱性評価式の提案を行った。さらに既往の実験結果と比較し、提案した靱性評価式が、靱性率の大小にかかわらず、また土木、建築のどの諸元に対しても有効で、既往の推定式より精度がよいことを明らかにした。

References

- [1] 秋元泰輔、結城正洋 ”高応力繰返し荷重を受ける橋脚の耐力に関する基礎的実験（その 3）”、第 33 回土木学会年次学術講演会講演概要集、pp.331-332、1978 年.
- [2] 荒川卓、藤田豊 ”繰返し荷重を受ける鉄筋コンクリート柱の変形性能に及ぼすせん断補強筋の影響”、第 2 回コンクリート工学年次講演会論文集、pp.457-460、1980 年.
- [3] 荒川卓、角田憲政、藤田豊、江頭恵一 ”鉄筋コンクリート柱の変形性能に及ぼす荷重履歴の影響”、日本建築学会学術講演梗概集、1980 年.
- [4] 荒川卓、荒井康幸、藤田豊、溝口光男 ”繰返し荷重を受ける鉄筋コンクリート柱の変形性能の評価”、第 3 回コンクリート工学年次講演会論文集、pp.449-452、1981 年.
- [5] 荒川卓、荒井康幸、藤田豊、江頭恵一 ”鉄筋コンクリート柱の耐力と靱性に及ぼす繰返し載荷速度の影響”、第 4 回コンクリート工学年次講演会論文集、pp.325-328、1982 年.
- [6] 荒川卓、荒井康幸、江頭恵一、大久保繁昌 ”鉄筋コンクリート柱の繰返し挙動と塑性変形能の評価”、第 5 回コンクリート工学年次講演会論文集、pp.309-312、1983 年.
- [7] Bazant Z.P ”Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete”, Jurnal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, EM2, pp.331-343, 1976.
- [8] Collins M.P ”Towards a Rational Theory for RC Members in Shear”, Proc. of ASCE, ST4, pp.649-666, April 1978.
- [9] Cook R.D ”Concepts and Applications of Finite Element Analysis”, 2nd ed. New York, Wiley, 1981.
- [10] Croll J.G.A and Walker A.C ”Elements of Structural Stability”, Mecmillam, 1972.
- [11] Darwin D. and Pecknold D.A ” Nonlinear Biaxial Law for Concrete”, J. Eng. Mech. Div, ASCE, Vol.103, pp.229-241, 1977.
- [12] 出口秀史、松本進 ”交番載荷を受ける鉄筋の引き抜け性状について”、第 7 回コンクリート工学年次講演会論文集、pp.489-492、1985.
- [13] 出口秀史、松本進、前村政博 ”正負交番荷重を受ける基礎定着鉄筋の圧縮載荷時におけるひずみ分布挙動について”、土木学会第 46 回年次学術講演会、pp.748-749、1991.
- [14] 細野透 ”孤張法による弾性座屈問題の解析（その 1）座屈点における増分解の影響”、日本建築学会論文報告集、第 242 号、pp.41-49、1976 年 4 月.
- [15] 細野透 ”孤張法による弾性座屈問題の解析（その 2）数値解析法としての孤張法”、日本建築学会論文報告集、第 243 号、pp.21-31、1976 年 5 月.
- [16] Hasegawa,A., Iwakuma,T. and Kuranishi,S., ”A Linearized Timoshenko Beam Theory in Finite Displacements”, Proc.JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.2, No.2, pp.75-80, October 1985.

- [17] 畑中重光、梁川幸盛、吉田徳雄 ”R C 梁の終局域における圧縮筋の座屈に関する一考察”、第 13 回コンクリート工学年次論文報告集、pp.275-280、1991 年.
- [18] 檜貝勇、S. Rizkalla、H. Ben-Omran、F. Saadat ”大変位の繰り返しによる鉄筋コンクリート部材のせん断破壊”、第 6 回コンクリート工学年次論文報告集、pp.505-508、1984 年.
- [19] 檜貝勇 ”大変位の繰り返しによりせん断破壊する R C 部材の変形能力”、第 8 回コンクリート工学年次論文報告集、pp.769-772、1986 年.
- [20] 檜貝勇、二羽淳一郎、岡村雄樹 ”曲げ降伏後にせん断破壊する R C 部材の破壊メカニズムに関する考察”、第 9 回コンクリート工学年次論文報告集、pp.329-334、1987 年.
- [21] Hill, R. ”A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids”, J.Mech. Phys. Solids, 6, pp.236-249, 1958.
- [22] Hill, R. ”Some Basic Principles in the Mechanics of Solids without a Natural time”, J.Mech. Phys. Solids, 7, pp.209-225, 1959.
- [23] 池田尚治、南雲広幸 ”R C および P C 構造物への有限要素法の合理的適用方法に関する研究”、土木学会論文集、第 414 号/V-12、1990.
- [24] 石橋忠良、吉野伸一、青木桂一 ”鉄筋コンクリート部材の靱性率”、構造物設計資料 No.79、1984 年 9 月.
- [25] 石川育、藤井学、平澤征夫、田中茂義、洞毛隆 ”P C 斜張橋タワーの保有靱性率の試算”、コンクリート構造物の靱性と配筋方法に関するシンポジウム論文集、pp.195-204、1990 年 5 月.
- [26] 川井忠彦 ”座屈問題解析”、培風館、1970.
- [27] Kent, D.C. and Park, R. ”Flexural Members with Confined Concrete”, Proc. of ASCE, Vol.97, No.ST7, pp.1969-1990, July 1971.
- [28] Koiter, W.T. ”On the Stability of Elastic Equilibrium”, NASDA TT, F10, 833, 1967.
- [29] Koiter, W.T. ”On the Thermodynamics Background of Elastic Stability Theory”, Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, SIAM, pp.423-433, 1969.
- [30] コンクリート構造物の靱性評価委員会、コンクリート構造物の靱性とその評価法に関するコロキウム委員会報告書、日本コンクリート工学協会、p.126、1988 年 3 月.
- [31] 小柳治、六郷恵哲、山本智志、近藤吉信 ”圧縮を受けるコンクリート中の鉄筋の座屈性状”、土木学会第 44 回年次学術講演会、pp.502-503、平成元年.
- [32] Leicester, R.H. ”Finite Deformation of Shallow Shells”, Proc. of ASCE, J. of EMD, Dec. 1968.

- [33] Menegetto M and Pinto P.E "Method of Analysis for Cyclically Loaded R.C. Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior of Elements under Combined Normal Force and Bending", IABSE, pp.15-22, 1973.
- [34] Papia M., Russo G. and Zingone G. "Instability of Longitudinal bars in RC columns", Jurnal of Structural Engineering, ASCE, Vol.114, No.2, pp.445-461, 1989.
- [35] Papia M., Russo G. "Compressive Concrete Strain at Buckling of Longitudinal Reinforcement", Jurnal of Structural Engineering, ASCE, Vol.115, No.2, pp.382-397, 1989.
- [36] 町田篤彦、睦好宏史、豊田和彦 "鉄筋コンクリート部材の塑性変形能定量化に関する研究"、土木学会論文集、第 378 号/V-6、pp.203-212、1987 年 2 月。
- [37] 町田篤彦、睦好宏史、豊田和彦 "R C 部材の終局変位定量化に関する実験的研究"、第 7 回コンクリート工学年次講演論文集、pp.629-632、1985。
- [38] 町田篤彦、睦好宏史、鶴田和久 "地震力を受ける鉄筋コンクリートラーメン構造物の弾塑性応答に関する研究"、土木学会論文集、第 378 号/V-6、pp.117-126、1987 年 2 月。
- [39] 松本公典 "モーメント-曲率関係の解析的研究による P C 橋梁の靱性設計への応用"、名古屋大学学位論文、1985。
- [40] 松本信之、渡邊忠明、斉藤俊彦、石橋忠良 "鉄筋コンクリートラーメン構造の靱性に関する実験的研究"、コンクリート構造物の靱性とその評価方法に関するコロキウム論文集、日本コンクリート工学協会、pp.131-142、1988 年 3 月。
- [41] Mendis P.A and Darwall P.C "Stability Analysis of Softening Frames", Proc. of ASCE, Vol.114, No.5, pp.1057-1072, May 1988.
- [42] 村上雅英、今井弘 "変位履歴の相違が曲げ降伏する R C 柱の破壊性状に与える影響"、コンクリート工学、Vol.24、pp.105-120、May 1986。
- [43] 宮武恒男、窪田敏行 "鉄筋コンクリート柱に関する研究 1 (降伏点の変形について)"、日本建築学会関東支部、第 33 回学術研究発表会論文集、1966。
- [44] 中村光、二羽淳一郎、田辺忠顕 "鉄筋コンクリート柱の終局変位に関する解析的研究"、土木学会論文集、第 420 号/V-13、pp.115-124、1990 年 8 月。
- [45] Nakamura.H, Niwa.J and Tanabe.T "Analytical Study on the Ultimate Deformation of RC Frame", Transaction of JCI, Vol.12, pp.283-290, 1990.
- [46] Nakamura.H, Niwa.J and Tanabe.T "Analytical Study to Predict the Ultimate Failure Point of RC Structures", Transaction of JCI, Vol.12, pp.291-298, 1990.
- [47] 中村光、二羽淳一郎、田辺忠顕 "R C はりの終局挙動に関する解析的研究"、コンクリート工学年次論文報告集、第 13 号第 2 巻、pp.281-286、1991。
- [48] 太田実 "繰返し荷重下における鉄筋コンクリート橋脚の挙動に関する実験的研究"、土木学会論文集、第 292 号、pp.65-74、1979 年 12 月。

- [49] 尾坂芳夫、鈴木基行、桑澤庄次郎、石橋忠良 "静的交番繰り返し荷重下での R C 柱の履歴復元力特性に関する研究"、土木学会論文集、第 372 号/V-5、pp.45-54、1986.
- [50] Ortiz M., Leroy Y. and Needleman A. "A Finite Element Method for Localized Failure Analysis", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 61, pp.189-214, 1987.
- [51] P C 斜張橋に関する調査研究委員会、海洋架橋調査会 "P C 斜張橋上部工設計指針(案)"、P C 斜張橋に関する調査研究委員会報告書、1981 年 3 月.
- [52] Rene de Borst "Nonlinear Analysis of Frictional Materials", Thesis Presented to the Delft University of Technology in 1986, Required for the degree of Doctor of Engineering.
- [53] Saenz, L.P. "Discussion of Equation for the Stress Strain Curve of Concrete", by Desayi and Krishnan, Proc. Am. Concr. Inst., Vol.61, No.9, pp.1229-1235, 1964.
- [54] Sewell, M.J. "A General Theory of Equilibrium Paths through Critical Points", Proc. Royal Soc. A. 306, 1968.
- [55] 島弘、上田多門 "R C 橋脚の軀体変形における曲げ変形とせん断変形との分離"、第 8 回コンクリート工学年次講演会論文集、pp.525-528、1986 年.
- [56] 島弘、周礼良、岡村甫 "異形鉄筋の鉄筋降伏後における付着特性"、土木学会論文集、第 378 号/V-6、pp.213-220、1987 年 2 月.
- [57] 島弘、伊藤圭一、水口裕之 "曲げ破壊型 R C 橋脚における鉄筋座屈モデルによる靱性解析"、第 12 回コンクリート工学年次論文報告集、pp.741-746、1990 年.
- [58] 鈴木計夫、中塚佑、井上和政 "円形横補強筋を用いたコンファインドコンクリートの応力ひずみ特性および同コンクリート内に配筋された圧縮鉄筋の座屈性状"、コンクリート構造物の靱性とその評価法に関するコロキウム論文集、JCI、pp.21-32、1988 年 3 月.
- [59] 鈴木計夫、中塚佑、山口善史、正田隆啓 "各種の形状の横補強筋を用いたコンファインドコンクリート内における圧縮軸筋の座屈性状"、コンクリート構造物の靱性と配筋方法に関するシンポジウム論文集、JCI、pp.61-68、1990 年 5 月.
- [60] 鈴木基行、武山泰、菊地春海、尾坂芳夫 "宮城県地震による R C ラーメン高架橋被害の解析的研究"、土木学会論文集、第 384 号/V-7、pp.43-52、1987 年 8 月.
- [61] Thomson, J.M.T. and Hunt, G.W. "A General Theory of Elastic Stability", Wiley, 1973.
- [62] 梅原秀哲、田辺忠顕、吉田弥智 "鋼材の付着状態を考慮した P C ラーメンの履歴挙動に関する研究"、土木学会論文集、第 369 号/V-9、pp.89-98、1988 年 9 月.
- [63] Vecchio F.J and Collins M.P "Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory", ACI Structural Journal, pp.258-267, May-June, 1988.

- [64] 鷺津久一郎 "弾性学の変分原理概論", 培風館, 1972.
- [65] William, K.J., Bicanic, N. and Sture, S. "Constitutive and Computational Aspects of Strain-Softening and Localization in Solids", ASME/WAN 84 Meeting, New Orleans, Symposium on Constitutive Equations, Macro and Computational Aspects, ASME, Vol.G00274, ed. K. William, 233-252, New York, 1984.

謝辞

本論文は、著者が名古屋大学大学院前期、後期課程在学中に行った研究成果をまとめたものです。本論文をまとめるにあたって、終止ご指導、ご鞭撻を賜りました、名古屋大学田辺忠顕教授、宇佐美勉教授、伊藤義人助教授、二羽淳一郎助教授に深く感謝致します。

田辺先生には、4年生で研究室に配属になって以来今日に至るまで、懇切丁寧な御指導を賜りました。先生の公私にわたる御教示に、どれほど多くの示唆を受け、励まされたかは計り知れません。宇佐美先生には、本論文のみならず、著者の卒業論文、修士論文に対しても終始一貫して熱心な御教示と適切な御助言を頂きました。伊藤先生には、本論文をまとめるにあたって、細かな御助言と貴重なご意見を頂きました。二羽先生には、本論文のまとめに関して、多くの貴重な御指導を頂きました。また先生には、普段から色々とお世話になっており、ご多忙な中多くの御助言を頂きました。本当に、先生方には心から感謝致します。

呉智深助手ならびに長嶋宏弥技官には、終始適切な御助言と御激励を頂きました。ここに記して心から謝意を表します。

さらに、事務室の伊藤徳子さんならびに図書室の上垣内紀美子さんには、日頃から大変お世話になりました。また、田辺研究室、二羽研究室の卒業生、在学生の皆さんには、卒業論文、修士論文を通してたくさんのご意見を共に勉強させて頂きました。ここに心からお礼申し上げます。

最後にわがママを許してくれた両親に感謝したいと思います。