

# 非線形連続系の同定法に関する研究

名古屋大学図書	
和	1118783

神 谷 恵 輔

## 目 次

第 1 章 序論 .....	1
第 2 章 非線形はりの同定法 .....	6
2.1 まえがき .....	6
2.2 問題設定 .....	6
2.3 同定法の提案 .....	8
2.3.1 $X_n(t)$ と $q_n(t)$ の求め方 .....	8
2.3.2 モード方程式の定め方 .....	10
2.4 数値シミュレーションによる同定の例 .....	12
2.4.1 振動データの求め方 .....	12
2.4.2 同定の進め方 .....	13
2.4.3 数値シミュレーションの結果 .....	14
2.5 まとめ .....	22
第 3 章 非一様はりの同定法 .....	23
3.1 まえがき .....	23
3.2 問題設定 .....	23
3.3 同定法の提案 .....	26
3.3.1 $X_n(t)$ と $q_n(t)$ の求め方 .....	26
3.3.2 モード方程式の定め方 .....	27
3.4 数値シミュレーションによる同定の例 .....	30
3.4.1 振動モードの求め方 .....	31
3.4.2 振動データの求め方 .....	31
3.4.3 モード座標とモード方程式の求め方 .....	31
3.4.4 数値シミュレーションの結果 .....	33
3.5 まとめ .....	42

第4章 実際のはりへの応用 .....	43
4.1 まえがき .....	43
4.2 実際のはりへの適用 .....	43
4.2.1 実験装置 .....	43
4.2.2 同定結果と検討 .....	44
4.3 まとめ .....	54
第5章 非線形板の同定法 .....	55
5.1 まえがき .....	55
5.2 問題設定 .....	55
5.3 同定法の提案 .....	60
5.3.1 $X_n(t)$ と $q_n(t)$ の求め方 .....	60
5.3.2 モード方程式の定め方 .....	61
5.4 数値シミュレーションによる同定の例 .....	64
5.4.1 長方形板に対するシミュレーション結果 .....	64
5.4.2 円板に対するシミュレーション結果 .....	70
5.5 まとめ .....	76
第6章 実用性の向上 .....	77
6.1 まえがき .....	77
6.2 問題設定 .....	77
6.3 同定法の提案 .....	79
6.3.1 関数 $\phi_n$ の定め方 .....	79
6.3.2 $X_n(t)$ と $q_n(t)$ の求め方 .....	81
6.3.3 方程式(6.3)の定め方 .....	82
6.4 数値シミュレーションによる同定の例 .....	84
6.4.1 はりに対するシミュレーション結果 .....	84
6.4.2 長方形板に対するシミュレーション結果 .....	91
6.4.3 円板に対するシミュレーション結果 .....	97
6.5 まとめ .....	103

第7章 統計的手法の導入 .....	104
7.1 まえがき .....	104
7.2 同定法の提案 .....	104
7.2.1 安田らの同定法の概要 .....	104
7.2.2 統計的手法の導入 .....	106
7.2.3 非線形連立方程式の解法 .....	108
7.3 数値シミュレーション .....	110
7.3.1 同定精度の評価法 .....	110
7.3.2 復元力に非線形性をもつ系 .....	111
7.3.3 減衰力に非線形性をもつ系 .....	117
7.3.4 復元力と減衰力に非線形性をもつ系 .....	121
7.4 まとめ .....	123
第8章 結論 .....	124
文献 .....	126
謝辞 .....	130

## 第1章 序論

近年、大型構造物から電子機器に至る各種機械、構造物は、性能向上のために高速化、軽量化の傾向が著しい。これに加えて耐久性・安全性の向上、振動・騒音の低減なども同時に要求されている。このような高度化した要求に対処するため、実働時における機械や構造物の動的挙動を設計の段階で正確に予測することが必要不可欠となっており、対象物の動特性を表現する数学モデルを構成する、いわゆる同定(Identification)の精度向上が大きな課題となっている。

電子計算機の発達に伴って、有限要素法や境界要素法などが対象とする系を理論的に同定するための手段として広く用いられている。しかしこれらの解析手法は、動的問題、特に減衰が大きい影響を持つ動的挙動の問題に対しては必ずしも有力な手段となり得ていない。そこでこの欠点を補うための手段として、実験データから対象とする系の同定を行う実験モード解析法と呼ばれる手法が登場してきた。実験モード解析法は、加振機を用いて機械や構造物を加振し、それに対する応答を測定し、高速フーリエ変換(F F T)処理により伝達関数を求め、さらに曲線適合によりモーダルパラメータと呼ばれる固有振動数、減衰比、振動モードなどを正確に求めようとする技術である。この手法は、振動計測技術とF F Tなどのデータ処理技術の進歩を背景にして実用化の域に達し、今日では、航空機、自動車、工作機械、磁気ディスクなど多くの機械や構造物の解析、設計に応用されている(1)-(4)。

現在のモード解析法は、対象とする系が線形系であるという仮定のもとに成り立っている。ところが、Snoeys, R. と Vanherck, P. <sup>(5)</sup> の報告に見られるように、実際の機械や構造物には、大変形、がた、クーロン摩擦、材料特性などに起因する非線形性がしばしば見られる。このような系に通常の実験モード解析法を適用しても、得られるモデルは実際の系の動特性を表現するモデルとしては不十分であり、それから得られる応答予測も誤差を含むことになる。このため機械や構造物の使用条件が厳しい先端的な分野では、系を実際の姿に近い非線形系として取り扱うことが重要な課題となってきた。最近、このようなことを考慮して、非線形系のモード解析あるいは同定に関する研究が多くの研究者によって試みられてきている。

Okubo, N と Honda, S. <sup>(6)</sup> は、非線形振動系に対してインパルス加振により周波数応答関数を求め、非線形系の場合には線形系の場合と比較して周波数応答関数が歪むことを報告し

ている。Kirshenboim, J. と Ewins, D. J. <sup>(7)</sup> は、調和励振に対する実験データと、対象とする系を線形系であると仮定したときの理論的な応答との差異から非線形性の大きさを推定する方法を提案している。Vihn, T. ら <sup>(8)</sup>、Simon, M. と Tomlinson, G. R. <sup>(9)</sup>、Tomlinson, G. R. <sup>(10)</sup>、大久保ら <sup>(11)</sup> は、ヒルベルト変換を用いた非線形性の評価方法を提案している。Busby, H. R. ら <sup>(12)</sup> は、従来の実験モード解析法を非線形系に適用し、その結果の検討を行っている。Fillod, R. ら <sup>(13)</sup> は、伝達関数に非線形性を補正する補正項を加え、その伝達関数の未知パラメータをカーブフィットによって定める方法を提案している。Ibanez, P. <sup>(14)</sup> <sup>(15)</sup> は、非線形系の応答においても外力の振動数と同じ振動数の調和成分が大きいことに着目して、調和成分から振幅に依存する伝達関数を求め、これを用いて非線形系を同定する手法を提案している。同様の考えに基づいて、渡辺と佐藤 <sup>(16)</sup> <sup>(17)</sup> <sup>(18)</sup> は、多自由度非線形系の周波数解析法を提案し、ビルディング・ブロック法に応用している。またこの手法を発展させた非線形系の同定法を提案し、一自由度系に適用している。Masri ら <sup>(19)</sup> <sup>(20)</sup> <sup>(21)</sup> は、減衰力と復元力の和を変位と速度の直交多項式(Chebyshev多項式)で展開し、用いた多項式の直交性を利用してその未知係数を定める方法を提案し、一自由度系および多自由度系に適用している。Udwadia, F. E. と Chin-Po Kuo <sup>(22)</sup> も Masri らと同様の方法を多自由度系に適用している。Tomlinson, G. R. と Hibbert, J. H. <sup>(23)</sup> は、クーロン摩擦が作用する多自由度系を取り上げて、散逸されるエネルギーから摩擦の大きさを定める方法を提案している。Stanway, R. ら <sup>(24)</sup> は、クーロン摩擦が作用する一自由度系を取り上げ、速度と変位の時刻歴データからクーロン摩擦の大きさを定める方法を提案している。Yang, Y. と Ibrahim, S. R. <sup>(25)</sup> は、減衰力と復元力の和を相対変位と相対速度のべき級数で展開し、その未知係数を時刻歴データに合うように定める方法を提案し、多自由度系に適用している。佐藤ら <sup>(26)</sup> は、微小インパクトと大インパクトの二段インパクトによる応答から運動方程式の未知パラメータを同定する手法を提案し、一自由度系に適用している。Lai, H.-Y. と Hsieh, S.-H. <sup>(27)</sup> は、非線形 ARMA モデルを用いた同定法を提案し、一自由度非線形系に適用している。Hammond, J. K. ら <sup>(28)</sup> は、最適制御理論を応用した非線形振動系の同定法を提案している。安田ら <sup>(29)</sup> <sup>(30)</sup> <sup>(31)</sup> はハーモニックバランスの原理に基づいた多自由度非線形系の同定法を提案している。

以上のように多くの非線形振動系の同定法が提案されているが、そのほとんどは一自由度系もしくは多自由度系を対象とした同定法である。ところが実際の機械や構造物は一自由度系や多自由度系と見なせるようなものばかりではなく、連続系として取り扱う必要の

あるものが多い。また一自由度系や多自由度系と見なし得るようなものであっても厳密には連続系である。このように、非線形連続系の同定法は実用的には極めて重要な技術でありながら、振動の分野においてはこの研究に関する報告は見あたらない。制御の分野では、Sinha, M. S. ら<sup>(34)</sup>、Hsu, N.-S. と Cheng, B.<sup>(35)</sup>、Mohan, B. M. と Datta, K. B.<sup>(36)</sup> が、運動方程式が定数係数の偏微分方程式で表される系を対象として、その未知係数および境界条件を定める方法を提案している。しかし、非線形連続系の運動方程式は一般には係数が位置の関数である複雑な偏微分方程式であり、振動の分野の問題に彼らの提案した同定法をそのまま利用することは困難であると思われる。

そこで本研究では、非線形連続系の同定法を開発するための基礎的な検討を目的として非線形連続系の簡単な例を取り上げて、その同定法を提案する。非線形連続系の振動解析において、未知量を対象とする系に対応する線形非減衰系のモード関数とモード座標と呼ばれる時間の関数の積の級数の形に変数変換し、モード関数の直交性を利用して偏微分方程式である運動方程式をモード方程式と呼ばれる常微分方程式に変換するという手法がよく用いられる<sup>(37)-(45)</sup>。本研究では、はじめに、この解析手法に基づいてモード方程式を定めるという考え方で、非線形連続系の同定法を提案する。次に、提案した方法で必要とする前提条件を緩和し、実用性を向上させた同定法を提案する。最後に、多自由度系を対象として、比較的大きなノイズを含むデータに対しても良好な同定結果が得られるように統計的手法を導入した同定法を提案する。

第2章以下で取り扱う内容の概略は以下の通りである。

第2章では、非線形連続系のもっとも簡単な例である両端単純支持の一樣な非線形はりを取り上げてその同定法を提案する。まず、対応する線形非減衰はりのモード関数を用いて、未知量であるたわみをモード関数とモード座標と呼ばれる時間の関数の積の級数の形に変数変換すれば、非線形偏微分方程式で表される運動方程式はモード方程式と呼ばれる常微分方程式に変換でき、得られたモード方程式は運動方程式と等価であることを示す。次に、線形のモード関数が既知であるという前提条件のもとに、測定によって得たたわみの振動データからモード座標を求め、安田ら<sup>(27)</sup>の提案した多自由度非線形系の同定法に基づいてモード方程式を定める方法を提案する。そして提案した方法に従って数値シミュレーションを行い、提案した方法の有効性を検討する。

第3章では、第2章で提案した同定法を非一樣なはりへ拡張する。第2章で提案した同定法は対象を一樣なはりに限定し、それを前提にした同定法であった。この章ではこのよ

うな制限を設ける必要性がないことを示すため、例として一様とは限らないはりを取り上げる。非一様なはりの場合、線形のモード関数を解析的に求めることは一般に困難である。そこで有限要素法や通常の実験モード解析法と組み合わせ、数値的あるいは実験的に求めたモード関数を用いて、非一様なはりを同定する方法を提案する。ここでは有限要素法によってモード関数を求める場合を示す。提案した同定法の有効性は数値シミュレーションによって検討する。

第4章では、第2章および第3章で提案した非線形はりの同定法を実際のはりに適用する。第2章および第3章では、提案した同定法の適用性の検討は数値シミュレーションによって行った。数値的に求めたデータはいくつかの仮定に基づいており、必ずしも実際の実験データと同じ性質を持つとは限らない。そこでこの章では提案した方法に従って同定実験を行い、新たな問題点の有無などを検討する。同定結果の評価は、同定で得られる数学モデルが実験データをどの程度再現するかによって行う。

第5章では、二次元の非線形連続系である非線形板を取り上げてその同定法を提案する。非線形板の場合、運動方程式が連立偏微分方程式となる。ここでは長方形板と円板に対して、対応する線形非減衰板のモード関数を用いれば、これらの場合にも運動方程式をモード方程式に変換できることを示し、非線形はりの場合と同様に、たわみの振動データからモード座標を求め、モード方程式を定める方法を提案する。そして提案した方法に従って数値シミュレーションを行い、提案した方法の有効性を検討する。

第6章では、第2章から第5章までに提案した同定法が必要とした、対象とする系に対応する線形系のモード関数が既知であるという前提条件を緩和し、実用性を向上させた同定法を提案する。ここで提案する方法は、線形系に対する実験モード解析法においてVold, H. と Leuridan, J. <sup>(59)</sup> が提案した方法を応用して、いくつかの測定点において測定した振動データからその振動データに大きく寄与する成分を取り出し、この成分に関する方程式を定めるものである。そして非線形はりおよび非線形板に対して数値シミュレーションを行い、提案した方法の有効性を検討する。

第7章では、統計的手法を導入して、比較的大きなノイズを含むデータに対しても精度のよい同定結果が得られるように改良した同定法を提案する。第2章から第6章までに提案した非線形連続系の同定法は、安田らの提案した多自由度非線形系の同定法に基づいている。ところがこの方法では、測定データに含まれるノイズが大きくなるに従って同定精度が急速に悪化することがわかった。そこでこの章では、統計的手法を導入してロバスト



性を高めた多自由度非線形系の同定法を提案する。提案した手法の有効性を検討するため、いくつかの代表的な多自由度系を取り上げ、数値的に求めた振動データにノイズを加えたデータを実験データと見なし、提案した方法に従って同定を行う。

第8章は本論文の結論である。

## 第2章 非線形はりの同定法<sup>(4.6)</sup><sup>(4.7)</sup>

### 2.1 まえがき

この章では、非線形連続系を同定する方法を開発するための基礎的な検討を目的として、非線形連続系の簡単な例を取り上げて同定法を提案する。取り上げる振動系は両端単純支持の一樣なはりである。このはりは、大きい振幅で振動させるとき非線形振動系となる。そこでこの振動系の同定法を提案し、その有効性を数値シミュレーションによって検討する。

### 2.2 問題設定

図2.1に示すように、長さが $l$ で、軸方向に拘束された両端単純支持の一樣なはりを考える。はりに沿って $x$ 軸を定め、一方の端を原点、他方の端を $x=l$ の点とする。はりのたわみを $w(x, t)$ あるいは単に $w$ とおけば、大きな振幅で振動させるときの系の運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{E A}{l} \left[ u_0 + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + C \frac{\partial w}{\partial t} + \mu E I \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} = Q(x, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

である<sup>(4.8)</sup>。ここで系に作用する減衰力として、係数 $C$ の粘性減衰力、および係数 $\mu$ の内

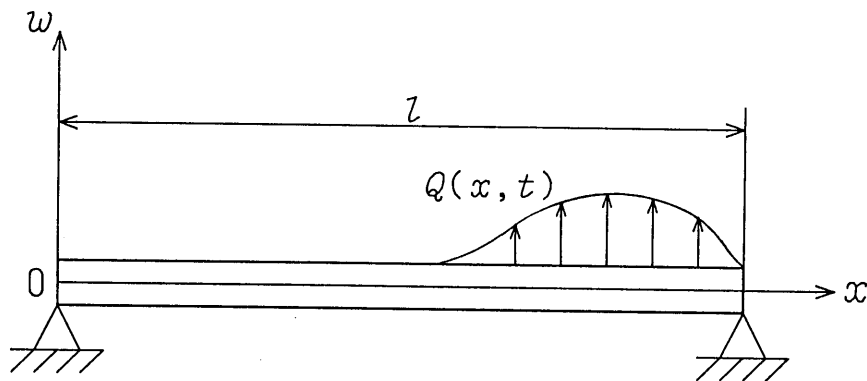


図2.1 同定の対象とするはり

部減衰力を考えた。  $u_0$  は軸方向の張力による初期変位で、張力を加えなければ  $u_0 = 0$  である。  $Q(x, t)$  ははりに作用する外力を単位長さ当たりについて表したものである。  $\rho$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $I$  はそれぞれはりの密度、断面積、縦弾性係数、断面二次モーメントである。

以上のはりに対して同定の問題を考える前に、外力  $Q(x, t)$  を与えて、式(2.1)からたわみ  $w(x, t)$  を求める解析の問題をまず考える。

はりを微小振幅で振動させれば線形はりとなる。ここで考えているはりの場合、対応する線形非減衰はりのモード関数はよく知られているように  $\sin(n\pi x/l)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) であり、それらは直交性を満たす。そこでここで問題にしている非線形はりのたわみ  $w$  を、線形はりのモード関数で展開すると

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.2)$$

の形におくことができる。ここに  $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は時間  $t$  の関数で、線形系の場合に準じてモード座標といわれる。式(2.2)を式(2.1)に代入して、モード関数の直交性、すなわち  $m \neq n$  に対して

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad (2.3)$$

が成り立つことを利用すると、はりの支配方程式(2.1)からモード方程式

$$m_n \ddot{X}_n(t) + c_n \dot{X}_n(t) + k_n X_n(t) + N_n = q_n(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

を得る。ここに  $m_n$ ,  $c_n$ ,  $k_n$  は

$$\left. \begin{aligned} m_n &= \rho A \\ c_n &= C + \frac{n^4 \pi^4 \mu E I}{l^4} \\ k_n &= \frac{n^4 \pi^4 E I}{l^4} + \frac{n^2 \pi^2 E A u_0}{l^4} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

で与えられる定数である。また  $N_n$  は

$$N_n = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{n,m} X_m(t)^2 \right\} X_n(t) \quad (2.6)$$

の形のモード座標  $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) の関数であり，パラメータ  $\beta_{n,m}$  は

$$\beta_{n,m} = \frac{n^2 m^2 \pi^4 E A}{4 l^4} \quad (2.7)$$

である．さらに  $q_n(t)$  は

$$q_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l Q(x, t) \sin \frac{n \pi x}{l} dx \quad (2.8)$$

で与えられる時間の関数である．式(2.4)を解いてモード座標  $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を定めれば式(2.2)によってはりのたわみ  $w$  が求められる．したがって式(2.1)によって  $w$  を求める問題は，式(2.4)によって  $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求める問題に帰着される．

そこで問題設定に移る．非線形はりを同定するという問題は，ある外力  $Q(x, t)$  のデータとそれに対するたわみ  $w(x, t)$  のデータを用いて，運動方程式(2.1)を定めることである．ところで以上の議論によると，任意の外力に対する系のたわみは式(2.4)によって求めることができる．したがって式(2.1)を定めるという問題は，同定の目的を考えれば，式(2.4)を定めるという問題に置き換えてもよいと思われる．そこで以下に，ある外力  $Q(x, t)$  とそれに対するたわみ  $w(x, t)$  のデータを知ってモード方程式(2.4)を定める方法を提案し，非線形はりの同定法の提案とする．ただし式(2.4)のモード方程式は無限個の方程式からなるが，モード方程式からたわみを求めるとき，実用上はいくつかの方程式のみを考慮するだけで差支えないので，ここでも，はじめのいくつかの方程式を定めることを考える．

## 2.3 同定法の提案

### 2.3.1 $X_n(t)$ と $q_n(t)$ の求め方

同定の手順に従って，はじめに，たわみ  $w(x, t)$  の測定データから  $M$  個のモード座標  $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ ) を定める方法を考える．対象とする非線形はりの線形モード関数  $\sin(n \pi x / l)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は既知であるとしておく．

たわみ  $w(x, t)$  の測定点として、 $N$  個の点  $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$  を定め、その点でたわみ  $w(x_i, t)$  を測定するものとする、たわみ  $w(x_i, t)$  と  $X_n(t) (n = 1, 2, 3, \dots)$  の間には

$$w(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) \sin \frac{n \pi x_i}{l} \quad (2.9)$$

の関係が成り立つ。そこである時刻  $t = t_j$  におけるたわみを測定すると

$$w(x_i, t_j) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t_j) \sin \frac{n \pi x_i}{l} \quad (2.10)$$

が得られる。

式(2.10)からできるだけ簡単に  $X_n(t_j) (n = 1, 2, 3, \dots)$  を求めるため、式(2.3)の關係に注意する。はりを等分割し、両端を除く分割点に測定点  $x_i$  を  $(i = 1, 2, \dots, N)$  を定めると、式(2.3)の關係から、大きくない  $m, n (m \neq n)$  について、

$$\sum_{i=1}^N \sin \frac{m \pi x_i}{l} \sin \frac{n \pi x_i}{l} = 0 \quad (2.11)$$

が近似的に成り立つことがわかる。特に、 $m + n \leq 2N + 1$  となる  $m, n$  に関しては式(2.11)は厳密に成り立つ<sup>(49)</sup>。そこで式(2.10)の両辺に  $\sin(n \pi x / l)$  を掛け、 $i$  について加え合わせ、式(2.11)の關係を用いると

$$X_n(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^N w(x_i, t_j) \sin \frac{n \pi x_i}{l}}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \frac{n \pi x_i}{l}} \quad (2.12)$$

が得られる。この式によって  $X_n(t_j)$  を近似的に求めることができる。

以上の方法を各時刻  $t = t_j (j = 1, 2, 3, \dots)$  について繰返せば、 $X_n(t)$  を時間の離散点  $t_j$  について求めることができる。

$q_n(t)$  を定める問題は簡単である。外力  $Q(x, t)$  のデータを用いて式(2.8)の積分計算を各時刻  $t = t_j$  において行えば、時間の離散点  $t_j$  における  $q_n(t)$  が求められる。

以上のようにして、われわれは $X_n(t)$ と $q_n(t)$ をデータとして持ったことになる。そこで次に、安田ら<sup>(27)</sup>が提案した方法に従ってモード方程式を定める方法を提案する。

### 2.3.2 モード方程式の定め方

モード方程式を定めるため、第一に考える問題は、モード方程式をどのような形におくかということである。採用したモード関数の性質を考慮すると、定めるモード方程式は慣性項および線形の復元力項では連成しない。しかし減衰項および非線形項についてはそのようなことはいえない。したがって求めるモード方程式は一般に

$$m_n \ddot{X}_n(t) + \sum_{m=1}^M c_{nm} \dot{X}_n(t) + k_n X_n(t) + N_n = q_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots, M) \quad (2.13)$$

の形におくことができる。この式でパラメータ $m_n$ ,  $c_{nm}$ ,  $k_n$ は未知数で、 $c_{nm}$ は

$$c_{nm} = c_{mn} \quad (n \neq m) \quad (2.14)$$

を満たすとする。また非線形項 $N_n$ は一般にモード座標 $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ )あるいはその時間微分の非線形関数で、多くの場合それらの多項式で近似できる。ここでは非線形性が復元力にあるはりを考えているので、非線形項 $N_n$ はモード座標 $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ )のみの関数であると考えることができる。そこで各 $N_n$ は $X_n(t)$ の二乗からはじまる

$$N_n = \sum_{i \leq j} \alpha_{n,ij} X_i(t) X_j(t) + \sum_{i \leq j \leq k} \beta_{n,ijk} X_i(t) X_j(t) X_k(t) + \dots \quad (2.15)$$

の形の多項式で与えられるとする。ここに係数 $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\dots$ は未知のパラメータである。また式(2.15)の記号 $\Sigma$ は、記号の下に書かれた条件を満たすすべての $i$ ,  $j$ ,  $k$ ,  $\dots$ に関する総和を意味するものとする。

以上でモード方程式の形を定めることができたので、次に考える問題は、パラメータ $m_n$ ,  $c_{nm}$ ,  $k_n$ および非線形項 $N_n$ の係数パラメータ $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\dots$ をどのように定めるかということである。

これらのパラメータを定めるため、外力  $Q(x, t)$  として周期  $T$  の周期外力を採用し、外力およびこれに対する、外力と同じ周期の定常状態のたわみ振動  $w(x, t)$  をデータとして測定する。そのデータから 2.3.1 節に述べた方法によって、 $q_n(t)$  および  $X_n(t)$  を求める。このようにして得た  $q_n(t)$  は外力と同じ周期を持つので、加えた外力の周期  $T$  からきまる角振動数  $\omega (= 2\pi/T)$  を用いて

$$\begin{aligned} q_n(t) = & (Q_n)_0 \\ & + (Q_n)_1 \cos \omega t + (Q_n)_2 \cos 2\omega t + \cdots \\ & + (Q_n)_1^* \sin \omega t + (Q_n)_2^* \sin 2\omega t + \cdots \end{aligned} \quad (2.16)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここにフーリエ係数  $(Q_n)_0, (Q_n)_1, (Q_n)_2, \dots$  は F T (高速フーリエ変換) などの手法により容易に求められる既知の量である。同様にモード座標  $X_n(t)$  も

$$\begin{aligned} X_n(t) = & (X_n)_0 \\ & + (X_n)_1 \cos \omega t + (X_n)_2 \cos 2\omega t + \cdots \\ & + (X_n)_1^* \sin \omega t + (X_n)_2^* \sin 2\omega t + \cdots \end{aligned} \quad (2.17)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここでもフーリエ係数  $(X_n)_0, (X_n)_1, (X_n)_2, \dots$  は既知の量である。次に、式(2.15)で仮定した項  $X_i(t)X_j(t), X_i(t)X_j(t)X_k(t), \dots$  を上で求めたモード座標  $X_n(t)$  の演算によって求め、その結果もフーリエ級数

$$\left. \begin{aligned} X_i(t)X_j(t) &= (X_iX_j)_0 \\ &+ (X_iX_j)_1 \cos \omega t + (X_iX_j)_2 \cos 2\omega t + \cdots \\ &+ (X_iX_j)_1^* \sin \omega t + (X_iX_j)_2^* \sin 2\omega t + \cdots \\ X_i(t)X_j(t)X_k(t) &= (X_iX_jX_k)_0 \\ &+ (X_iX_jX_k)_1 \cos \omega t + (X_iX_jX_k)_2 \cos 2\omega t + \cdots \\ &+ (X_iX_jX_k)_1^* \sin \omega t + (X_iX_jX_k)_2^* \sin 2\omega t + \cdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

の形におく。ここでもフーリエ係数  $(X_iX_j)_0, (X_iX_j)_1, \dots$  は既知の量である。

式(2.16), (2.17), (2.18)を式(2.13)に代入し, ハーモニックバランスの原理を用いて, 両辺の定数項および  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$ ,  $\dots$  の係数をそれぞれ等しいとおくと, 次の形の方程式を得る.

$$[A]\{S\} = \{Q\} \quad (2.19)$$

ここに  $[A]$  は式(2.17), (2.18)に表れるフーリエ係数から決まる既知のマトリックス,  $\{Q\}$  は式(2.16)に表れるフーリエ係数から決まる既知のベクトル, そして  $\{S\}$  は系のパラメータおよび非線形項の係数パラメータを成分とする未知のベクトルである. これらの表示式は, 求めたいモード方程式の数  $M$ , 非線形項を表す多項式の次数, フーリエ級数展開の打ち切り次数などを指定すれば容易に求められるもので, 一般的な表示は面倒であるからここでは省略する.

加える外力の角振動数  $\omega$  としていくつかの値を適当に定め, またフーリエ級数展開の打ち切り次数を適当にとれば, 未知数の数より多い方程式を含んで再び式(2.19)の形の方程式を得る. そこでこの式に最小二乗法を適用すれば,  $\{S\}$  は

$$\{S\} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T\{Q\} \quad (2.20)$$

によって定められる. 必要があれば重みマトリックスを用いて同定の精度を上げるよう試みることができる. 重みマトリックス  $[W]$  を用いるとき,  $\{S\}$  は, 式(2.20)の代わりに

$$\{S\} = ([A]^T[W][A])^{-1}[A]^T[W]\{Q\} \quad (2.21)$$

で与えられる. 式(2.20)あるいは式(2.21)によって  $\{S\}$  を求めれば, モード方程式が定められたことになる.

## 2.4 数値シミュレーションによる同定の例

2.3節で提案した同定法の有効性を検討するため, ここで数値的に求めた振動データを実験データとみなし, 同定の数値シミュレーションを行う. 求めたいモード方程式は, 低次の三つのモードに関するものとする.

### 2.4.1 振動データの求め方

振動データを数値的に求めるため, 一例として, 式(2.1)に表れる各パラメータの値を次



のように定める.

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, & A &= 9.50 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, & I &= 1.98 \times 10^{-13} \text{ m}^4 \\ C &= 0.15 \text{ Ns/m}^2, & \mu &= 3.00 \times 10^{-4} \text{ s} \\ l &= 8.16 \times 10^{-1} \text{ m}, & u_0 &= 1.00 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

たわみ  $w$  の振動データを, モード方程式を用いて次のように求める. 実際の実験データでは, たわみは高次のモード成分までを含むので, ここでは同定したいモード数の2倍にあたる6次までのモード成分を含めて考える. そのため式(2.4)のはじめの6式を, 添字  $n$  が7以上のモード座標  $X_n(t)$  ( $n \geq 7$ ) を無視し, 与えられた周期外力に対し適当な初期条件のもとに数値的に積分し, 外力と同じ周期の周期解になるまで積分を続ける. こうして得た周期解を式(2.2)に代入し, たわみ  $w$  の振動データとし, これを実験データとみなす.

外力として, 式

$$Q(x, t) = q_0 \delta(x - x_f) \cos \omega t \quad (2.23)$$

で与えられる集中的な調和外力を作用させる場合を考える. この式で  $q_0$  は外力の大きさ,  $x = x_f$  は集中外力を作用させる加振点である. 以下の数値例では大きさ  $q_0$  は  $q_0 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ N}$  とした.

外力の与え方は以上のような集中外力のほか, 式

$$Q(x, t) = \begin{cases} q_0 \cos \omega t & (x_{f1} < x < x_{f2}) \\ 0 & (0 < x < x_{f1}, x_{f2} < x < l) \end{cases} \quad (2.24)$$

のように, 区間  $x_{f1} < x < x_{f2}$  内で一定の大きさ  $q_0$  をとる分布調和外力を作用させる場合も考える. この場合には大きさ  $q_0$  は  $q_0 = 3.0 \times 10^{-2} \text{ N/m}$  とした.

#### 2.4.2 同定の進め方

式(2.12)を用いて, たわみ  $w$  からモード座標を求めるため, 測定点を

$$x = \frac{1}{5} l, \frac{2}{5} l, \frac{3}{5} l, \frac{4}{5} l \quad (2.25)$$

の位置にとる。これらの測定点のデータからモード座標 $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3$ )を求めるには式(2.12)を用いる。

非線形項は式(2.15)に示す二乗、三乗の項よりなるとする。ただし非線形はりの問題では、力学的な考察によって、各非線形項はポテンシャルから導かれると考えられるので、ここでは三乗、四乗の多項式で与えられるポテンシャル

$$U = \sum_{i \leq j \leq k} \alpha_{ijk} X_i(t) X_j(t) X_k(t) + \sum_{i \leq j \leq k \leq l} \beta_{ijkl} X_i(t) X_j(t) X_k(t) X_l(t) \quad (2.26)$$

から

$$N_n = \frac{\partial U}{\partial X_n(t)} \quad (2.27)$$

によって導かれるとする。このようにしたほうが、モード方程式に含まれる非線形項の係数パラメータが減少し、精度の向上が期待される。

フーリエ級数展開の打ち切り次数は3にする。またここでは重みマトリックスは用いないことにする。

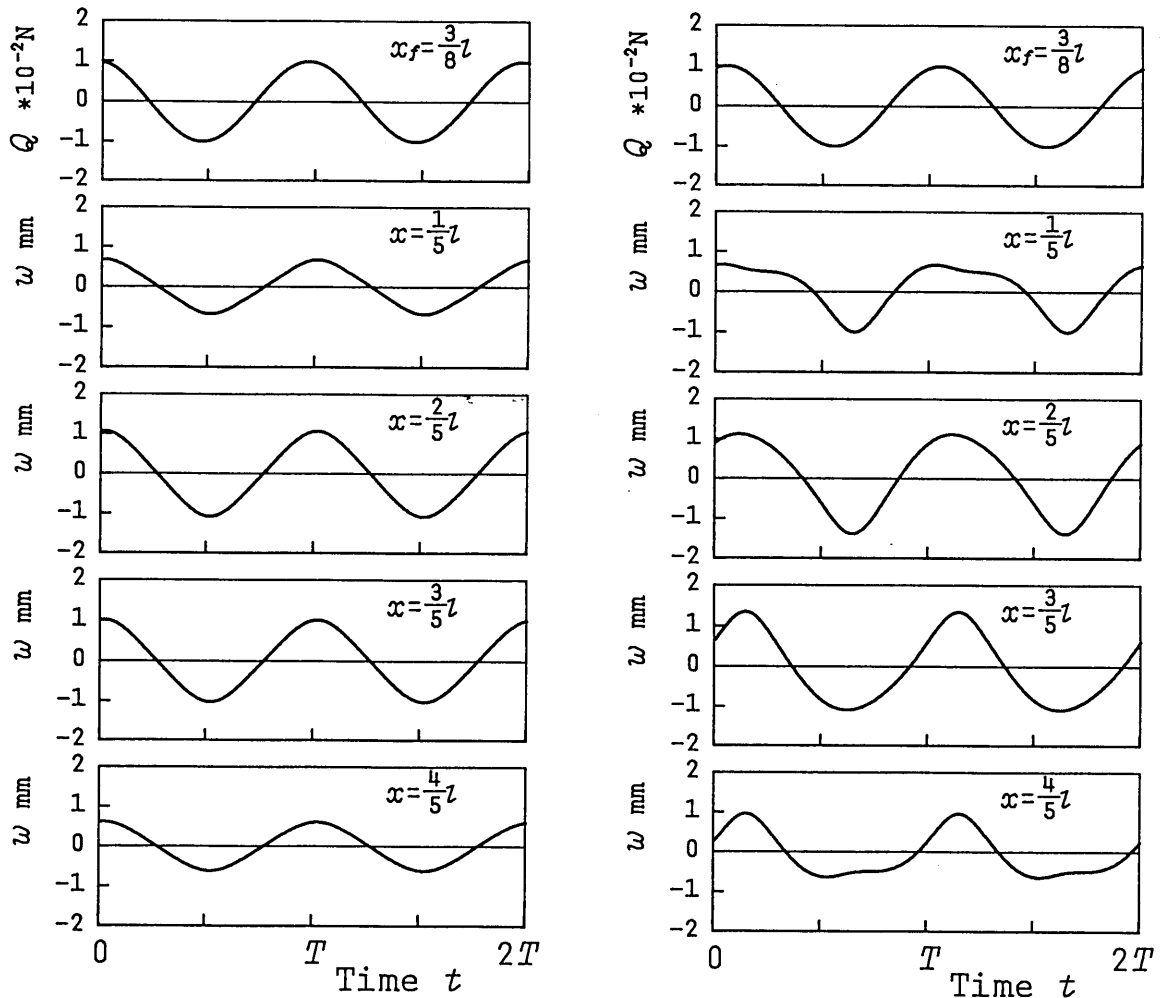
#### 2.4.3 数値シミュレーションの結果

数値シミュレーションの結果として、加振点 $x_f = (3/8)l$ に集中外力を作用させる場合の結果を示す。まず外力 $Q(x, t)$ とたわみ $w$ の数値データの例を図2.2に示す。この図のデータを用いて式(2.12)の方法によりモード座標 $X_n(t)$ を求め、そのフーリエ級数の大きさを定めたところ、図2.3に示すようになった。この結果は、たわみ $w$ を求める際の $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3$ )とほとんど一致している。図2.3を求めたと同様に、 $\omega$ のいろいろな値に対してモード座標を求め、それを振幅と $\omega$ の関係にして示すと図2.4のようになった。ここに示したデータは1次、2次、3次までのすべての共振点付近のデータを含んでいる。そこで次に、これらのすべてのデータを用いてモード方程式の各係数を定めた。その結果を表2.1に示す。モード方程式を求めるときには非線形項 $N_n$ を含めて式(2.13)のように一般性をもたせてあるのに、減衰係数 $c_{nm}$  ( $n \neq m$ )は係数 $c_{nn}$ に比較してほとんど零となり、また非線形項も、式(2.6)に表れる項以外の非線形項は式(2.6)に表れる各項に

比較して1%以下の小さな値となり、提案した同定法により非線形項 $N_n$ も含めて式(2.4)の形に完全に一致するモード方程式が得られることがわかった。そして式(2.4)および式(2.6)に表れる係数の値は正しい値に極めて近くなった。このようにして、いま取り上げた問題の場合、たわみのデータを利用してモード方程式が再現されることがわかった。

集中外力の加振位置 $x_f$ を $x_f = (1/4)l$ にしても同定結果はほとんど同じであった。

式(2.24)の形の分布外力を作用させる場合として、加振範囲を $(1/4)l < x < (3/8)l$ にした場合の同定結果を表2.2に示す。この場合も集中外力の場合と同様により結果が得られた。また分布外力を加える位置を $(3/8)l < x < (1/2)l$ にした場合も上述の場合



(a)  $\omega = 40 \text{ rad/s}$  の場合

(b)  $\omega = 48 \text{ rad/s}$  の場合

図2.2 外力 $Q$ とたわみ $w$ の数値データ例

と同じようなよい結果が得られた。

集中外力で加振点を  $x_f = (1/2)l$  にした場合の同定結果を表2.3に示す。この場合には2次のモードに関するモード方程式の係数はでたらめな値となり、正しい同定はできなかった。これはたわみのデータに2次のモードの成分がほとんど含まれないことに起因すると思われる。分布外力で加振範囲を  $(7/16)l < x < (9/16)l$  にした場合も同様の理由で正しい同定はできなかった。

最後に、振動数  $\omega$  の範囲をそれぞれ1次、2次、3次のモードの共振点付近のみに取って同定を行った。1次の共振点付近のみの場合の同定結果を表2.4に示す。この場合には3次のモードに関する非線形項の係数を正しく同定することができなかった。これは図2.4からわかるように、1次のモードの共振点付近では、3次のモードの振動は1次のモードの

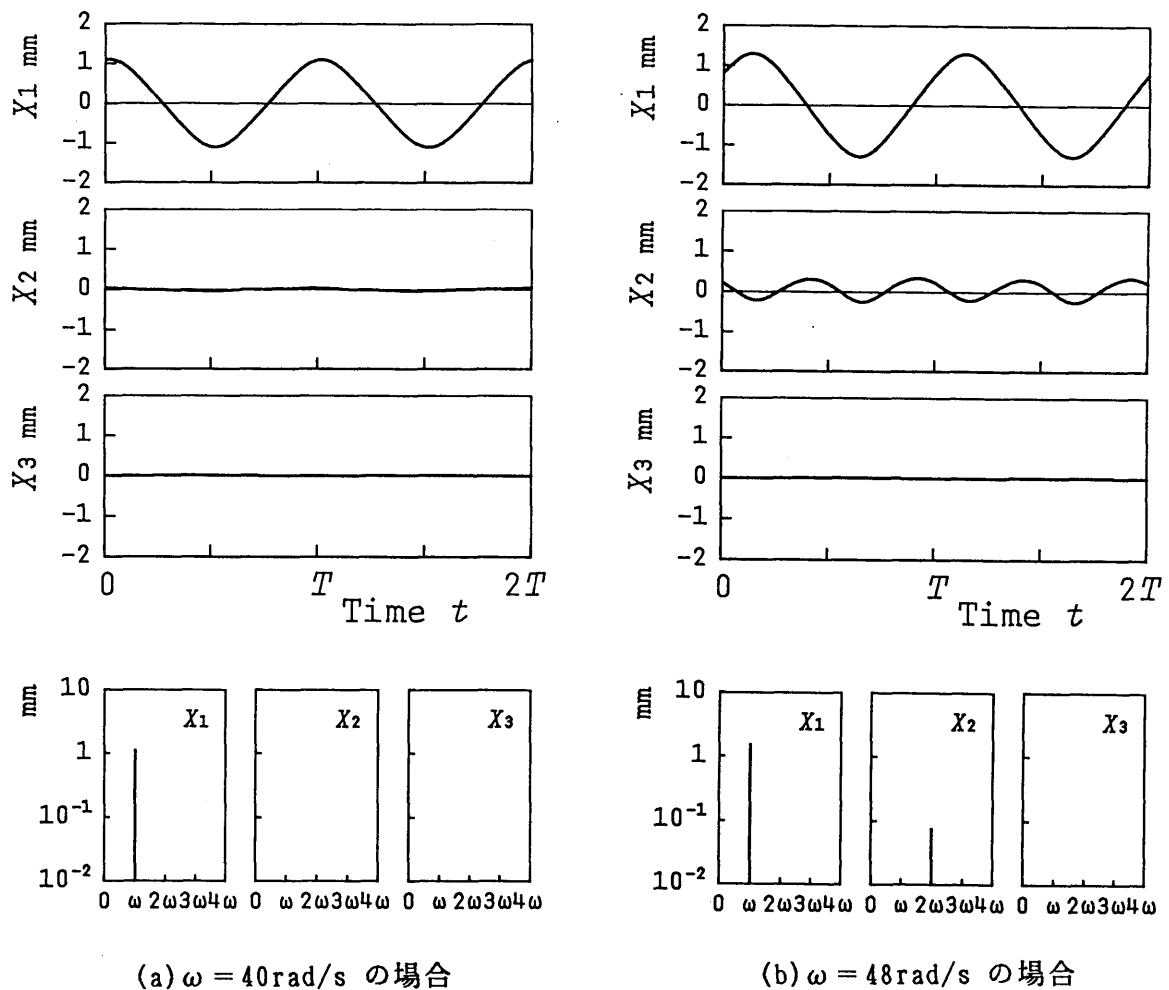


図2.3 たわみ  $w$  から求めたモード座標とそのフーリエ係数の大きさ

振動に比べてかなり小さく、非線形項ではその小さい量をさらに二乗、三乗するので、ほとんど零に近い値になってしまうためであると思われる。2次、3次のモードの共振点付近の場合でも同様の理由で正しい同定はできなかった。

以上の各場合の結果をまとめると、加振位置と周期外力の振動数範囲を適当に定めれば、たわみの振動データからモード方程式を定めることができ、同定が可能であるといえる。

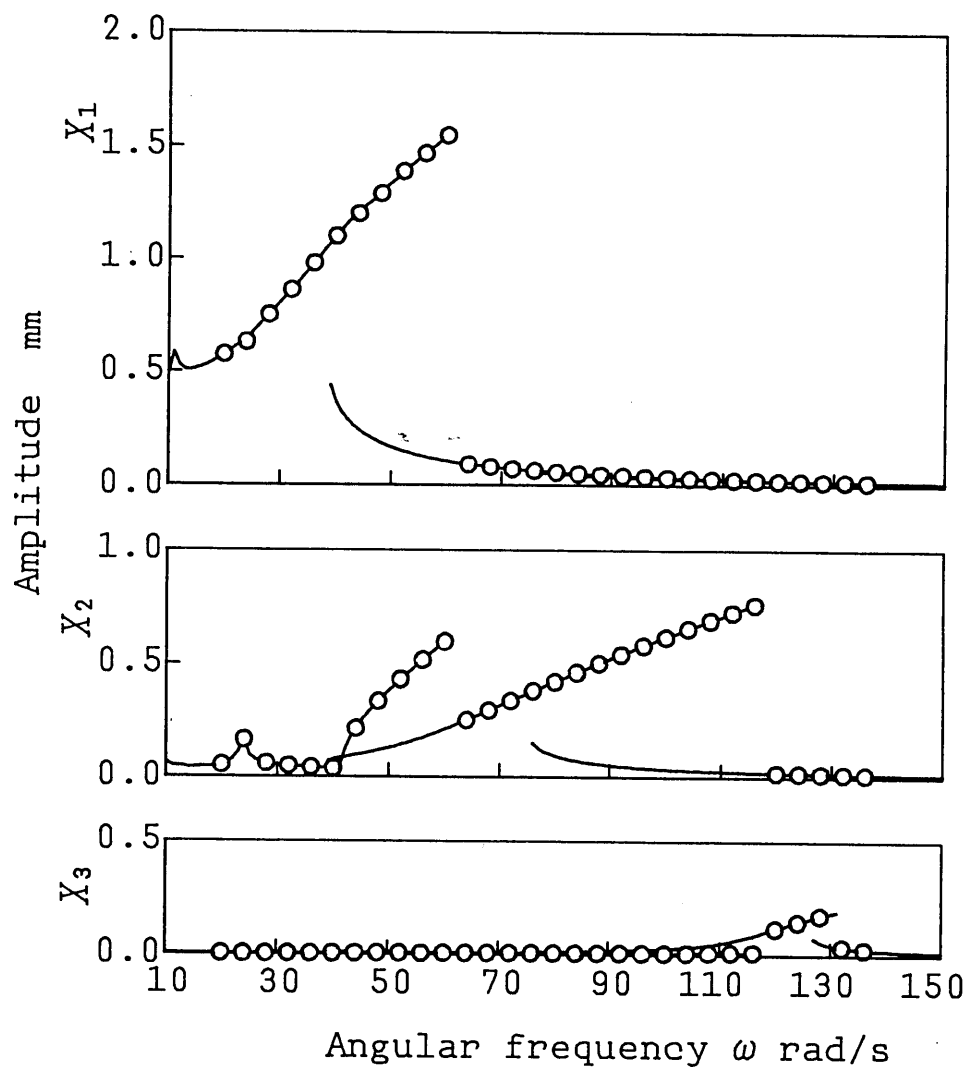


図2.4 同定に用いたモード座標の値

表2.1 同定結果(加振点  $x_f = (3/8)l$  の場合)

	Exact	Identified		Exact	Identified
kg/m	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	N/m <sup>4</sup>	$\times 10^9$	$\times 10^9$
$m_1$	7.448	7.449	$\beta_{1111}$	0.027	0.027
$m_2$	7.448	7.450	$\beta_{1112}$	0.000	0.000
$m_3$	7.448	7.436	$\beta_{1113}$	0.000	0.000
Ns/m <sup>2</sup>	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\beta_{1122}$	0.215	0.215
$c_{11}$	1.522	1.525	$\beta_{1123}$	0.000	0.000
$c_{12}$	0.000	0.000	$\beta_{1133}$	0.484	0.483
$c_{13}$	0.000	0.000	$\beta_{1222}$	0.000	0.000
$c_{22}$	1.852	1.860	$\beta_{1223}$	0.000	0.000
$c_{23}$	0.000	0.000	$\beta_{1233}$	0.000	-0.001
$c_{33}$	3.280	3.325	$\beta_{1333}$	0.000	0.003
N/m <sup>2</sup>	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\beta_{2222}$	0.430	0.430
$k_1$	0.045	0.045	$\beta_{2223}$	0.000	0.000
$k_2$	0.286	0.286	$\beta_{2233}$	1.935	1.932
$k_3$	1.045	1.046	$\beta_{2333}$	0.000	0.004
N/m <sup>3</sup>	$\times 10^6$	$\times 10^6$	$\beta_{3333}$	2.177	2.163
$\alpha_{111}$	0.000	0.000			
$\alpha_{112}$	0.000	0.000			
$\alpha_{113}$	0.000	0.000			
$\alpha_{122}$	0.000	0.000			
$\alpha_{123}$	0.000	0.000			
$\alpha_{133}$	0.000	0.000			
$\alpha_{222}$	0.000	0.000			
$\alpha_{223}$	0.000	0.000			
$\alpha_{233}$	0.000	0.000			
$\alpha_{333}$	0.000	0.000			

表2.2 同定結果(加振範囲 $(1/4)l < x < (3/8)l$ の場合)

	Exact	Identified		Exact	Identified
kg/m	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	N/m <sup>4</sup>	$\times 10^9$	$\times 10^9$
$m_1$	7.448	7.448	$\beta_{1111}$	0.027	0.027
$m_2$	7.448	7.448	$\beta_{1112}$	0.000	0.000
$m_3$	7.448	7.447	$\beta_{1113}$	0.000	0.000
Ns/m <sup>2</sup>	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\beta_{1122}$	0.215	0.215
$c_{11}$	1.522	1.522	$\beta_{1123}$	0.000	0.000
$c_{12}$	0.000	0.000	$\beta_{1133}$	0.484	0.483
$c_{13}$	0.000	0.000	$\beta_{1222}$	0.000	0.000
$c_{22}$	1.852	1.853	$\beta_{1223}$	0.000	-0.001
$c_{23}$	0.000	0.000	$\beta_{1233}$	0.000	0.019
$c_{33}$	3.280	3.279	$\beta_{1333}$	0.000	-0.005
N/m <sup>2</sup>	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\beta_{2222}$	0.430	0.430
$k_1$	0.045	0.045	$\beta_{2223}$	0.000	0.000
$k_2$	0.286	0.286	$\beta_{2233}$	1.935	1.932
$k_3$	1.045	1.046	$\beta_{2333}$	0.000	-0.003
N/m <sup>3</sup>	$\times 10^6$	$\times 10^6$	$\beta_{3333}$	2.177	2.158
$\alpha_{111}$	0.000	0.000			
$\alpha_{112}$	0.000	0.000			
$\alpha_{113}$	0.000	0.000			
$\alpha_{122}$	0.000	0.000			
$\alpha_{123}$	0.000	0.000			
$\alpha_{133}$	0.000	0.000			
$\alpha_{222}$	0.000	0.000			
$\alpha_{223}$	0.000	0.000			
$\alpha_{233}$	0.000	0.000			
$\alpha_{333}$	0.000	0.000			

表2.3 同定結果(加振点  $x_f = (1/2)l$  の場合)

	Exact	Identified		Exact	Identified
kg/m	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	N/m <sup>4</sup>	$\times 10^9$	$\times 10^9$
$m_1$	7.448	7.448	$\beta_{1111}$	0.027	0.027
$m_2$	7.448	0.002	$\beta_{1112}$	0.000	0.000
$m_3$	7.448	7.449	$\beta_{1113}$	0.000	0.000
Ns/m <sup>2</sup>	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\beta_{1122}$	0.215	0.000
$c_{11}$	1.522	1.528	$\beta_{1123}$	0.000	0.000
$c_{12}$	0.000	0.000	$\beta_{1133}$	0.484	0.484
$c_{13}$	0.000	0.000	$\beta_{1222}$	0.000	0.000
$c_{22}$	1.852	0.000	$\beta_{1223}$	0.000	0.000
$c_{23}$	0.000	0.000	$\beta_{1233}$	0.000	0.000
$c_{33}$	3.280	3.682	$\beta_{1333}$	0.000	0.000
N/m <sup>2</sup>	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\beta_{2222}$	0.430	0.000
$k_1$	0.045	0.045	$\beta_{2223}$	0.000	0.000
$k_2$	0.286	0.000	$\beta_{2233}$	1.935	0.000
$k_3$	1.045	1.046	$\beta_{2333}$	0.000	0.000
N/m <sup>3</sup>	$\times 10^6$	$\times 10^6$	$\beta_{3333}$	2.177	2.177
$\alpha_{111}$	0.000	0.000			
$\alpha_{112}$	0.000	0.000			
$\alpha_{113}$	0.000	0.000			
$\alpha_{122}$	0.000	0.000			
$\alpha_{123}$	0.000	0.000			
$\alpha_{133}$	0.000	0.000			
$\alpha_{222}$	0.000	0.000			
$\alpha_{223}$	0.000	0.000			
$\alpha_{233}$	0.000	0.000			
$\alpha_{333}$	0.000	0.000			



表2.4 同定結果(振動数が1次のモードの共振点付近のみの場合)

	Exact	Identified		Exact	Identified
kg/m	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	N/m <sup>4</sup>	$\times 10^9$	$\times 10^9$
$m_1$	7.448	7.448	$\beta_{1111}$	0.027	0.027
$m_2$	7.448	7.449	$\beta_{1112}$	0.000	0.000
$m_3$	7.448	7.449	$\beta_{1113}$	0.000	0.000
Ns/m <sup>2</sup>	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\beta_{1122}$	0.215	0.215
$c_{11}$	1.522	1.522	$\beta_{1123}$	0.000	-0.001
$c_{12}$	0.000	0.000	$\beta_{1133}$	0.484	0.487
$c_{13}$	0.000	0.001	$\beta_{1222}$	0.000	-0.001
$c_{22}$	1.852	1.851	$\beta_{1223}$	0.000	0.017
$c_{23}$	0.000	0.000	$\beta_{1233}$	0.000	-0.050
$c_{33}$	3.280	3.219	$\beta_{1333}$	0.000	-0.038
N/m <sup>2</sup>	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\beta_{2222}$	0.430	0.407
$k_1$	0.045	0.045	$\beta_{2223}$	0.000	0.456
$k_2$	0.286	0.286	$\beta_{2233}$	1.935	0.107
$k_3$	1.045	1.046	$\beta_{2333}$	0.000	0.018
N/m <sup>3</sup>	$\times 10^6$	$\times 10^6$	$\beta_{3333}$	2.177	0.002
$\alpha_{111}$	0.000	0.000			
$\alpha_{112}$	0.000	0.000			
$\alpha_{113}$	0.000	0.000			
$\alpha_{122}$	0.000	0.000			
$\alpha_{123}$	0.000	0.000			
$\alpha_{133}$	0.000	0.000			
$\alpha_{222}$	0.000	0.000			
$\alpha_{223}$	0.000	0.000			
$\alpha_{233}$	0.000	0.000			
$\alpha_{333}$	0.000	0.000			

## 2.5 まとめ

非線形連続系の同定法の開発を目的として，この章では両端単純支持の一様な非線形はりを取り上げて同定法の提案をした．提案した方法は，周期外力による応答データからモード座標を求め，そのデータに基づいてモード方程式を定めるものである．数値シミュレーションによって，提案した方法で非線形はりが精度よく同定できることを示した．

### 第3章 非一様はりの同定法<sup>(6)</sup>

#### 3.1 まえがき

第2章において非線形連続系の同定法の基礎的な検討を目的として、非線形はりを取り上げて同定法を提案した。ただしそこでは簡単のため、対象を一様なはりに限定し、それを前提にした同定法を提案した。またそこでは、振動データの測定位置を等間隔にとるものとし、提案した同定法ではその点を利用した。

この章では、第2章で前提とした制限を設ける必要がないことを示すため、例として一様とは限らないはりを取り上げ、同定法を提案する。そして提案した同定法の有効性を数値シミュレーションによって検討する。

#### 3.2 問題設定

図3.1に示すように、長さが $l$ で、軸方向に拘束された非一様はりを考える。はりに沿って $x$ 軸を定め、一方の端を原点、他方の端を $x = l$ の点とする。はりの密度 $\rho$ 、断面積 $A$ 、縦弾性係数 $E$ 、断面二次モーメント $I$ はいずれも $x$ の関数であってよい。はりのたわみを $w(x, t)$ あるいは単に $w$ とおけば、大きな振幅で振動するときのはりの運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - a \left[ u_0 + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + C \frac{\partial w}{\partial t} = Q(x, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

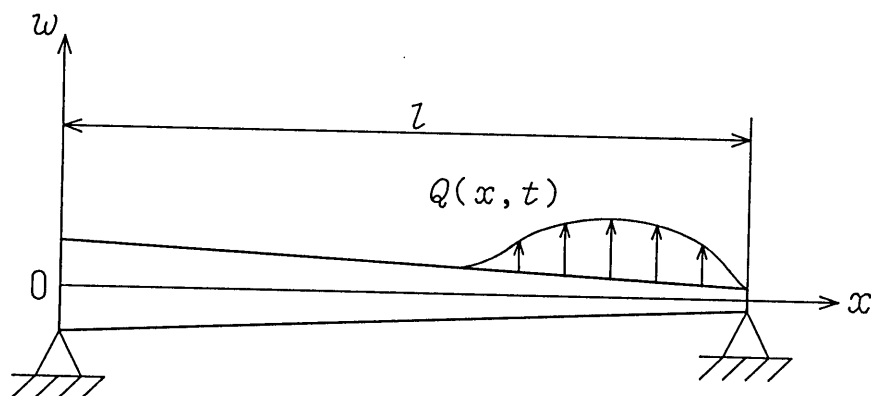


図3.1 同定の対象とするはり

である<sup>(6.1)</sup>。ここに

$$\alpha = \left[ \int_0^l \frac{1}{EA} dx \right]^{-1} \quad (3.2)$$

である。系に作用する減衰力として、係数 $C$ の粘性減衰力を考えた。 $u_0$ は軸方向の張力による初期変位で、張力を加えなければ $u_0 = 0$ である。 $Q(x, t)$ ははりに作用する外力を単位長さ当たりについて表したものである。

以上のはりに対して同定の問題を考える前に、外力 $Q(x, t)$ を与えて、式(3.1)からたわみ $w(x, t)$ を求める解析の問題を考える。

この解析のため、まずここで考えているはりに対応する線形非減衰はりのモード関数を求める。そこで式(3.1)で減衰項、非線形項、外力項を無視すると、

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \alpha u_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3)$$

を得る。パラメータ $\rho$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $I$ などが定数でないとき、式(3.3)から解析的にモード関数を定めることは一般には難しいが、数値解析法によれば容易に定められる。ここでは、数値解析法として有限要素法を採用することにする。このためはりを $x$ 軸のいくつかの点で分割し、有限要素法を適用して固有値問題をとくと、固有値およびモード関数の節点における値が求められる。モード関数の節点における値を有限要素解析で用いた内挿関数によってつなぎ合わせれば、 $x$ の関数の形でモード関数が得られる。以下このようにして得られたモード関数を $\phi_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )あるいは単に $\phi_n$ とおく。後の便利のためモード関数 $\phi_n$ を条件

$$\int_0^l \rho A \phi_n^2 dx = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.4)$$

によって正規化しておく。関数 $\phi_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )は直交性を満たすので、式(3.4)の条件と合わせれば

$$\int_0^l \rho A \phi_m \phi_n dx = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.5)$$

を満たす。ここに  $\delta_{mn}$  は

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (3.6)$$

である。

式(3.1)からたわみ  $w$  を求めるために、たわみ  $w$  を、モード関数で展開した

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) \phi_n(x) \quad (3.7)$$

の形で求めるものとする。ここに  $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は時間  $t$  の関数で、線形系の場合に準じてモード座標とよぶことにする。式(3.7)を式(3.1)に代入し、式(3.5)の關係に注意してガラーキン法を用いると、モード方程式

$$\ddot{X}_n(t) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \dot{X}_m(t) + k_n X_n(t) + N_n = q_n(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.8)$$

を得る。ここに  $k_n$  は有限要素法で得られた固有値であり、 $c_{nm}$  は

$$c_{nm} = c_{mn} = C \int_0^l \phi_n \phi_m dx \quad (3.9)$$

で与えられる定数である。 $N_n$  は

$$N_n = \sum_{i \leq j \leq k} \beta_{n,ijk} X_i(t) X_j(t) X_k(t) \quad (3.10)$$

の形のモード座標  $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) の関数で、その係数  $\beta_{n,ijk}$  は  $\phi_n$  から定められる既知の値である。また記号  $\Sigma$  は、記号の下に書かれた条件を満たす範囲でそこに表れる添字に関する総和を意味するものとする（以下も同じ）。さらに  $q_n(t)$  は

$$q_n(t) = \int_0^l Q(x, t) \phi_n(x) dx \quad (3.11)$$

で与えられる時間の関数である。式(3.8)を解いてモード座標  $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

を定めれば、式(3.7)によってはりのたわみ $w$ が求められる。したがって式(3.1)によって $w$ を求める問題は、式(3.8)によって $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )を求める問題に帰着される。

以上の準備をしておいてこの章で取り上げる問題を設定する。非線形はりを同定するという問題は本来の定義からは、適当な外力 $Q(x, t)$ のデータとそれに対するたわみ $w(x, t)$ のデータを用いて運動方程式(3.1)を定めることであるといえる。しかし以上の議論からわかるように、任意の外力に対する系のたわみはモード方程式(3.8)によって求めることができるので、同定の目的を考えれば、式(3.1)を定めるという問題を式(3.8)を定めるという問題に置き換えてもよいと思われる。そこで適当な外力 $Q(x, t)$ とそれに対するたわみ $w(x, t)$ のデータを知ってモード方程式(3.8)を定める方法を提案し、非線形はりの同定法の提案とする。ただし式(3.8)のモード方程式は無限個の方程式からなるが、モード方程式からたわみを求めるとき、実用上はいくつかの方程式のみを考慮するだけでさしつかえないので、ここでも、はじめのいくつかの方程式を定めることを考える。

### 3.3 同定法の提案

#### 3.3.1 $X_n(t)$ と $q_n(t)$ の求め方

提案する同定法において必要となる過程の順に従って、はじめに、たわみ $w(x, t)$ の測定データから $M$ 個のモード座標 $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ )を定める方法を考える。

このため対象とするはりの線形のモード関数 $\phi_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )は既知であるとする。モード関数は、はりの幾何学的な寸法とはりの材料の物理定数が与えられれば、力学原理に基づいて前述のように有限要素法などで数値的に求めることができる。一般に、対象とする系のモデル化にあたって特に難しい問題は対象とする系の減衰特性と非線形特性の把握であって、線形復元力の部分に依存して定められる線形のモード関数は比較的精度よく求められると考えてよい。また対象とする系の減衰が小さい場合には、通常のモード解析によって実験的にモード関数を定めることも可能である。したがってモード関数が既知であるとすることは非線形系の同定にあたって大きな制限ではないと考えられる。

たわみ $w(x, t)$ の測定点として、 $N$ 個の点 $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )を定め、ある時刻 $t = t_j$ で各測定点におけるたわみ $w(x_i, t_j)$ を測定する。このとき式(3.7)において( $M + 1$ )次以上の高次のモード座標の影響が無視できるものとする、測定されたたわみ

$w(x_i, t_j)$ と未知のモード座標 $X_n(t_j)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ )の間には近似的に

$$w(x_i, t_j) = \sum_{n=1}^M X_n(t_j) \phi_n(x_i) \quad (3.12)$$

の関係が成り立つ。右辺の $\phi_n(x_i)$ は上述のように既知である。そこで $M$ を測定点数 $N$ に等しくとれば、式(3.12)は $X_n(t_j)$ に関する線形連立方程式となり、係数マトリックスが特異にならない限り、 $X_n(t_j)$ が求められる。

式(3.12)から $X_n(t_j)$ を求めるのに、測定点の位置は必ずしも等間隔にとる必要はない。後の数値例では、測定点をはりの比較的広い範囲にわたってとれば十分な精度で $X_n(t_j)$ が求められることが確かめられた。

以上の方法を各時刻 $t_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ )について繰り返せば、 $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ )を時間の離散点 $t_j$ について求めることができる。

$q_n(t)$ を定める問題は簡単である。外力 $Q(x, t)$ のデータを式(3.11)の積分ができる程度に $x$ のいくつかの点で測定し、各時刻 $t = t_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ )において積分計算を行えば、時間の離散点 $t_j$ における $q_n(t)$ が求まる。

以上で $X_n(t)$ と $q_n(t)$ をデータとして得られたので、次にモード方程式を定める方法を提案する。

### 3.3.2 モード方程式の定め方

モード方程式を定めるため、はじめにモード方程式をどのような形におくかを考える。たわみのデータからモード座標を求めるとき、線形のモード関数を用いたので、モード方程式は慣性項および線形の復元力項では連成しない。これに対し、減衰項および非線形項では連成し得る。したがって求めるモード方程式は一般に

$$\ddot{X}_n(t) + \sum_{m=1}^M c_{nm} \dot{X}_m(t) + k_n X_n(t) + N_n = q_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots, M) \quad (3.13)$$

の形におくことができる。この式でパラメータ $c_{nm}$ ,  $k_n$ は未知数で、 $c_{nm}$ は

$$c_{nm} = c_{mn} \quad (n \neq m) \quad (3.14)$$

を満たすとする。また非線形項 $N_n$ は一般にモード座標 $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ )あるいはその時間微分の非線形関数で、多くの場合それらの多項式で近似できる。ここでは非線形性が復元力にあるはりを考えているので、非線形項 $N_n$ はモード座標 $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ )のみの関数であると考え、そこで各 $N_n$ は $X_n(t)$ の二乗からはじまる

$$\begin{aligned} N_n = & \sum_{i \leq j} \alpha_{n,ij} X_i(t) X_j(t) \\ & + \sum_{i \leq j \leq k} \beta_{n,ijk} X_i(t) X_j(t) X_k(t) + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

の形の多項式で与えられるとする。ここに係数 $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\dots$ は未知のパラメータである。

式(3.13), (3.15)によってモード方程式の形を定めることができたので、次に、パラメータ $c_{nm}$ ,  $k_n$ および非線形項 $N_n$ の係数パラメータ $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\dots$ をどのように定めるかを考える。

このため、まず外力 $Q(x, t)$ として周期 $T$ の周期外力を採用し、外力およびこれに対する、外力と同じ周期の定常状態のたわみ振動 $w(x, t)$ をデータとして測定する。そのデータから3.3.1節に述べた方法によって、 $q_n(t)$ および $X_n(t)$ を求める。このようにして得た $q_n(t)$ と $X_n(t)$ は外力と同じ周期を持つので、加えた外力の周期 $T$ からきまる角振動数 $\omega (= 2\pi/T)$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} q_n(t) = & (Q_n)_0 \\ & + (Q_n)_1 \cos \omega t + (Q_n)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ & + (Q_n)_1^* \sin \omega t + (Q_n)_2^* \sin 2\omega t + \dots \\ X_n(t) = & (X_n)_0 \\ & + (X_n)_1 \cos \omega t + (X_n)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ & + (X_n)_1^* \sin \omega t + (X_n)_2^* \sin 2\omega t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここにフーリエ係数 $(Q_n)_0$ ,  $(Q_n)_1$ ,  $(Q_n)_2$ ,  $\dots$ および $(X_n)_0$ ,  $(X_n)_1$ ,  $(X_n)_2$ ,  $\dots$ はFFT (高速フーリエ変換) などの手法により容易に求められる既知の量である。次に、式(3.15)で仮定した項 $X_i(t)X_j(t)$ ,  $X_i(t)X_j(t) \times X_k(t)$ ,  $\dots$ を上で求めたモード座標 $X_n(t)$ の演算によって求め、その結果もフーリエ級数



$$\begin{aligned}
& X_i(t)X_j(t) = (X_iX_j)_0 \\
& \quad + (X_iX_j)_1 \cos \omega t + (X_iX_j)_2 \cos 2\omega t + \cdots \\
& \quad + (X_iX_j)_1^* \sin \omega t + (X_iX_j)_2^* \sin 2\omega t + \cdots \\
& X_i(t)X_j(t)X_k(t) = (X_iX_jX_k)_0 \\
& \quad + (X_iX_jX_k)_1 \cos \omega t + (X_iX_jX_k)_2 \cos 2\omega t + \cdots \\
& \quad + (X_iX_jX_k)_1^* \sin \omega t + (X_iX_jX_k)_2^* \sin 2\omega t + \cdots \\
& \quad \vdots
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

の形におく。ここでもフーリエ係数  $(X_iX_j)_0$ ,  $(X_iX_j)_1$ ,  $\cdots$  は既知の量である。

式(3.16), 式(3.17)を式(3.13)に代入し, ハーモニックバランスの原理を用いて, 両辺の定数項および  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$ ,  $\cdots$  の係数をそれぞれ等しいとおくと, 次の形の方程式を得る。

$$[A]\{S\} = \{Q\} \tag{3.18}$$

ここに  $[A]$  は式(3.16)の第2式, (3.17)に表れるフーリエ係数から決まる既知のマトリックス,  $\{Q\}$  は式(3.16)の第1式に表れるフーリエ係数から決まる既知のベクトル, そして  $\{S\}$  は系のパラメータ  $c_{nm}$ ,  $k_n$  および非線形項  $N_n$  の係数  $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\cdots$  を成分とする未知のベクトルである。これらの表示式は, 求めたいモード方程式の数  $M$ , 非線形項を表す多項式の次数, フーリエ級数展開の打ち切り次数などを指定すれば容易に求められるもので, 一般的な表示は面倒であるからここでは省略する。

加える外力の角振動数  $\omega$  としていくつかの値を適当に定め, またフーリエ級数展開の打ち切り次数を適当にとれば, 未知数の数より多い方程式を含んで再び式(3.18)の形の方程式を得る。そこでこの式に最小二乗法を適用すれば,  $\{S\}$  は

$$\{S\} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T\{Q\} \tag{3.19}$$

によって定められる。必要があれば重みマトリックスを用いて同定の精度を上げるよう試みることができる。重みマトリックス  $[W]$  を用いるとき,  $\{S\}$  は式(3.19)の代わりに

$$\{S\} = ([A]^T[W][A])^{-1}[A]^T[W]\{Q\} \tag{3.20}$$

で与えられる。式(3.19)あるいは式(3.20)によって $\{S\}$ を求めれば、モード方程式が定められたことになる。

### 3.4 数値シミュレーションによる同定の例

3.3節で提案した同定法の有効性を検討するため、ここで数値的に求めた振動データを実験データとみなし、同定の数値シミュレーションを行う。求めたいモード方程式は低次の三つのモードに関するものとする。

取り上げるはりとは、図3.2に示したように、厚さが一定で、幅が段階的に変化する変断面はりとする。幅の変化も含めて式(3.1)に表れる各パラメータの値を次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad C = 0.15 \text{ Ns/m}^2 \\ E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad l = 8.16 \times 10^{-1} \text{ m} \\ u_0 &= 1.30 \times 10^{-6} \text{ m} \\ A &= \begin{cases} 9.50 \times 10^{-6} \text{ m}^2 (0.00 \leq x \leq 2.04 \times 10^{-1} \text{ m}) \\ 3.00 \times 10^{-6} \text{ m}^2 (2.04 \times 10^{-1} \leq x \leq 4.08 \times 10^{-1} \text{ m}) \\ 9.50 \times 10^{-6} \text{ m}^2 (4.08 \times 10^{-1} \leq x \leq 8.16 \times 10^{-1} \text{ m}) \end{cases} \\ I &= \begin{cases} 1.98 \times 10^{-8} \text{ m}^4 (0.00 \leq x \leq 2.04 \times 10^{-1} \text{ m}) \\ 6.25 \times 10^{-8} \text{ m}^4 (2.04 \times 10^{-1} \leq x \leq 4.08 \times 10^{-1} \text{ m}) \\ 1.98 \times 10^{-8} \text{ m}^4 (4.08 \times 10^{-1} \leq x \leq 8.16 \times 10^{-1} \text{ m}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

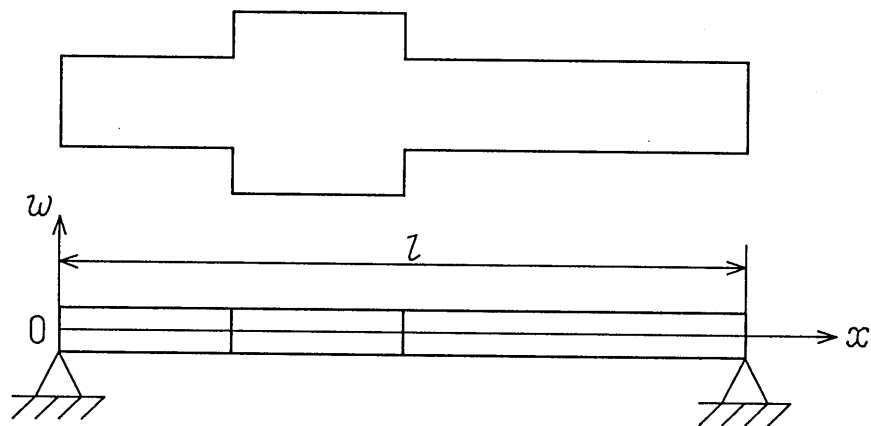


図3.2 数値シミュレーションに用いたはり

外力として，式

$$Q(x, t) = q_0 \delta(x - x_f) \cos \omega t \quad (3.22)$$

で与えられる集中的な調和外力を作用させる場合を考える．この式において  $q_0$  は外力の大きさ， $x_f$  は集中外力を作用させる加振点である．以下に示す数値例では大きさ  $q_0$  は  $q_0 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ N}$ ，加振点  $x_f = (3/10) l$  とした．

#### 3.4.1 振動モードの求め方

振動モードを求めるため，はりを等分割し，分割点を節点とし，この点におけるたわみと傾きを未知数にして，有限要素法を用いる．内挿関数としては三次の多項式を用い，たわみと傾きが分割点で連続するという条件を用いて定式化する．式(3.21)のパラメータに対し，はりを20等分して得た振動モードのはじめの三つを図3.3に示す．

#### 3.4.2 振動データの求め方

たわみ  $w$  の振動データを，モード方程式を用いて次のように数値的に求める．実際の実験データでは，たわみは高次のモード成分までを含むので，ここでは十次までのモード成分を含めて考える．そのため，式(3.8)のはじめの10式を，モード座標  $X_n(t)$  ( $n \geq 11$ ) を無視し，与えられた周期外力に対し適当な初期条件のもとに数値的に積分し，外力と同じ周期の周期解になるまで積分を続ける．こうして得た周期解を式(3.7)に代入し，たわみ  $w$  の振動データとし，これを実験データとみなす．

#### 3.4.3 モード座標とモード方程式の求め方

3.4.2 節で求めた振動データを用いて，式(3.12)によってモード座標  $X_n(t)$  を求める．ここでは測定点の数だけのモード座標を求め，そのうち  $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) を同定に用いることにする．

非線形項は式(3.15)に示す二乗，三乗の項よりなるとする．ただし，非線形はりの問題では，力学的な考察によって，各非線形項はポテンシャルから導かれるので，ここでは三乗，四乗の多項式で与えられるポテンシャル

$$\begin{aligned}
U = & \sum_{i \leq j \leq k} \alpha_{ijk} X_i(t) X_j(t) X_k(t) \\
& + \sum_{i \leq j \leq k \leq l} \beta_{ijkl} X_i(t) X_j(t) X_k(t) X_l(t)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

から

$$N_n = \frac{\partial U}{\partial X_n(t)} \tag{3.24}$$

によって導かれるとする。このようにしたほうが、モード方程式に含まれる非線形項の係数パラメータが減少し、精度の向上が期待される。

フーリエ級数展開の打ち切り次数は3にする。またここでは重みマトリックスは用いないことにする。

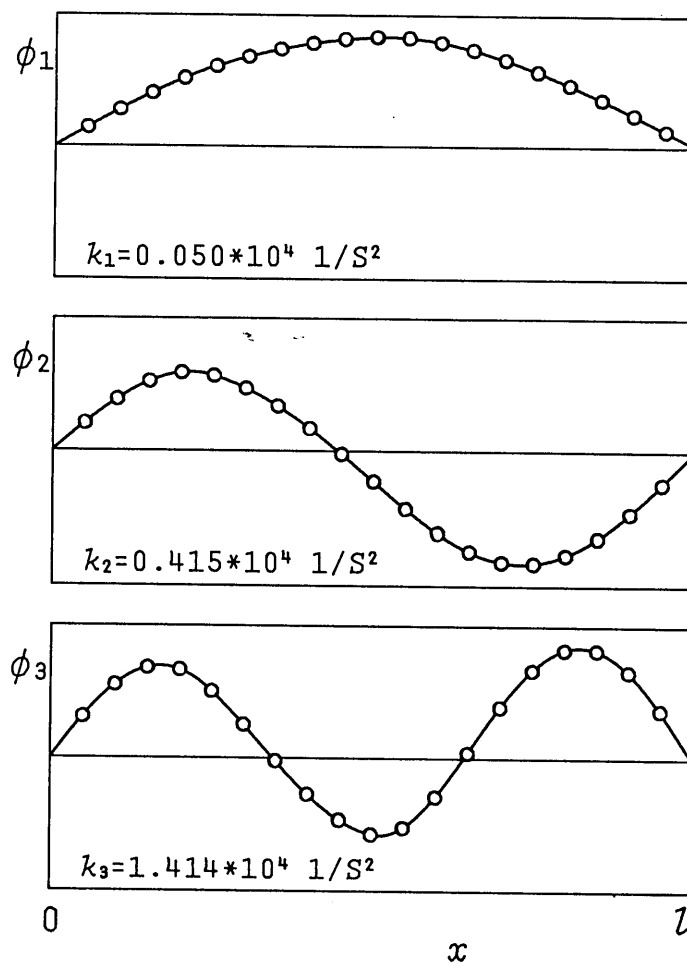


図3.3 振動モードの例

### 3.4.4 数値シミュレーションの結果

数値シミュレーションによって得られた結果の例を次に示す。振動データの振動数範囲を、一次から三次までの振動モードの共振点を含む20rad/sから148rad/sの間に定める。同定に用いたたわみの振動データを示すため、たわみのデータのもとになった $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots, 10$ )のうちはじめの三つを取り上げ、共振曲線の形で示すと図3.4に○印で示したようになる。図3.4に示した以外に、十次までのすべてのモード成分を含めて得たたわみのデータを実験データとみなした。はじめに、はりを8等分する7箇所の分割点に測定点をおいた場合の同定結果を表3.1に示す。表3.1には、たわみのデータを作成するときに用いたパラメータのものと同定で得られた値とを比較して示してある。表3.1からわかるように同定によって得られたパラメータの値はもとの値によく一致し、提案した同定法に

表3.1 同定結果(はりを等分割する7箇所の位置に測定点をおいた場合)

	Exact	Identified		Exact	Identified
$1/s$			$1/m^2 s^2 kg$	$\times 10^{11}$	$\times 10^{11}$
$C_{11}$	1.070	1.020	$\beta_{1111}$	0.041	0.040
$C_{12}$	-0.365	-0.383	$\beta_{1112}$	-0.042	-0.046
$C_{13}$	0.247	0.245	$\beta_{1113}$	0.042	0.043
$C_{22}$	1.658	1.633	$\beta_{1122}$	0.485	0.474
$C_{23}$	-0.173	-0.342	$\beta_{1123}$	-0.043	-0.063
$C_{33}$	1.601	1.465	$\beta_{1133}$	1.073	0.983
$1/s^2$	$\times 10^4$	$\times 10^4$	$\beta_{1222}$	-0.244	-0.260
$k_1$	0.050	0.050	$\beta_{1223}$	0.253	0.614
$k_2$	0.415	0.430	$\beta_{1233}$	-0.557	-0.809
$k_3$	1.414	1.427	$\beta_{1333}$	0.540	0.550
$1/ms^2 kg^{1/2}$	$\times 10^7$	$\times 10^7$	$\beta_{2222}$	1.376	1.302
$\alpha_{111}$	0.000	0.001	$\beta_{2223}$	-0.127	-0.244
$\alpha_{112}$	0.000	-0.001	$\beta_{2233}$	6.167	8.189
$\alpha_{113}$	0.000	0.001	$\beta_{2333}$	-0.285	-0.038
$\alpha_{122}$	0.000	0.007	$\beta_{3333}$	6.901	6.480
$\alpha_{123}$	0.000	-0.017			
$\alpha_{133}$	0.000	-0.029			
$\alpha_{222}$	0.000	-0.001			
$\alpha_{223}$	0.000	-0.001			
$\alpha_{233}$	0.000	0.001			
$\alpha_{333}$	0.000	-0.031			

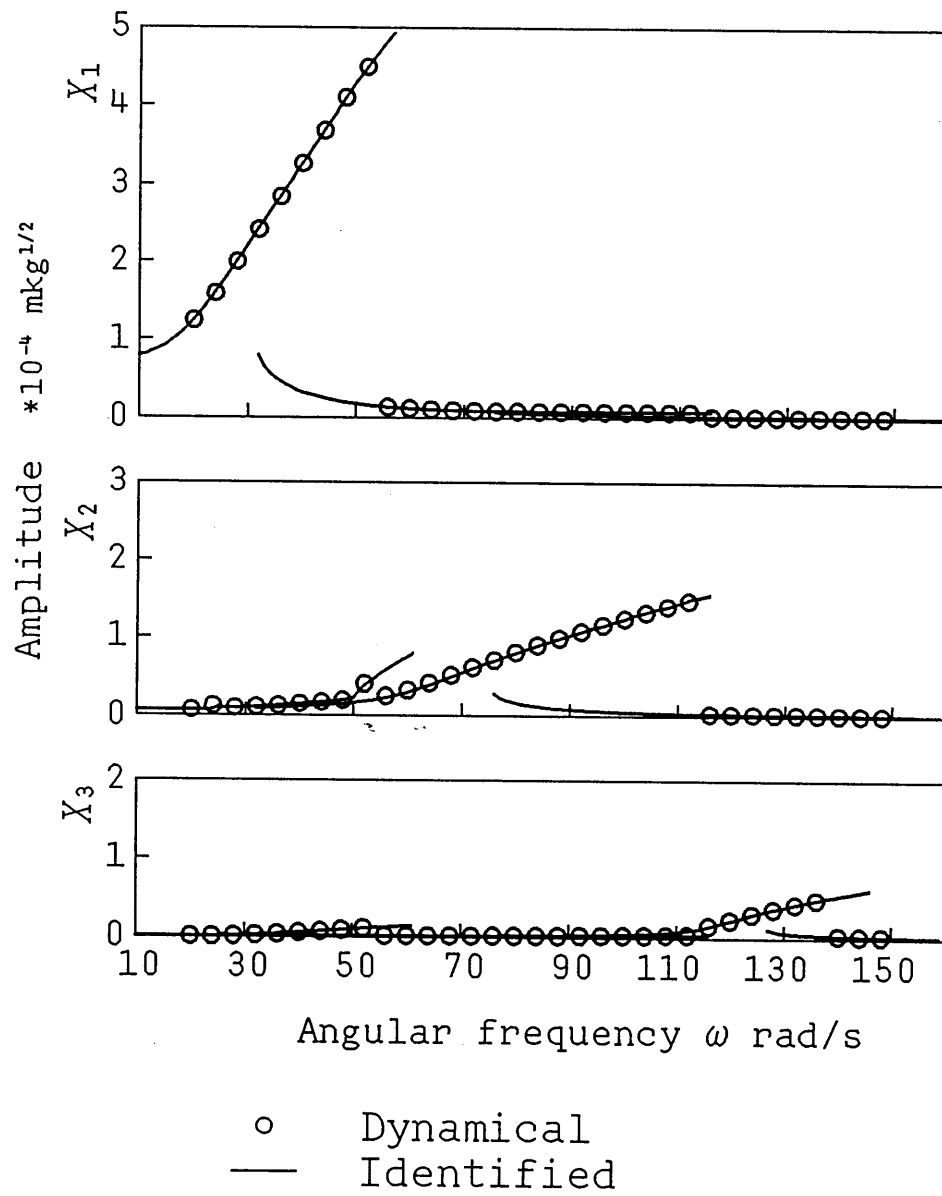
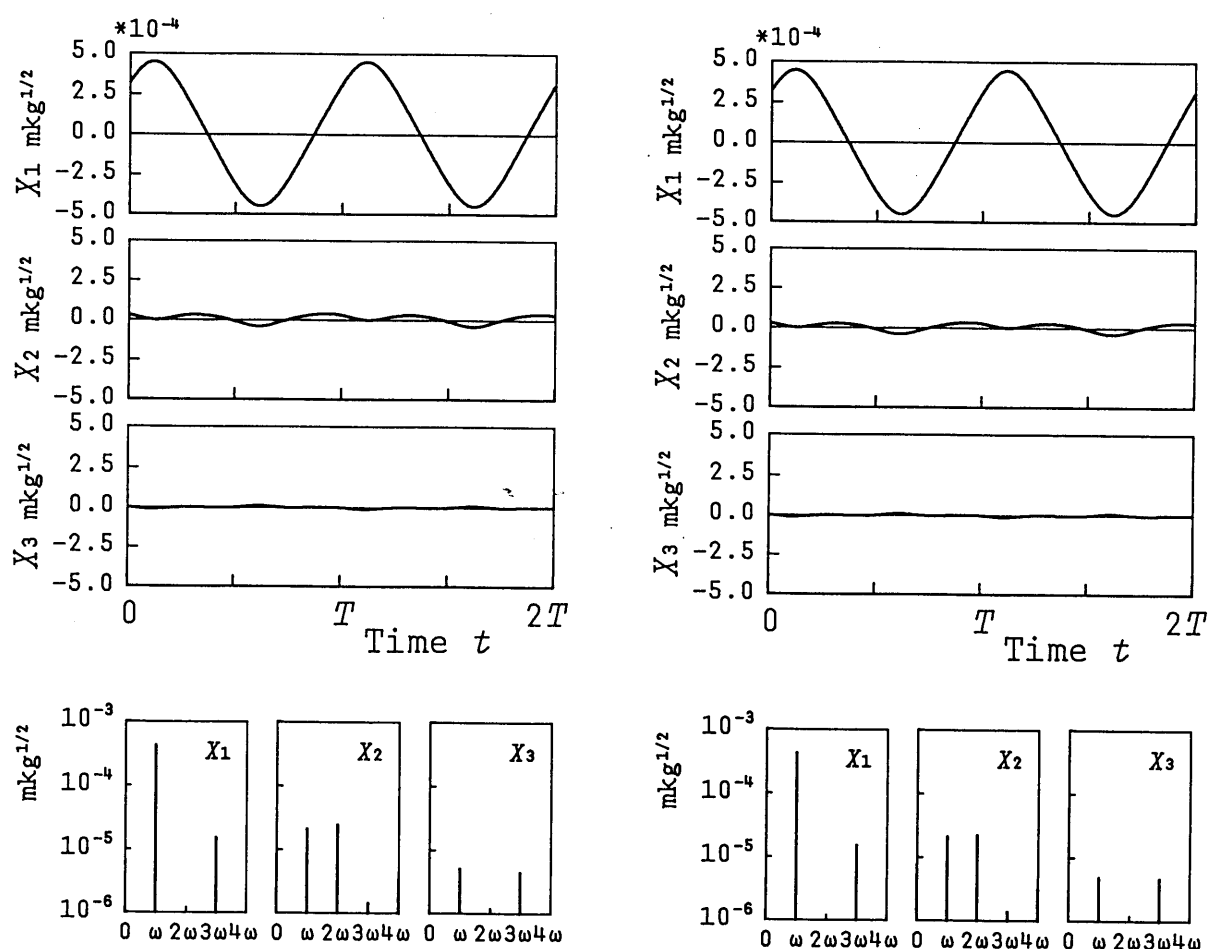


図3.4 共振曲線による比較(表3.1の場合)

よってもとのモード方程式が得られることがわかる。これをさらに確認するため、同定によって得られたモード方程式を用いて共振曲線を求め、図3.4に重ねて実線で示した。またこのときの $X_n(t)$  ( $n = 1, 2, 3$ )の振動波形の例を図3.5(b)に、同定に用いたデータの振動波形を図3.5(a)にそれぞれ示す。図3.4あるいは図3.5からわかるように、同定結果はもとの実験データをよく再現している。

測定点を等分割点にとり、測定点の数を上記の7より多くするときにはさらにより結果が得られた。



(a) 同定に用いた振動波形

(b) 同定によって得られた振動波形

図3.5 振動波形による比較 (表3.1の場合,  $\omega = 52\text{rad/s}$ )

次に、測定点の数を少なくした場合の結果の例として、たわみのデータは上記と同じとし、はりを5等分する4箇所の分割点に測定点をおいた場合の同定結果を表3.2に示す。表3.2からわかるように、この場合は表3.1の場合に比べて、パラメータの値に誤差の大きいものが含まれている。さらに検討を加えるため、測定点を7とした場合と同じように、共振曲線あるいは振動波形で同定結果ともとのデータを比較してみる。図3.6は共振曲線による比較、図3.7は振動波形による比較を示したものである。これらの図を見ると、細かいところではもとのデータと同定結果の間に違いがあるが、振動パラメータで比較するほどには振幅の誤差は大きくないことがわかる。これは、振動の振幅に寄与の大きいパラメータは精度よく定められることを示している。

表3.2 同定結果(はりを等分割する4箇所の位置に測定点をおいた場合)

	Exact	Identified		Exact	Identified
$1/s$			$1/m^2 s^2 kg$	$\times 10^{11}$	$\times 10^{11}$
$c_{11}$	1.070	1.070	$\beta_{1111}$	0.041	0.041
$c_{12}$	-0.365	-0.787	$\beta_{1112}$	-0.042	-0.066
$c_{13}$	0.247	0.508	$\beta_{1113}$	0.042	0.080
$c_{22}$	1.658	1.546	$\beta_{1122}$	0.485	0.650
$c_{23}$	-0.173	-1.955	$\beta_{1123}$	-0.043	-1.382
$c_{33}$	1.601	1.887	$\beta_{1133}$	1.073	1.323
$1/s^2$	$\times 10^4$	$\times 10^4$	$\beta_{1222}$	-0.244	-0.362
$k_1$	0.050	0.050	$\beta_{1223}$	0.253	11.010
$k_2$	0.415	0.485	$\beta_{1233}$	-0.557	-10.951
$k_3$	1.414	1.437	$\beta_{1333}$	0.540	-1.320
$1/ms^2 kg^{1/2}$	$\times 10^7$	$\times 10^7$	$\beta_{2222}$	1.376	1.177
$\alpha_{111}$	0.000	0.001	$\beta_{2223}$	-0.127	0.022
$\alpha_{112}$	0.000	-0.008	$\beta_{2233}$	6.167	34.734
$\alpha_{113}$	0.000	0.014	$\beta_{2333}$	-0.285	2.418
$\alpha_{122}$	0.000	0.002	$\beta_{3333}$	6.901	6.382
$\alpha_{123}$	0.000	-0.262			
$\alpha_{133}$	0.000	0.095			
$\alpha_{222}$	0.000	-0.002			
$\alpha_{223}$	0.000	-0.015			
$\alpha_{233}$	0.000	-0.109			
$\alpha_{333}$	0.000	-0.033			



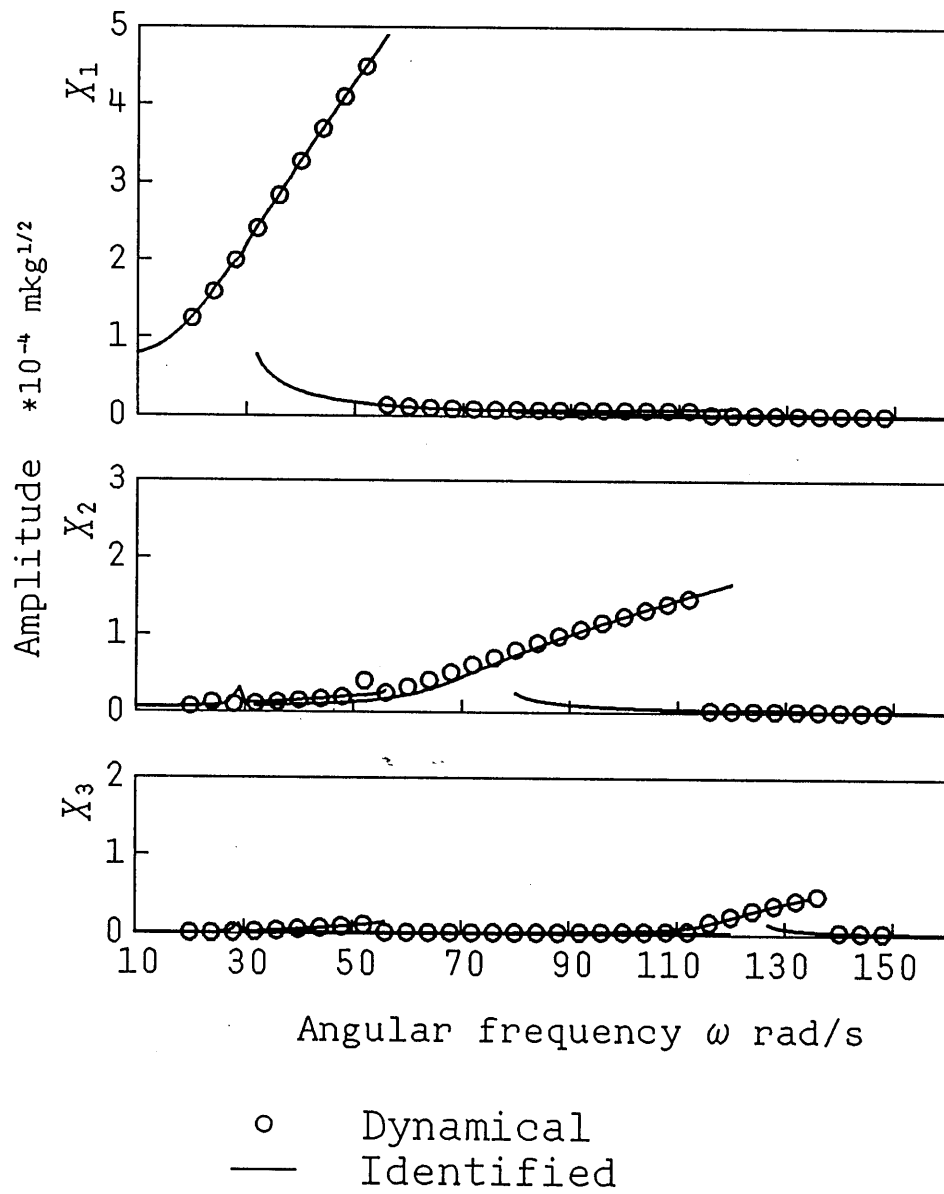
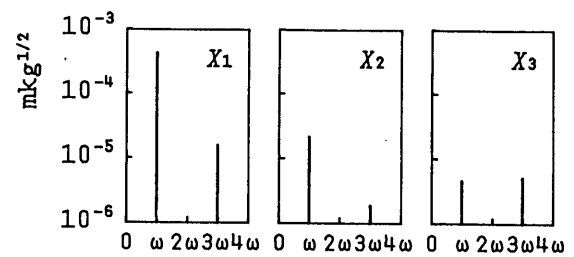
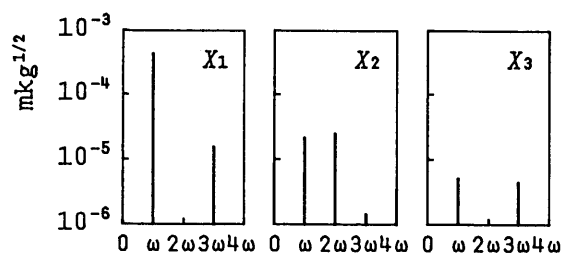
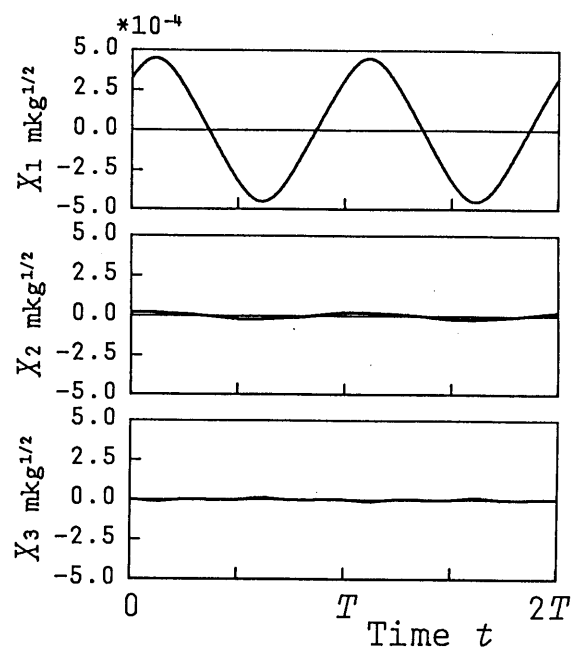
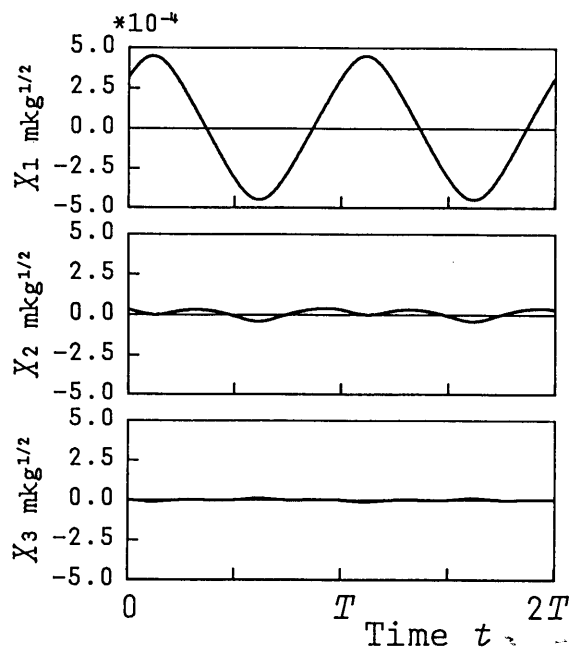


図3.6 共振曲線による比較(表3.2の場合)



(a) 同定に用いた振動波形

(b) 同定によって得られた振動波形

図3.7 振動波形による比較(表3.2の場合,  $\omega = 52\text{rad/s}$ )

次に，測定点を等間隔に限定しないでとった場合の例として，測定位置  $x$  を

$$x = \frac{2}{20}l, \frac{4}{20}l, \frac{7}{20}l, \frac{10}{20}l, \frac{12}{20}l, \frac{13}{20}l, \frac{16}{20}l \quad (3.25)$$

の位置に 7 箇所とった場合の同定結果を表 3.3 に示す．この場合にも表 3.1 と同程度の精度で同定結果が得られた．

表 3.3 同定結果(式(3.25)の位置に測定点をおいた場合)

	Exact	Identified		Exact	Identified
$1/s$			$1/m^2s^2kg$	$\times 10^{11}$	$\times 10^{11}$
$c_{11}$	1.070	1.016	$\beta_{1111}$	0.041	0.040
$c_{12}$	-0.365	-0.364	$\beta_{1112}$	-0.042	-0.045
$c_{13}$	0.247	0.221	$\beta_{1113}$	0.042	0.042
$c_{22}$	1.658	1.639	$\beta_{1122}$	0.485	0.460
$c_{23}$	-0.173	-0.182	$\beta_{1123}$	-0.043	0.008
$c_{33}$	1.601	1.475	$\beta_{1133}$	1.073	0.950
$1/s^2$	$\times 10^4$	$\times 10^4$	$\beta_{1222}$	-0.244	-0.241
$k_1$	0.050	0.050	$\beta_{1223}$	0.253	0.126
$k_2$	0.415	0.436	$\beta_{1233}$	-0.557	0.237
$k_3$	1.414	1.413	$\beta_{1333}$	0.540	0.779
$1/ms^2kg^{1/2}$	$\times 10^7$	$\times 10^7$	$\beta_{2222}$	1.376	1.292
$\alpha_{111}$	0.000	0.001	$\beta_{2223}$	-0.127	-0.207
$\alpha_{112}$	0.000	-0.001	$\beta_{2233}$	6.167	6.207
$\alpha_{113}$	0.000	0.000	$\beta_{2333}$	-0.285	-0.522
$\alpha_{122}$	0.000	0.007	$\beta_{3333}$	6.901	6.703
$\alpha_{123}$	0.000	-0.007			
$\alpha_{133}$	0.000	-0.034			
$\alpha_{222}$	0.000	-0.001			
$\alpha_{223}$	0.000	-0.001			
$\alpha_{233}$	0.000	0.008			
$\alpha_{333}$	0.000	-0.031			

測定点を等間隔におかない他の例として、測定点の数より一つ多い次数のモードの節の位置に測定点を置いた場合を取り上げ、同定を行った。同定結果の例として、五次のモードの節の位置にあたる4箇所においた場合の同定結果を表3.4に示す。この結果と表3.2の結果を比較すると、測定点の数は同じであるが、表3.4のほうが表3.2よりいくらか精度のよい同定結果となっていることがわかる。

表3.4 同定結果(五次モードの節の位置にあたる4箇所の位置に測定点を置いた場合)

	Exact	Identified		Exact	Identified
$1/s$			$1/m^2 s^2 kg$	$\times 10^{11}$	$\times 10^{11}$
$c_{11}$	1.070	1.031	$\beta_{1111}$	0.041	0.040
$c_{12}$	-0.365	-0.478	$\beta_{1112}$	-0.042	-0.050
$c_{13}$	0.247	0.303	$\beta_{1113}$	0.042	0.053
$c_{22}$	1.658	1.623	$\beta_{1122}$	0.485	0.519
$c_{23}$	-0.173	-0.753	$\beta_{1123}$	-0.043	-0.362
$c_{33}$	1.601	1.469	$\beta_{1133}$	1.073	1.072
$1/s^2$	$\times 10^4$	$\times 10^4$	$\beta_{1222}$	-0.244	-0.299
$k_1$	0.050	0.050	$\beta_{1223}$	0.253	3.010
$k_2$	0.415	0.439	$\beta_{1233}$	-0.557	-3.404
$k_3$	1.414	1.428	$\beta_{1333}$	0.540	0.144
$1/ms^2 kg^{1/2}$	$\times 10^7$	$\times 10^7$	$\beta_{2222}$	1.376	1.284
$\alpha_{111}$	0.000	0.001	$\beta_{2223}$	-0.127	-0.230
$\alpha_{112}$	0.000	-0.003	$\beta_{2233}$	6.167	14.634
$\alpha_{113}$	0.000	0.004	$\beta_{2333}$	-0.285	0.491
$\alpha_{122}$	0.000	0.007	$\beta_{3333}$	6.901	6.479
$\alpha_{123}$	0.000	-0.073			
$\alpha_{133}$	0.000	-0.009			
$\alpha_{222}$	0.000	-0.001			
$\alpha_{223}$	0.000	-0.004			
$\alpha_{233}$	0.000	-0.020			
$\alpha_{333}$	0.000	-0.032			

最後に、測定点をはり全体にわたらないで、例えばはりの長さの1/3程度の範囲にまとめてとった場合の例として、測定位置 $x$ を

$$x = \frac{8}{20}l, \frac{9}{20}l, \frac{10}{20}l, \frac{11}{20}l, \frac{12}{20}l, \frac{13}{20}l, \frac{14}{20}l \quad (3.26)$$

の位置に7箇所とった場合について同定を行った。その結果を表3.5に示す。表3.5よりこの場合には、測定点の数を多くしても精度のよい同定はできないことがわかった。

以上の各場合をまとめると、測定点をある程度の数とし、その位置をはり全体にわたって広くとれば、十分な精度でたわみの振動データからモード方程式を定めることができ、同定が可能であるといえる。

表3.5 同定結果(式(3.26)の位置に測定点をおいた場合)

	Exact	Identified		Exact	Identified
$1/s$			$1/m^2s^2kg$	$\times 10^{11}$	$\times 10^{11}$
$c_{11}$	1.070	1.211	$\beta_{1111}$	0.041	0.041
$c_{12}$	-0.365	-1.430	$\beta_{1112}$	-0.042	-0.050
$c_{13}$	0.247	-0.240	$\beta_{1113}$	0.042	0.194
$c_{22}$	1.658	1.693	$\beta_{1122}$	0.485	0.261
$c_{23}$	-0.173	3.353	$\beta_{1123}$	-0.043	-6.760
$c_{33}$	1.601	0.232	$\beta_{1133}$	1.073	-13.402
$1/s^2$	$\times 10^4$	$\times 10^4$	$\beta_{1222}$	-0.244	0.758
$k_1$	0.050	0.048	$\beta_{1223}$	0.253	51.326
$k_2$	0.415	0.601	$\beta_{1233}$	-0.557	180.461
$k_3$	1.414	1.771	$\beta_{1333}$	0.540	12.463
$1/ms^2kg^{1/2}$	$\times 10^7$	$\times 10^7$	$\beta_{2222}$	1.376	1.048
$\alpha_{111}$	0.000	0.001	$\beta_{2223}$	-0.127	6.633
$\alpha_{112}$	0.000	0.011	$\beta_{2233}$	6.167	48.797
$\alpha_{113}$	0.000	0.146	$\beta_{2333}$	-0.285	17.380
$\alpha_{122}$	0.000	-0.191	$\beta_{3333}$	6.901	0.619
$\alpha_{123}$	0.000	-3.309			
$\alpha_{133}$	0.000	-2.114			
$\alpha_{222}$	0.000	-0.019			
$\alpha_{223}$	0.000	-0.329			
$\alpha_{233}$	0.000	-0.505			
$\alpha_{333}$	0.000	-0.173			

### 3.5 まとめ

非線形連続系の同定法の開発を目的として，この章では，非一様なはりを取り上げて同定法を提案した．提案した方法は，周期外力によって引き起こされる定常状態のたわみ振動のデータから線形のモード関数を用いてモード座標を求め，その結果と周期外力のデータからモード方程式を定めるものである．数値シミュレーションによって提案した方法で非線形はりが精度よく同定できることを示した．

## 第4章 実際のはりへの応用<sup>(52)</sup>

### 4.1 まえがき

第2章および第3章において、非線形連続系の同定法に関する基礎的な検討を目的として、簡単な系である非線形はりの同定法を提案した。まず第2章において、両端単純支持の一樣な非線形はりの同定法を提案した。次に第3章で、一樣とは限定しない一般のはりに適用できるよう、第2章の同定法を拡張した。ただしこれらの報告では、同定法の適用性の検討を、数値的に得たデータを用いて行っており、実験から得たデータを用いてはいない。数値データはいくつかの仮定のもとに求められており、必ずしも実際の実験データと同じ性質を持つとは限らない。したがって提案した同定法の適用性の検討を、実際の実験から得られるデータを用いて行い、新たな問題点の有無を確認しておくことも重要と思われる。

この章では、鋼製の一樣なはりを用いて振動系を実際に作成し、そこから得られる実験データを用いて提案した同定法の適用性を検討する。適用性の評価は、同定で得られる数学モデルが実験データをどの程度再現するかによって行う。ここでは同定は低次の二つのモードに関するものとする。

### 4.2 実際のはりへの適用

#### 4.2.1 実験装置

同定に用いた実験装置の概略を図4.1に示す。この装置でBは同定の対象とする鋼製の一樣なはりを示す。このはりを、両端を玉軸受けを介して単純支持に近くなるよう支持し、軸方向に初期変位を加える。はりの諸元は以下の通りである。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{長さ:} & 1\,212\text{ mm} \\ \text{幅:} & 20\text{ mm} \\ \text{厚さ:} & 1.5\text{ mm} \\ \text{質量:} & 336\text{ g} \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

このはりにマグネット式の加振装置で周期外力を加えた。マグネットの幅は約80mmで、その中心を左端から763mmの位置においた。外力の大きさの測定は、圧電式力センサ  $S_f$

により、マグネットがはりに加える合力を測定する形で行った。またたわみを測定するための変位センサとしては、光学式のセンサ  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  を用いた。

力センサからの外力データ、変位センサからの振動データはA/D変換ボードを通してパーソナルコンピュータに取り込んだ。A/D変換ボードとしては12bitの分解能を持つものを用い、サンプリングタイムは1msとした。各センサごとに1回の測定につき4096個のデータを採取した。

#### 4.2.2 同定結果と検討

まず線形モード関数  $\sin(n\pi x/l)$  を利用して同定する場合をとり上げた。たわみの測定点として、はりを等分割する

$$x = \frac{1}{4}l, \quad \frac{2}{4}l, \quad \frac{3}{4}l \quad (4.2)$$

の3箇所の位置を定めた。はりに加える周期外力は、はりに加える外力の合力  $Q(t)$  の調和成分の振幅  $Q_0$  が0.4Nとなるように大きさを定めた。合力  $Q(t)$  とたわみ  $w$  の変化の例を図4.2に示す。

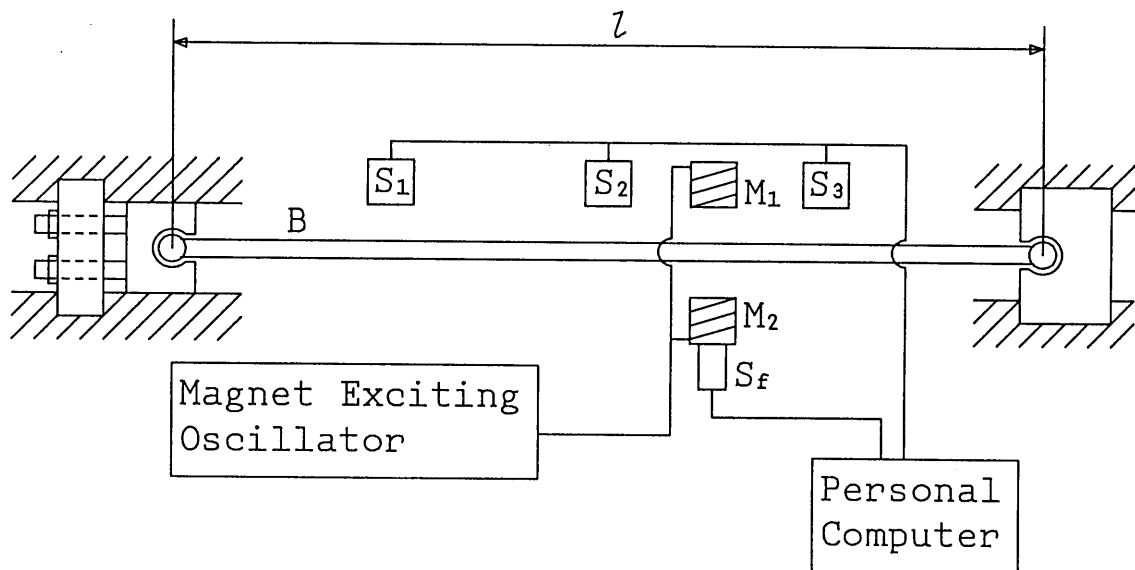


図4.1 実験装置



図4.2を得たと同じようにして，第一モードと第二モードの共振点を含む7 Hzから30 Hzの間の振動数範囲に29個のデータを収集した．たわみのデータを，各たわみの調和成分の振幅を縦軸に，振動数を横軸にとった共振曲線の形で示すと図4.3の○印のようになる．

3箇所におけるたわみ $w$ からモード座標 $X_n(t)$ を求めるには式(2.12)を用いた．また外力 $Q(x, t)$ から $q_n(t)$ を計算するには，マグネットがはりに及ぼす力がマグネットの幅にわたって一様な大きさで分布しているものと考えて式(2.8)から計算した． $q_n(t)$ と $X_n(t)$ の例として，図4.2のデータから得たものを図4.4に示す．

同定の計算にあたって，フーリエ級数展開の打ち切り次数は2とした．減衰係数は

$$c_{mn} = c_{nm} \quad (m \neq n) \quad (4.3)$$

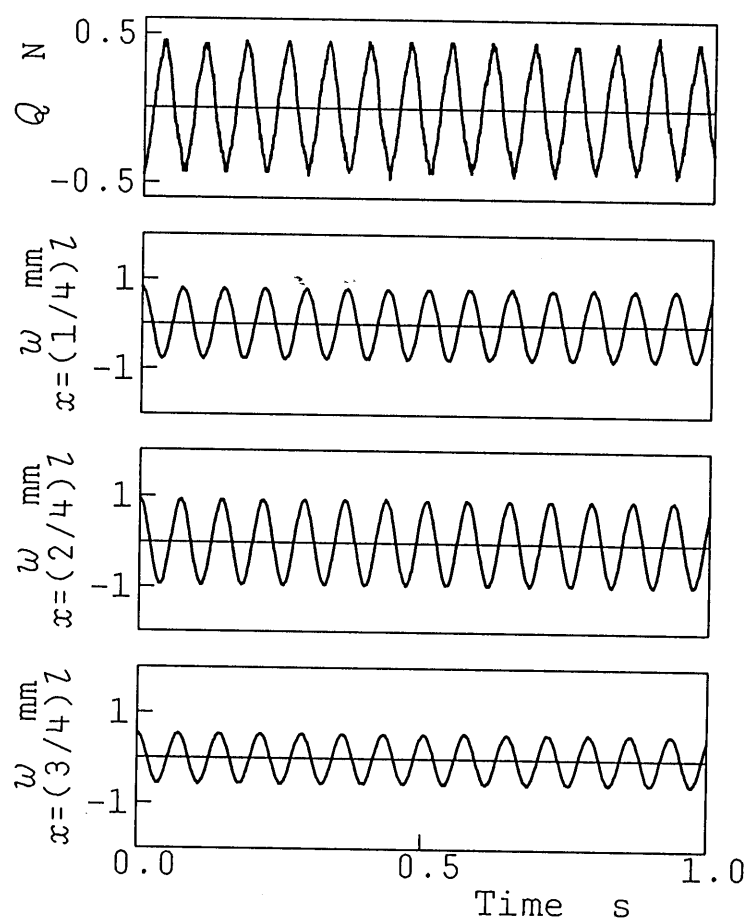


図4.2 実験データ $Q$ と $w$ の例( $\omega = 13.9 \text{ Hz}$ )

の関係を満たすものとした。また非線形項は、モード座標の二乗、三乗からなるとした。ただし、力学的な考察によって各非線形項はポテンシャルから導かれるので、ここでは三乗、四乗の多項式で与えられるポテンシャル

$$U = \sum_{i \leq j \leq k} \alpha_{ijk} X_i(t) X_j(t) X_k(t) + \sum_{i \leq j \leq k \leq l} \beta_{ijkl} X_i(t) X_j(t) X_k(t) X_l(t) \quad (4.4)$$

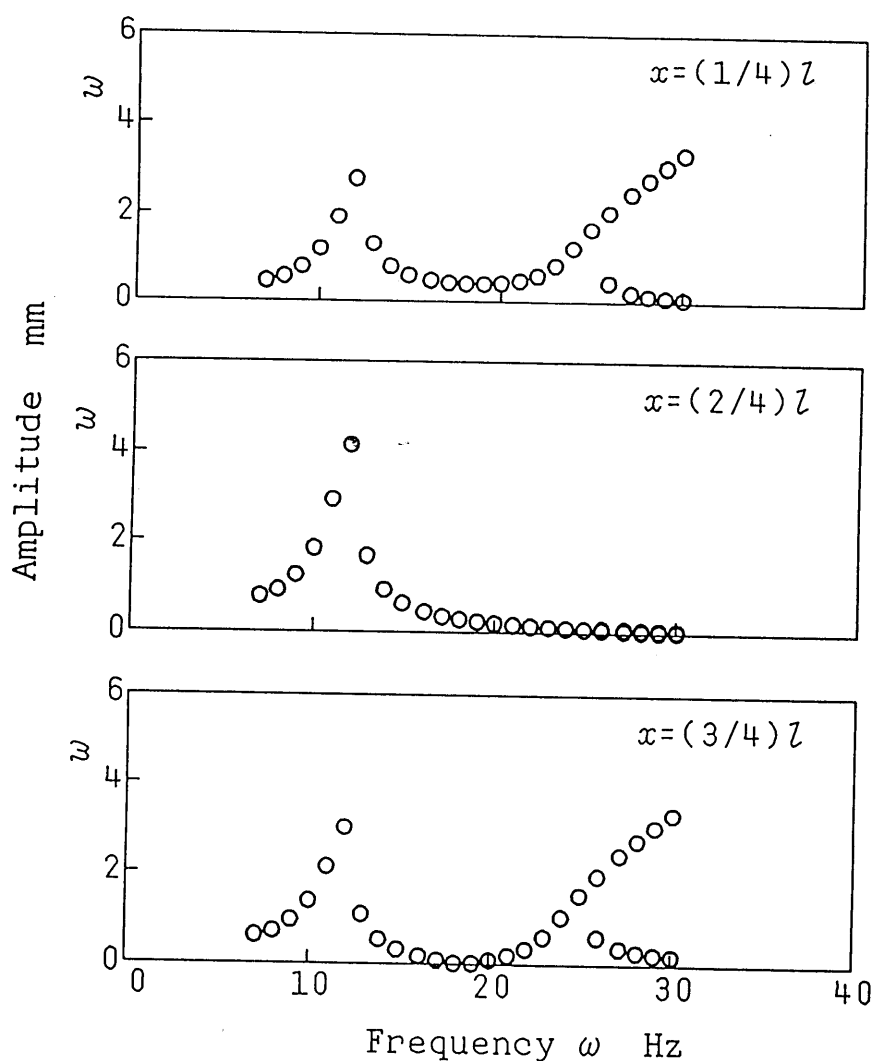


図4.3 同定に用いた実験データ

から

$$N_n = \frac{\partial U}{\partial X_n(t)} \quad (4.5)$$

により導かれるとした。

以上のようにして、提案した同定法により得られたパラメータの値を表4.1に示す。

表4.1の妥当性を見るため、この表の値をパラメータとするモード方程式を数値的に解いて、測定位置でのたわみ $w$ を予測した。その結果を用いて図4.3と縦軸、横軸が同じ共振曲線を求めて実線で示し、実験データの値と比較した。その結果を図4.5に示す。また予測によるたわみの時間変化の例を、実験による結果と比較したものを図4.6に示す。図4.5および図4.6から、同定結果は実験結果を精度よく再現していることがわかる。

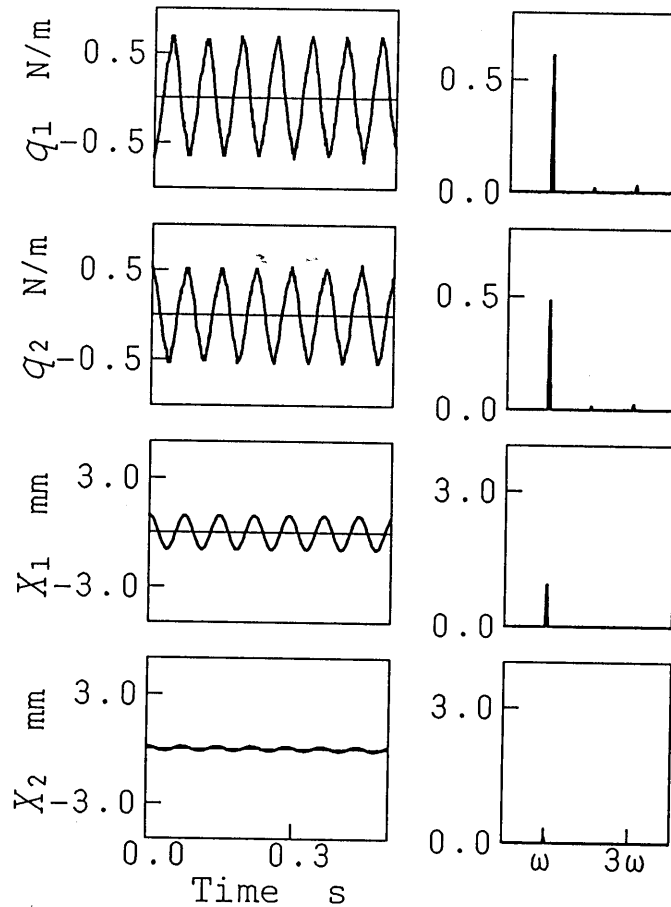


図4.4  $q_n(t)$ と $X_n(t)$ の例( $n=1, 2$ ,  $\omega=13.9\text{Hz}$ )

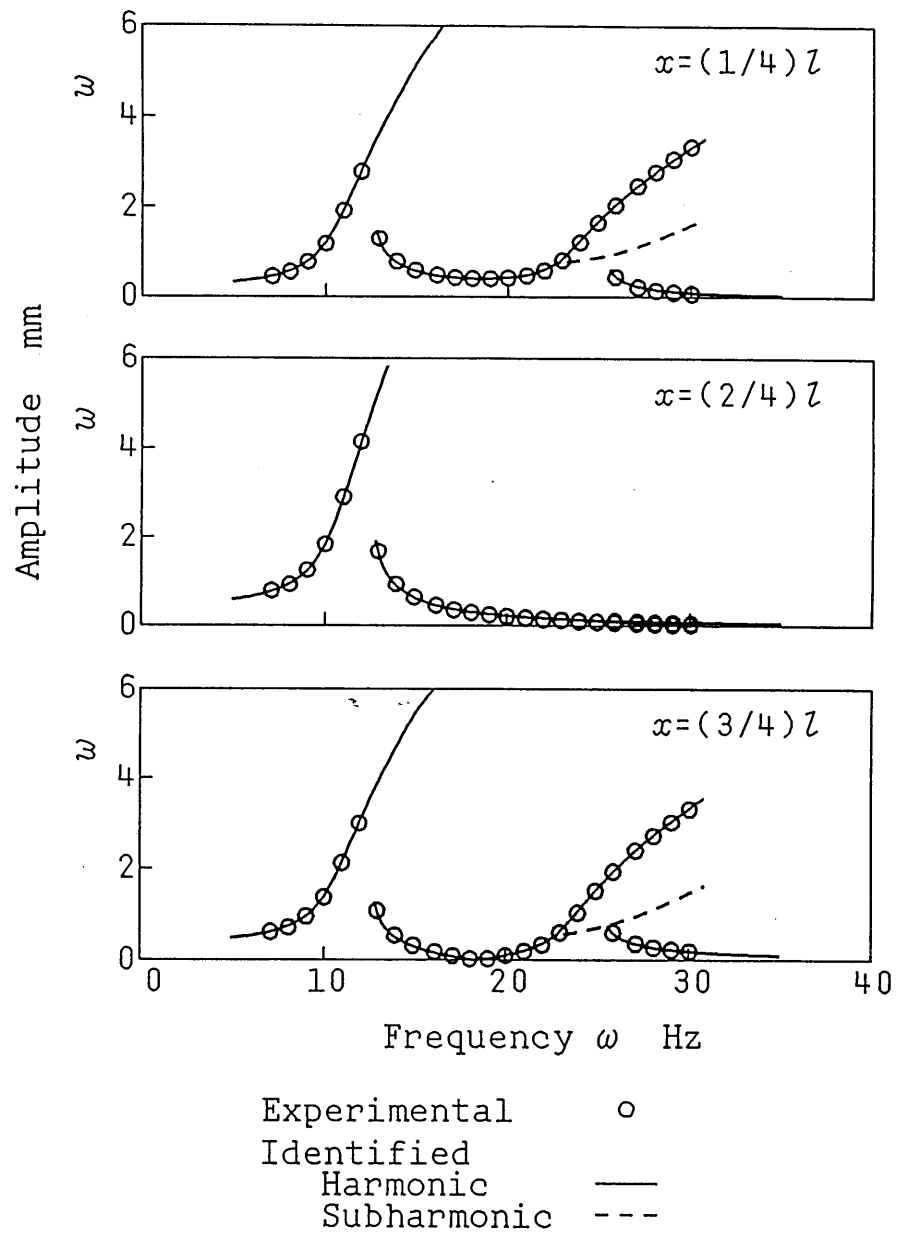


図4.5 同定結果から予測した応答と実験による応答との共振曲線による比較

表4.1 同定結果

$m_1$	kg/m	0.261
$m_2$		0.261
$c_{11}$	Ns/m <sup>2</sup>	0.035
$c_{12}$		-0.379
$c_{22}$		0.335
$k_1$	N/m <sup>2</sup>	$0.130 \times 10^4$
$k_2$		$0.588 \times 10^4$
$\alpha_{111}$	N/m <sup>3</sup>	$-0.008 \times 10^6$
$\alpha_{112}$		$-0.009 \times 10^6$
$\alpha_{122}$		$-0.080 \times 10^6$
$\alpha_{222}$		$0.006 \times 10^6$
$\beta_{1111}$	N/m <sup>4</sup>	$0.064 \times 10^8$
$\beta_{1112}$		$0.035 \times 10^8$
$\beta_{1122}$		$0.734 \times 10^8$
$\beta_{1222}$		$-0.210 \times 10^8$
$\beta_{2222}$		$1.048 \times 10^8$

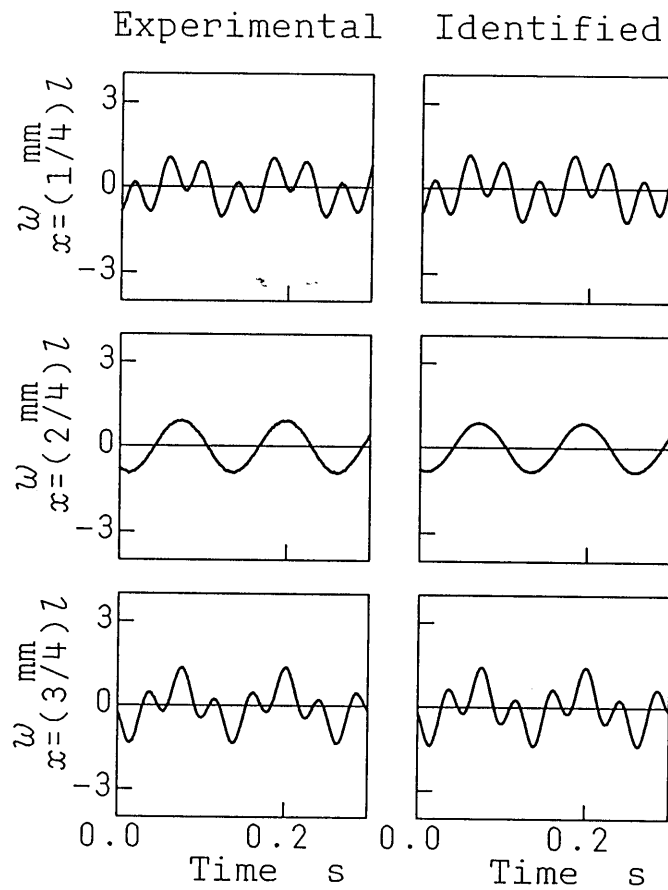


図4.6 同定結果から予測した応答と実験による応答との振動波形による比較( $\omega = 8.1\text{Hz}$ )

次にいまの同定結果を用いて、外力の大きさ  $Q_0$  を、実験データを収集したときの  $1/2$  倍および  $2$  倍の大きさにあたる  $Q_0 = 0.2N$ ,  $Q_0 = 0.8N$  としたときの振動を予測し、あらためてこの場合に対応する実験を行い、同定結果と実験データと比較した。比較した結果をそれぞれ図4.7および図4.8に示す。これらの場合にも同定結果は実験結果をよく予測していることがわかる。図4.7の外力が小さい場合の予測の精度がいいことは、同定に用いた振動データに振幅の小さい場合のデータが含まれているので予想されることである。これに対し、図4.8の外力が大きい場合には、同定に用いた振動データにこの場合のデータが含ま

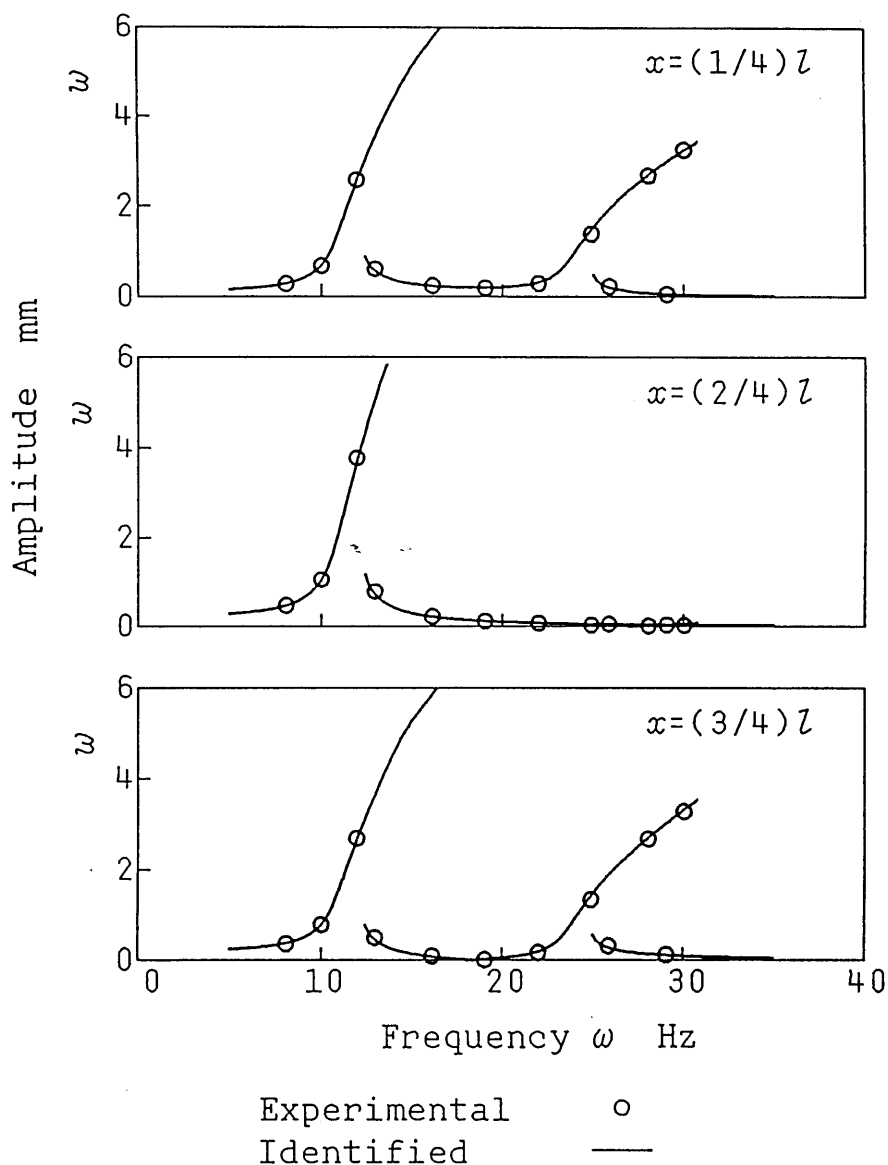


図4.7 同定結果から予測した応答と実験による応答との共振曲線による比較( $Q_0 = 0.2N$ )

れていないのに予測ができていて興味深い。これは、はりの非線形性がすなおなため、非線形特性が外挿で得られていると解釈できる。このように、提案した同定法は外力がある程度変化しても適用できることがわかる。

なお図4.5に破線で示すように、同定結果では22Hz以上の振動数のある範囲で外力の振動数 $\omega$ の1/2倍の振動数の分数調波振動が発生し得ることを予測している。これに対し実験では、予測したよりも狭い22Hzから23Hzの範囲で発生しただけであった。図4.9は、同定結

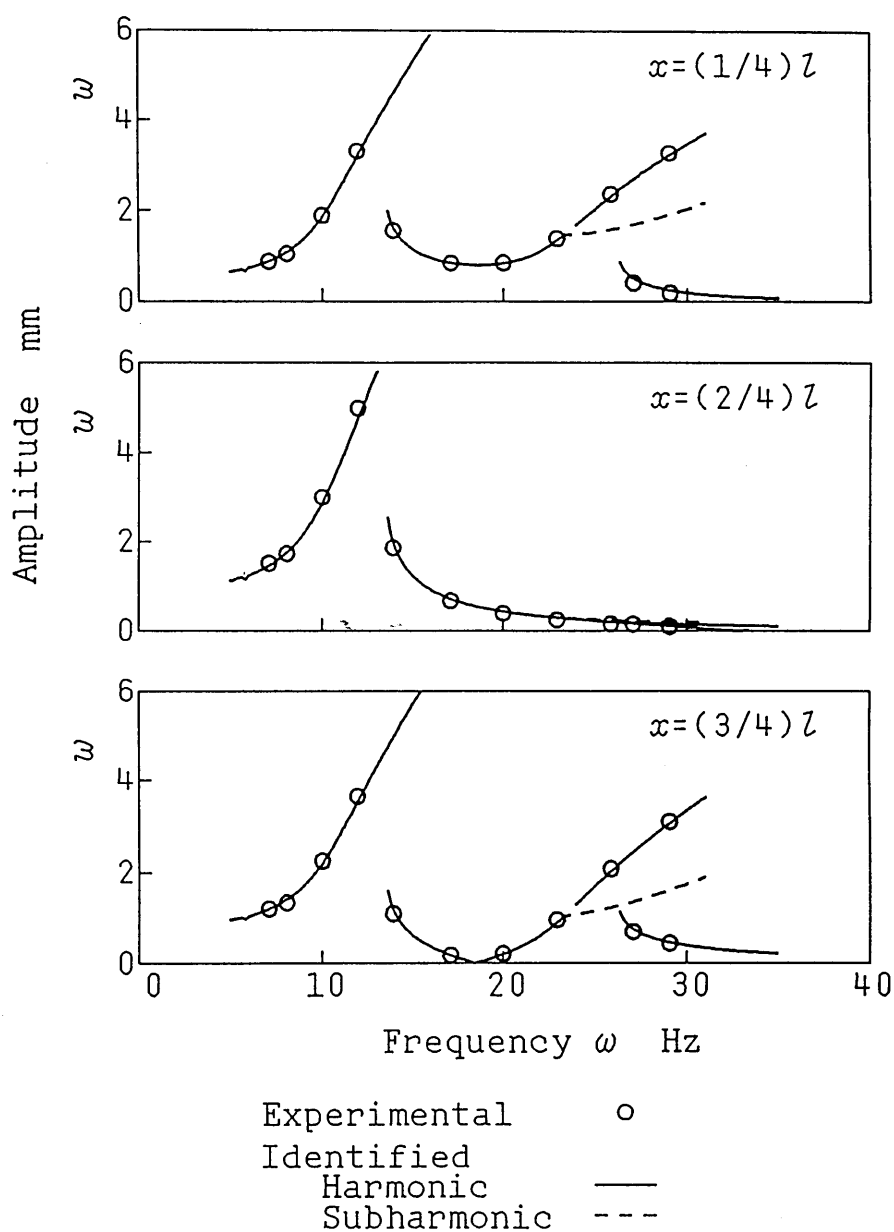


図4.8 同定結果から予測した応答と実験による応答との共振曲線による比較( $Q_0=0.8N$ )

果では分数調波振動が発生するのに、実験ではそれが観察されない場合の時間変化の例である。同じような食違いは、図4.8の応答予測の破線にも表れている。これは、パラメータの中で分数調波振動に大きく寄与するものと調和振動に大きく寄与するものとがずれていて、実験データ中には分数調波振動に関するデータが少ないので、分数調波振動に大きく寄与するパラメータについては誤差が大きくなっているためと思われる。分数調波振動に寄与するパラメータの精度を上げるためには、分数調波振動のデータを積極的に利用することが考えられる。これについては今後の検討課題としたい。

最後に、線形のモード関数が解析的に得られていない場合をとり上げる。ここではたわみの測定点を、等分点に取らないで

$$x_1 = 233 \text{ mm}, x_2 = 556 \text{ mm}, x_3 = 939 \text{ mm} \quad (4.6)$$

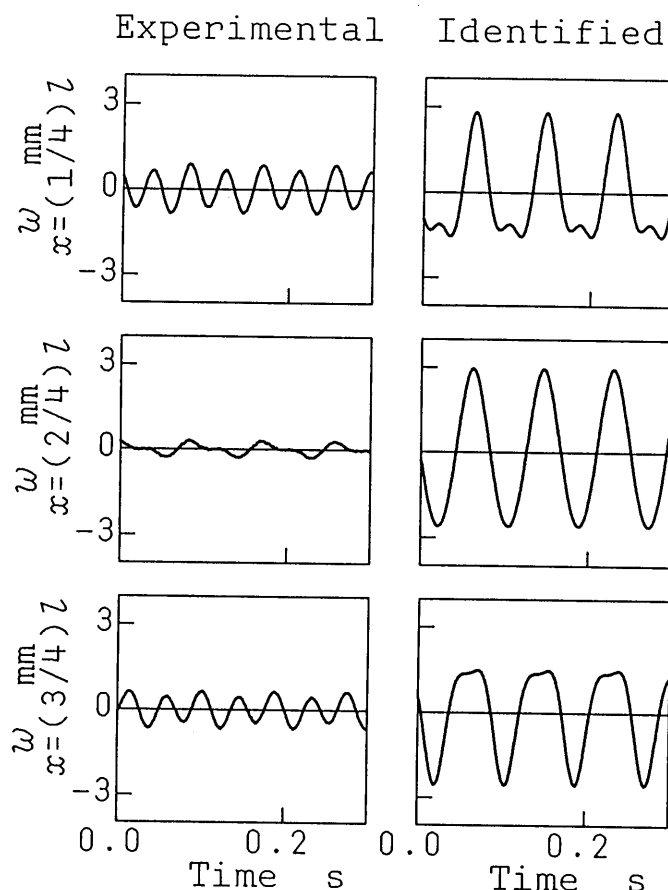


図4.9 分数調波振動の発生している例 ( $\omega = 22.9 \text{ Hz}$ )



の3箇所の位置に取った。実験データは7 Hzから33 Hzまでの34個を取った。モード関数は有限要素法によって定め、たわみからモード座標を求めるには式(3.12)を用いた。同定の際のフーリエ級数展開の打ち切り次数は2とした。得られた同定結果を実験データと合わせて図4.10に示す。図から、この場合にも同定結果は実験結果とよく一致していることがわかる。

以上のようにして、提案した同定法は、実際の実験データを用いる場合にも適用可能であることが確かめられた。

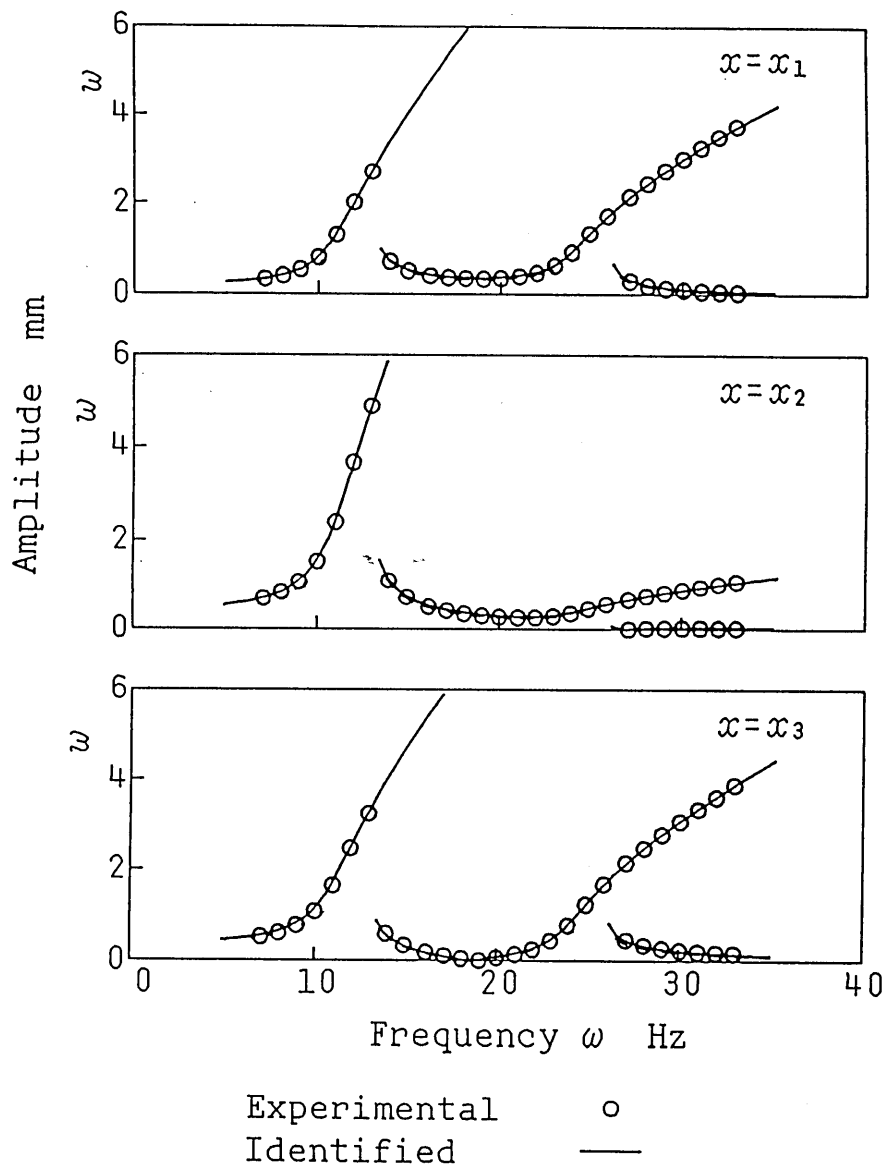


図4.10 同定結果から予測した応答と実験による応答との共振曲線による比較

#### 4.3 まとめ

第2章，第3章で提案した非線形はりの同定法の適用性を検討するため，実際のはりを用いて実験を行い，得られたデータを用いて提案した方法により同定を行った．得られた結果をまとめると次のようになる．

(1)同定結果の評価のため，同定によって得たモード方程式を用いて応答を予測し，実験データと比較した．その結果，同定結果は実験結果をよく再現することがわかった．

(2)同定に用いた外力と異なる外力に対する応答を予測し，これも対応する実験結果と比較した．この場合にも，同定結果は実験結果をよく予測し得ることがわかった．

(3)同定に用いたデータのもとになった振動と異なる振動が発生する場合には，この振動に対する予測はやや精度がわるい．

## 第5章 非線形板の同定法

### 5.1 まえがき

第2章から第4章では一次元の非線形連続系である非線形はりを取り上げてその同定法を提案し、数値シミュレーションおよび実験によって提案した同定法の有効性を示した。

この章では二次元の非線形連続系である非線形板を取り上げてその同定法を提案する。非線形板の場合には運動方程式は連立偏微分方程式となる。ここでは非線形板の例として長方形板と円板を取り上げる。はじめにこれらの場合にも非線形はりの場合と同様に、線形のモード関数を用いれば連立偏微分方程式で表される運動方程式を常微分方程式で表されるモード方程式に変換できることを示す。次にたわみと外力のデータから、これまでに提案したと同様に非線形板のモード方程式を定める方法を提案する。そして提案した同定法の有効性を数値シミュレーションによって検討する。

### 5.2 問題設定

同定法を提案する前に長方形および円形の非線形板の解析の問題を考える。はじめに二辺の長さ  $a$ ,  $b$ , 厚さ  $h$  の外周が単純支持された長方形板を考える。平衡位置の板の中央面内に直交座標系  $O - xy$  を,  $x$  軸,  $y$  軸が隣あった二辺に一致するように定める。系には係数  $C$  の粘性減衰力が作用し、一様な初期張力  $N_0$  が加えられているとすれば、大きな振幅で振動するときの板の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial w}{\partial t} + D \nabla^4 w - N_0 \nabla^2 w \\ - \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = Q \\ \nabla^4 F = E h \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

である。ここに  $w$ ,  $F$ ,  $Q$  はそれぞれ板のたわみ、面内応力を定める応力関数、板に作用する単位面積当たりの外力を表し、いずれも位置と時間の関数である。 $D$  は

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (5.2)$$

で与えられる定数であり， $\rho$ ， $E$ ， $\nu$ はそれぞれ板の密度，縦弾性係数，ポアソン比である．また $\nabla^2$ ， $\nabla^4$ は

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (5.3)$$

で与えられる演算子である．

対象としている非線形板に対応する線形非減衰系のモード関数は周知のように

$$\sin \frac{n \pi x}{a} \sin \frac{n' \pi y}{b} \quad (n, n' = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.4)$$

である．いま問題としている非線形板のたわみ $w$ を，式(5.4)で与えられるモード関数を用いて

$$w = \sum_{(n, n')=(1, 1)} X_{nn'} \sin \frac{n \pi x}{a} \sin \frac{n' \pi y}{b} \quad (5.5)$$

の形の級数に変数変換する．ここに $X_{nn'}$  ( $n, n' = 1, 2, 3, \dots$ )は時間の関数で( $n, n'$ )次の振動モードの大きさを表すモード座標である．式(5.5)を式(5.1)の第2式に代入し，応力関数 $F$ について解くと， $F$ を位置とモード座標 $X_{nn'}$ の関数として求めることができる．得られた応力関数 $F$ と式(5.5)を式(5.1)の第1式に代入してモード関数の直交性，すなわち( $n, n'$ ) $\neq$ ( $m, m'$ )に対して

$$\int_0^b \int_0^a \sin \frac{n \pi x}{a} \sin \frac{n' \pi y}{b} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{m' \pi y}{b} dx dy = 0 \quad (5.6)$$

が成り立つことを利用すると，運動方程式(5.1)の第1式はモード方程式と呼ばれる

$$m_{nn'} \ddot{X}_{nn'} + c_{nn'} \dot{X}_{nn'} + k_{nn'} X_{nn'} + N_{nn'} = q_{nn'} \quad (n, n' = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.7)$$

の形の常微分方程式に変換される．ここに $m_{nn'}$ ， $c_{nn'}$ ， $k_{nn'}$ は

$$\left. \begin{aligned} m_{nn'} &= \rho h \\ c_{nn'} &= C \\ k_{nn'} &= D \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2} \right)^2 \pi^4 + N_0 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2} \right) \pi^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

で与えられる定数である。また  $N_{nn'}$  は

$$N_{nn'} = \sum_{i, i', j, j', k, k'} \beta_{nn' ii' jj' kk'} X_{ii'} X_{jj'} X_{kk'} \quad (5.9)$$

の形のモード座標  $X_{nn'}$  の関数で、係数  $\beta_{nn' ii' jj' kk'}$  はモード関数から決まる定数である。さらに  $q_{nn'}$  は

$$q_{nn'} = \int_0^b \int_0^a Q \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy \quad (5.10)$$

で与えられる時間の関数である。モード方程式(5.7)を解いてモード座標  $X_{nn'}$  を求めれば、式(5.5)によりたわみ  $w$  が求められる。

次に半径  $a$ 、厚さ  $h$  の外周が固定支持された円板を考える。平衡位置の板の中央面に、板の中心を極とする極座標系  $O-r\theta$  を定める。運動方程式は式(5.1)と同じであるが、極座標を用いて書き直すと

$$\left. \begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial w}{\partial t} + D \nabla^4 w - N_0 \nabla^2 w + L(w, F) &= Q \\ \nabla^4 F &= \frac{Eh}{2} L(w, w) \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} L(w, F) &= - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ &\quad + 2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

である。境界条件は  $r = a$  で

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) \right\} &= 0 \\ \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

を満足することである。

この系の解析を行うため、まず二つの固有値問題を解いておく。

一つは、線形の円板の固有値問題である。これは、式(5.13)の第1式と第2式を境界条件として、 $w$ に関する方程式

$$D \nabla^4 w - N_0 \nabla^2 w = \rho h p^2 w \quad (5.14)$$

を解くものである。これに対する固有関数は

$$\begin{aligned} &\{\Phi_{nn'} \cos n\theta, \Phi_{nn'} \sin n\theta\} \\ &(n = 0, 1, 2, \dots, n' = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (5.15)$$

である。ここに $\Phi_{nn'}$ は $n$ 次のベッセル関数 $J_n$ および変形ベッセル関数 $I_n$ を用いて

$$\Phi_{nn'} = \eta_{nn'} \{J_n(p_{Jnn'} r) + \kappa_{nn'} I_n(p_{Inn'} r)\} \quad (5.16)$$

で与えられる関数である。この式で $p_{Jnn'}$ ,  $p_{Inn'}$ ,  $\kappa_{nn'}$ は境界条件から決まる定数である。任意定数 $\eta_{nn'}$ は正規化の条件によって定めておく。

もう一つの固有値問題は、式(5.13)の第3式と第4式を境界条件として、 $F$ に関する方程式

$$\nabla^4 F = \lambda^4 F \quad (5.17)$$

を解くものである。これに対する固有関数は

$$\begin{aligned} &\{\Psi_{nn'} \cos n\theta, \Psi_{nn'} \sin n\theta\} \\ &(n = 0, 1, 2, \dots, n' = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (5.18)$$

である。ここに $\Psi_{nn'}$ は $n$ 次のベッセル関数 $J_n$ および変形ベッセル関数 $I_n$ を用いて

$$\Psi_{nn'} = \mu_{nn'} \{J_n(\lambda_{nn'} r) + \chi_{nn'} I_n(\lambda_{nn'} r)\} \quad (5.19)$$

で与えられる関数である。この式で $\lambda_{nn'}$ ,  $\chi_{nn'}$ は境界条件から決まる定数である。任意定数 $\mu_{nn'}$ は正規化の条件によって定めておく。

未知量 $w$ および $F$ をそれぞれ式(5.15), (5.18)で与えられる固有関数を用いて

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{(n, n')=(0, 1)} \{X_{nn'} \cos n\theta + \bar{X}_{nn'} \sin n\theta\} \Phi_{nn'} \\ F &= \sum_{(n, n')=(0, 1)} \{Y_{nn'} \cos n\theta + \bar{Y}_{nn'} \sin n\theta\} \Psi_{nn'} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

の級数の形に変数変換する。ここに $X_{nn'}$ ,  $\bar{X}_{nn'}$ および $Y_{nn'}$ ,  $\bar{Y}_{nn'}$ は時間の関数でこのうち $X_{nn'}$ ,  $\bar{X}_{nn'}$ は $(n, n')$ 次の振動モードの大きさを表すモード座標である。式(5.20)を運動方程式(5.11)に代入し、固有関数の直交性を利用すると式(5.11)は

$$\left. \begin{aligned} m_{nn'} \ddot{X}_{nn'} + c_{nn'} \dot{X}_{nn'} + k_{nn'} X_{nn'} \\ + \sum (a_{nn' mm' ii'} Y_{mm'} X_{ii'} + b_{nn' mm' ii'} \bar{Y}_{mm'} \bar{X}_{ii'}) &= q_{nn'} \\ \bar{m}_{nn'} \ddot{\bar{X}}_{nn'} + \bar{c}_{nn'} \dot{\bar{X}}_{nn'} + \bar{k}_{nn'} \bar{X}_{nn'} \\ + \sum (c_{nn' mm' ii'} Y_{mm'} \bar{X}_{ii'} + d_{nn' mm' ii'} \bar{Y}_{mm'} X_{ii'}) &= \bar{q}_{nn'} \\ Y &= \sum (\alpha_{mm' jj' kk'} X_{jj'} X_{kk'} + \beta_{mm' jj' kk'} \bar{X}_{jj'} \bar{X}_{kk'}) \\ \bar{Y} &= \sum (\gamma_{mm' jj' kk'} X_{jj'} \bar{X}_{kk'} + \delta_{mm' jj' kk'} \bar{X}_{jj'} X_{kk'}) \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

の形の方程式に変換される。ここに $m_{nn'}$ ,  $c_{nn'}$ ,  $k_{nn'}$ ,  $\bar{m}_{nn'}$ ,  $\bar{c}_{nn'}$ ,  $\bar{k}_{nn'}$ ,  $a_{nn' mm' ii'}$ ,  $b_{nn' mm' ii'}$ ,  $c_{nn' mm' ii'}$ ,  $d_{nn' mm' ii'}$ ,  $\alpha_{mm' jj' kk'}$ ,  $\beta_{mm' jj' kk'}$ ,  $\gamma_{mm' jj' kk'}$ ,  $\delta_{mm' jj' kk'}$ は固有関数(5.15)および(5.18)から決まる定数である。また $q_{nn'}$ および $\bar{q}_{nn'}$ は

$$\left. \begin{aligned} q_{nn'} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} Q \Phi_{nn'} \cos n\theta r dr d\theta \\ \bar{q}_{nn'} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} Q \Phi_{nn'} \sin n\theta r dr d\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

で与えられる時間の関数である。

式(5.21)の第3式と第4式を第1式と第2式に代入すると、モード方程式が最終的に次の形で得られる。

$$\left. \begin{aligned} m_{nn} \ddot{X}_{nn} + c_{nn} \dot{X}_{nn} + k_{nn} X_{nn} + N_{nn} &= q_{nn} \\ \bar{m}_{nn} \ddot{\bar{X}}_{nn} + \bar{c}_{nn} \dot{\bar{X}}_{nn} + \bar{k}_{nn} \bar{X}_{nn} + \bar{N}_{nn} &= \bar{q}_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

ここに $N_{nn}$ および $\bar{N}_{nn}$ は非線形項で、モード座標 $X_{nn}$ 、 $\bar{X}_{nn}$ の関数である。モード方程式(5.23)を解いてモード座標を求めれば、式(5.20)の第1式よりたわみ $w$ が求められる。

以上に示したように、非線形板において、運動方程式からたわみを求める問題はモード方程式からモード座標を求める問題に帰着される。

以上の準備をしておいて問題設定に移る。非線形板を同定するという問題は、本来の定義からは、適当な外力 $Q$ のデータとそれに対するたわみ $w$ のデータを用いて運動方程式を定めることである。しかし、以上の議論からわかるように、任意の外力に対する系のたわみはモード方程式によって求めることができるので、同定の目的を考えれば、運動方程式を定めるという問題はモード方程式を定めるという問題に置き換えても良いと思われる。また同定結果を用いて解析を進める際、同定によって運動方程式を定めるよりはモード方程式を定めるほうが有利であることは以上の議論から明らかである。そこで適当な外力 $Q$ とそれに対するたわみ $w$ のデータを知ってモード方程式を定める方法を提案し、非線形板の同定法とする。ただしモード方程式は無限個の方程式からなるが、モード方程式からたわみを求めるとき、実用上はいくつかの方程式のみを考慮するだけでさしつかえないので、ここでも考慮する振動数範囲内で振幅の大きないくつかのモード座標に関する方程式を定めることを考える。

### 5.3 同定法の提案

同定法を提案するに当たって、対象とする系の線形のモード関数は既知であるとする。また表記の簡単のため、線形の固有振動数の小さなモードの順にモード座標、モード毎の外力およびモード関数をそれぞれ $X_n$ 、 $q_n$ 、 $\phi_n(n=1, 2, 3 \dots)$ で表すことにする。

#### 5.3.1 $X_n$ と $q_n$ の求め方

提案する同定法において必要となる過程の順に従って、はじめに、たわみ $w$ の測定デー



タから  $M$  個のモード座標  $X_n (n = 1, 2, \dots, M)$  を定める方法を考える。

たわみ  $w$  の測定点として、 $N$  個の点を定め、ある時刻  $t = t_j$  で各測定点におけるたわみ  $w_i (i = 1, 2, \dots, N)$  を測定する。式(5.5)あるいは(5.20)の第1式において、たわみの測定点の数  $N$  と同数のモード座標  $X_n (n = 1, 2, \dots, N)$  まで考慮すれば、測定によって得られたたわみ  $w_i$  と未知のモード座標  $X_n$  の間には近似的に

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

の関係が成り立つ。ここに右辺のマトリックスの成分  $\phi_{in} (i, n = 1, 2, \dots, N)$  は  $i$  番目の測定位置における  $n$  番目のモード関数  $\phi_n$  の値で、既知の量である。式(5.24)は  $X_n$  に関する線形連立方程式であり、係数マトリックスが特異にならない限り  $X_n$  が求められる。以上のようにして求められた  $X_n (n = 1, 2, \dots, N)$  のうち、振幅が大きい  $M$  個のモード座標を同定に用いる。以上の方法を各時刻  $t_j (j = 1, 2, 3, \dots)$  について繰り返せば、 $X_n$  を時間の離散点  $t_j$  について求めることができる。

$q_n (n = 1, 2, \dots, M)$  を定める問題は簡単である。外力  $Q$  のデータを、式(5.10)あるいは(5.22)の積分計算ができる程度にいくつかの位置で測定し、各時刻  $t = t_j (j = 1, 2, 3, \dots)$  において積分計算を行えば、時間の離散点  $t_j$  における  $q_n$  が求まる。

以上で  $X_n$  と  $q_n$  をデータとして得られたので、次にモード方程式を定める方法を提案する。

### 5.3.2 モード方程式の定め方

モード方程式を定めるため、はじめにモード方程式をどのような形におくかを考える。たわみのデータからモード座標を求めるとき、線形のモード関数を用いたので、モード方程式は慣性項および線形の復元力項では連成しない。これに対し、減衰項および非線形項では連成し得る。したがって求めるモード方程式は一般に

$$m_n \ddot{X}_n + \sum_{m=1}^M c_{nm} \dot{X}_m + k_n X_n + N_n = q_n \quad (n = 1, 2, \dots, M) \quad (5.25)$$

の形におくことができる。この式でパラメータ  $m_n$ ,  $c_{nm}$ ,  $k_n$  は未知数で,  $c_{nm}$ は

$$c_{nm} = c_{mn} \quad (n \neq m) \quad (5.26)$$

を満たすとする。また非線形項  $N_n$  は一般にモード座標  $X_n$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ ) あるいはその時間微分の非線形関数で, 多くの場合それらの多項式で近似できる。ここでは非線形性が復元力にある板を考えているので, 非線形項  $N_n$  はモード座標  $X_n$  ( $n = 1, 2, \dots, M$ ) のみの関数であると考え。そこで各  $N_n$  は  $X_n$  の二乗からはじまる

$$N_n = \sum_{i \leq j} \alpha_{n,ij} X_i X_j + \sum_{i \leq j \leq k} \beta_{n,ijk} X_i X_j X_k + \dots \quad (5.27)$$

の形の多項式で与えられるとする。ここに係数  $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\dots$  は未知のパラメータである。

式(5.25), (5.27)によってモード方程式の形を定めることができたので, 次に, パラメータ  $m_n$ ,  $c_{nm}$ ,  $k_n$  および非線形項  $N_n$  の係数パラメータ  $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\dots$  をどのように定めるかを考える。

このため, まず外力  $Q$  として周期  $T$  の周期外力を採用し, 外力およびこれに対する外力と同じ周期の定常状態のたわみ振動  $w$  をデータとして測定する。そのデータから 5.3.1 節に述べた方法によって,  $q_n$  および  $X_n$  を求める。このようにして得た  $q_n$  と  $X_n$  は外力と同じ周期を持つので, 加えた外力の周期  $T$  からきまる角振動数  $\omega (= 2\pi/T)$  を用いて

$$\left. \begin{aligned} q_n &= (Q_n)_0 \\ &\quad + (Q_n)_1 \cos \omega t + (Q_n)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ &\quad + (Q_n)_1^* \sin \omega t + (Q_n)_2^* \sin 2\omega t + \dots \\ X_n &= (X_n)_0 \\ &\quad + (X_n)_1 \cos \omega t + (X_n)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ &\quad + (X_n)_1^* \sin \omega t + (X_n)_2^* \sin 2\omega t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここにフーリエ係数  $(Q_n)_0$ ,  $(Q_n)_1$ ,  $(Q_n)_2$ ,  $\dots$  および  $(X_n)_0$ ,  $(X_n)_1$ ,  $(X_n)_2$ ,  $\dots$  は F F T (高速フーリエ変換) などの手法により容易に求められる既知の量である。次に式(5.27)で仮定した項  $X_i X_j$ ,  $X_i X_j X_k$ ,  $\dots$  を上で求めたモード座標  $X_n$  の演算によって求め, その結果もフーリエ級数

$$\begin{aligned}
& X_i X_j = (X_i X_j)_0 \\
& \quad + (X_i X_j)_1 \cos \omega t + (X_i X_j)_2 \cos 2\omega t + \cdots \\
& \quad + (X_i X_j)_1^* \sin \omega t + (X_i X_j)_2^* \sin 2\omega t + \cdots \\
& X_i X_j X_k = (X_i X_j X_k)_0 \\
& \quad + (X_i X_j X_k)_1 \cos \omega t + (X_i X_j X_k)_2 \cos 2\omega t + \cdots \\
& \quad + (X_i X_j X_k)_1^* \sin \omega t + (X_i X_j X_k)_2^* \sin 2\omega t + \cdots \\
& \quad \vdots
\end{aligned}
\tag{5.29}$$

の形におく。ここでもフーリエ係数  $(X_i X_j)_0$ ,  $(X_i X_j)_1$ ,  $\cdots$  は既知の量である。

式(5.28)および式(5.29)を式(5.25)に代入し、ハーモニックバランスの原理を用いて、両辺の定数項および  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$ ,  $\cdots$  の係数をそれぞれ等しいとおくと、次の形の方程式を得る。

$$[A]\{S\} = \{Q\} \tag{5.30}$$

ここに  $[A]$  は式(5.28)の第2式、(5.29)に表れるフーリエ係数から決まる既知のマトリックス、 $\{Q\}$  は式(5.28)の第1式に表れるフーリエ係数から決まる既知のベクトル、そして  $\{S\}$  は系のパラメータ  $m_n$ ,  $c_{nm}$ ,  $k_n$  および非線形項  $N_n$  の係数パラメータ  $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\cdots$  を成分とする未知のベクトルである。これらの表示式は、求めたいモード方程式の数、非線形項を表す多項式の次数、フーリエ級数展開の打ち切り次数などを指定すれば容易に求められるもので、一般的な表示は面倒であるからここでは省略する。

加える外力の角振動数  $\omega$  としていくつかの値を適当に定め、またフーリエ級数展開の打ち切り次数を適当にとれば、未知数の数より多い方程式を含んで再び式(5.30)の形の方程式を得る。そこでこの式に最小二乗法を適用すれば、 $\{S\}$  は

$$\{S\} = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \{Q\} \tag{5.31}$$

によって定められる。必要があれば重みマトリックスを用いて同定の精度を上げるよう試みることができる。重みマトリックス  $[W]$  を用いるとき、 $\{S\}$  は式(5.31)の代わりに

$$\{S\} = ([A]^T [W] [A])^{-1} [A]^T [W] \{Q\} \tag{5.32}$$

で与えられる。式(5.31)あるいは式(5.32)によって $\{S\}$ を求めれば、モード方程式が定められたことになる。

#### 5.4 数値シミュレーションによる同定の例

5.3節で提案した同定法の有効性を検討するため、ここで数値的に求めた振動データを実験データとみなし、同定の数値シミュレーションを行う。

##### 5.4.1 長方形板に対するシミュレーション結果

はじめに長方形板に対するシミュレーション結果を示す。

振動データを数値的に求めるため、一例として、長方形板の各パラメータを次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} a &= 0.65 \text{ m}, & b &= 0.35 \text{ m} \\ h &= 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}, & \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, & \nu &= 0.3 \\ C &= 120 \text{ Ns/m}^3, & N_0 &= 4.0 \times 10^3 \text{ N/m} \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

外力として、位置 $(x_f, y_f) = (2a/5, 2b/5)$ の位置に大きさ $Q_0 = 230\text{N}$ の集中的な調和外力

$$Q = Q_0 \delta(x - x_f) \delta(y - y_f) \cos \omega t \quad (5.34)$$

を作用させる場合を考える。

たわみの測定点を

$$\begin{aligned} (x, y) = & \left( \frac{1}{4}a, \frac{1}{3}b \right), \left( \frac{1}{4}a, \frac{2}{3}b \right), \left( \frac{2}{4}a, \frac{1}{3}b \right) \\ & \left( \frac{2}{4}a, \frac{2}{3}b \right), \left( \frac{3}{4}a, \frac{1}{3}b \right), \left( \frac{3}{4}a, \frac{2}{3}b \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

の位置に6点取る。

たわみ $w$ の振動データを、モード方程式を用いて次のように求める。実際の実験データでは、たわみは高次のモード成分までを含むので、ここでは低次の六つのモード成分を含

めて考える。そのため式(5.7)のはじめの6式を、式(5.34)で与えられる周期外力に対し適当な初期条件のもとに数値的に積分し、外力と同じ周期の周期解になるまで積分を続ける。こうして得た周期解を式(5.5)に代入して各測定点でのたわみ $w$ を求め、これを実験データとみなす。

以上のようにして外力の振動数 $\omega$ のいろいろな値に対して求めたたわみを、振幅と $\omega$ の関係にして共振曲線の形で示すと図5.1に○印で示すようになった。図5.1には式(5.35)の6点の測定位置のうちのはじめの3点の位置におけるたわみのデータを示してある。これらのデータから式(5.24)によりモード座標を求めたところ図5.2に示すようになった。この図から5番目のモード座標以上の高次のモード座標はそれより低次のモード座標に比較して小さいことがわかる。そこで同定は低次の4つのモードに関するものとする。

同定に当たって、非線形項は式(5.27)に示すモード座標の二乗、三乗の項よりなるとする。ただし非線形板の問題では、力学的な考察によって、各非線形項はポテンシャルから導かれると考えられるので、ここでは三乗、四乗の多項式で与えられるポテンシャル

$$U = \sum_{i \leq j \leq k} \alpha_{ijk} X_i X_j X_k + \sum_{i \leq j \leq k \leq l} \beta_{ijkl} X_i X_j X_k X_l \quad (5.36)$$

から

$$N_n = \frac{\partial U}{\partial X_n} \quad (5.37)$$

によって導かれるとする。このようにしたほうが、モード方程式に含まれる非線形項の係数パラメータが減少し、精度の向上が期待される。

フーリエ級数展開の打ち切り次数は3にする。またここでは重みマトリックスは用いないことにする。

図5.1に示したすべてのデータを用いて、提案した方法に従ってモード方程式の各パラメータを定めた。その結果を表5.1に示す。表5.1にはたわみの振動データを求めるときに用いたパラメータの値と同定で得られた値とを比較して示してある。表5.1から同定によって得られたパラメータの値はもとの値に近い値となっており、提案した同定法によってもとのモード方程式が得られることがわかる。これをさらに確認するため、同定によって得られたモード方程式を用いて測定位置でのたわみを求め、図5.1に重ねて実線で示した。また

このときの1番目から3番目の測定位置におけるたわみの振動波形の例を図5.3に示す。  
図5.1および図5.3からわかるように同定結果はもとの実験データをよく再現している。

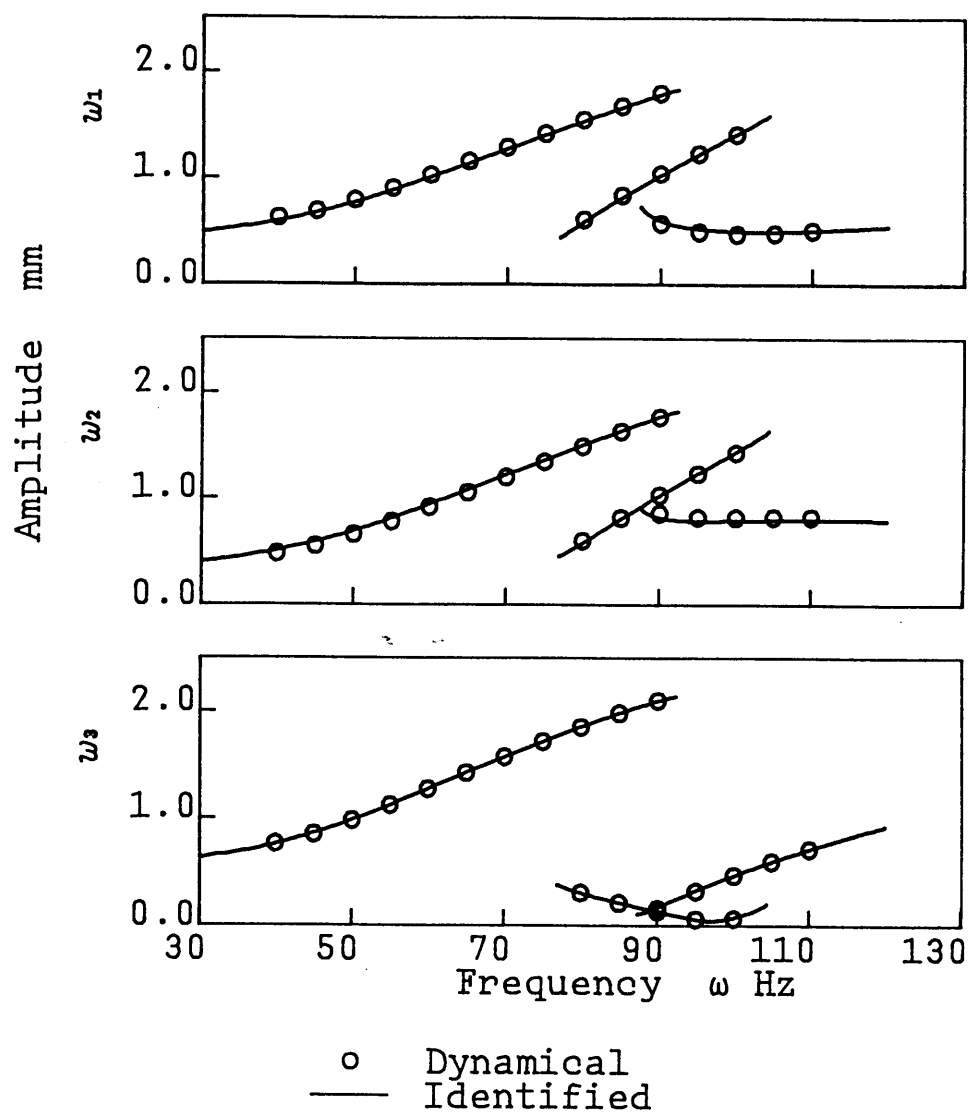


図5.1 同定に用いたデータおよび同定結果との共振曲線による比較

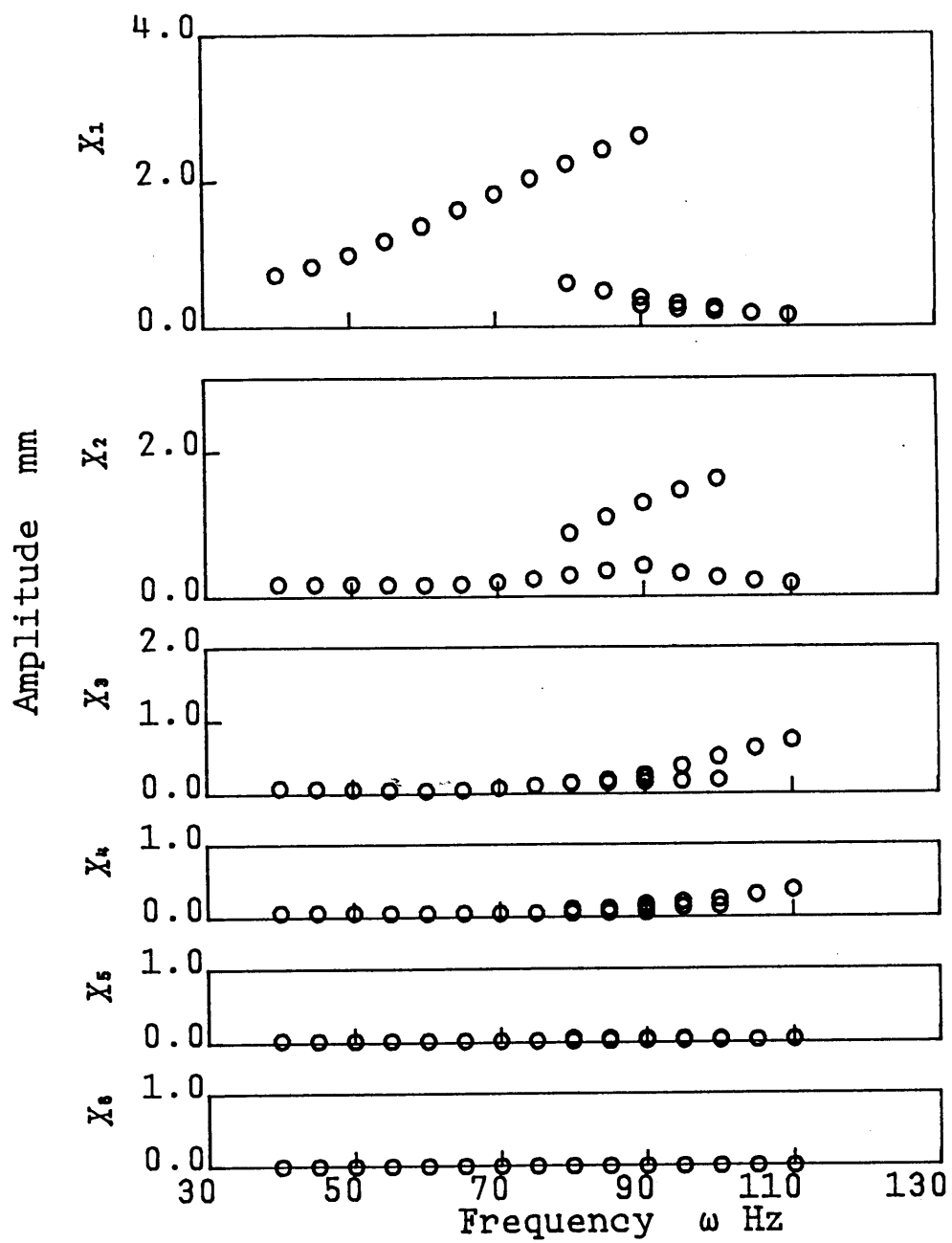


図5.2 モード座標

表5.1 同定結果

	Exact	Identified		Exact	Identified
$\text{kg/m}^2$			$\text{N/m}^5$	$\times 10^{10}$	$\times 10^{10}$
$m_1$	3.920	3.948	$\beta_{1111}$	4.021	4.032
$m_2$	3.920	3.904	$\beta_{1112}$	0.000	0.160
$m_3$	3.920	3.794	$\beta_{1113}$	-4.179	-4.054
$m_4$	3.920	4.106	$\beta_{1114}$	0.000	-0.162
$\text{Ns/m}^3$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\beta_{1122}$	17.970	18.842
$c_{11}$	1.200	1.214	$\beta_{1123}$	0.000	-2.979
$c_{12}$	0.000	-0.035	$\beta_{1124}$	0.000	1.305
$c_{13}$	0.000	0.010	$\beta_{1133}$	23.725	22.680
$c_{14}$	0.000	-0.022	$\beta_{1134}$	0.000	2.069
$c_{22}$	1.200	1.218	$\beta_{1144}$	32.863	36.169
$c_{23}$	0.000	-0.009	$\beta_{1222}$	0.000	0.025
$c_{24}$	0.000	0.039	$\beta_{1223}$	16.831	16.507
$c_{33}$	1.200	1.441	$\beta_{1224}$	0.000	2.705
$c_{34}$	0.000	0.070	$\beta_{1233}$	0.000	14.671
$c_{44}$	1.200	1.631	$\beta_{1234}$	0.000	-14.201
$\text{N/m}^3$	$\times 10^5$	$\times 10^5$	$\beta_{1244}$	0.000	7.594
$k_1$	4.412	4.480	$\beta_{1333}$	0.000	-0.575
$k_2$	7.674	7.797	$\beta_{1334}$	0.000	-0.084
$k_3$	13.627	13.666	$\beta_{1344}$	-33.826	-33.476
$k_4$	16.642	16.877	$\beta_{1444}$	0.000	3.004
$\text{N/m}^4$	$\times 10^8$	$\times 10^8$	$\beta_{2222}$	9.432	9.258
$\alpha_{111}$	0.000	0.000	$\beta_{2223}$	0.000	-0.054
$\alpha_{112}$	0.000	0.000	$\beta_{2224}$	0.000	1.611
$\alpha_{113}$	0.000	0.000	$\beta_{2233}$	44.329	43.411
$\alpha_{114}$	0.000	0.000	$\beta_{2234}$	0.000	3.493
$\alpha_{122}$	0.000	0.000	$\beta_{2244}$	45.056	51.430
$\alpha_{123}$	0.000	0.001	$\beta_{2333}$	0.000	-1.537
$\alpha_{124}$	0.000	0.000	$\beta_{2334}$	0.000	-15.892
$\alpha_{133}$	0.000	0.000	$\beta_{2344}$	0.000	12.341
$\alpha_{134}$	0.000	0.001	$\beta_{2444}$	0.000	24.071
$\alpha_{144}$	0.000	0.000	$\beta_{3333}$	29.683	26.687
$\alpha_{222}$	0.000	0.000	$\beta_{3334}$	0.000	-0.170
$\alpha_{223}$	0.000	0.000	$\beta_{3344}$	78.093	80.445
$\alpha_{224}$	0.000	0.000	$\beta_{3444}$	0.000	4.900
$\alpha_{233}$	0.000	0.000	$\beta_{4444}$	55.330	84.029
$\alpha_{234}$	0.000	0.004			
$\alpha_{244}$	0.000	0.002			
$\alpha_{333}$	0.000	0.000			
$\alpha_{334}$	0.000	-0.001			
$\alpha_{344}$	0.000	0.001			
$\alpha_{444}$	0.000	0.002			



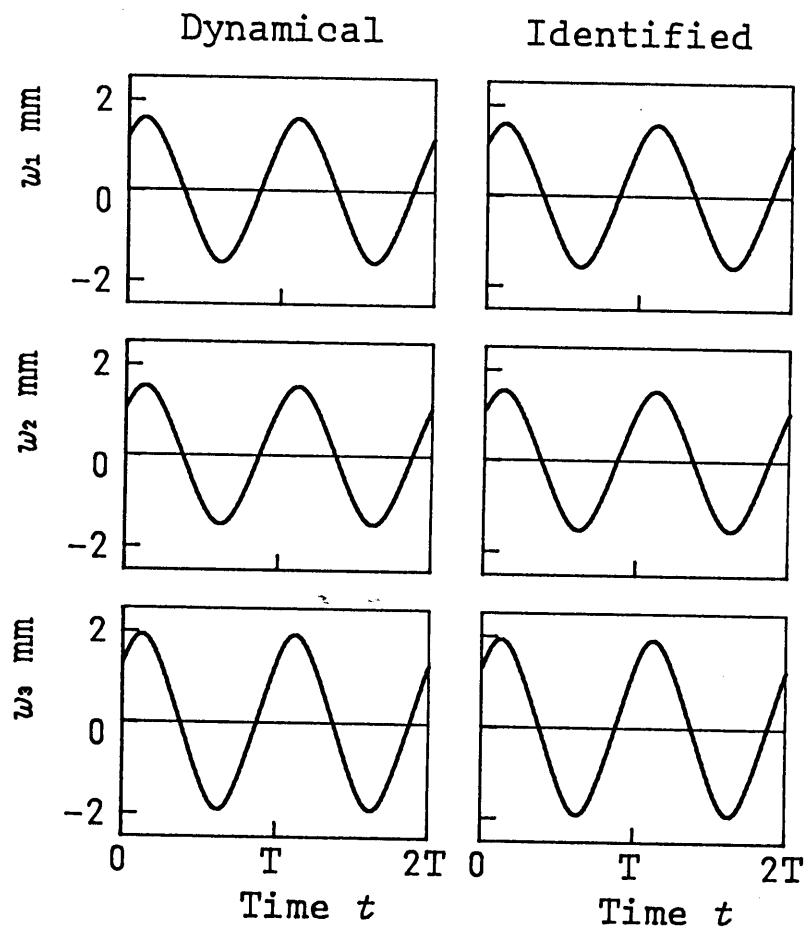


図5.3 振動波形による比較 ( $\omega = 80\text{Hz}$ )

#### 5.4.2 円板に対するシミュレーション結果

次に円板に対するシミュレーション結果を示す。

振動データを数値的に求めるため、一例として、円板の各パラメータを次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2.15 \times 10^{-1} \text{ m}, & h &= 0.5 \times 10^{-3} \text{ m} \\ E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, & \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \nu &= 0.3, & C &= 120 \text{ Ns/m}^3 \\ N_0 &= 0.4 \times 10^3 \text{ N/m} \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

外力として、式

$$Q = Q_0 \delta(r - r_f) \delta(\theta - \theta_f) \cos \omega t \quad (5.39)$$

で与えられる集中的な調和外力を作用させる場合を考える。この式で $Q_0$ は外力の大きさで、 $Q_0 = 230\text{N}$ とする。また $(r_f, \theta_f)$ は集中外力を作用させる加振点で、 $(r_f, \theta_f) = (\alpha/4, 0)$ とする場合と $(r_f, \theta_f) = (\alpha/4, \pi/2)$ とする場合を考える。

たわみの測定点を

$$\begin{aligned} (r, \theta) = & \left( \frac{1}{4} \alpha, \frac{0}{3} \pi \right), \left( \frac{3}{5} \alpha, \frac{1}{3} \pi \right), \left( \frac{1}{4} \alpha, \frac{2}{3} \pi \right) \\ & \left( \frac{3}{5} \alpha, \frac{3}{3} \pi \right), \left( \frac{1}{4} \alpha, \frac{4}{3} \pi \right), \left( \frac{3}{5} \alpha, \frac{5}{3} \pi \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

の位置に6点取る。

たわみ $w$ の振動データを、モード方程式を用いて次のように求める。実際の実験データでは、たわみは高次のモード成分までを含むので、ここでは低次の六つのモード成分を含めて考える。そのため式(5.23)のはじめの6式を、式(5.39)で与えられる周期外力に対し適当な初期条件のもとに数値的に積分し、外力と同じ周期の周期解になるまで積分を続ける。こうして得た周期解を式(5.20)の第1式に代入して各測定点でのたわみ $w$ を求め、これを実験データとみなす。

以上のようにして外力の振動数 $\omega$ のいろいろな値に対して求めたたわみを、振幅と $\omega$ の関係にして共振曲線の形で示すと図5.4に○印で示すようになった。図5.4には加振点 $(r_f,$

$\theta_f) = (a/4, 0)$ とした場合の式(5.40)の6点の測定位置のうちのはじめの3点の位置におけるたわみのデータを示してある。これらのデータから式(5.24)によりモード座標を求めたところ図5.5に示すようになった。この図と加振点 $(r_f, \theta_f) = (a/4, \pi/2)$ とした場合のたわみから求めたモード座標から、同定は1番目から3番目までのモードと6番目のモードの4つのモードに関するものとした。

同定に当たって、非線形項はポテンシャル(5.36)から式(5.37)によって導かれるとした。フーリエ級数展開の打ち切り次数は3にした。またここでは重みマトリックスは用いないことにした。

図5.4に示した加振点を $(r_f, \theta_f) = (a/4, 0)$ とした場合のデータと加振点を $(r_f, \theta_f) = (a/4, \pi/2)$ とした場合のデータの両方を用いて、提案した方法に従ってモード方程式の各パラメータを定めた。その結果を表5.2に示す。表5.2にはたわみの振動データを求めるときに用いたパラメータの値と同定で得られた値とを比較して示してある。表5.2から同定によって得られたパラメータの値はもとの値に近い値となっており、提案した同定法によってもとのモード方程式が得られることがわかる。これをさらに確認するため、同定によって得られたモード方程式を用いて測定位置でのたわみを求め、図5.4に重ねて実線で示した。またこのときの1番目から3番目の測定位置におけるたわみの振動波形の例を図5.6に示す。図5.4および図5.6からわかるように同定結果はもとの実験データをよく再現している。

ここで示した円板の場合、表5.2のExactの値からわかるように2番目と3番目のモードの線形の固有振動数が一致し、これらのモードが縮退している。このような場合の同定は一般に困難であるが、以上の結果から、ここで提案した方法ではこのような場合でも精度の良い同定が可能であるといえる。

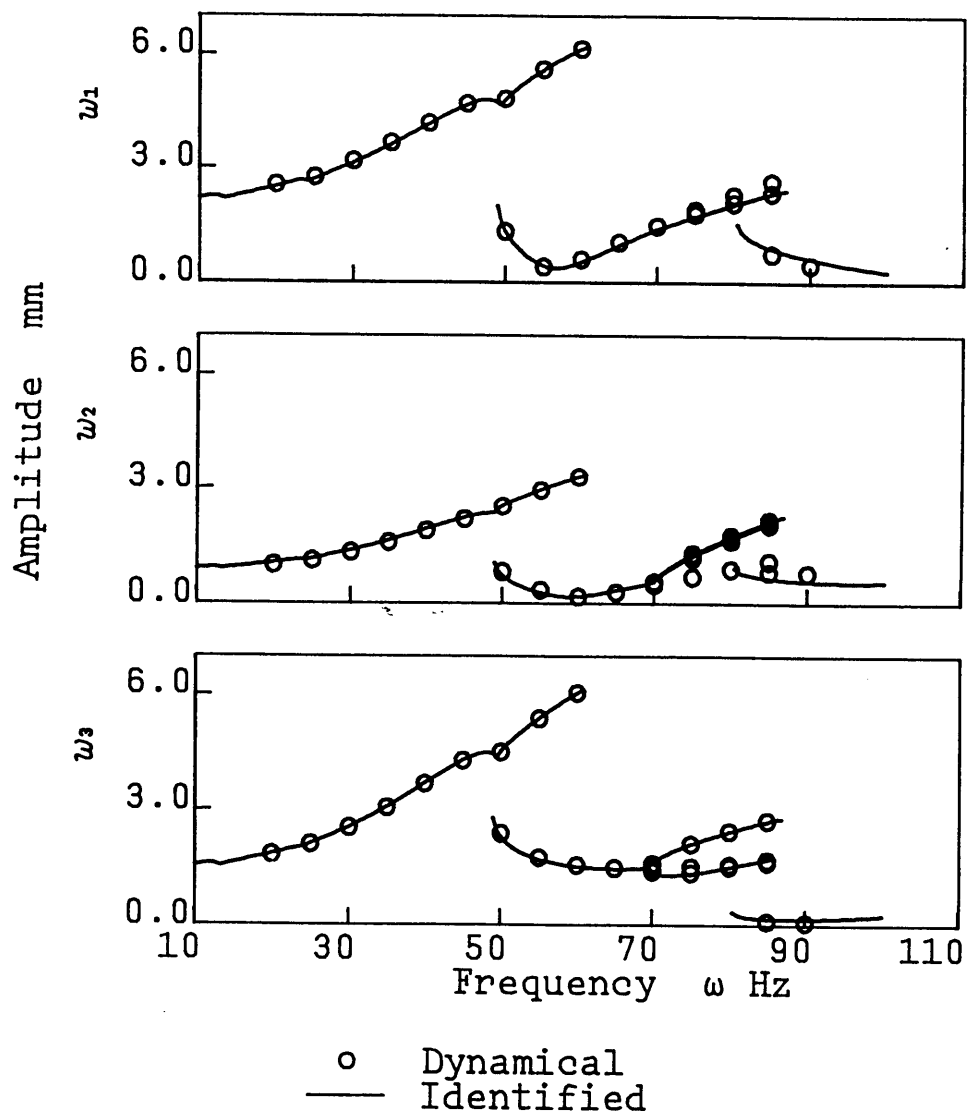


図5.4 同定に用いたデータおよび同定結果との共振曲線による比較  
(加振点  $(r_f, \theta_f) = (a/4, 0)$  の場合)

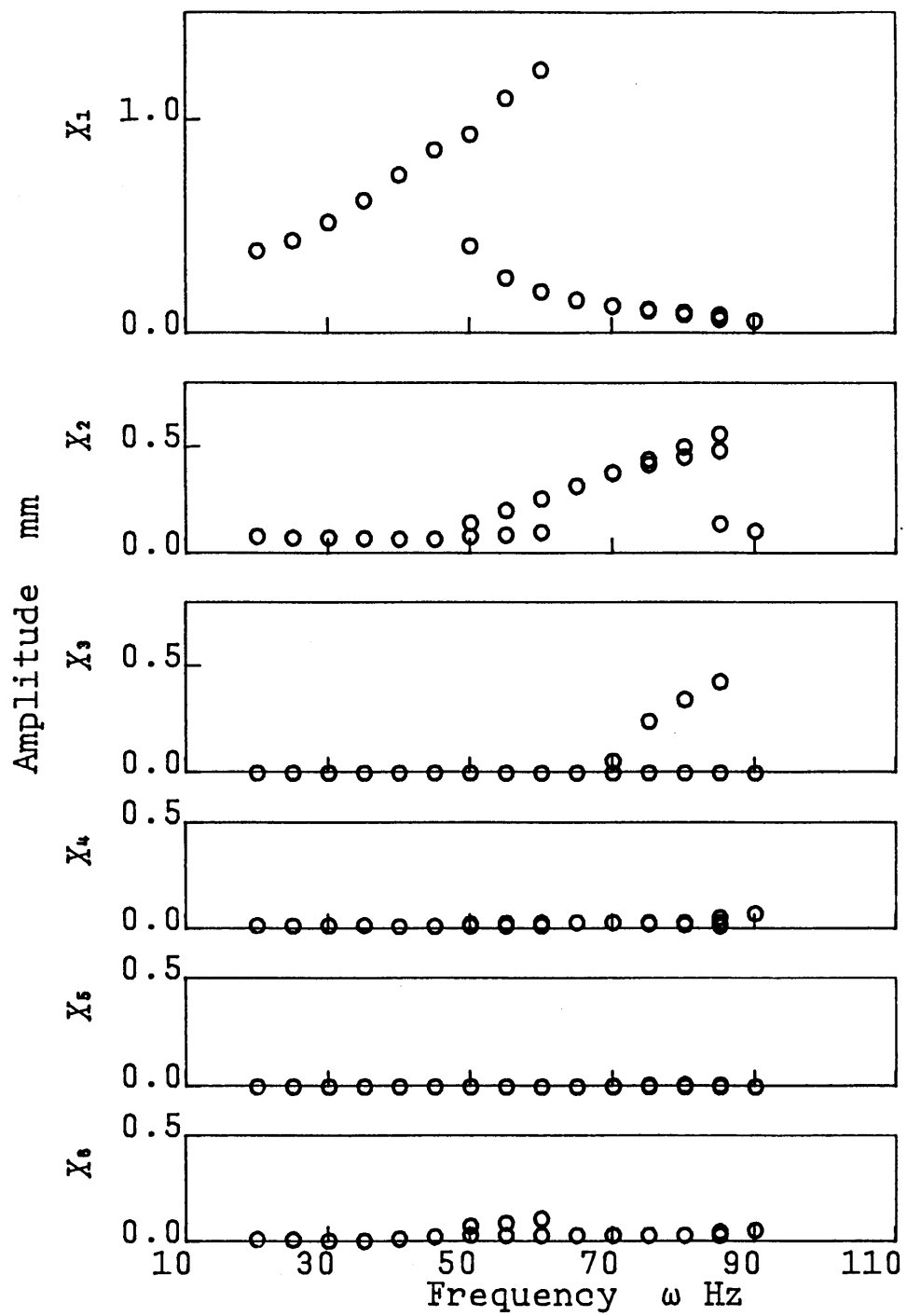


図5.5 モード座標

表5.2 同定結果

	Exact	Identified		Exact	Identified
$\text{kg/m}^2$			$\text{N/m}^5$	$\times 10^{11}$	$\times 10^{11}$
$m_1$	3.920	3.963	$\beta_{1111}$	0.946	0.956
$m_2$	3.920	3.887	$\beta_{1112}$	0.000	-0.001
$m_3$	3.920	3.887	$\beta_{1113}$	0.000	-0.001
$m_6$	3.920	3.931	$\beta_{1116}$	3.107	3.113
$\text{Ns/m}^3$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\beta_{1122}$	6.273	6.408
$c_{11}$	1.200	1.205	$\beta_{1123}$	0.000	0.040
$c_{12}$	0.000	-0.002	$\beta_{1126}$	0.000	-0.066
$c_{13}$	0.000	-0.002	$\beta_{1133}$	6.273	6.411
$c_{16}$	0.000	0.002	$\beta_{1136}$	0.000	-0.066
$c_{22}$	1.200	1.198	$\beta_{1166}$	15.554	15.531
$c_{23}$	0.000	0.014	$\beta_{1222}$	0.000	0.339
$c_{26}$	0.000	-0.001	$\beta_{1223}$	0.000	-0.263
$c_{33}$	1.200	1.198	$\beta_{1226}$	7.366	8.513
$c_{36}$	0.000	-0.001	$\beta_{1233}$	0.000	-0.247
$c_{66}$	1.200	1.208	$\beta_{1236}$	0.000	0.361
$\text{N/m}^3$	$\times 10^5$	$\times 10^5$	$\beta_{1266}$	0.000	-0.166
$k_1$	1.745	1.759	$\beta_{1333}$	0.000	0.341
$k_2$	6.436	6.399	$\beta_{1336}$	7.366	8.513
$k_3$	6.436	6.399	$\beta_{1366}$	0.000	-0.166
$k_6$	20.347	20.510	$\beta_{1666}$	23.847	23.556
$\text{N/m}^4$	$\times 10^8$	$\times 10^8$	$\beta_{2222}$	5.732	5.703
$\alpha_{111}$	0.000	0.000	$\beta_{2223}$	0.000	-0.010
$\alpha_{112}$	0.000	0.000	$\beta_{2226}$	0.000	-0.045
$\alpha_{113}$	0.000	0.000	$\beta_{2233}$	11.465	11.322
$\alpha_{116}$	0.000	0.000	$\beta_{2236}$	0.000	0.022
$\alpha_{122}$	0.000	0.000	$\beta_{2266}$	24.873	26.257
$\alpha_{123}$	0.000	0.000	$\beta_{2333}$	0.000	-0.008
$\alpha_{126}$	0.000	0.000	$\beta_{2336}$	0.000	0.018
$\alpha_{133}$	0.000	0.000	$\beta_{2366}$	0.000	0.667
$\alpha_{136}$	0.000	0.000	$\beta_{2666}$	0.000	-1.051
$\alpha_{166}$	0.000	0.000	$\beta_{3333}$	5.732	5.703
$\alpha_{222}$	0.000	0.000	$\beta_{3336}$	0.000	-0.045
$\alpha_{223}$	0.000	0.000	$\beta_{3366}$	24.873	26.256
$\alpha_{226}$	0.000	0.000	$\beta_{3666}$	0.000	-1.051
$\alpha_{233}$	0.000	0.000	$\beta_{6666}$	34.310	32.770
$\alpha_{236}$	0.000	0.000			
$\alpha_{266}$	0.000	0.000			
$\alpha_{333}$	0.000	0.000			
$\alpha_{336}$	0.000	0.000			
$\alpha_{366}$	0.000	0.000			
$\alpha_{666}$	0.000	0.000			

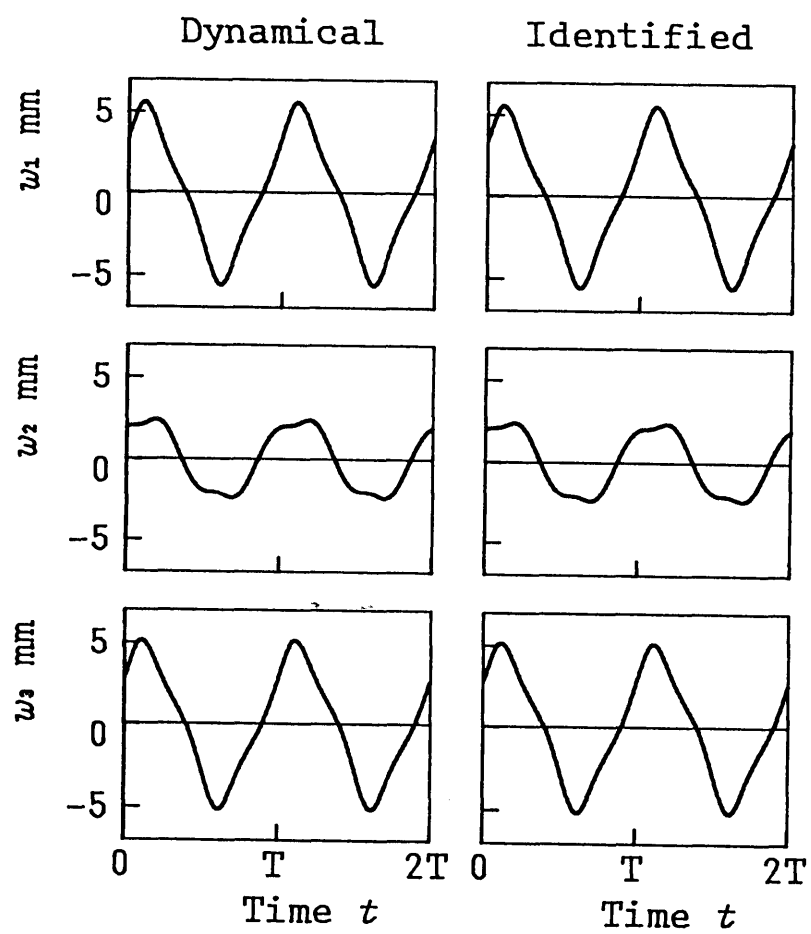


図5.6 振動波形による比較 ( $\omega = 50\text{Hz}$ )

## 5.5 まとめ

この章では長方形と円形の非線形板を取り上げて同定法の提案をした。提案した方法は、周期外力にによる定常状態のたわみ振動のデータから線形のモード関数を用いてモード座標を求め、そのデータからハーモニックバランスの原理に基づいてモード方程式を定めるものである。数値シミュレーションによって、提案した方法で長方形と円形の非線形板が精度良く同定できることを示した。



## 第6章 実用性の向上

### 6.1 まえがき

前章までに非線形連続系の例として、非線形はりおよび非線形板を取り上げてその同定法を提案してきた。しかしそこで提案した同定法は対象とする系に対応する線形非減衰系のモード関数が既知であるという前提条件を必要とし、このためモード関数を解析的、数値的あるいは実験的にあらかじめ別の手段で求めておく必要があった。しかし実用性を考えれば、対象とする系のもつ非線形性の影響を受けた実験データのみから一連の手順で同定できることが望ましいのは明らかである。そこでこの章ではこの前提条件を緩和して、モード関数が未知の場合でも対象とする系を同定できるように実用性を向上させた方法を提案する。そしてはりおよび板を対象として同定の数値シミュレーションを行い、提案した方法の有効性を検討する。

### 6.2 問題設定

説明の簡単のため、一様な非線形はりを取り上げる。この系に係数 $C$ の粘性減衰と係数 $\mu$ の内部減衰が作用するものとする運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{E A}{l} \left[ u_0 + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + C \frac{\partial w}{\partial t} + \mu E I \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} = Q \end{aligned} \quad (6.1)$$

となる。ここに $w$ 、 $Q$ はそれぞれはりのたわみおよびはりに作用する外力を表し、いずれも位置と時間の関数である。また $\rho$ 、 $l$ 、 $A$ 、 $E$ 、 $I$ 、 $u_0$ はそれぞれはりの密度、長さ、断面積、縦弾性係数、断面二次モーメントおよび初期伸びである。

この系を実験的に同定するとは、外力 $Q$ とそれに対するたわみ $w$ の実験データから運動方程式(6.1)を定めることである。しかし式(6.1)は偏微分方程式であり、この式をこの形で直接定めることは困難であると思われる。そこで同定法を提案する前に、偏微分方程式(6.1)を常微分方程式に変換することを考える。このため未知量であるたわみ $w$ を

$$w = \sum_{n=1} \phi_n X_n \quad (6.2)$$

の級数の形に変数変換する。ここに  $\phi_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  は位置の関数で、幾何学的な境界条件を満足する互いに一次独立な関数であり、 $X_n$  は時間の関数である。いま、同定の問題を考えているので  $\phi_n$  は実験データから定める関数である。式(6.2)を運動方程式(6.1)に代入しガラーキン法を用いると、式(6.1)は

$$\sum_{m=1} \ddot{m}_{nm} \ddot{X}_m + \sum_{m=1} \dot{c}_{nm} \dot{X}_m + \sum_{m=1} k_{nm} X_m + N_n = q_n$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.3)$$

の形の常微分方程式に変換される。ここに  $m_{nm}$ ,  $c_{nm}$ ,  $k_{nm}$  は

$$\left. \begin{aligned} m_{nm} &= \int_0^l \rho A \phi_n \phi_m dx \\ c_{nm} &= \int_0^l \left( C \phi_n \phi_m + \mu E I \frac{d^2 \phi_n}{dx^2} \frac{d^2 \phi_m}{dx^2} \right) dx \\ k_{nm} &= \int_0^l \left( E I \frac{d^2 \phi_n}{dx^2} \frac{d^2 \phi_m}{dx^2} + \frac{E A u_0}{l} \frac{d \phi_n}{dx} \frac{d \phi_m}{dx} \right) dx \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

で与えられる定数で、

$$m_{nm} = m_{mn}, \quad c_{nm} = c_{mn}, \quad k_{nm} = k_{mn} \quad (6.5)$$

を満足する。また  $N_n$  は

$$N_n = \sum_{i \leq j \leq k} \beta_{n,ijk} X_i X_j X_k \quad (6.6)$$

の形の  $X_n$  の関数である。さらに  $q_n$  は

$$q_n = \int_0^l Q \phi_n dx \quad (6.7)$$

で与えられる時間の関数である。

以上の議論は、非線形はり以外の非線形連続系においても同様に成立し、偏微分方程式で表される運動方程式を等価な常微分方程式に変換できる。

以上の準備をしてにおいて同定の問題について考える。方程式(6.3)と関数  $\phi_n$  を実験的に

定めることができれば、それらを用いて任意の外力に対する応答を予測することができるので、同定の目的を考えればこの系を同定するという問題すなわち運動方程式を定めるとい問題は、実験データから式(6.3)および関数 $\phi_n$ を定める問題に置き換えてもよいと思われる。そこで以下に適当な外力 $Q$ とそれに対するたわみ $w$ のデータを知って方程式(6.3)および関数 $\phi_n$ を定める方法を提案する。

### 6.3 同定法の提案

#### 6.3.1 関数 $\phi_n$ の定め方

提案する同定法において必要となる手順に従って、はじめに、たわみの測定データから関数 $\phi_n$ を定める方法を考える。ただし $\phi_n$ を位置の関数として直接定めることは困難であるので、たわみの測定点における $\phi_n$ の値を求め、測定点と測定点との間は適当な関数で内挿するものとする。

たわみの測定点として $N$ 個の点を定め、各測定点においてたわみ $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )を測定する。式(6.2)において測定点の数と同数の $X_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ )まで考慮すれば、式(6.2)は

$$\{w\} = [\Phi] \{X\} \quad (6.8)$$

となる。ここにベクトル $\{w\}$ ,  $\{X\}$ は

$$\left. \begin{aligned} \{w\} &= \{w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_N\}^T \\ \{X\} &= \{X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_N\}^T \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

で与えられるベクトルである。またマトリックス $[\Phi]$ は $i$ 番目のたわみの測定点における関数 $\phi_n$ の値 $\phi_{in}$ を成分とするマトリックスで

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

で与えられる未知のマトリックスである。式(6.8)は、ベクトル $\{w\}$ とベクトル $\{X\}$ がマト

リックス $[\Phi]$ を変換マトリックスとする線形変換の関係にあることを示している。

マトリックス $[\Phi]$ の選び方として、 $X_n (n = 1, 2, \dots, N)$ がたわみに寄与する成分を表し、その寄与の大きなものから $X_n$ が順に並ぶようにすると、同定自由度の決定に都合がよい。このような変換マトリックス $[\Phi]$ を実験データ $\{w\}$ から求めるため、Vold, H. と Leuridan, J. <sup>(6.9)</sup>の提案した方法を応用する。

このため、系に周期 $T_l$ の周期外力を加え、各測定点における定常状態のたわみ振動 $w_i$ を測定する。測定によって得られた $w_i$ は、外力と同じ周期を持つので、加えた外力の周期 $T_l$ から決まる角振動数 $\omega_l = (2\pi / T_l)$ を用いて

$$w_i = (W_i)_{0l} + (W_i)_{1l} \cos \omega_l t + (W_i)_{1l}^* \sin \omega_l t + \dots \quad (6.11)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここでフーリエ係数 $(W_i)_{0l}$ ,  $(W_i)_{1l}$ ,  $\dots$ はFFTなどの手法により容易に求めることのできる量である。外力の振動数 $\omega_l$ を $l = 1$ から $L$ まで変化させ、各振動数について定常状態のたわみ $w_i$ を測定し、そのフーリエ係数を求める。こうして得られたフーリエ係数を並べてできるマトリックス $[w]$ を

$$[w] = \begin{bmatrix} (W_1)_{01} & (W_1)_{11} & \dots & (W_1)_{0l} & (W_1)_{1l} & \dots \\ (W_2)_{01} & (W_2)_{11} & \dots & (W_2)_{0l} & (W_2)_{1l} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ (W_N)_{01} & (W_N)_{11} & \dots & (W_N)_{0l} & (W_N)_{1l} & \dots \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

で定義する。 $X_n$ と $w_i$ は式(6.8)に示すような線形変換の関係にあるので、 $X_n$ も外力の周期と同じ周期の周期関数となり

$$X_n = (X_n)_{0l} + (X_n)_{1l} \cos \omega_l t + (X_n)_{1l}^* \sin \omega_l t + \dots \quad (6.13)$$

の形にフーリエ級数展開できる。そのフーリエ係数を並べてできるマトリックスを

$$[X] = \begin{bmatrix} (X_1)_{01} & (X_1)_{11} & \dots & (X_1)_{0l} & (X_1)_{1l} & \dots \\ (X_2)_{01} & (X_2)_{11} & \dots & (X_2)_{0l} & (X_2)_{1l} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ (X_N)_{01} & (X_N)_{11} & \dots & (X_N)_{0l} & (X_N)_{1l} & \dots \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

とする。式(6.8)よりマトリックス $[w]$ と $[X]$ は

$$[w] = [\Phi][X] \quad (6.15)$$

を満足する。

以上のようにして実験データから定まるマトリックス $[w]$ を用いて固有値問題

$$([w][w]^T)[\Phi] = [\Phi][\Gamma] \quad (6.16)$$

を作成し、これを解いて得られる固有マトリックスを変換マトリックス $[\Phi]$ とする。ここに $[\Gamma]$ は固有値 $\gamma_n (n = 1, 2, \dots, N)$ を対角成分に並べてできる対角マトリックスである。マトリックス $[\Phi]$ は

$$[\Phi][\Phi]^T = [I] \quad ([I] \text{は単位マトリックス}) \quad (6.17)$$

を満たす正規直交マトリックスになるように正規化しておく。

固有値問題(6.16)の意味は以下のである。式(6.15)を式(6.16)に代入し、 $[\Phi]$ が正規直交マトリックスであることを考慮すると

$$[\Gamma] = [X][X]^T \quad (6.18)$$

を得る。式(6.18)は、式(6.14)で与えられるマトリックス $[X]$ の各行からなるベクトルすなわち $X_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ のフーリエ係数を並べてできるベクトルは互いに直交し、固有値 $\gamma_n$ はそのフーリエ係数の二乗の総和を表すことを意味している。したがって固有値を大きい順に並べ、そのはじめの $M$ 個が残りの固有値より十分に大きいとすれば、その固有値に対応する $X_n (n = 1, 2, \dots, M)$ がたわみに大きく寄与していることを表している。いいかえればたわみ $w$ は $X_n (n = 1, 2, \dots, M)$ で十分近似でき、同定に当たっても式(6.3)のはじめの $M$ 個を、 $X_n (n > M)$ を無視した形で定めれば良いことを表している。

以上のようにしてたわみの測定点における関数 $\phi_n$ の値 $\phi_{in}$ が求められたので、各測定点の間を適当な関数で内挿した関数を $\phi_n$ とする。

### 6.3.2 $X_n$ と $q_n$ の求め方

第2の手順はたわみ $w$ と外力 $Q$ から $X_n, q_n (n = 1, 2, \dots, M)$ を求めることである。

$X_n$ を求めるための方法は簡単である。6.3.1で述べた方法によって求めたマトリックス $[\Phi]$ のうちはじめの $M$ 列からなる $N$ 行 $M$ 列のマトリックスを $[\Phi]_M$ とする。ここで改めて

ベクトル  $\{X\}$  を

$$\{X\} = \{X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_M\}^T \quad (6.19)$$

で定義すると,  $[\Phi]$  は正規直交マトリックスであるので  $\{X\}$  は

$$\{X\} = [\Phi]_M^T \{w\} \quad (6.20)$$

によって求められる.

$q_n$  は 6.3.1 節で定めた関数  $\phi_n$  を用いて外力  $Q$  の測定データから

$$q_n = \int_0^l Q \phi_n dx \quad (6.21)$$

によって求めることができる. とくに外力  $Q$  をたわみの測定点と同じ位置に作用させる場合には, 各測定点での外力の測定データを  $Q_i (i = 1, 2, \dots, N)$  とし, これらのデータを並べてできるベクトルを  $\{Q\}$  とすると,  $q_n$  は

$$\{q\} = [\Phi]_M^T \{Q\} \quad (6.22)$$

によって求めることができる. ここに  $\{q\}$  は  $q_n$  を並べてできるベクトルである.

### 6.3.3 方程式(6.3)の定め方

第3の手順は, 以上のようにして得た  $X_n$  と  $q_n (n = 1, 2, \dots, M)$  のデータから式(6.3)を定めることである. 式(6.3)の非線形項  $N_n$  は一般に  $X_n$  あるいはその時間微分の非線形関数で, 多くの場合それらの多項式で近似できる. ここでは非線形性が復元力にある系を考えているので, 非線形項  $N_n$  は  $X_n$  の二乗からはじまる

$$N_n = \sum_{i \leq j} \alpha_{n,ij} X_i X_j + \sum_{i \leq j \leq k} \beta_{n,ijk} X_i X_j X_k + \cdots \quad (6.23)$$

の形の多項式で与えられるとする. ここに係数  $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\cdots$  は未知のパラメータである. 以上のようにすれば式(6.3)を定めることは式(6.3)の未知パラメータ  $m_{nm}$ ,  $c_{nm}$ ,  $k_{nm}$  および式(6.23)の未知係数  $\alpha_{n,ij}$ ,  $\beta_{n,ijk}$ ,  $\cdots$  を定めることに帰着される.

これらのパラメータを求めるため, 関数  $\phi_n$  を定める際に測定した周期外力に対する定常

状態のたわみのデータと外力のデータをここで再び用いる。これらの測定データから式(6.20)および(6.21)または(6.22)を用いて $X_n$ と $q_n$ を求める。このようにして得た $q_n$ と $X_n$ は外力と同じ周期の周期関数であるので

$$\left. \begin{aligned} q_n &= (Q_n)_{0l} \\ &\quad + (Q_n)_{1l} \cos \omega_l t + (Q_n)_{2l} \cos 2\omega_l t + \cdots \\ &\quad + (Q_n)_{1l}^* \sin \omega_l t + (Q_n)_{2l}^* \sin 2\omega_l t + \cdots \\ X_n &= (X_n)_{0l} \\ &\quad + (X_n)_{1l} \cos \omega_l t + (X_n)_{2l} \cos 2\omega_l t + \cdots \\ &\quad + (X_n)_{1l}^* \sin \omega_l t + (X_n)_{2l}^* \sin 2\omega_l t + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここにフーリエ係数 $(Q_n)_{0l}$ ,  $(Q_n)_{1l}$ ,  $(Q_n)_{2l}$ ,  $\cdots$  および $(X_n)_{0l}$ ,  $(X_n)_{1l}$ ,  $(X_n)_{2l}$ ,  $\cdots$ はFFT(高速フーリエ変換)などの手法により容易に求められる既知の量である。次に式(6.23)で仮定した項 $X_i X_j$ ,  $X_i X_j X_k$ ,  $\cdots$ を上で求めたモード座標 $X_n$ の演算によって求め、その結果もフーリエ級数

$$\left. \begin{aligned} X_i X_j &= (X_i X_j)_{0l} \\ &\quad + (X_i X_j)_{1l} \cos \omega_l t + (X_i X_j)_{2l} \cos 2\omega_l t + \cdots \\ &\quad + (X_i X_j)_{1l}^* \sin \omega_l t + (X_i X_j)_{2l}^* \sin 2\omega_l t + \cdots \\ X_i X_j X_k &= (X_i X_j X_k)_{0l} \\ &\quad + (X_i X_j X_k)_{1l} \cos \omega_l t + (X_i X_j X_k)_{2l} \cos 2\omega_l t + \cdots \\ &\quad + (X_i X_j X_k)_{1l}^* \sin \omega_l t + (X_i X_j X_k)_{2l}^* \sin 2\omega_l t + \cdots \\ &\quad \vdots \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

の形におく。ここでもフーリエ係数 $(X_i X_j)_{0l}$ ,  $(X_i X_j)_{1l}$ ,  $\cdots$ は既知の量である。

式(6.24)および式(6.25)を式(6.3)に代入し、ハーモニクバランスの原理を用いて、両辺の定数項および $\cos \omega_l t$ ,  $\sin \omega_l t$ ,  $\cdots$ の係数をそれぞれ等しいとおくと、次の形の方程式を得る。

$$[A]\{S\} = \{Q\} \quad (6.26)$$

ここに $[A]$ は式(6.24)の第2式および式(6.25)に表われるフーリエ係数から決まる既知の

マトリックス， $\{Q\}$ は式(6.24)の第1式に表われるフーリエ係数から決まる既知のベクトル，そして $\{S\}$ は系のパラメータ $m_{nm}$ ， $c_{nm}$ ， $k_{nm}$ および非線形項 $N_n$ の係数パラメータ $\alpha_{n,ij}$ ， $\beta_{n,ijk}$ ， $\dots$ を成分とする未知のベクトルである．これらの表示式は，求めたい方程式の数，非線形項を表わす多項式の次数，フーリエ級数展開の打ち切り次数などを指定すれば容易に求められるもので，一般的な表示は面倒であるからここでは省略する．

加える外力の角振動数 $\omega_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ )の数 $L$ を適当に定め，またフーリエ級数展開の打ち切り次数を適当にとれば，未知数の数より多い方程式を含んで再び式(6.26)の形の方程式を得る．そこでこの式に最小二乗法を適用すれば， $\{S\}$ は

$$\{S\} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T\{Q\} \quad (6.27)$$

によって定められる．必要があれば重みマトリックスを用いて同定の精度を上げるよう試みることができる．重みマトリックス $[W]$ を用いるとき， $\{S\}$ は式(6.27)の代わりに

$$\{S\} = ([A]^T[W][A])^{-1}[A]^T[W]\{Q\} \quad (6.28)$$

で与えられる．式(6.27)あるいは式(6.28)によって $\{S\}$ を求めれば，方程式(6.3)が定められたことになる．

#### 6.4 数値シミュレーションによる同定の例

6.3節で提案した同定法の有効性を検討するため，ここで数値的に求めた振動データを実験データとみなし，同定の数値シミュレーションを行う．

##### 6.4.1 はりに対するシミュレーション結果

はじめにはりに対するシミュレーション結果を示す．

振動データを数値的に求めるため，一例として，はりの長さ $l$ ，断面積 $A$ ，断面二次モーメント $I$ ，密度 $\rho$ ，縦弾性係数 $E$ ，初期伸び $u_0$ ，粘性減衰の大きさ $C$ および内部減衰の大きさ $\mu$ を次のように定める．



$$\left. \begin{aligned} l &= 0.816 \text{ m}, & A &= 9.50 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ I &= 1.93 \times 10^{-13} \text{ m}^4, & \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, & u_0 &= 1 \times 10^{-6} \text{ m} \\ C &= 0.15 \text{ Ns/m}^2, & \mu &= 3.00 \times 10^{-4} \text{ s} \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

たわみの測定点を

$$x = \frac{1}{5}l, \quad \frac{2}{5}l, \quad \frac{3}{5}l, \quad \frac{4}{5}l \quad (6.30)$$

の位置に4箇所取り、外力は

$$Q = Q_0 \delta(x - x_i) \cos \omega t \quad (6.31)$$

で与えられる集中的な調和外力を作用させる場合を考える。この式で $Q_0$ は外力の大きさ、 $x_i$ は集中外力を作用させる加振点である。以下の数値例では大きさ $Q_0$ は $Q_0 = 1.0 \times 10^{-2}$  Nとした。また加振点は式(6.30)の1番目のたわみの測定点と同じ点に取った。

たわみ $w$ の振動データを次のように求める。はりの運動方程式を、線形のモード関数を用いてモード方程式に変換する。そのはじめの6式を与えられた周期外力に対し、適当な初期条件のもとに数値的に積分し、外力と同じ周期の周期解になるまで積分を続ける。こうして得た周期解から各測定位置におけるたわみ振動を求め、これを実験データとみなす。

外力の振動数 $\omega$ のいろいろな値に対して求めた各測定位置でのたわみを、振幅と $\omega$ の関係にして共振曲線の形で示すと図6.1に○印で示すようになった。

図6.1に示すたわみの測定データから6.3.1節に示した方法で $\phi_n$ を求める。ここでは固有値問題(6.16)におけるマトリックス $[w]$ をたわみの調和成分のフーリエ係数から作成した。内挿関数として一次関数を採用した場合の $\phi_n (n = 1, 2, 3, 4)$ を図6.2に示す。この図には参考のため線形のモード関数を破線で示してある。また同時に得られた固有値 $\gamma_n (n = 1, 2, 3, 4)$ を表6.1に示す。この表から固有値 $\gamma_4$ は他の固有値に比べて小さいことがわかる。得られた $\phi_n$ から式(6.20)により求めた $X_n$ を共振曲線の形で示すと図6.3のようになった。この図から固有値 $\gamma_4$ が小さいことに対応して $X_4$ が小さいことがわかる。そこで同定は $X_n (n = 1, 2, 3)$ に関するものとする。

同定に当たって、非線形項は式(6.23)に示す $X_n$ の二乗、三乗の項よりなるとする。ただし力学的な考察によって、各非線形項はポテンシャルから導かれると考えられるので、こ

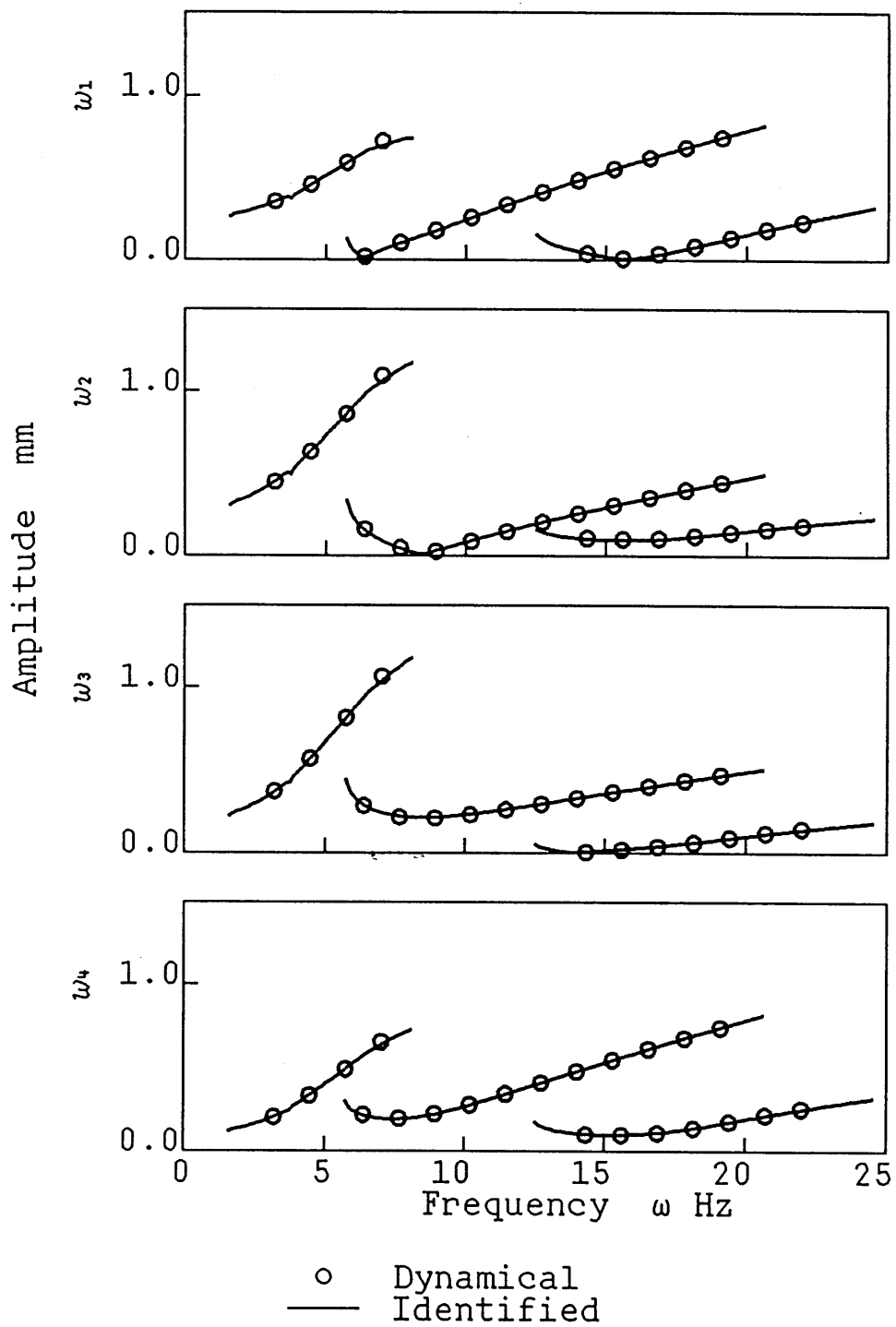


図6.1 同定に用いたデータおよび同定結果との共振曲線による比較

表6.1 固有值

$\gamma_1$	$6.965 \times 10^{-6}$
$\gamma_2$	$6.472 \times 10^{-6}$
$\gamma_3$	$0.448 \times 10^{-6}$
$\gamma_4$	$0.001 \times 10^{-6}$

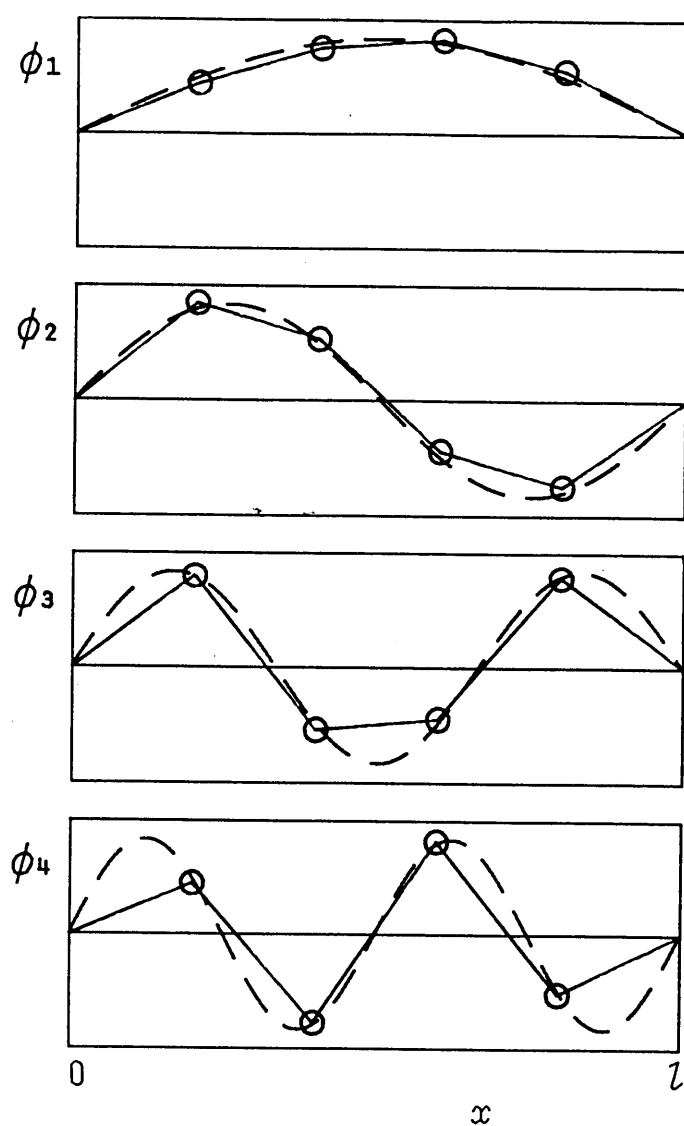


图6.2  $\phi_n$

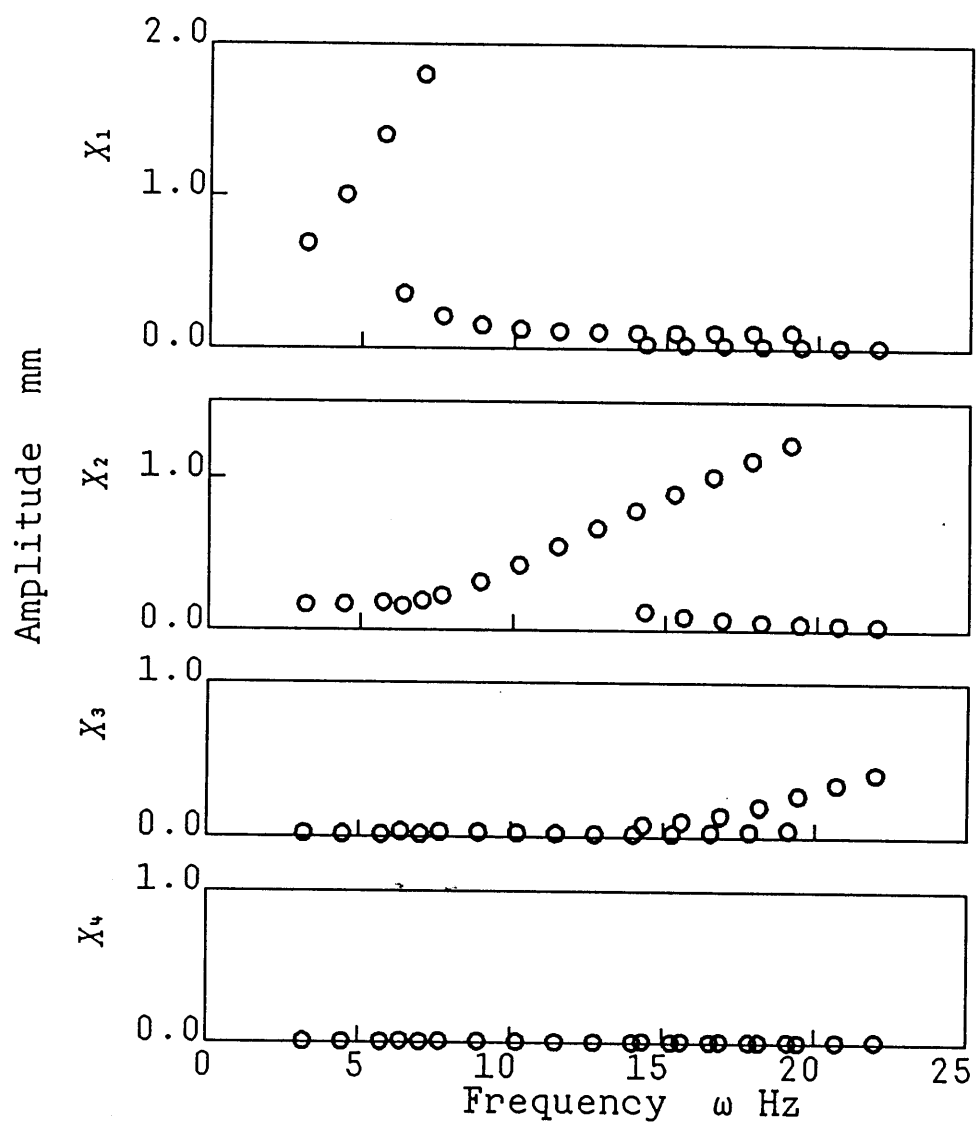


图 6.3  $X_n$

ここではの三乗，四乗の多項式で与えられるポテンシャル

$$U = \sum_{i \leq j \leq k} \alpha_{ijk} X_i X_j X_k + \sum_{i \leq j \leq k \leq l} \beta_{ijkl} X_i X_j X_k X_l \quad (6.32)$$

から

$$N_n = \frac{\partial U}{\partial X_n} \quad (6.33)$$

によって導かれるとする。このようにしたほうが，非線形項(6.23)の係数パラメータが減少し，精度の向上が期待される。フーリエ級数展開の打ち切り次数は3にする。またここでは重みマトリックスは用いないことにする。

図6.1に示したすべてのデータを用いて，提案した方法に従って同定を行った。その結果を表6.2に示す。得られた同定結果の妥当性を検討するため，表6.2に示したパラメータの値を用いて測定位置でのたわみを求め，図6.1に重ねて実線で示した。またこのときのたわみの振動波形の例を図6.4に示す。図6.1あるいは図6.4からわかるように同定結果はもとの実験データをよく再現している。

表6.2 同定結果

kg/m	$\times 10^{-2}$	N/m <sup>3</sup>	$\times 10^4$	N/m <sup>4</sup>	$\times 10^7$
$m_{11}$	1.219	$\alpha_{111}$	0.000	$\beta_{1111}$	0.182
$m_{12}$	0.000	$\alpha_{112}$	0.000	$\beta_{1112}$	-0.155
$m_{13}$	0.000	$\alpha_{113}$	0.000	$\beta_{1113}$	0.037
$m_{22}$	1.221	$\alpha_{122}$	0.000	$\beta_{1122}$	1.459
$m_{23}$	0.000	$\alpha_{123}$	0.000	$\beta_{1123}$	0.060
$m_{33}$	1.234	$\alpha_{133}$	0.000	$\beta_{1133}$	3.292
Ns/m <sup>2</sup>	$\times 10^{-2}$	$\alpha_{222}$	0.000	$\beta_{1222}$	-0.612
$c_{11}$	2.503	$\alpha_{223}$	0.000	$\beta_{1223}$	0.098
$c_{12}$	-0.046	$\alpha_{233}$	0.000	$\beta_{1233}$	-1.764
$c_{13}$	0.031	$\alpha_{333}$	0.000	$\beta_{1333}$	0.296
$c_{22}$	3.162			$\beta_{2222}$	2.801
$c_{23}$	0.054			$\beta_{2223}$	0.305
$c_{33}$	6.174			$\beta_{2233}$	12.838
N/m <sup>2</sup>	$\times 10$			$\beta_{2333}$	0.665
$k_{11}$	0.750			$\beta_{3333}$	14.379
$k_{12}$	-0.285				
$k_{13}$	0.105				
$k_{22}$	4.666				
$k_{23}$	0.262				
$k_{33}$	17.357				

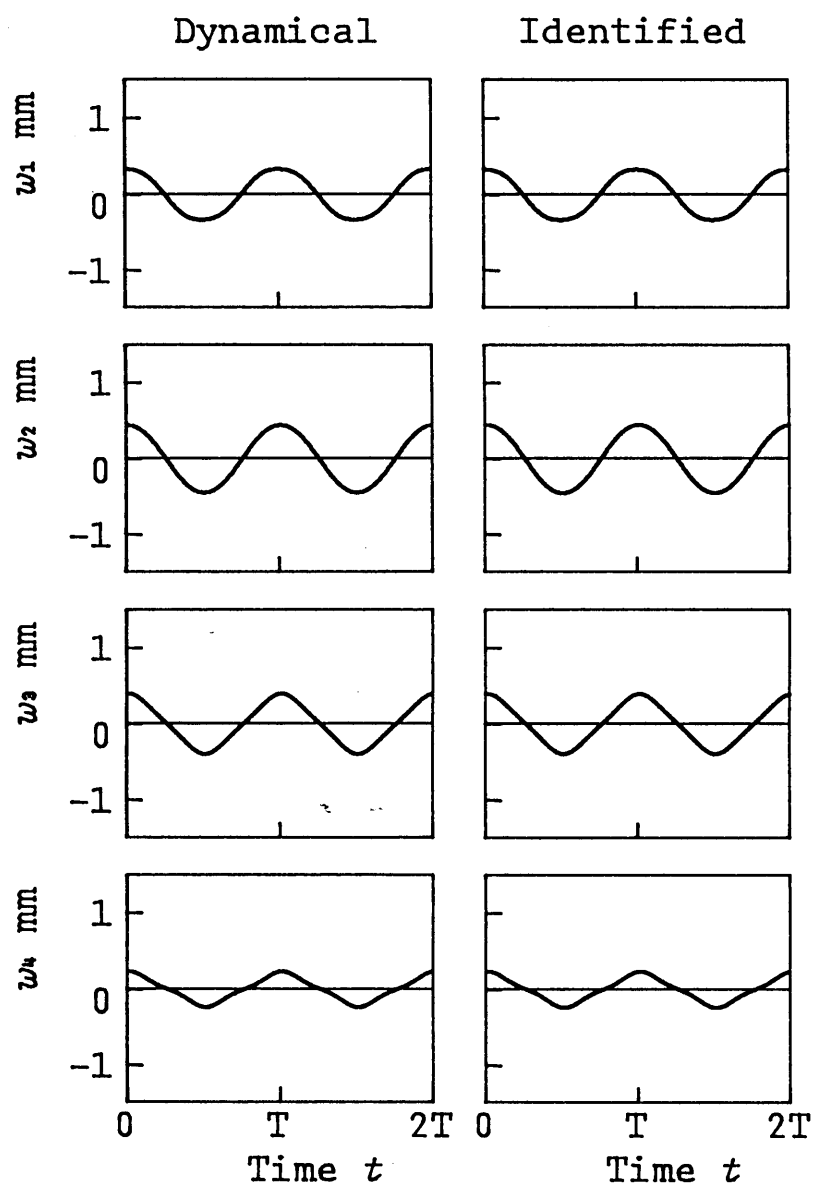


図6.4 振動波形による比較 ( $\omega = 3.2\text{Hz}$ )

#### 6.4.2 長方形板に対するシミュレーション結果

次に長方形板に対するシミュレーション結果を示す。

振動データを数値的に求めるため、一例として、長方形板の横の長さ $a$ 、縦の長さ $b$ 、厚さ $h$ 、密度 $\rho$ 、縦弾性係数 $E$ 、ポアソン比 $\nu$ 、粘性減衰の大きさ $C$ および初期張力 $N_0$ の大きさ $\mu$ を次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} a &= 0.65 \text{ m}, & b &= 0.35 \text{ m} \\ h &= 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}, & \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, & \nu &= 0.3 \\ C &= 120 \text{ Ns/m}^3, & N_0 &= 4.0 \times 10^3 \text{ N/m} \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

たわみの測定点を

$$\begin{aligned} (x, y) = & \left( \frac{1}{4}a, \frac{1}{3}b \right), \left( \frac{1}{4}a, \frac{2}{3}b \right), \left( \frac{2}{4}a, \frac{1}{3}b \right) \\ & \left( \frac{2}{4}a, \frac{2}{3}b \right), \left( \frac{3}{4}a, \frac{1}{3}b \right), \left( \frac{3}{4}a, \frac{2}{3}b \right) \end{aligned} \quad (6.35)$$

の位置に6箇所取り、外力は

$$Q = Q_0 \delta(x - x_f) \delta(y - y_f) \cos \omega t \quad (6.36)$$

で与えられる集中的な調和外力を作用させる場合を考える。この式で $Q_0$ は外力の大きさ、 $(x_f, y_f)$ は集中外力を作用させる加振点である。以下の数値例では大きさ $Q_0$ は $Q_0 = 230 \text{ N}$ とした。また加振点は式(6.35)の1番目のたわみの測定点と同じ点に取った。

測定位置(6.35)におけるたわみの振動データをはりの場合と同様にして数値的に求め、これを実験データとみなす。外力の振動数 $\omega$ のいろいろな値に対して求めたたわみを、振幅と $\omega$ の関係にして共振曲線の形で示すと図6.5に○印で示すようになった。図6.5には式(6.35)の6点の測定位置のうちはじめの3点におけるたわみのデータを示してある。

以上のようにして得られたたわみの測定データから固有値問題(6.16)を解いて得られた固有値を表6.3に示す。固有値問題(6.16)におけるマトリックス $[w]$ は調和成分のフーリエ係数から作成した。また式(6.20)により求めた $X_n$ を共振曲線の形で示すと図6.6のようになった。表6.3および図6.6から $X_1$ 、 $X_2$ が他の $X_n$ に比べて小さいことがわかる。そこで

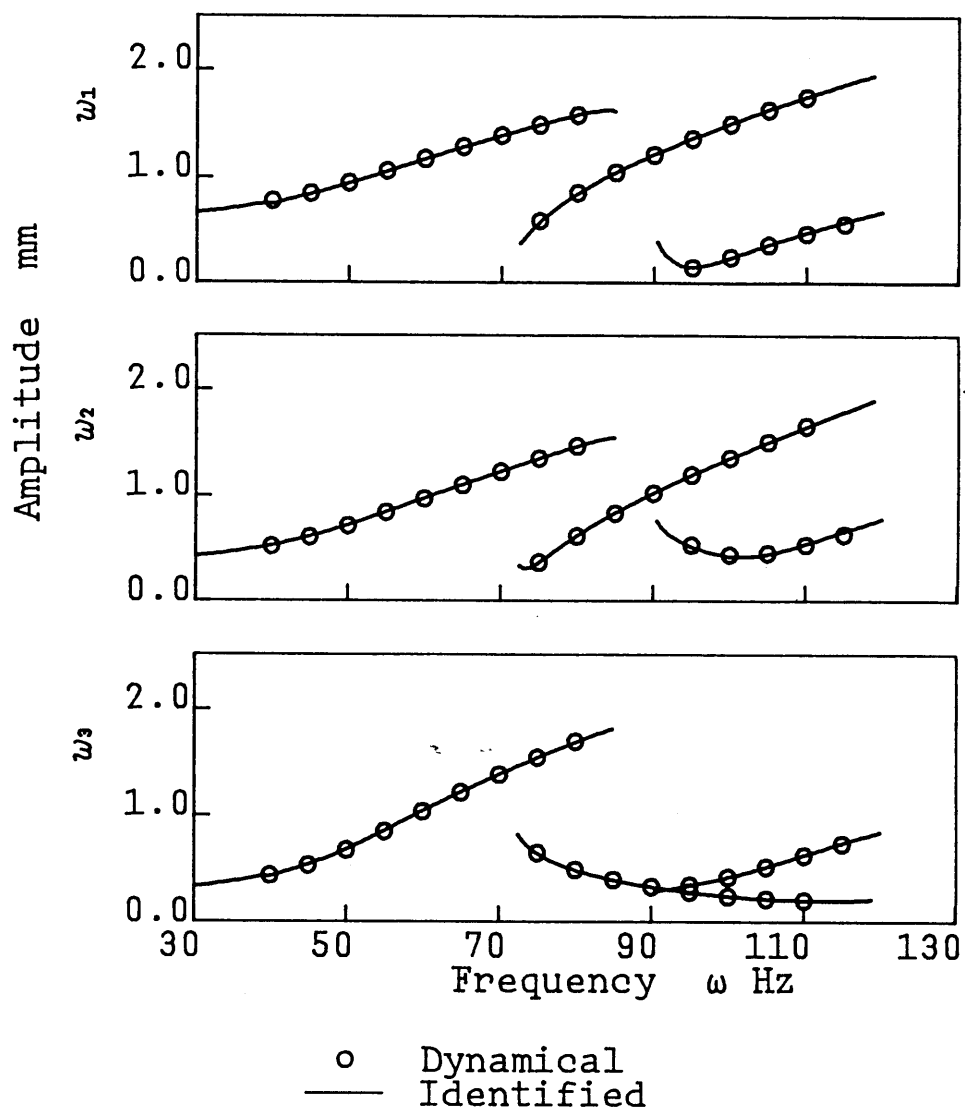


図6.5 同定に用いたデータおよび同定結果との共振曲線による比較



同定は $X_n(n = 1, 2, 3, 4)$ に関するものとする。

同定に当たって、非線形項はポテンシャル(6.32)から(6.33)によって得られるとした。  
フーリエ級数展開の打ち切り次数は3とし、重みマトリックスは用いないことにした。

図6.5に示したすべてのデータを用いて、提案した方法に従って同定を行った。その結果を表6.4に示す。得られた同定結果の妥当性を検討するため、表6.4に示したパラメータの値を用いて測定位置でのたわみを求め、図6.5に重ねて実線で示した。またこのときのたわみの振動波形の例を図6.7に示す。図6.5あるいは図6.7からわかるように同定結果はもとの実験データをよく再現している。

表6.3 固有値

$\gamma_1$	$5.984 \times 10^{-5}$
$\gamma_2$	$5.479 \times 10^{-5}$
$\gamma_3$	$0.927 \times 10^{-5}$
$\gamma_4$	$0.123 \times 10^{-5}$
$\gamma_5$	$0.003 \times 10^{-5}$
$\gamma_6$	$0.000 \times 10^{-5}$

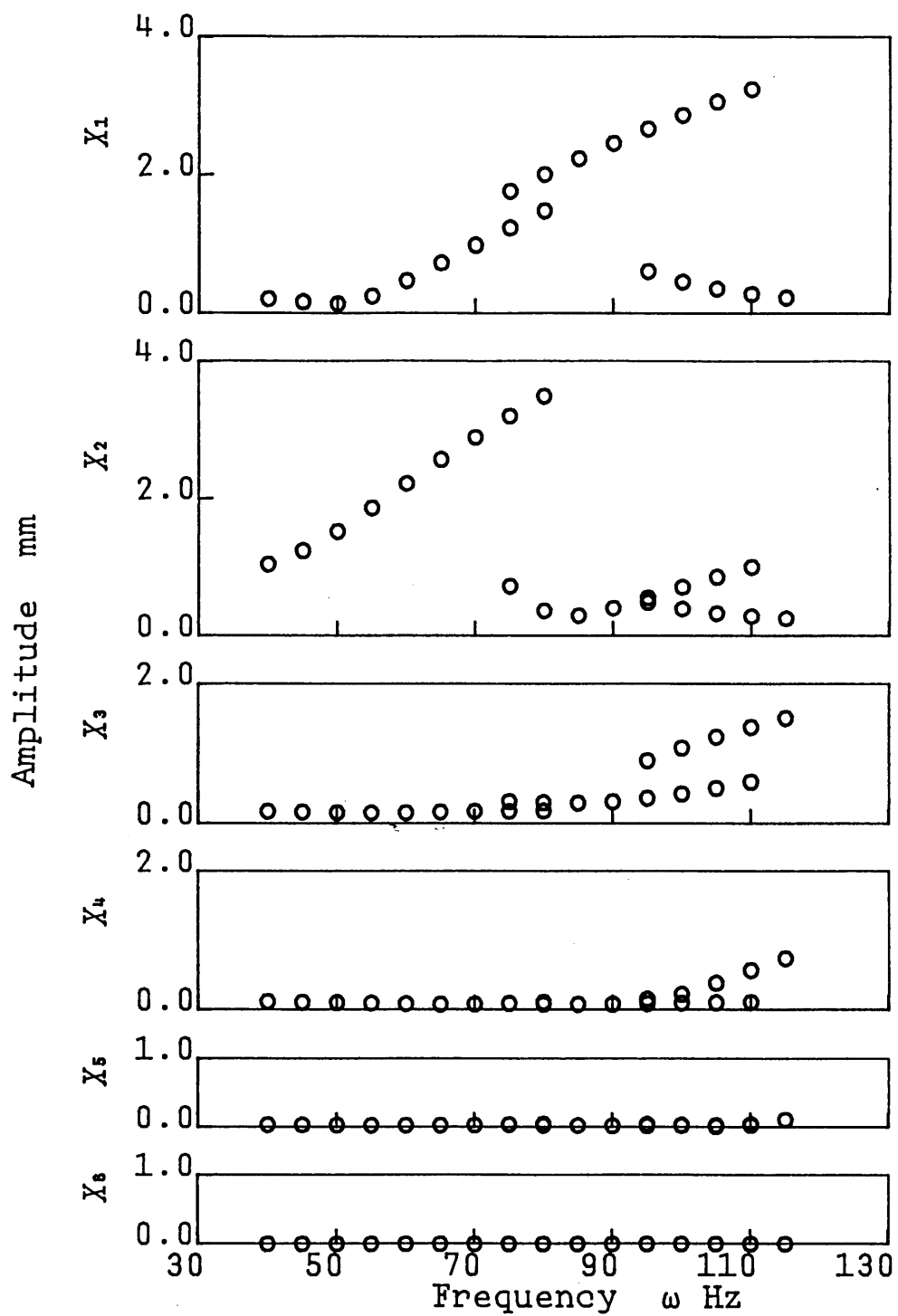


图 6.6  $X_n$

表6.4 同定結果

$\text{kg/m}^2$		$\text{N/m}^4$	$\times 10^7$	$\text{N/m}^5$	$\times 10^{10}$
$m_{11}$	1.295	$\alpha_{111}$	0.000	$\beta_{1111}$	1.009
$m_{12}$	-0.003	$\alpha_{112}$	0.000	$\beta_{1112}$	0.144
$m_{13}$	-0.006	$\alpha_{113}$	0.000	$\beta_{1113}$	0.261
$m_{14}$	-0.012	$\alpha_{114}$	0.000	$\beta_{1114}$	0.213
$m_{22}$	1.307	$\alpha_{122}$	0.000	$\beta_{1122}$	1.846
$m_{23}$	-0.004	$\alpha_{123}$	0.000	$\beta_{1123}$	-1.580
$m_{24}$	0.006	$\alpha_{124}$	0.000	$\beta_{1124}$	-0.064
$m_{33}$	1.240	$\alpha_{133}$	0.000	$\beta_{1133}$	4.634
$m_{34}$	-0.022	$\alpha_{134}$	0.000	$\beta_{1134}$	0.531
$m_{44}$	1.193	$\alpha_{144}$	0.001	$\beta_{1144}$	4.861
$\text{Ns/m}^3$	$\times 10$	$\alpha_{222}$	0.000	$\beta_{1222}$	0.695
$C_{11}$	4.014	$\alpha_{223}$	0.000	$\beta_{1223}$	-1.531
$C_{12}$	0.015	$\alpha_{224}$	0.000	$\beta_{1224}$	-0.328
$C_{13}$	0.014	$\alpha_{233}$	0.000	$\beta_{1233}$	1.443
$C_{14}$	-0.092	$\alpha_{234}$	0.000	$\beta_{1234}$	-3.033
$C_{22}$	4.020	$\alpha_{244}$	0.000	$\beta_{1244}$	4.096
$C_{23}$	-0.096	$\alpha_{333}$	0.000	$\beta_{1333}$	-0.815
$C_{24}$	0.010	$\alpha_{334}$	0.000	$\beta_{1334}$	2.792
$C_{33}$	4.003	$\alpha_{344}$	0.001	$\beta_{1344}$	-3.265
$C_{34}$	-0.103	$\alpha_{444}$	-0.001	$\beta_{1444}$	-0.820
$C_{44}$	4.644			$\beta_{2222}$	0.550
$\text{N/m}^3$	$\times 10^5$			$\beta_{2223}$	-0.023
$k_{11}$	2.438			$\beta_{2224}$	0.083
$k_{12}$	0.342			$\beta_{2233}$	3.159
$k_{13}$	-0.127			$\beta_{2234}$	-1.859
$k_{14}$	0.092			$\beta_{2244}$	4.500
$k_{22}$	1.601			$\beta_{2333}$	-0.344
$k_{23}$	-0.206			$\beta_{2334}$	-0.193
$k_{24}$	0.030			$\beta_{2344}$	-0.843
$k_{33}$	4.633			$\beta_{2444}$	0.933
$k_{34}$	-0.691			$\beta_{3333}$	3.436
$k_{44}$	5.480			$\beta_{3334}$	-1.881
				$\beta_{3344}$	9.204
				$\beta_{3444}$	-3.650
				$\beta_{4444}$	5.259

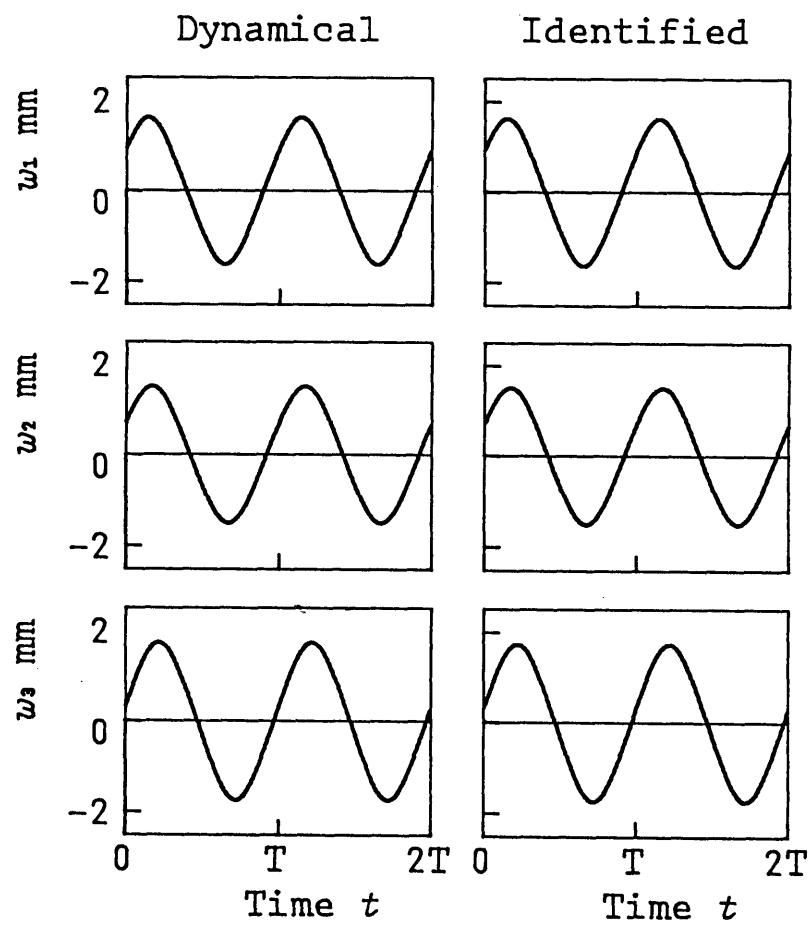


図6.7 振動波形による比較( $\omega = 80\text{Hz}$ )

### 6.4.3 円板に対するシミュレーション結果

最後に円板に対するシミュレーション結果を示す。

振動データを数値的に求めるため、一例として、円板の半径 $a$ ，厚さ $h$ ，密度 $\rho$ ，縦弾性係数 $E$ ，ポアソン比 $\nu$ ，粘性減衰の大きさ $C$ および初期張力 $N_0$ の大きさ $\mu$ を次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} a &= 2.15 \times 10^{-1} \text{ m}, & h &= 0.5 \times 10^{-3} \text{ m} \\ E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, & \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \nu &= 0.3, & C &= 120 \text{ Ns/m}^3 \\ N_0 &= 0.4 \times 10^3 \text{ N/m} \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

たわみの測定点を

$$(r, \theta) = \left( \frac{1}{4}a, \frac{0}{3}\pi \right), \left( \frac{3}{5}a, \frac{1}{3}\pi \right), \left( \frac{1}{4}a, \frac{2}{3}\pi \right), \\ \left( \frac{3}{5}a, \frac{3}{3}\pi \right), \left( \frac{1}{4}a, \frac{4}{3}\pi \right), \left( \frac{3}{5}a, \frac{5}{3}\pi \right) \quad (6.38)$$

の位置に6箇所取り，外力は

$$Q = Q_0 \delta(r - r_f) \delta(\theta - \theta_f) \cos \omega t \quad (6.39)$$

で与えられる集中的な調和外力を作用させる場合を考える。この式で $Q_0$ は外力の大きさで、 $Q_0 = 230\text{N}$ とした。また $(r_f, \theta_f)$ は集中外力を作用させる加振点で、式(6.38)の1番目のたわみの測定点と同じ点を加振点とする場合と3番目の測定点と同じ点を加振点とする場合を考えた。それぞれの場合の外力に対する各測定位置におけるたわみの振動データをはりの場合と同様にして数値的に求め、これを実験データとみなす。1番目のたわみの測定点を加振点とした場合の測定位置でのたわみを、振幅と振動数 $\omega$ の関係にして共振曲線の形で示すと図6.8に○印で示すようになった。図6.8には式(6.38)の6点の測定位置のうちのはじめの3点の位置におけるたわみのデータを示してある。

以上のようにして得られたたわみの測定データから固有値問題(6.16)を解いて得られた固有値を表6.5に示す。固有値問題(6.16)におけるマトリックス $[w]$ は $\omega$ から $3\omega$ までのフーリエ係数から作成した。また図6.8に示したデータから式(6.20)により求めた $X_n$ を共振

曲線の形で示すと図6.9のようになった。表6.5および図6.9から $X_5$ 、 $X_6$ が他の $X_n$ に比べて小さいことがわかる。そこで同定は $X_n(n=1,2,3,4)$ に関するものとした。

同定に当たって、非線形項はポテンシャル(6.32)から(6.33)によって得られるとした。フーリエ級数展開の打ち切り次数は3とし、重みマトリックスは用いないことにした。

図6.8に示した1番目のたわみの測定点を加振点とした場合のデータと3番目のたわみの測定点を加振点とした場合のデータの両方を用いて、提案した方法に従って同定を行った。その結果を表6.6に示す。得られた同定結果の妥当性を検討するため、表6.6に示したパラメータの値を用いて測定位置でのたわみを求め、図6.8に重ねて実線で示した。またこのときのたわみの振動波形の例を図6.10に示す。図6.8あるいは図6.10からわかるように同定結果はもとの実験データをよく再現している。

ここで示した円板の場合、2番目と3番目のモードの線形の固有振動数が一致し、これらのモードが縮退している。このような場合の同定は一般に困難であるが、以上の結果から、ここで提案した方法ではこのような場合でも精度の良い同定が可能であるといえる。

表6.5 固有値

$\gamma_1$	$1.201 \times 10^{-3}$
$\gamma_2$	$0.313 \times 10^{-3}$
$\gamma_3$	$0.175 \times 10^{-3}$
$\gamma_4$	$0.008 \times 10^{-3}$
$\gamma_5$	$0.001 \times 10^{-3}$
$\gamma_6$	$0.000 \times 10^{-3}$

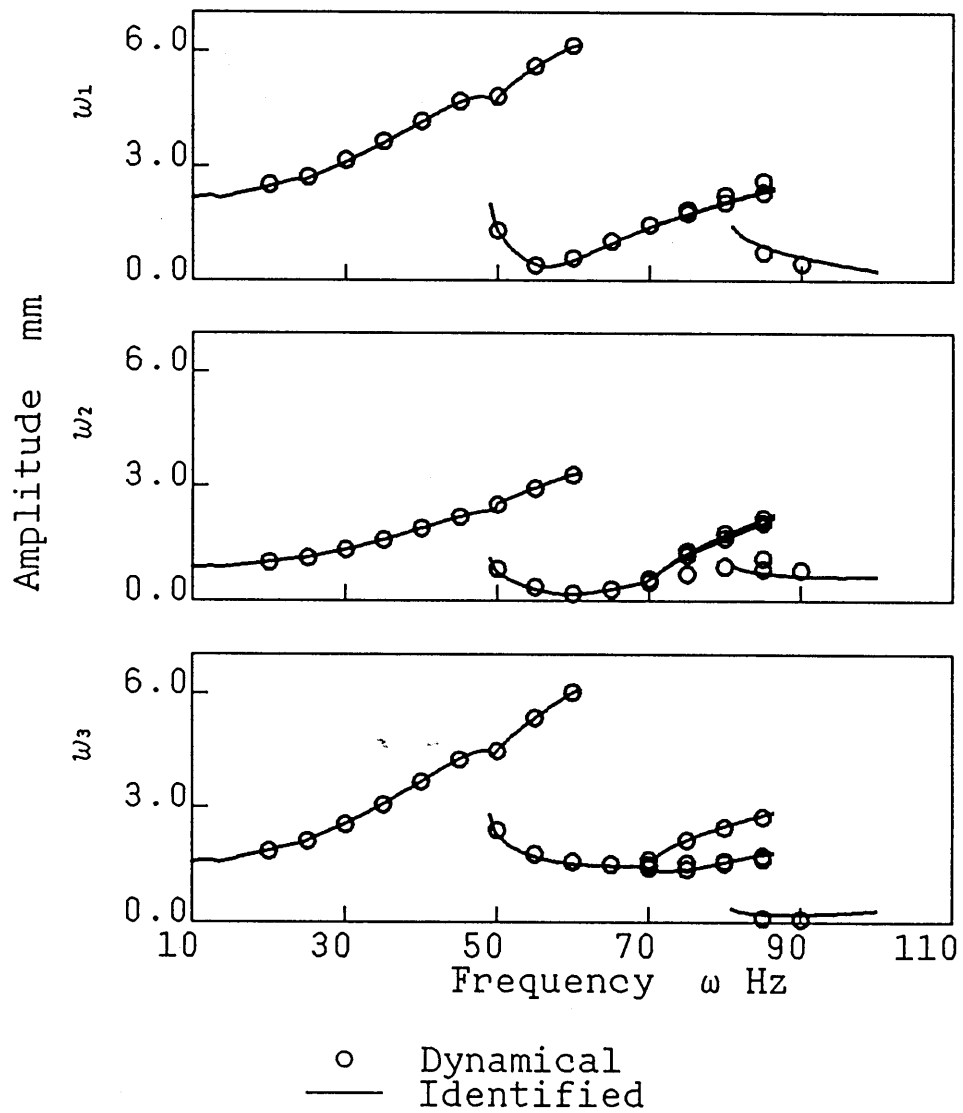


図6.8 同定に用いたデータおよび同定結果との共振曲線による比較  
(たわみの測定点1を加振点にした場合)

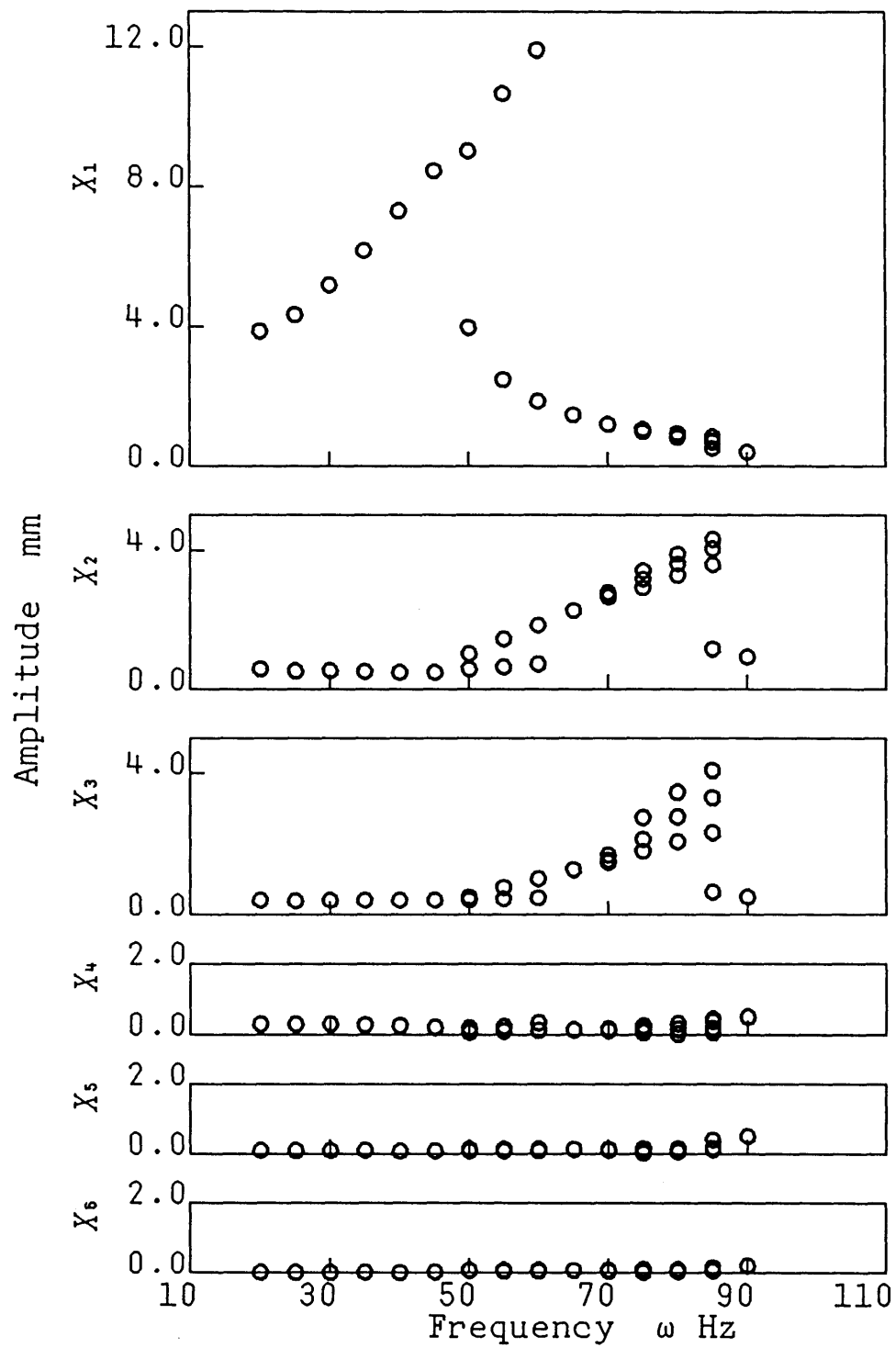


图6.9  $X_n$



表6.6 同定結果

$\text{kg/m}^2$		$\text{N/m}^4$	$\times 10^7$	$\text{N/m}^5$	$\times 10^9$
$m_{11}$	0.786	$\alpha_{111}$	0.000	$\beta_{1111}$	0.172
$m_{12}$	0.000	$\alpha_{112}$	0.000	$\beta_{1112}$	-0.001
$m_{13}$	0.039	$\alpha_{113}$	0.000	$\beta_{1113}$	0.059
$m_{14}$	0.365	$\alpha_{114}$	0.000	$\beta_{1114}$	-0.085
$m_{22}$	1.055	$\alpha_{122}$	0.000	$\beta_{1122}$	1.767
$m_{23}$	0.000	$\alpha_{123}$	0.000	$\beta_{1123}$	0.001
$m_{24}$	0.000	$\alpha_{124}$	0.000	$\beta_{1124}$	0.002
$m_{33}$	1.043	$\alpha_{133}$	0.000	$\beta_{1133}$	1.686
$m_{34}$	0.031	$\alpha_{134}$	0.000	$\beta_{1134}$	0.412
$m_{44}$	1.209	$\alpha_{144}$	0.000	$\beta_{1144}$	3.054
$\text{Ns/m}^3$	$\times 10$	$\alpha_{222}$	0.000	$\beta_{1222}$	-0.003
$c_{11}$	2.391	$\alpha_{223}$	0.000	$\beta_{1223}$	0.123
$c_{12}$	0.001	$\alpha_{224}$	0.000	$\beta_{1224}$	-1.645
$c_{13}$	0.124	$\alpha_{233}$	0.000	$\beta_{1233}$	-0.001
$c_{14}$	1.163	$\alpha_{234}$	0.000	$\beta_{1234}$	0.008
$c_{22}$	3.290	$\alpha_{244}$	0.000	$\beta_{1244}$	-0.005
$c_{23}$	0.000	$\alpha_{333}$	0.000	$\beta_{1333}$	0.340
$c_{24}$	-0.001	$\alpha_{334}$	0.000	$\beta_{1334}$	0.205
$c_{33}$	3.188	$\alpha_{344}$	0.000	$\beta_{1344}$	-0.212
$c_{34}$	0.103	$\alpha_{444}$	0.000	$\beta_{1444}$	-2.645
$c_{44}$	3.661			$\beta_{2222}$	2.154
$\text{N/m}^3$	$\times 10^5$			$\beta_{2223}$	0.000
$k_{11}$	0.364			$\beta_{2224}$	-0.002
$k_{12}$	-0.001			$\beta_{2233}$	4.334
$k_{13}$	0.054			$\beta_{2234}$	0.798
$k_{14}$	0.428			$\beta_{2244}$	10.472
$k_{22}$	1.767			$\beta_{2333}$	0.000
$k_{23}$	0.000			$\beta_{2334}$	0.000
$k_{24}$	0.000			$\beta_{2344}$	-0.006
$k_{33}$	1.759			$\beta_{2444}$	0.008
$k_{34}$	0.264			$\beta_{3333}$	2.080
$k_{44}$	5.719			$\beta_{3334}$	0.751
				$\beta_{3344}$	10.369
				$\beta_{3444}$	4.327
				$\beta_{4444}$	10.914

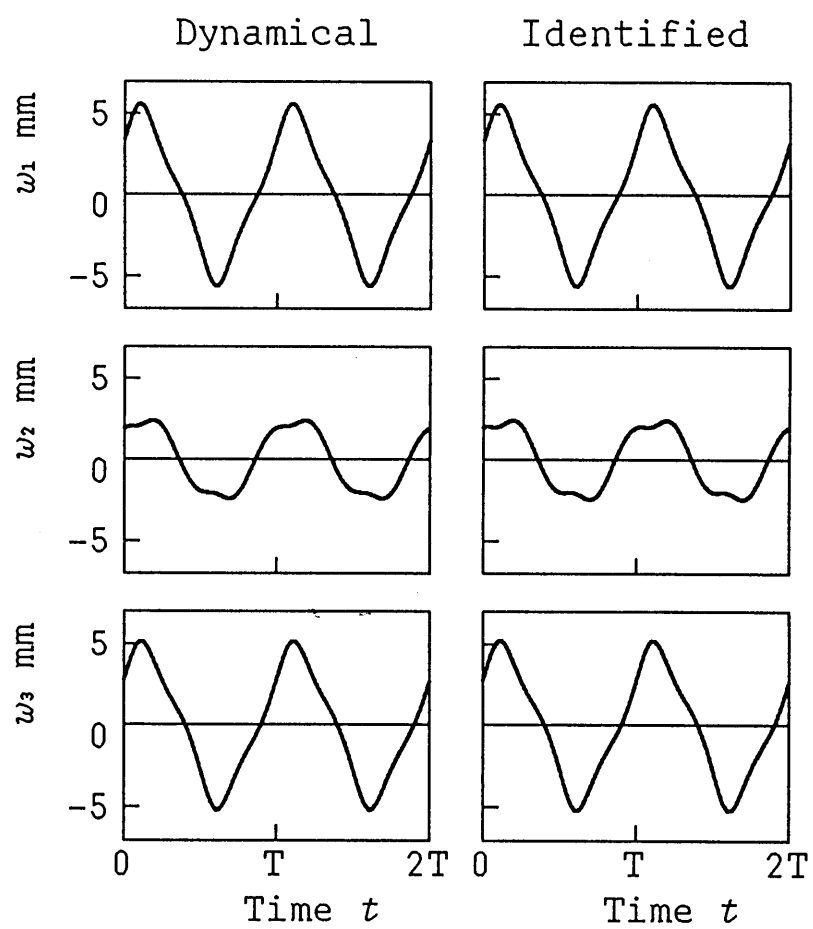


図6.10 振動波形による比較( $\omega = 50\text{Hz}$ )

## 6.5 まとめ

この章では、同定の対象とする系に対応する線形のモード関数が未知の場合でも非線形連続系を同定できる方法を提案した。提案した方法は、周期外力による定常状態のたわみ振動のデータを用いて、Vold, H. と Leuridan, J. の提案した方法を応用してたわみに大きく寄与する成分を取り出し、その成分に関する方程式を定めるものである。非線形はりおよび長方形と円形の非線形板に対して数値シミュレーションを行い、提案した方法の有効性を示した。

## 第7章 統計的手法の導入<sup>(63)</sup>

### 7.1 まえがき

前章までに提案してきた非線形連続系の同定法は安田ら<sup>(27)</sup>の提案した多自由度非線形振動系の同定法に基づいている。しかしこの方法では、測定データに含まれるノイズが小さい場合には精度良く同定できるが、ノイズが大きくなるにつれて同定精度が急速に悪化することがわかった。

そこでこの章では、測定データに含まれるノイズが比較的大きい場合でも精度の良い結果が得られる同定法の開発を目的として、統計的手法を導入して安田らの提案した方法を改良した多自由度非線形振動系の同定法を提案する。基本的な検討を目的とするため、ここではノイズは正規分布をなすものとする。改良した同定法の有効性を検討するため、いくつかの代表的な多自由度系を取り上げ、数値的に得た定常振動にノイズを加えたデータを実験データとみなして、提案した方法で同定を行う。

### 7.2 同定法の提案

#### 7.2.1 安田らの<sup>(27)</sup>同定法の概要

本論に入る前に、安田らの提案した同定法の概要を、復元力に非線形性をもつ自由度  $n$  の非線形振動系を例にして説明する。減衰力または復元力と減衰力の両方に非線形性があるような系も以下と同様に扱うことができる。対象とする系に外力  $\{q\}$  を作用させるとき、運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + \{N\} = \{q\} \quad (7.1)$$

となる。ここでマトリックス  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  はそれぞれ慣性マトリックス, 減衰マトリックス, 剛性マトリックスを表し, ベクトル  $\{N\}$  は非線形項を表す。

この系を同定するため、非線形項  $\{N\} = \{N_1 \ N_2 \ \cdots \ N_n\}^T$  は変位  $x_1, x_2, \cdots$  の多項式

$$N_m = \alpha_{m1} x_1^2 + \alpha_{m2} x_1 x_2 + \cdots + \beta_{m1} x_1^3 + \beta_{m2} x_1^2 x_2 + \cdots \\ (m = 1, 2, \cdots, n) \quad (7.2)$$

で近似されたとする。こうすれば、この系を実験的に同定するとは、外力 $\{q\}$ とそれに対する応答 $\{x\}$ の実験データから、式(7.1)のマトリックス $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ と式(7.2)の係数パラメータ $\alpha_{m1}$ ,  $\alpha_{m2}$ ,  $\dots$ を定めることに帰着される。

同定のため、振動数 $\omega_i$ の周期外力 $\{q_i\} = \{q_{i1} \ q_{i2} \ \dots \ q_{in}\}^T$ を系に作用させることによって外力と同じ周期の定常振動 $\{x_i\} = \{x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{in}\}^T$ を発生させ、 $\{q_i\}$ ,  $\{x_i\}$ を測定する。これらはともに振動数 $\omega_i$ の周期関数であるから、それぞれ

$$\begin{aligned} \{q_i\} &= \{Q_{i0}\} \\ &+ \{Q_{i1}\} \cos \omega_i t + \{Q_{i2}\} \cos 2\omega_i t + \dots \\ &+ \{Q_{i1}^*\} \sin \omega_i t + \{Q_{i2}^*\} \sin 2\omega_i t + \dots \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \{x_i\} &= \{X_{i0}\} \\ &+ \{X_{i1}\} \cos \omega_i t + \{X_{i2}\} \cos 2\omega_i t + \dots \\ &+ \{X_{i1}^*\} \sin \omega_i t + \{X_{i2}^*\} \sin 2\omega_i t + \dots \end{aligned} \quad (7.4)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここでフーリエ係数 $\{Q_{i0}\}$ ,  $\{Q_{i1}\}$ ,  $\dots$ ,  $\{X_{i0}\}$ ,  $\{X_{i1}\}$ ,  $\dots$ は既知の量である。また式(7.2)の変位の二乗, 三乗,  $\dots$ の項を成分とするベクトル $\{x^2_i\} = \{x_{i1}^2 \ x_{i1}x_{i2} \ \dots\}^T$ ,  $\{x^3_i\} = \{x_{i1}^3 \ x_{i1}^2x_{i2} \ \dots\}^T$ ,  $\dots$ も、それらのデータを $\{x_i\}$ のデータの演算によって作成することによって

$$\left. \begin{aligned} \{x^2_i\} &= \{X^2_{i0}\} \\ &+ \{X^2_{i1}\} \cos \omega_i t + \{X^2_{i2}\} \cos 2\omega_i t + \dots \\ &+ \{X^2_{i1}^*\} \sin \omega_i t + \{X^2_{i2}^*\} \sin 2\omega_i t + \dots \\ \{x^3_i\} &= \{X^3_{i0}\} \\ &+ \{X^3_{i1}\} \cos \omega_i t + \{X^3_{i2}\} \cos 2\omega_i t + \dots \\ &+ \{X^3_{i1}^*\} \sin \omega_i t + \{X^3_{i2}^*\} \sin 2\omega_i t + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここでもフーリエ係数 $\{X^2_{i0}\}$ ,  $\{X^2_{i1}\}$ ,  $\dots$ は既知の量である。

式(7.3), (7.4), (7.5)を式(7.1)に代入し、ハーモニックバランスの原理を用いて、両辺の定数項, 調和成分を適当な打ち切り次数まで等しいとみると、

$$[A]\{S\} = \{Q\} \quad (7.6)$$

の形の方程式を得る。ここで $[A]$ は式(7.4), (7.5)のフーリエ係数から決まる既知のマトリックス,  $\{S\}$ は式(7.1)の $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ の成分および非線形項(7.2)の係数パラメータ $\alpha_{m1}$ ,  $\alpha_{m2}$ ,  $\dots$ を成分とする未知のベクトル,  $\{Q\}$ は式(7.3)のフーリエ係数から決まる既知のベクトルである。いくつかの $\omega_i$ に対するデータから式(7.6)の形の方程式を作成し, 全体として未知数の数よりも方程式の数が増えるようにする。こうして得た方程式に最小二乗法を適用して未知パラメータを定める。

以上が安田らの提案した同定法の概要である。

### 7.2.2 統計的手法の導入

上記の安田らの提案した同定法では, 測定データに含まれるノイズが小さい場合には精度よく同定できるが, ノイズが大きくなると同定精度が悪化することがわかった。そこで測定データに含まれる誤差が比較的大きくなっても精度の良い同定結果が得られるように, 統計的手法を導入して安田らの方法の改良を試みる。ここでも復元力に非線形性をもつ多自由度非線形振動系を例にして説明する。

統計的手法を導入する前に, 安田らの方法にいくらか変更を加えておく。安田らの方法では, 式(7.5)のフーリエ係数 $\{X^2 i_0\}$ ,  $\{X^2 i_1\}$ ,  $\dots$ を求めるのに, 時間領域における $\{x_i\}$ のデータの演算から変位の二乗, 三乗,  $\dots$ の項のベクトル $\{x^2 i\}$ ,  $\{x^3 i\}$ ,  $\dots$ を作り, それをフーリエ級数に展開する方法をとった。ここでは同じフーリエ係数を求めるのに, 適当な次数で打ち切った式(7.4)のフーリエ級数の演算によって求める方法をとる。このようにすれば, 式(7.6)のマトリックス $[A]$ は式(7.4)のフーリエ係数のみから決まることになる。

以上の準備をしておいて, 安田らの同定法に統計的手法を導入する。まず表記を簡単にするため, 式(7.4)のフーリエ係数 $\{X i_0\}$ ,  $\{X i_1\}$ ,  $\dots$ を合わせて応答ベクトル $\{X i\}$ とする。いま, 測定によって得られた振動データ $\{x_i\}$ のみに偶然誤差が混入しているものと仮定する。かりに振動数 $\omega_i$ の外力 $\{q_i\}$ に対する応答を無限回測定すると, 誤差は偶然誤差のみであるので,  $\{x_i\}$ は正規分布になり<sup>(84)</sup>, その $\{x_i\}$ から求めるフーリエ係数 $\{X i\}$ も正規分布となる<sup>(85)</sup>。そこでその分布の母平均を $\{X i\}$ , 母分散を $\{\sigma^2 i\}$ とする。測定によって応答ベクトル $\{X i\}$ が得られる確率密度 $P i$ は

$$P_i = \prod_{j=1} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp \left\{ -\frac{(X_{ij} - \bar{X}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\} \right] \quad (7.7)$$

となる<sup>(56)</sup>。ここで $X_{ij}$ ,  $\bar{X}_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}^2$ はそれぞれ $\{X_i\}$ ,  $\{\bar{X}_i\}$ ,  $\{\sigma_{ij}^2\}$ の $j$ 番目の成分を表している。

加振実験で、外力の振動数を $\omega_1$ から $\omega_N$ まで変化させて応答ベクトル $\{X_1\}$ ,  $\{X_2\}$ ,  $\dots$ ,  $\{X_N\}$ が得られたとすると、それらのデータが得られる確率密度 $R$ は、式(7.7)の $P_i$ の $i$ を1から $N$ まで変えた値を乗じた

$$R = \prod_{i=1}^N P_i = \prod_{i=1}^N \left( \prod_{j=1} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp \left\{ -\frac{(X_{ij} - \bar{X}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\} \right] \right) \quad (7.8)$$

で与えられる。

簡単のため応答ベクトル $\{X_1\}$ ,  $\{X_2\}$ ,  $\dots$ ,  $\{X_N\}$ を並べて得られるベクトルを $\{X\}$ と書くことにする。またこれに対応して $\{\bar{X}_1\}$ ,  $\{\bar{X}_2\}$ ,  $\dots$ ,  $\{\bar{X}_N\}$ を並べて得られるベクトルを $\{\bar{X}\}$ と書く。応答ベクトルとして $\{X\}$ が得られた理由は、その測定時点において式(7.8)の確率密度 $R$ が極大であったからと考えるのが妥当である。したがって得られた応答ベクトルから $R$ を極大にするような $\{\bar{X}\}$ を求めれば、それは真の応答ベクトルとして最も良い推定値といえる。 $R$ を極大にするには

$$T = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1} \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\} \quad (7.9)$$

を極小にすればよい。したがって $T$ を極小にする $\{\bar{X}\}$ が応答ベクトルとして最も良い推定値である。

ところで $\{\bar{X}\}$ は制約条件として式(7.6)を満足しなければならない。この場合にマトリックス $[A]$ は $\{\bar{X}\}$ から定められるマトリックスである。したがって式(7.6)を満足し、かつ $T$ を極小にする $\{\bar{X}\}$ ,  $\{S\}$ を求めれば、応答ベクトル $\{X\}$ および系のパラメータ $\{S\}$ の最も良い推定値が得られたことになる。

以上のような $\{\bar{X}\}$ ,  $\{S\}$ を求めるため、ラグランジュの乗数法を利用する<sup>(57) (58)</sup>。ラグランジュ乗数 $\{\xi\}$ を導入して、ラグランジュ関数 $U$ を

$$U = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1} \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{ij})^2}{2 \sigma^2_{ij}} \right\} + \{\zeta\}^T ([A]\{S\} - \{Q\}) \quad (7.10)$$

で定義する。  $U$  を極小とするための条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \bar{X}_{ij}} &= \frac{\bar{X}_{ij} - X_{ij}}{\sigma^2_{ij}} + \{\zeta\}^T \left[ \frac{\partial A}{\partial \bar{X}_{ij}} \right] \{S\} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \{S\}} &= [A]^T \{\zeta\} = \{0\} \\ \frac{\partial U}{\partial \{\zeta\}} &= [A]\{S\} - \{Q\} = \{0\} \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

である。ここで式(7.11)の第2式、第3式の左辺は、 $U$  を  $\{S\}$  の各成分、 $\{\zeta\}$  の各成分でそれぞれ偏微分して得られるベクトルである。第3式は制約条件(7.6)そのものである。このようにして、連立方程式(7.11)から  $\{\bar{X}\}$ 、 $\{S\}$ 、 $\{\zeta\}$  を求めれば、それらは制約条件(7.6)を満足しながらラグランジュ関数  $U$  を極小にすることがわかる。このときの  $\{S\}$  が同定結果である。

減衰力に非線形性がある場合や復元力と減衰力の両方に非線形性がある系に対してもこれまで述べたと同様にして同定できる。

### 7.2.3 非線形連立方程式の解法

方程式(7.11)の第1式、第2式、第3式はそれぞれ  $\{\bar{X}\}$ 、 $\{S\}$ 、 $\{\zeta\}$  の成分の数と同数の方程式であるので、この連立方程式は原理的に解くことができる。しかしこの連立方程式は非線形連立方程式であり、しかも未知数が多いので、直接解くのは困難である。そこで以下に示すような反復法で解く<sup>(88)</sup>。まず式(7.11)の第1式を次のように書き直す。

$$\{\bar{X}\} - \{X\} + [\sigma^2][B]^T \{\zeta\} = \{0\} \quad (7.12)$$

ここでマトリックス  $[B]$  は



$$\{b\}_{ij}^T = \{S\}^T \left[ \frac{\partial A}{\partial X_{ij}} \right]^T \quad (7.13)$$

で与えられる行ベクトル  $\{b\}_{ij}^T$  を並べてできるマトリックスであり、「 $\sigma^2$ 」は母分散  $\sigma^2_{ij}$  を対角線上に並べ、それ以外の成分を 0 としたマトリックスである。

反復法で解くため、未知数  $\{X\}$ 、 $\{S\}$  の初期値として適当な  $\{X\}_0$ 、 $\{S\}_0$  を与え、一回の計算における  $\{X\}$  の補正量を  $\{\Delta X\}$  とする。式(7.11)の第3式および式(7.12)において、 $\{X\}$  を  $\{X\}_0 + \{\Delta X\}$  と置き換え、 $\{X\}_0$  の付近でテーラー展開し、 $\{\Delta X\}$  の二乗以上の項を無視すると

$$[A]\{S\} - \{Q\} + [B]\{\Delta X\} = \{0\} \quad (7.14)$$

$$\{X\}_0 + \{\Delta X\} - \{X\} + [\sigma^2][B]^T\{\xi\} = \{0\} \quad (7.15)$$

を得る。ここでマトリックス  $[A]$ 、 $[B]$  は初期値  $\{X\}_0$ 、 $\{S\}_0$  から定まるマトリックスである。式(7.15)を  $\{\Delta X\}$  について解き、式(7.14)に代入すると

$$[A]\{S\} - \{Q\} - [B](\{X\}_0 - \{X\}) - [B][\sigma^2][B]^T\{\xi\} = \{0\} \quad (7.16)$$

を得る。この式を  $\{\xi\}$  について解くと

$$\{\xi\} = ([B][\sigma^2][B]^T)^{-1}([A]\{S\} - \{Q\} - [B](\{X\}_0 - \{X\})) \quad (7.17)$$

となり、これを式(7.11)の第2式に代入すると

$$[A]^T([B][\sigma^2][B]^T)^{-1}[A]\{S\} - [A]^T([B][\sigma^2][B]^T)^{-1}(\{Q\} + [B](\{X\}_0 - \{X\})) = \{0\} \quad (7.18)$$

を得る。式(7.18)を解けば補正後の  $\{S\}$  が求められる。この  $\{S\}$  を式(7.17)に代入すれば補正後の  $\{\xi\}$  が求められ、この  $\{\xi\}$  を用いれば、式(7.15)から補正後の  $\{X\} = \{X\}_0 + \{\Delta X\}$  が求められる。このようにして求めた  $\{X\}$ 、 $\{S\}$  を新たな初期値として収束するまで以上の計算を繰り返す。

反復計算を行う際に必要となる最初の初期値  $\{X\}_0$ 、 $\{S\}_0$  としては、それぞれ、実験によって得た変位データ  $\{X\}$ 、安田らの同定法によって得た  $\{S\}$  を用いることができる。ま

た母分散  $\{\sigma^2 i\}$  の推定値としては、 $m (m > 1)$  回の測定で得られる  $\{X i\}_j (j = 1, 2, \dots, m)$  の平均値  $\{X i'\}$  を用いて算出される不偏分散

$$\{\sigma^2 i\} = \frac{\sum_{j=1}^m (\{X i\}_j - \{X i'\})^2}{m - 1} \quad (7.19)$$

を用いることができる。

数値シミュレーションの結果、繰り返し計算の途中において、 $\{S\}$ 、 $\{X\}$  は正しい値付近で前後しながら正しい値に近づいて行くことがわかった。そこでここでは次のようにして解の収束を加速した。 $k$  回目の反復計算によって得た  $\{S\}$ 、 $\{X\}$  をそれぞれ  $\{S\}_k$ 、 $\{X\}_k$  とし、そのときの補正量  $\{\Delta S\}_k$ 、 $\{\Delta X\}_k$  を

$$\{\Delta S\}_k = \{S\}_k - \{S\}_{k-1}, \quad \{\Delta X\}_k = \{X\}_k - \{X\}_{k-1} \quad (7.20)$$

とおく。 $(k - 1)$  回目と  $k$  回目の補正量  $\{\Delta S\}_{k-1}$ 、 $\{\Delta S\}_k$  を用いて

$$V = \{\Delta S\}_k^T \{\Delta S\}_{k-1} \quad (7.21)$$

を計算する。 $V \geq 0$  ならば  $\{S\}_k$ 、 $\{X\}_k$  をそのまま  $k$  回目の計算によって得た値とし、 $V < 0$  ならば

$$\left. \begin{aligned} \{S\}_k &= \{\Delta S\}_k / 2 + \{S\}_{k-1} \\ \{X\}_k &= \{\Delta X\}_k / 2 + \{X\}_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

を  $k$  回目の計算によって得た値とする。

### 7.3 数値シミュレーション

前章で提案した同定法の有効性を検討するため、数値シミュレーションを行った。

#### 7.3.1 同定精度の評価法

まず同定結果の精度の評価法を定めておく。同定の対象とする系には、復元力や減衰力、あるいはその両方に非線形性をもつものなど種々あるので、同定結果の評価を慣性力、減衰力、復元力に区別して評価することが適当であると思われる。そこで慣性力、減衰力、

復元力のそれぞれに対して

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \sqrt{\frac{\int (F_i - F_i')^2 dx}{\int F_i^2 dx}} \\ E_d &= \sqrt{\frac{\int \int (F_d - F_d')^2 dx d\dot{x}}{\int \int F_d^2 dx d\dot{x}}} \\ E_r &= \sqrt{\frac{\int (F_r - F_r')^2 d\ddot{x}}{\int F_r^2 d\ddot{x}}} \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

で与えられる RMS 誤差によって同定結果を評価することにする。ここで  $F_i$ ,  $F_d$ ,  $F_r$  はそれぞれ正しい慣性力, 減衰力, 復元力であり,  $F_i'$ ,  $F_d'$ ,  $F_r'$  はそれぞれ同定によって得られるパラメータから定まる慣性力, 減衰力, 復元力である。また上式における積分の範囲は同定に用いたデータの振幅などから適当に定める。

### 7.3.2 復元力に非線形性をもつ系

はじめに図7.1に示す一自由度系を取り上げる。この系の非線形項  $N$  は

$$N = \beta x^3 \quad (7.24)$$

のように、変位の三乗で与えられるとする。この系に外力  $q$  を加えるとき、運動方程式は

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx + \beta x^3 = q \quad (7.25)$$

となる。

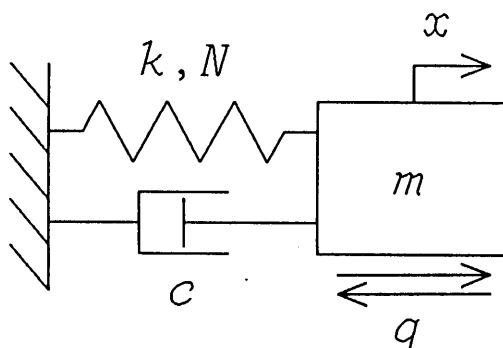


図7.1 一自由度非線形系

数値的に振動データを求めるため、外力  $q$  として

$$q = Q \cos \omega t \quad (7.26)$$

の形の調和外力を加える。外力の大きさ  $Q$  と各パラメータの値を

$$Q = 1, m = 1, c = 0.05, k = 1, \beta = 0.1 \quad (7.27)$$

とし、外力の振動数と同じ周期の周期解になるまで数値的に積分を繰り返した。このようにして一周分データの時間軸上の離散点における値として求めた。これらの値に正規分布を成す乱数を加え、得られた結果をノイズを含む振動データと見なした。ノイズとして加えた乱数の標準偏差  $\sigma$  は 0 から 0.3 までの間のいくつかの値に定めた。  $\sigma = 0.2$  としたときの振動データの一例を図 7.2 に示す。

図 7.2 に示したようなデータを用いて、図 7.1 の系の同定を行った。同定にあたって非線形項  $N$  を

$$N = \alpha x^2 + \beta x^3 \quad (7.28)$$

の形においた。加える外力の振動数  $\omega$  は 0.6 から 2.4 の範囲に 11 点取り、フーリエ級数展開の打ち切り次数は 3 とした。

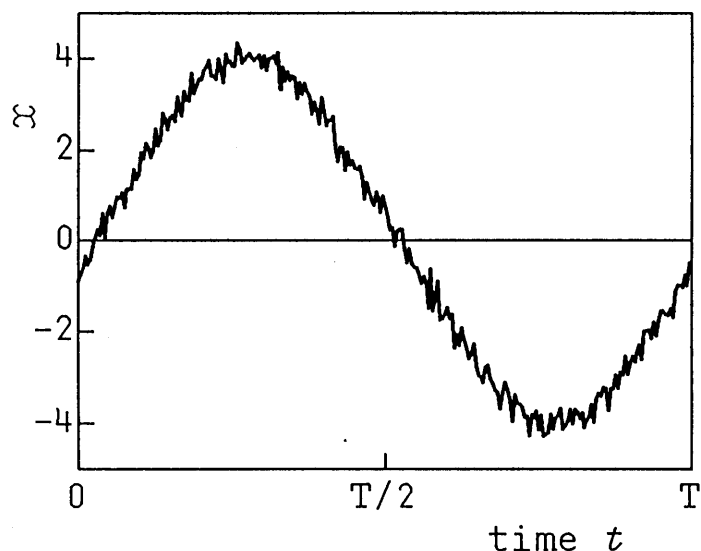


図 7.2 振動データの例 ( $\omega = 1.4, \sigma = 0.2$ )

同定によって得た未知パラメータの値の一例を表7.1に示す。表には振動データを得たもとの系のパラメータを合わせて示してある。表から、ここに示した $\sigma$ の範囲内では、同定による各パラメータの値はいずれももとの系のパラメータに近い値となっていることがわかる。同定結果の精度を定量的に評価するため、 $\sigma$ の各値に対し式(7.23)で定義したRMS誤差を求めたところ、図7.3に実線で示すような結果となった。比較のため、安田らの方法によって得た同定結果に対して、同じようにRMS誤差を求め、破線で示した。図から、安田らの方法による同定結果はノイズが大きくなるとともに精度が急速に悪化しているのに対し、ここで提案した同定法では、ノイズが大きくなっても精度の良い同定結果が得られていることがわかる。ただし減衰力に関しては、安田らの提案した同定法でもほとんど悪化していない。この傾向は二自由度系、三自由度系の場合も同様であった。

次に図7.4に示した二自由度系を取り上げる。三つのばねは同じ特性のもので、非線形性は変位 $x$ に対し

$$N = \beta x^3 \quad (7.29)$$

で与えられるとする。この系に外力 $\{q\} = \{q_1 \ q_2\}^T$ を加えるとすると、運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + \{N\} = \{q\} \quad (7.30)$$

となる。ここで $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ は

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

の形のマトリックスである。なおマトリックス $[C]$ 、 $[K]$ の成分は $c$ 、 $k$ から決められる。

表7.1 同定結果

$\sigma$	0.1	0.2	0.3	Exact
$m$	1.000	1.000	1.001	1.00
$c$	0.050	0.049	0.049	0.05
$k$	1.004	1.007	1.011	1.00
$\alpha$	0.001	0.003	0.004	0.00
$\beta$	0.099	0.099	0.098	0.10

またベクトル  $\{N\}$  は

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta x_1^3 + \beta (x_1 - x_2)^3 \\ \beta x_2^3 + \beta (x_2 - x_1)^3 \end{Bmatrix} \quad (7.32)$$

で表される非線形項である。

数値的に振動データを得るため、各パラメータの値を

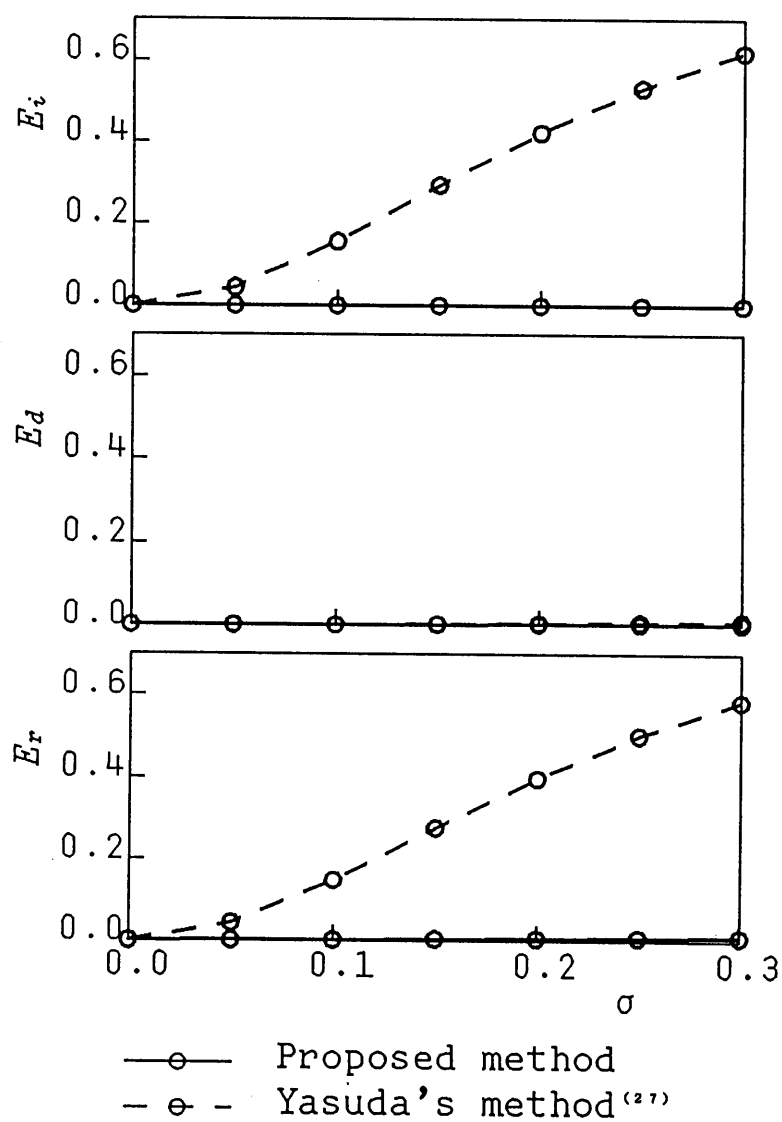


図7.3 復元力に非線形性をもつ一自由度系の同定結果から求めたRMS誤差

$$m_1 = m_2 = 1, \quad c = 0.05, \quad k = 1, \quad \beta = 0.1 \quad (7.33)$$

とした。外力 $\{q\}$ として、質量 $m_1$ の物体にのみ大きさ1の調和外力を作用させる

$$q_1 = \cos \omega t, \quad q_2 = 0 \quad (7.34)$$

の場合と、質量 $m_2$ の物体にのみ大きさ1の調和外力を作用させる

$$q_1 = 0, \quad q_2 = \cos \omega t \quad (7.35)$$

の場合とを考えた。両方の場合にそれぞれ数値的に定常振動 $\{x\}$ を求め、一自由度系の場合と同様に、これに正規分布を成す乱数を加え、実験データと見なした。

同定のためマトリックス $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ を式(7.31)の形に、また非線形項 $\{N\}$ を

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{13}x_2^2 \\ &\quad + \beta_{11}x_1^3 + \beta_{12}x_1^2x_2 + \beta_{13}x_1x_2^2 + \beta_{14}x_2^3 \\ N_2 &= \alpha_{21}x_1^2 + \alpha_{22}x_1x_2 + \alpha_{23}x_2^2 \\ &\quad + \beta_{21}x_1^3 + \beta_{22}x_1^2x_2 + \beta_{23}x_1x_2^2 + \beta_{24}x_2^3 \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

の形においた。加える外力の振動数 $\omega$ は、式(7.34)および(7.35)のそれぞれの場合に0.5から2.6の範囲で13点取り、フーリエ級数展開の打ち切り次数を3とした。

一自由度系の場合と同じように同定を行った。同定精度を見るため、ノイズとして加えた乱数の標準偏差 $\sigma$ の各値に対しRMS誤差を求めた。例として復元力に対するRMS誤差を、安田らの方法によるRMS誤差と合わせて図7.5に示す。この図から、二自由度系に対しても、安田ら方法の結果と比較して精度の良い同定結果が得られていることがわかる。

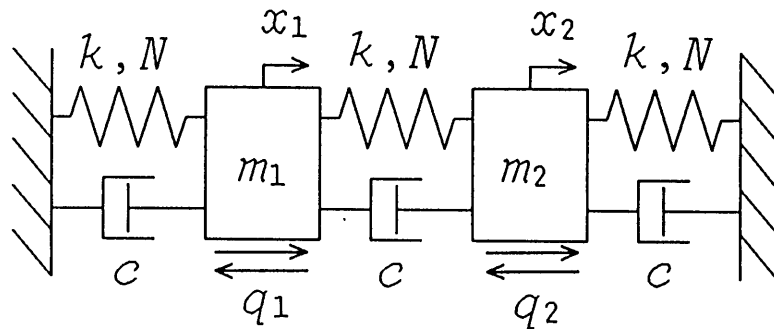


図7.4 二自由度非線形系

さらに図7.4に示した二自由度系に、同じ特性のばね、ダンパおよび質量 $m_3$ の物体を加えてできた三自由度系をとり上げ、数値的に求めた定常振動に正規分布を成す乱数を加えて得たデータを実験データとみなしてこの系の同定を行った。非線形項を式(7.36)を三自由度に拡張した形におき、各物体を加振したデータを用いて数値シミュレーションを行った結果、この場合にも、安田らの方法と比較して精度の良い同定結果が得られることがわかった。

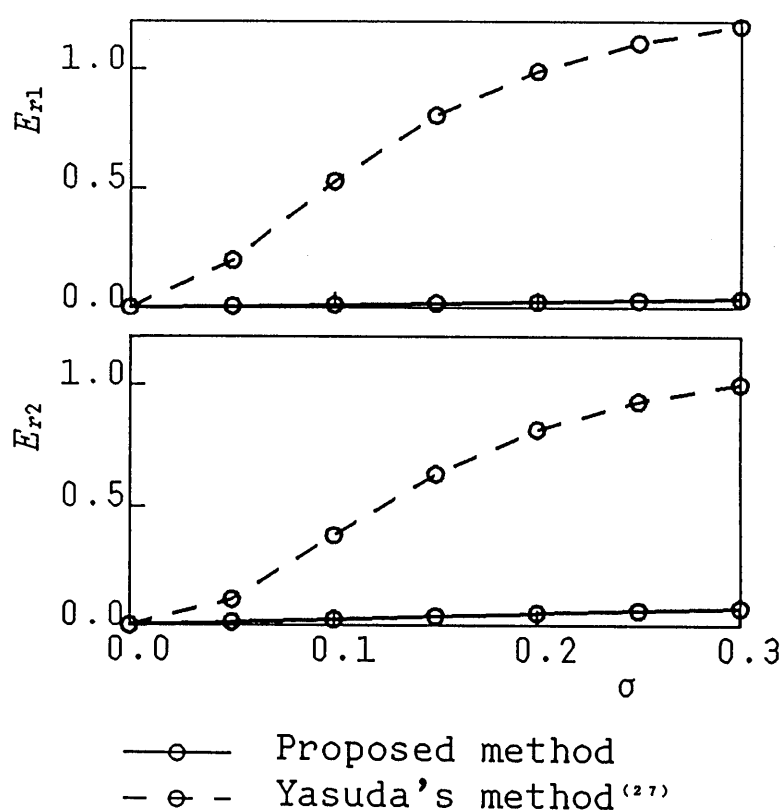


図7.5 復元力に非線形性をもつ二自由度系の同定結果  
から求めた復元力のRMS誤差



### 7.3.3 減衰力に非線形性をもつ系

減衰力に非線形をもつ一自由度系として、Van der Polの方程式で表される系を取り上げる。この系を支配する運動方程式は

$$m \ddot{x} - \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} + k x = q \quad (7.37)$$

となる。

数値的に振動データを求めるため、外力  $q$  として

$$q = Q \cos \omega t \quad (7.38)$$

の形の調和外力を加え、外力の大きさ  $Q$  と各パラメータの値を

$$Q = 1, m = 1, k = 1, \varepsilon = 0.01 \quad (7.39)$$

とした。このときには、外力の振動数  $\omega$  が約0.8から1.2の範囲で外力と同じ振動数の定常振動が発生することがわかったので、この範囲で  $\omega$  を5点取り、各  $\omega$  について一周期分の定常振動を数値的に求め、正規分布を成す乱数を加えて実験データと見なした。

同定のため、減衰力を表す項  $N$  を

$$N = (\alpha + \beta x + \gamma x^2) \dot{x} \quad (7.40)$$

の形においた。フーリエ級数展開の打ち切り次数を3とした。

復元力に非線形性をもつ系の場合と同じように同定を行い、得られた結果のRMS誤差を安田らの方法によるものとあわせて図7.6に示す。図から、この場合にも安田らの方法による結果より精度が改善されていることがわかる。

次に二自由度系の例として、図7.7に示す防振器を取り上げる。図中の  $N$  は非線形性をもつ自励力を表す部分であり、

$$N = -c_1 \dot{x}_1 + e x_1^2 \dot{x}_1 \quad (7.41)$$

で与えられるとする。この系の運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + \{N\} = \{q\} \quad (7.42)$$

となる。

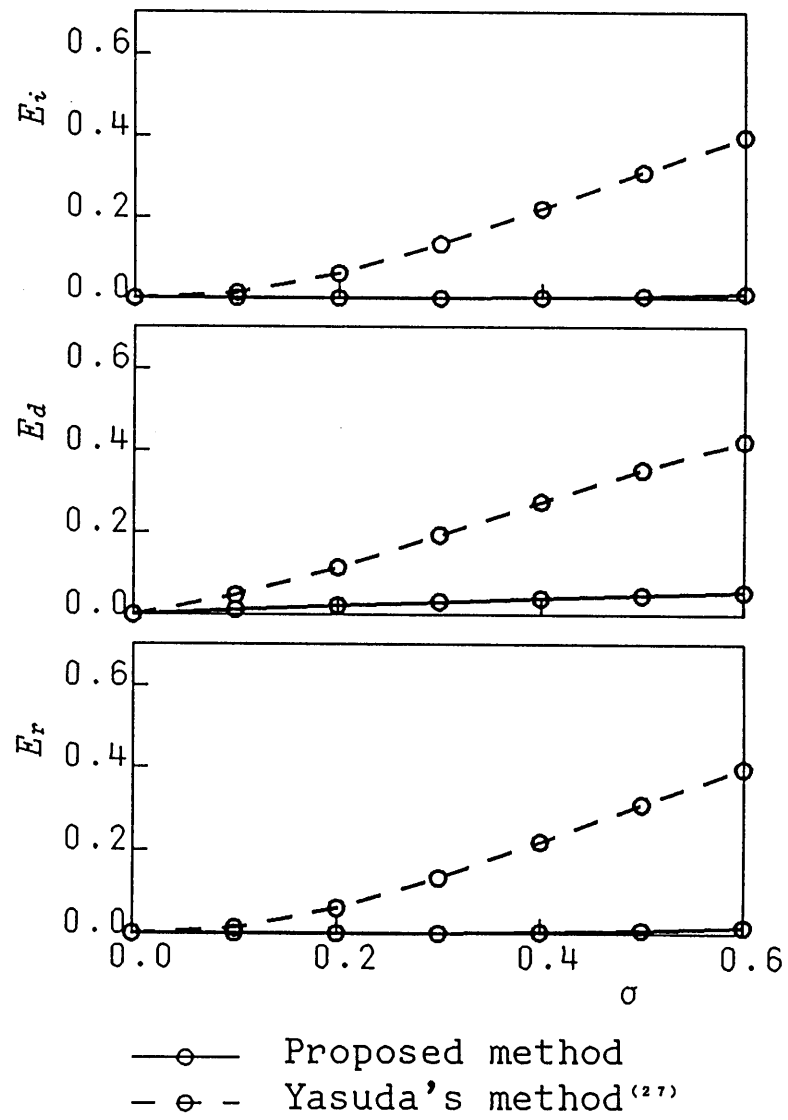


図7.6 減衰力に非線形性をもつ一自由度系の同定結果から求めたRMS誤差

数値的に振動を求めるため、質量 $m_1$ の物体にのみ調和外力

$$q_1 = Q \cos \omega t \quad (7.43)$$

を作用させ、外力の大きさおよび各パラメータの値を

$$\begin{aligned} Q &= 1, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 0.1, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 0.1, \\ c_1 &= 0.02, \quad c_2 = 0.01, \quad e = 0.02 \end{aligned} \quad (7.44)$$

とし、数値的に定常振動 $\{x\}$ を求め、これに正規分布を成す乱数を加え、外力とあわせて実験データとみなした。

同定のため、マトリックス $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ を式(7.31)の形に、また非線形項 $\{N\}$ を

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_1^2 + \alpha_{14}x_1x_2 + \alpha_{15}x_2^2)\dot{x}_1 \\ N_2 &= (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_1^2 + \alpha_{24}x_1x_2 + \alpha_{25}x_2^2)\dot{x}_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

の形においた。外力の振動数 $\omega$ を0.6から1.4の範囲で9点取り、フーリエ級数展開の打ち切り次数を3とした。

同定によって得られた結果に対し、特に減衰力のRMS誤差を安田らの方法によるものと合わせて示すと、図7.8のようになる。図からわかるように、この場合も安田らの方法に比較して精度が改善されている。

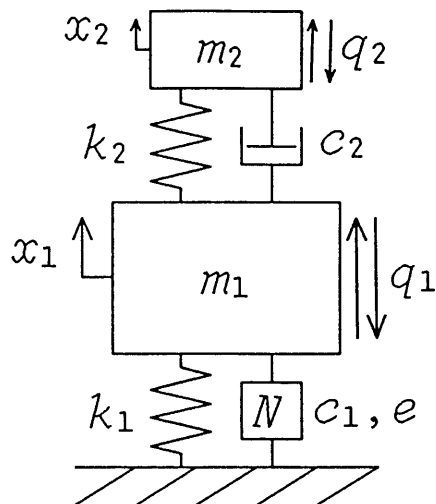


図7.7 防振器

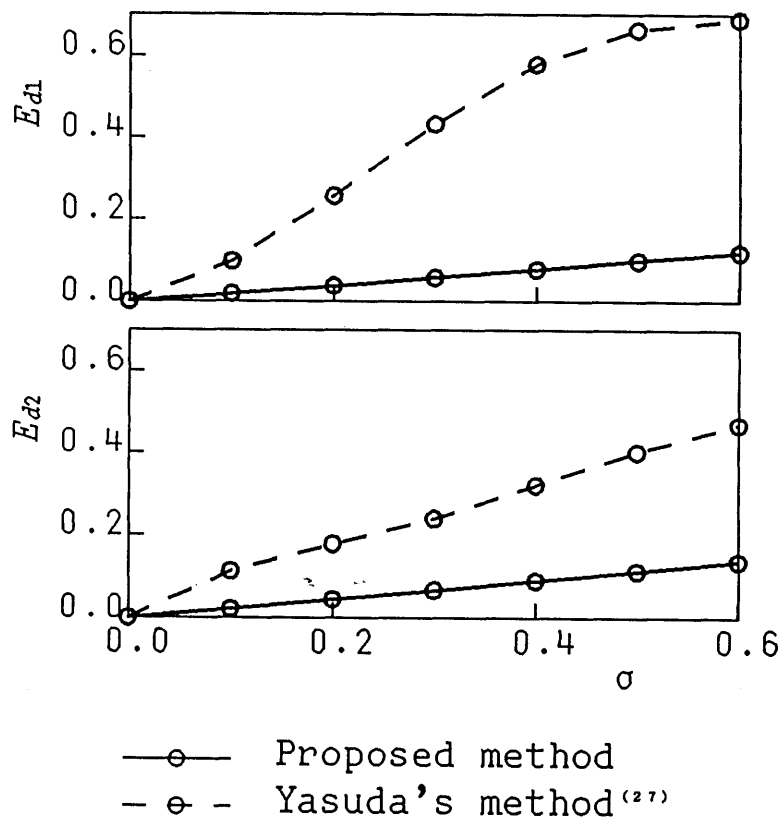


図7.8 減衰力に非線形性をもつ二自由度系の同定結果から求めた減衰力のRMS誤差

#### 7.3.4 復元力と減衰力に非線形性をもつ系

最後に復元力と減衰力の両方に非線形性をもつ一自由度系を考える。取り上げる系は、復元力に変位の三乗の非線形性を持ち、さらに減衰力にVan der Polの方程式で支配される系と同じ非線形性をもつものとする。この系の運動方程式は

$$m \ddot{x} - \varepsilon_1 (1 - x^2) \dot{x} + kx + \varepsilon_2 x^3 = q \quad (7.46)$$

となる。

数値的に振動データを求めるため、外力  $q$  として

$$q = Q \cos \omega t \quad (7.47)$$

の形の調和外力を加え、外力の大きさ  $Q$  と各パラメータの値を

$$Q = 1, \quad m = 1, \quad k = 1, \quad \varepsilon_1 = 0.01, \quad \varepsilon_2 = 0.1 \quad (7.48)$$

とした。この場合、外力の振動数  $\omega$  が約0.9から1.4の範囲で外力と同じ振動数の定常振動が発生することがわかったので、この範囲で  $\omega$  を6点取り、各  $\omega$  について一周期分の定常振動を数値的に求め、正規分布を成す乱数を加えて実験データと見なした。

同定のため、減衰力を表す項  $N_d$  を

$$N_d = (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) x \quad (7.49)$$

の形に、また復元力を表す項  $N_r$  を

$$N_r = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \quad (7.50)$$

の形においた。フーリエ級数展開の打ち切り次数を3とした。

同定によって得た結果に対し、RMS誤差を安田らの方法によるものと合わせて示すと図7.9のようになる。この図から、ここで提案した方法によるRMS誤差は、安田らの方法によるものより改善されていることがわかる。

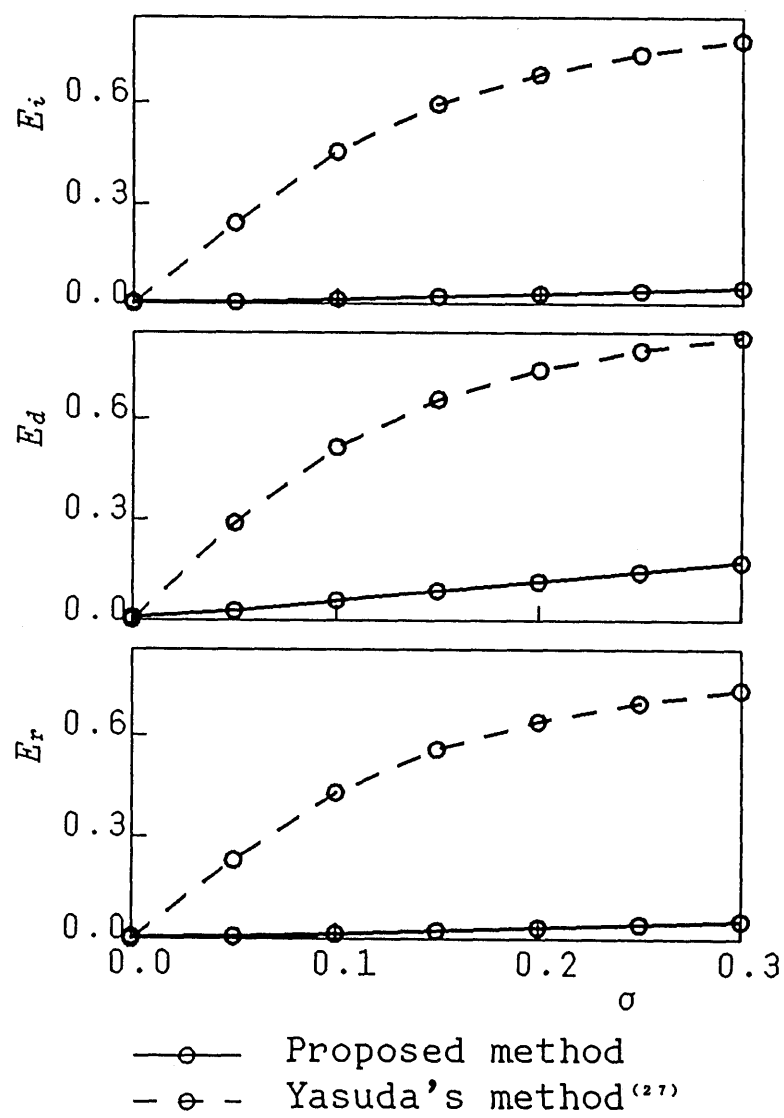


図7.9 復元力と減衰力に非線形性をもつ一自由度系の  
同定結果から求めたRMS誤差

#### 7.4 まとめ

この章では、測定データに含まれるノイズが比較的大きい場合でも精度の良い結果が得られる同定法の開発を目的として、ラグランジュの乗数法を導入して、安田らの提案した多自由度非線形系の同定法を改良した。復元力に非線形性をもつ系、減衰力に非線形性をもつ系、復元力と減衰力の両方に非線形性をもつ系を取り上げて数値シミュレーションを行い、改良した同定法が、データに含まれるノイズが比較的大きい場合でも有効であることを確認した。

## 第8章 結論

本論文は、機械や構造物を非線形振動系として同定する手法を開発するための基礎的な検討を目的として、その簡単な構成要素を取り上げ、同定法を提案したものである。まず、非線形はりおよび非線形板といった連続系を対象として、対応する線形系のモード関数が既知であるという前提のもとにモード方程式を定めるという考え方で同定法を提案し、数値シミュレーションおよび実験によって提案した方法の適用性を示した。次に、この前提条件を緩和し、線形のモード関数が未知の場合でも同定ができる手法を提案し、数値シミュレーションによってその適用性を示した。最後に、多自由度系を対象として、測定データが比較的大きなノイズを含む場合でも良好な同定結果が得られる同定法を提案し、数値シミュレーションによってその有効性を示した。以下に各章の内容をまとめる。

第1章は序論であって、本研究の意義と目的を述べた。

第2章では、非線形連続系のもっとも簡単な例として、一様な非線形はりを取り上げ、同定法を提案した。まず、偏微分方程式で表される運動方程式を、線形のモード関数を用いればモード方程式と呼ばれる、運動方程式と等価な常微分方程式に変換できることを示した。次に、線形のモード関数が既知であるという前提のもとに、周期外力とそれに対する定常状態のたわみ振動のデータからモード座標を求め、ハーモニックバランスの原理に基づいてモード方程式を定める方法を提案した。そして数値シミュレーションによって、外力を作用させる位置およびその振動数範囲を適切に選べば、提案した方法でモード方程式を定めることができ、非線形はりが精度よく同定できることを示した。

第3章では、第2章で提案した非線形はりの同定法を、一様とは限らない一般のはりに拡張した。第2章で提案した同定法は、対象を一様なはりに限定したものであった。この章では、有限要素法や通常のモード解析と組み合わせることによってこの制限を解除し、一般性をもたせた同定法を提案した。ここでは有限要素法と組み合わせる場合を示した。そして断面が段階的に変化するはりを取り上げて数値シミュレーションを行い、たわみの測定位置およびその個数を適切に選べば、提案した方法で非一様な非線形はりが精度よく同定できることを示した。

第4章では、第2章および第3章で提案した非線形はりの同定法の適用性を検討するため、実際のはりを用いて実験を行い、得られたデータを用いて提案した方法により同定を行った。その結果、得られた同定結果は実験データをよく再現すること、同定に用いた外



力と異なる外力に対する応答をもよく予測し得ることを確かめ、提案した同定法は実際に実験データを用いる場合にも適用可能であることを明らかにした。また同定に用いたデータとは異なる振動が発生する場合にはその予測はやや精度が悪いことも示した。

第5章では、二次元の非線形連続系である非線形板を対象として同定法の提案をした。ここでは非線形板の例として長方形板と円板を取り上げた。はじめに、連立偏微分方程式で表される運動方程式を、線形のモード関数を用いればモード方程式に変換できることを示した。次に、線形のモード関数が既知であるという前提のもとに、周期外力とそれに対する定常状態のたわみ振動のデータからモード座標を求め、ハーモニックバランスの原理に基づいてモード方程式を定める方法を提案した。そして数値シミュレーションによって、提案した方法でモード方程式を定めることができ、非線形板が精度よく同定できることを示した。

第6章では、第2章から第5章までに提案した同定法が必要とした、対象とする系に対応した線形のモード関数が既知であるという前提条件を緩和して、線形のモード関数が未知の場合でも同定できるように実用性を向上させた方法を提案した。提案した方法は、線形のモード解析法においてVold, H. と Leuridan, J. が提案した方法を応用して、周期外力に対する定常状態の応答データからその応答に大きく寄与する成分を取り出し、ハーモニックバランスの原理に基づいてこの成分に関する方程式を定めるものである。そして非線形はりおよび長方形と円形の非線形板に対して数値シミュレーションを行い、提案した方法で非線形連続系を精度良く同定できることを示した。

第7章では、測定データに含まれるノイズが比較的大きい場合でも精度の良い結果が得られる同定法の開発を目的として、統計的手法を用いた同定法を提案した。第2章から第6章までに提案した非線形連続系の同定法は安田らの提案した多自由度非線形振動系の同定法に基づいたものであった。しかしこの方法は振動データに含まれるノイズが大きくなると同定精度が悪化することがわかった。そこでこの章では安田らの方法にラグランジュの乗数法を導入し、ロバスト性を高めた多自由度非線形振動系の同定法を提案した。そして復元力に非線形性をもつ系、減衰力に非線形性をもつ系、復元力と減衰力の両方に非線形性をもつ系を取り上げて数値シミュレーションを行い、提案した同定法がデータに含まれるノイズが比較的大きい場合でも有効であることを確認した。

以上に述べてきたように、本論文では、非線形連続系および多自由度系の同定法を提案し、数値シミュレーション、実験によって同定が可能であることを示した。

## 文 献

- (1) 長松昭男, モード解析, (1985), 培風館.
- (2) 大久保信行, 機械のモーダルアナリシス, (1982), 中央大学出版部.
- (3) 日本機械学会編, モード解析の基礎と応用, (1986), 丸善.
- (4) 加川幸雄, 石川正臣, モーダル解析入門, (1987), オーム社.
- (5) Snoeys, R., and Vanherck, P., Nonlinear Dynamics Behaviour of Typical Mechanical Structures, Annals of the CIRP 34(1985), 309.
- (6) Okubo, N. and Honda, S., Basic Consideration of Experimental Modal Analysis, Proc. 1st IMAC, (1982), 130.
- (7) Kirshenboim, J. and Ewins, D.J., A Method for Recognizing Structural Nonlinearities in Steady-State harmonic Testing, Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des., 106-1(1984), 49.
- (8) Vihn, T., Haoui, A. and Chevalier, Y., Extension of Modal Analysis to Non Linear Structure by Using Hilbert Transform, Proc. 2nd IMAC, (1984), 852.
- (9) Simon, M. and Tomlinson, G.R., Use of the Hilbert Transform in Modal Analysis of Linear and Non-Linear Structures, J. Sound Vib., 96(1984), 421.
- (10) Tomlinson, G.R., Using the Hilbert Transform with Linear and Non-Linear Multi-Mode Systems, Proc. 3rd IMAC, (1985), 255.
- (11) 大久保信行, 山本弘, 仁礼徹, ヒルベルト変換を用いた非線形振動解析—モーダルアナリシスの基礎と応用に関する研究—, 精密工学会誌, 52-3(1986), 89.
- (12) Busby, H.R., Nopporn, C. and Singh, R., Experimental Modal Analysis of Non-Linear Systems: A Feasibility Study, J. Sound Vib., 180-3(1986), 415.
- (13) Fillod, R., Piranda, J. and Bonnecase, D., Taking Non Linearities into Account in Modal Analysis by Curve Fitting of Transfer Functions, Proc. 3rd IMAC, (1985), 88.
- (14) Ibanez, P., Identification of Dynamic Parameters of Linear and Nonlinear Structural Models from Experimental Data, J. Nucl. Eng. Des., 25(1973), 30.
- (15) Ibanez, P., A Genaral Identification of a Nonlinear Single-Degree-Of-Freedom System under Sinusoidal Excitation, Proc. 6rd IMAC, (1988), 777.

- (16) 渡辺和, 佐藤壽芳, 多自由度非線形系の周波数応答解析, 機論, 51-467, C(1985), 1765.
- (17) 渡辺和, 佐藤壽芳, 非線形ビルディング, ブロック法の開発と応用, 機論, 52-481, C(1986), 2397.
- (18) 渡辺和, 佐藤壽芳, 非線形系におけるモードパラメータの同定法に関する研究(1 自由度非線形系の場合), 機論, 56-527, C(1990), 1645.
- (19) Masri, S.F. and Caughey, T.K., A Nonparametric Identification Technique for Nonlinear Dynamic Problems, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 46-2(1979), 433.
- (20) Masri, S.F., Sassi, H. and Caughey, T.K., Nonparametric Identification of Nearly Arbitrary Nonlinear Systems, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 49(1982), 619.
- (21) Masri, S.F., Bekey, G.A. and Sassi, Non-Parametric Identification of a Class of Non-Linear Multidegree Dynamic Systems, Earthqu. Eng. Struct., 10(1982), 1.
- (22) Udwadia, F.E. and Chin-Po Kuo, Non-Parametric Identification of a Class of Non-Linear Close-Coupled Dynamic Systems, Earthqu. Eng. Struct. Dyn., 9(1981), 385.
- (23) Tomlinson, G.R. and Hibbert, J.H., Identification of Dynamic Characteristics of a Structure with Coulomb Friction, J. Sound Vib., 64(1979), 233.
- (24) Stanway, R., Sproston, J.L. and Stevens, N.G., A Note on Parameter Estimation in Non-Linear Vibrating Systems, Proc. Instn. Mech. Eng., 199-C, 1(1985), 79.
- (25) Yang, Y. and Ibrahim, S.R., A Nonparametric Identification Technique for a Variety of Discrete Nonlinear Vibrating Systems, Trans. ASME. J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des., 107-1(1985), 60.
- (26) 佐藤秀紀, 岩田佳雄, 内潟敏明, 一自由度非線形系のパラメータ同定法, 機論, 54-497, C(1988), 87.
- (27) 安田仁彦, 河村庄造, 渡辺浩太郎, 多自由度非線形系の同定法(第1報, 同定法の提案), 機論, 53-495, C(1987), 2191.

- (28) 安田仁彦, 河村庄造, 渡辺浩太郎, 多自由度非線形系の同定法(第2報, ノイズのある場合の同定), 機論, 54-500, C(1988), 816.
- (29) 安田仁彦, 河村庄造, クーロン摩擦の作用する多自由度系の同定法, 機論, 54-504, C(1988), 1708.
- (30) 安田仁彦, 河村庄造, 非線形振動系のノンパラメトリック同定法(第1報, 方法の提案と一自由度系への応用), 機論, 54-507, C(1988), 2550.
- (31) 安田仁彦, 渡辺浩太郎, 多自由度非線形系の同定法(第3報, 同定システムの開発), 機論, 55-512, C(1989), 833.
- (32) Lai, H.-Y. and Hsieh, S.-H., Identification and Quantification of System Non-Linearity through Response Data, Proc. 5rd IMAC, (1987), 1452.
- (33) Hammond, J.K., Lo, H.R. and Seager-Smith, J., Identification of Nonlinearities in Vibrating Systems Using Optimal Control Techniques, Proc. 5rd IMAC, (1987), 1467.
- (34) Sinha, M.S., Rajamani, V.S. and Sinha, A.K., Identification of Non-Linear Distributed System Using Walsh Functions, Int. J. Control, 32-4(1980), 669.
- (35) Hsu, N.-S. and Cheng, B., Identification of Non-Linear Distributed Systems via Block-Pulse Functions, Int. J. Control, 36-2(1982), 281.
- (36) Mohan, B.M. and Datta, K.B., Identification of Non-Linear Distributed Parameter Systems via Orthogonal Functions, Int. J. Control, 52-4(1990), 795.
- (37) 山本敏男, 安田仁彦, 青木健一, うすいはりにおける分数調波振動について, 機論, 46-410, C(1980), 1171.
- (38) 安田仁彦, 林伸和, 初期張力を受ける円板における分数調波振動, 機論, 47-420, C(1981), 987.
- (39) 安田仁彦, 林伸和, 円板における和差調波振動, 機論, 48-426, C(1982), 166.
- (40) 安田仁彦, 宇野春彦, 円形膜の多モード共振, 機論, 48-434, C(1982), 1535.
- (41) 安田仁彦, 櫛田玄一郎, 浅い球殻の非線形振動, 機論, 50-450, C(1984), 288.
- (42) 安田仁彦, 鳥居孝夫, 弦の非線形強制振動(第1報, 第二次主共振点付近で発生する二つの様式の振動), 機論, 51-463, C(1985), 506.
- (43) 安田仁彦, 鳥居孝夫, 弦の非線形強制振動(第2報, 各主共振点付近で発生する種々の様式の振動), 機論, 51-468, C(1985), 1944.

- (44) 安田仁彦, 浅野武, 縮退した振動モードを持つ長方形膜の非線形強制振動, 機論, 53-473, C(1986), 62.
- (45) 安田仁彦, 鳥居孝夫, 円形膜の非軸対象非線形強制振動, 機論, 53-473, C(1985), 294.
- (46) 安田仁彦, 神谷恵輔, 非線形はりの同定法(第1報, 同定報の提案), 機論, 55-515, C(1989), 1609.
- (47) Yasuda, K. and Kamiya, K., Identification of a Nonlinear Beam, JSME, Int. J., Ser. III, 33-4(1990), 535
- (48) Burgreen, D., Free Vibrations of a Pin Ended Column with Constant Distance Between Ends, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 73-2(1951), 135.
- (49) ラルストン, ラビノヴィッツ(戸田, 小野訳), 電子計算機のための数値解析の理論と応用, 上, (1986), 254, ブレイン図書出版.
- (50) 安田仁彦, 神谷恵輔, 非線形はりの同定法(第2報, 非一様はりの同定法), 機論, 56-525, C(1990), 1178.
- (51) 永井健一, 大月和也, 周期横荷重を受ける変断面ばりの非線形振動, 機論, 52-479, C(1986), 1922.
- (52) 安田仁彦, 神谷恵輔, 非線形はりの同定法(実際のはりへの応用), 機論, 57-535, C(1991), 749.
- (53) 安田仁彦, 神谷恵輔, 多自由度非線形振動系の同定法(統計的手法の導入による精度向上の試み), 機論, 57-542, C(1991), 3113.
- (54) 栗屋隆, データ解析, (1983), 37, 学会出版センター.
- (55) 日野幹雄, スペクトル解析, (1977), 172, 朝倉書店.
- (56) 吉本勇, 確率統計工学, (1976), 24, 共立出版.
- (57) 近藤次郎, 最適化法, (1984), 44, コロナ社.
- (58) 大熊政明, 長松昭雄, 特性行列の実験的決定による系の同定(第2報, 誤差を含むデータに対する同定法), 機論, 52-478, C(1986), 1742.
- (59) Vold, H. and Leuridan, J., A Generalized frequency Domain Matrix Estimation Method for Structural Parameter Identification, 7th Seminar on Modal Analysis Katholieke Univ. Leuven, (1982), 1.

## 謝 辞

本論文を終えるにあたり、終始御懇篤なる御指導と御鞭撻を賜った名古屋大学工学部安田仁彦教授に深堪なる謝意を捧げます。

また本研究について有益な御教示と御助言を賜った名古屋大学工学部太田博教授，ならびに三矢保永教授に深く感謝の意を表します。

さらに本研究の遂行にあたり、適切なる御指導，御助言を賜った名古屋大学工学部石田幸男助教授をはじめ，実験装置の作成面で御尽力頂いた中西幸弘技官，種々の御協力を頂いた当時大学院生であった駒木根宗伸君，ならびに知識設計工学講座研究室の諸兄に厚く御礼申し上げます。

平成4年1月