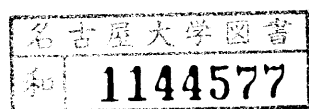


# 乱流境界層のフラクタル特性に 関する研究



平成5年1月

辻 義 之

# 目次

## 第1章 緒論

1.1 本研究の意義と過去の研究の概説	1
1.2 フラクタルの定義	2
1.2.1 ハウスドルフ次元の定義	2
1.2.2 ハウスドルフ測度・次元の性質	3
1.2.3 ボックス次元の定義	6
1.2.4 ボックス測度・次元の性質	6
1.2.5 自己相似性	8
1.3 フラクタル図形の射影・交わり	9
1.4 統計的自己相似性	11
1.5 流体力学におけるフラクタルの研究の概説	13
1.5.1 界面のフラクタル構造	13
1.5.2 統計量分布の特徴づけ	18
1.5.2.1 マルチフラクタル理論	18
1.5.2.2 マルチフラクタルの流体力学への応用	20
1.5.3 エネルギーカスケードモデル	22
1.6 流体力学におけるカオスの研究	25
1.6.1 Closed-Flow system	25
1.6.2 Open-Flow system	28
1.7 カオス・フラクタルの工学への応用	31

## 第2章 乱流境界層における等速度点集合のフラクタル性

2.1 緒言	41
2.2 実験条件及び解析法	45
2.2.1 実験条件	45
2.2.2 等速度点集合の定義	45
2.2.3 等速度点集合の物理的意味と支配方程式	46
2.2.4 ボックス・カウンティング法	48
2.2.5 確率分布関数を用いる方法	50
2.2.6 区分長さの影響	51
2.2.7 敷居値の定義	52
2.2.8 瞬時レイノルズ応力	52
2.3 解析結果及び考察	53
2.3.1 フラクタル次元の比較	53
2.3.2 ゼロ交差における等速度点集合について	54
2.3.3 フラクタル次元の変化	55
2.3.4 等速度点集合と乱れエネルギー	57
2.3.5 四象限分割法にもとづく統計量	58
2.3.6 等速度点集合と瞬時レイノルズ応力との関連	59
2.4 結言	63

### 第3章 乱流境界層壁近傍におけるバースト構造のフラクタル性

3.1 緒言 .....	82
3.2 実験条件及び解析法 .....	86
3.2.1 実験条件 .....	86
3.2.2 等速度点集合 .....	88
3.2.3 バースト検出基準 .....	88
3.2.4 フラクタル次元 .....	90
3.2.5 <i>Karhunen – Loève Expansion</i> .....	92
3.3 解析結果及び考察 .....	95
3.3.1 等速度点集合とバーストとの関連 .....	95
3.3.2 バースト定義関数のスペクトル .....	97
3.3.3 バースト定義関数のフラクタル性 .....	98
3.3.4 散逸場とフラクタル .....	101
3.3.5 K.L. 展開によって抽出されるバースト .....	103
3.4 結言 .....	105

### 第4章 乱流境界層外縁の間欠的現象のカオスの解析

4.1 緒言 .....	131
4.2 実験条件及びデータの解析法 .....	135
4.2.1 実験条件 .....	135
4.2.2 間欠関数の決定 .....	135
4.2.3 二値化記号列の構成 .....	137
4.2.4 間欠的二次元写像 .....	137
4.2.5 記号列のゆらぎの評価 .....	141
4.3 解析結果及び考察 .....	144
4.4 結言 .....	149

### 第5章 結論 ..... 163 |

謝辞 .....	167
----------	-----

参考文献 .....	168
------------	-----

# 第1章 緒論

## 1.1 本研究の意義と過去の研究の概説

工学的に乱流を扱う立場では、その最終的な目標は乱流の制御と予測におかれる。従来からの実験的研究によって、後流の剥離、摩擦抵抗の軽減、乱流遷移など乱流制御に関する研究はある程度の成功を納めている。しかし、乱流現象は多種多様であり [中村, 1992a]、いかなる場合にも乱流を制御する普遍的な方法があるわけではない。個々の場合に応じ、試行錯誤を繰り返しておこなうのが現状である。乱流の予測に関しては、天気予報や台風の進路を完全に把握できないことを見れば分かるように、確率的な議論しかできない。これらは全て乱流が持つ本質的な性質に関わるものと思われる。乱流が持つその本質的な一面はカオスである。カオス理論で乱流が理解できるとは思われないが、ある制約のもと乱流が持つ一側面は確かにカオス的である。

本研究は、乱流の制御と予測を目標にした基礎的研究として、乱流境界層中の諸性質をカオス・フラクタル的な観点から解析した。従来の実験的研究では取り出せなかった乱流の一側面を特徴づけられたと思われる。以下、第2章では等速度点集合のフラクタル性とレイノルズ応力との関連について、第3章ではバースト構造のフラクタル性と散逸場の関わりを報告する。第4章では、境界層外縁の間欠的現象をカオス的な観点から考察した。

カオス・フラクタルと流体乱流との関わりは、主に

- (1) 乱流場の複雑な形や統計量の分布のフラクタルによる定量化
- (2) カスケードモデルと既存方程式の補正
- (3) 乱流アトラクターの次元測定
- (4) 乱流遷移過程の低自由度モデル化
- (5) カオス拡散、カオス制御

などである。本章ではフラクタルの定義について述べ、上記の番号にそって過去の研究を概説する。

## 1.2 フラクタルの定義

フラクタルは、ここ数年の間に頻繁に用いられる言葉として定着したが、そこに含まれる内容は決して新しいものばかりではなく、従来から数学の分野では認められていたことである。ただし、純粋数学の分野にとどまらず、この様な概念は我々のまわりに多数存在することをいち早く見抜き、物理学や工学への応用を提案し、統一的な見解を与えたのは B.B.Mandelbrot[1982] である。

フラクタルの普遍的な定義は、いまのところまだ存在していない。それ故、その様々な性質（属性）を持って、フラクタルをとらえるしかない。フラクタルの持つ本来の性質を知るには、その数学的な背景を知ることが必要不可欠である。よくなされる短絡的な説明でフラクタルを理解することは、かえって混乱を招く恐れがある。そこで本章ではフラクタルが持つ主な特性を三つに分類し、後の議論で必要となる数学的基礎について説明しよう。

第一番目の性質は、”そのハウスドルフ次元がトポロジカル次元より真に大きい”である。これは Mandelbrot が初期に、フラクタルの”定義”として与えたものである [1982]。この意味を理解するために、二つの次元について説明する。

### 1.2.1 ハウスドルフ次元の定義

ハウスドルフ次元は、我々になじみ深い次元（自由度の数）と異なり、測度論の立場から定義される。空間  $\mathbf{R}^n$  において、

$$U_i \subset \mathbf{R}^n, |U_i| = \sup \{ |x - y| : x, y \in U_i \}, \quad (1.1)$$

$$F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, |U_i| < \delta \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.2)$$

この時、集合族  $\{U_i\}$  を  $F$  の  $\delta$  被覆という。空でない  $\mathbf{R}^n$  の部分集合  $F$  に対して、

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |U_i|^s : \{U_i\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } F \right\}, \quad (1.3)$$

を定義する。 $\delta$ を小さくすれば、集合  $F$ を覆う  $\{U_i\}$ の組み合わせは減少する。一方、 $H_\delta^s(F)$ は  $\delta$ を小さくすれば増加する。なぜなら  $H_\delta^s(F)$ は  $F$ の  $\delta$ 被覆の下限であり、それは集合  $F$ を最大直径  $\delta$ の球で全て覆った場合であるから、 $\delta$ が小さくなれば、 $H_\delta^s(F)$ は増加する。 $\delta \rightarrow 0$ の極限を考えると、

$$H^s(F) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F). \quad (1.4)$$

この極限は、 $\forall F \subset \mathbf{R}^n$ に対して存在する。 $H^s(F)$ は集合  $F$ の  $s$ 次元ハウスドルフ測度と呼ばれる [Falconer, 1985,1990]。 $H^s$ は測度の満たす条件（非負性、完全加法性）を備えている。ハウスドルフ測度は、長さ、面積、体積などのなじみ深い概念を一般化したものと考えればよい。

測度  $H^s(F)$ の  $s$ に対する変化には、ある臨界値が存在し、 $H^s(F)$ は  $0$ から  $\infty$ にとび移る。その  $s$ の値を  $F$ のハウスドルフ次元 (Hausdorff-Besicovitch dimension)、 $dim_H(F)$ という [Rogers, 1970]。 $s = dim_H(F)$ のとき、測度  $H^s(F)$ は、 $0 < H^s(F) < \infty$ である。ハウスドルフ次元が  $s$ である集合を総称して  $s$ -set と呼ぶ。

### 1.2.2 ハウスドルフ測度・次元の性質

上記のように定義されたハウスドルフ測度・次元には、多様な性質が含まれているが、ここではその中で最も主だったものを挙げておく（ただし、各々の証明は省略するので、文献 [Rogers, 1970 : Falconer, 1985, 1990]を参照して頂きたい）。

#### ♠ 開集合のハウスドルフ次元

集合  $F \subset \mathbf{R}^n$ が開集合の時、 $dim_H(F) = n$ となる。なぜなら集合  $F$ は正の体積を持つ  $n$ 次元球を含むからである（開集合の定義）。

#### ♠ なめらかな集合（連続・微分可能）のハウスドルフ次元

集合  $F \subset \mathbf{R}^n$ が、 $m$ 次元のなめらかな部分集合（多様体）であるとき、 $dim_H(F) = m$ となる。実際、なめらかな曲線は1次元、平面は2次元である。

♠ 可算集合のハウスドルフ次元

集合  $F$  が可算集合ならば、 $\dim_H(F) = 0$  となる。これは後に述べる可算安定性から容易に証明できる。

♠ 単調性

集合  $E \subset \mathbf{R}^n$ 、集合  $F \subset \mathbf{R}^n$  が  $E \subset F$  ならば、 $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$  となる。

♠ 可算安定性 (Countable Stability)

集合  $F_i \subset \mathbf{R}^n$  が可算列  $F_1, F_2, \dots, F_n$  を構成している場合、以下の式が成り立つ。

$$\dim_H \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\} = \sup_{1 \leq n \leq \infty} \{ \dim_H(F_i) \} .$$

例えばカントール集合  $C$  やコッホ曲線  $K$  (図 (1.1), 図 (1.2)) では  $\dim_H(C) = \log 2 / \log 3$ 、 $\dim_H(K) = \log 4 / \log 3$  となる。また、図 (1.3) に示した手順で構成されるカントールダスト  $C_d$  や高木関数  $T$  (図 (1.4)) では  $\dim_H(C_d) = \dim_H(T) = 1$  となる。しかし、ハウスドルフ次元は計算が困難で、どんな集合に対しても容易に求まるというものではない。そのよい例がシェルピンスキーのギャスケット (図 (1.5)) で、まだその厳密な次元の値は求められていない。

次にトポロジカル次元について説明しよう [Edger, 1990]。トポロジカル次元とは、位相写像によって不変な次元を意味し、次の三つの定義がある；(1) 被覆次元 (Covering Dimension)、(2) 大きな帰納的次元 (Large Inductive Dimension)、(3) 小さな帰納的次元 (Small Inductive Dimension)。しかし、これらの定義はユークリッド空間の  $\mathbf{R}^1$  や  $\mathbf{R}^2$  においては、どの方法で定義しても一致する。そこで、ここでは (2) の定義について説明しよう。

写像  $f : X \rightarrow Y$  が連続写像で、

- (i)  $f$  は上への 1 対 1 対応.
- (ii) 逆写像  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  も連続写像.

を満たすとき、 $f$  を位相写像と言う。集合  $X$  に対し、トポロジカル次元  $\dim_T(X)$  は次のように帰納的に定義される。

1.  $X = \phi$  のとき、 $\dim_T(X) = -1$  とする.
2.  $\dim_T(X) \leq n-1$  まで定義されているとする. このとき  $\dim_T(X) \leq n$  とは、 $\forall F_1, F_2 \subset X$  かつ  $F_1 \cap F_2 = \phi$  なる二つの閉集合が、 $\dim_T(Y) \leq n-1$  を満たす閉集合<sup>3</sup> $Y$  で分離されるときと定義する. そして、 $\dim_T(X) = n$  とは、 $\dim_T(X) \leq n$  であって  $\dim_T(X) \leq n-1$  でないときである.

例えば、 $X$  が離散点の場合は  $\dim_T(X) = 0$ 、線分や閉曲線では  $\dim_T(X) = 1$ 、正方形などの簡単な図形の場合には  $\dim_T(X) = 2$  となる。カントール集合  $C$  やコッホ曲線  $K$  では、 $\dim_T(C) = 0$ 、 $\dim_T(K) = 1$  となる。しかし、ペアノ曲線  $P$  の場合には、 $\dim_T(P) = 2$  となる。つまり、連続曲線はどんな複雑な曲線であっても平面を充填していなければ、トポロジカル次元はすべて 1 である。

さて、最初の属性”そのハウスドルフ次元がトポロジカル次元より真に大きい”について考えてみる。カントール集合やコッホ曲線は確かにこの性質を満たしている。しかし、この性質を満たす集合は、ごく限られたものだけであることに注意しなければならない。それは前述したように、いまのところハウスドルフ次元が厳密に計算できる集合が限られているからである。また、高木関数やペアノ曲線が、この性質を備えていないことも心にとめておこう。

第二番目の性質は、”非整数次元を持つ”である。ハウスドルフ次元もそうだが、その他の非整数次元も測度論の立場から定義される。つまり、ある図形を  $s$  次元球で覆った時の測度が発散せず、有限になることから導かれる。例えば、ボックス次元 [Falconer, 1985]、Minkowski-Bouligand 次元 [Dubuc, 1989]、パッキング次元 [Taylor, 1985] 等がある。また、完全な自己相似性集合（部分が全体の縮小写像のみから成り立っている）に対しては、実数値をとる相似性次元 [Falconer, 1990] が定義される。ここでは後の解析と関連する、ボックス次元について簡単に説明しよう。



### 1.2.3 ボックス次元の定義

有界集合  $F$  を  $F \subset \mathbf{R}^n$ ,  $F \neq \emptyset$  とする。半径が  $\delta$  以下の球で  $F$  を覆った時、その最小の数を  $N_\delta(F)$  とすると、

$$\underline{\dim}_B(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad (1.5)$$

$$\overline{\dim}_B(F) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad (1.6)$$

が  $\underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F)$  を満たせば、ボックス次元  $\dim_B(F)$  は、

$$\dim_B(F) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad (1.7)$$

と定義される。ここで、 $N_\delta(F)$  は、

- (i) 半径  $\delta$  の閉球で  $F$  を覆ったときの球の最小数
- (ii) 一辺  $\delta$  の Cube で  $F$  を覆ったときの最小数
- (iii)  $\delta$ -mesh Cube のうち  $F$  と交わる Cube の数
- (iv) 半径  $\delta$  の互いに交わらない (Disjoint) 球で  $F$  を覆った時の最大数

としてもよい。次元の定義は  $\delta \rightarrow 0$  の極限で与えられることに注意しておこう。この時、 $\delta$  は任意の減少列である。この減少列  $\{\delta_k\}$  は、 $\delta_{k+1} \geq C\delta_k$ ,  $0 < C < 1$  で、特に  $\delta_k = C^k$  なる形をしていけばよい。

### 1.2.4 ボックス測度・次元の性質

ボックス次元の主な性質を以下にあげる、やはり細かな数学的証明は省略する。

#### ♠ なめらかな集合 (連続・微分可能) のボックス次元

集合  $F \subset \mathbf{R}^n$  が、 $m$  次元のなめらかな部分集合 (多様体) であるとき、 $\dim_B(F) = m$  となる。実際、なめらかな曲線は 1 次元、平面は 2 次元である。

♠ 単調性

集合  $E \subset \mathbf{R}^n$ 、集合  $F \subset \mathbf{R}^n$  が  $E \subset F$  ならば、

$$\overline{\dim}_B(E) \leq \overline{\dim}_B(F),$$

$$\underline{\dim}_B(E) \leq \underline{\dim}_B(F).$$

となる.

♠ 有限安定性 (Finitely Stability)

集合  $E \subset \mathbf{R}^n$ 、集合  $F \subset \mathbf{R}^n$  に対して

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max \{ \overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F) \}.$$

しかし、 $\underline{\dim}_B$  については成り立たない。この性質はハウスドルフ次元の加算安定性に対応する。

♠ Lipschitz 変換に対する不変性

Lipschitz 変換  $f$  に対して、

$$\overline{\dim}_B(E) = \overline{\dim}_B(f(E)).$$

集合  $F$  の閉包を  $\overline{F}$  とすると、

$$\underline{\dim}_B(\overline{F}) = \underline{\dim}_B(F),$$

$$\overline{\dim}_B(\overline{F}) = \overline{\dim}_B(F),$$

が成り立つ。つまり  $F$  が  $\mathbf{R}^n$  の稠密な部分集合ならば、

$$\underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F) = n,$$

である。例えば、 $F$ を  $(0, 1)$  区間の可算な有理数の集合とすると、 $\overline{F}$ は  $[0, 1]$  である。それゆえ、 $\dim_B(F) = \overline{\dim}_B(F) = 1$  であり、可算集合  $F$  のボックス次元はゼロではない。各々の点の次元はゼロであるが、その可算集合はゼロでないボックス次元を持つ。一般には可算安定性  $\dim_B(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_i \dim_B(F_i)$  は成り立たない。ボックス次元の興味ある一例をあげておこう。

[Example] 点列集合  $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$  を考える。この集合は集積点を含んでいるから、コンパクト集合である。可算集合  $F$  のボックス次元は、 $\dim_B(F) = 1/2$  となる。

第三番目の性質は、“自己相似性を持つ”である。全体が部分と相似になっている図形を自己相似性という。しかし、よく考えてみると、この記述は無限集合を扱うときの定義そのものである [遠山, 1991]。すなわちフラクタルは無限集合を扱う幾何学である。無限集合が我々の感覚を越えて理解できなくなる一面があるのと同様、フラクタルにも現実世界で考えるととらえ難い一面がある。

### 1.2.5 自己相似性

厳密な自己相似性は、主に図 (1.6) に示す三つに分けられる。相似の中心が幾つ含まれているかに基づいた分類である。以下、各々の場合について箇条書きにすると、

- (i) シェルピンスキー・ギヤスケットやコッホ曲線の様に、いたるところ自己相似性の中心が存在する場合
- (ii) 図形の特定な点のみに相似性の中心がある場合 (図中の葉の部分)
- (iii) 自己相似性の中心が一点だけの場合

となる。部分と全体が相似になっているとは、そこに縮小写像が存在することであり、相似性の中心は縮小写像に対する不動点である。フラクタル図形  $F$  は一般に縮小写像  $f_i$  を用い、集合方程式

$$F = f_1(F) \cup f_2(F) \cup f_3(F) \cdots \cup f_m(F),$$

と表される [畑, 1990]。また、特に (i) の場合に限り、自己相似性に基づいた非整数値をとる相似性次元が定義される [Falconer, 1990]。これについて簡単に説明しよう。

図形  $F$  が全体を  $1/n$  に縮小した図形  $m$  個から成り立っている場合、その相似性次元は、

$$\dim_S(F) \equiv \frac{\log m}{\log n}, \quad (1.8)$$

である。ユークリッド空間における次元の定義として導かれたが、非整数次元にも自然な意味で拡張される。カントール集合やコッホ曲線では相似性次元は、ハウスドルフ次元やボックス次元と一致する。しかし、相似性次元は (i) の意味での厳密な自己相似集合にしかな定義されないことに注意しなければならない。

コッホ曲線や高木関数では、いたるところに相似性の中心が存在しどんな細部を見ても、曲線はなめらかとならず、微細な構造が存在する。これは通常の意味の微分が定義できないことである。フラクタル図形が持ついたるところ微分不可能という性質は、いたるところに相似性の中心があることと本質的には等価である。

以上、フラクタル図形の持つ最も重要な性質を説明した。しかし、これらの性質を満たさないが、ぜひともフラクタルの範疇に含めておきたい図形があるかもしれない。その時はまた、フラクタルの新しい一側面としてそれらを加えればよいであろう。

### 1.3 フラクタル図形の射影・交わり

フラクタル図形の興味ある課題の一つは、集合どうしの交わりや、射影の問題である [Falconer, 1990]。物理や工学の立場からすると、三次元のフラクタル図形のデータが得られる場合は限られている。すると二次元や一次元のデータから、もとの三次元図形のフラクタル性をどこまで再現できるか認識しておくことは、重要な問題である。以下、純粋数学の範囲でハウスドルフ測度と次元に限ってこの問題について考えてみよう。

まず、射影の問題について考える。図 (1.7) に示したような二次元で、 $x$  軸と角度  $\theta$  で交わる直線  $L_\theta$  上への直交射影を  $Proj_\theta$  とする。例えば、 $F \subset \mathbf{R}^2$  の  $L_\theta$  への直交射影は  $Proj_\theta(F)$  である。 $Proj_\theta$  はリプシッツ条件を満たすから、以下の性質が成り立つ。

$F \subset \mathbf{R}^2$  のとき、ほとんど全て (almost all) の  $\theta \in [0, \pi)$  に対して、

- (a)  $dim_H(F) \leq 1$  ならば、 $dim_H(Proj_\theta(F)) = dim_H(F)$ .
- (b)  $dim_H(F) > 1$  ならば、 $Proj_\theta(F)$  は正の長さ ( $L_\theta$  の部分集合) を持ち、次元は 1 となる。

これを一般化して、次の定理が成り立つ。

集合  $F$  を  $F \subset R^n$  のボレル集合とする。 $G_{n,k}$  を  $R^n$  における  $k$  次元部分空間とし、 $k$  次元平面  $\Pi \in G_{n,k}$  への直交射影を  $Proj_\Pi$  とする。ほとんど全ての  $\Pi \in G_{n,k}$  に対して、

- (a)  $dim_H(F) \leq k$  ならば、 $dim_H(proj_\Pi(F)) = dim_H(F)$ .
- (b)  $dim_H(F) > k$  ならば、 $Proj_\Pi(F)$  は正の  $k$  次元測度すなわち次元  $k$  を持つ。

次に、フラクタル集合の交わりについて考えてみる。図 (1.8) で、集合  $E$  は二次元内のフラクタル集合、 $F$  は曲線 (フラクタル集合でもよい) であり、 $\sigma$  は二次元内の変換を表す。いま、 $n$  次元空間で一般的に考えると、

一般に (in general)

- (a)  $dim_H(E \cap \sigma(F)) \leq \max \{0, dim_H(E) + dim_H(F) - n\}$ ,

しばしば (often)

- (b)  $dim_H(E \cap \sigma(F)) \geq dim_H(E) + dim_H(F) - n$ .

これらの定理は、ハウスドルフ次元に関してしか証明されておらず、他の非整数次元について成り立つかどうかは、まだ明らかになっていない。フラクタル集合どうしの交わりの集合が、いかなるフラクタル次元を持つかを一意的に決定することは困難と言える。しかし、Mandelbrot[1982] はこの問題に対し、余次元を使った考察をおこなっている。それによると、フラクタル集合の交わりの次元は、一意的に決定される (additive law)。

積乱雲の形や乱流界面の形をフラクタル的な観点から解析するには、まだ、明確な

結論が得られていないにせよ、上述の議論をふまえて解析をする必要がある。いずれにせよ、今後、解決されるべき課題の一つである。

#### 1.4 統計的自己相似性

以上の議論は全て純粋数学的なものであった。しかし、実際に自然界に存在するフラクタル図形を対象にする場合には、少しその制約をゆるめる必要がある。まず、無限小スケールまで微細な構造が存在するとは考えられないし、部分と全体が厳密な相似になっていることもない。そこで考え出されたのが、“統計的自己相似性”である。我々が直感的に理解できるのは、有限スケールまでであり、コンピュータで解析できる離散的なものである。自然界に存在するフラクタル図形とは、全てこの統計的自己相似性を備えた図形である。上述したフラクタルの三つの属性は、統計的自己相似図形には必ずしも備わっていない。この点を明確にしておかないとフラクタルを理解するとき、誤解を招く結果になる。無限集合であるフラクタルを有限の概念でとらえようとするところに大きな隔たりが生まれるのである。

統計的自己相似性には二つの意味がある。まず、物理量の分布が持つ相似性である。例えば、確率分布関数の型が状態変数のスケール変化に対しても不変である場合、物理量の分布は相似性を備えていると言える。なぜなら、関数の型が不変であることは、分布形態が変わらないことを表しているからである。その様な関数型は、べき指数型に限られる [高安, 1986]。確率分布関数が観測スケール  $X$  の変化に対して、

$$P(X) \propto X^{-D_p}, \quad (1.9)$$

を満たすとき、指数  $D_p$  は統計的分布を評価する一つの指標となる。 $D_p$  はフラクタル次元と呼ばれる。なぜ“次元”であるかは後に説明する。例えば、月面のクレーターの分布や通信系のエラーの分布はこの法則に従っている [高安, 1986]。

他の一つは幾何学的な自己相似性を評価する場合である。まず、図形が含まれる空間を大きさ  $\varepsilon$  のボックスに等分割し、図形を少しでも含むボックスの数を  $N(\varepsilon)$  とする。式

(1.8)の観点から考察し、 $\varepsilon$ の変化に対して、

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D_B}, \quad (1.10)$$

が成り立つとき、図形は大きさ $\varepsilon$ のボックス $N(\varepsilon)$ 個によって構成される。ボックスの個々の位置は問題ではなく、その全個数が $\varepsilon$ の変化に対して上式を満たすとき、図形には統計的な意味での自己相似性が存在する。統計的自己相似性とは、スケールを変えて見ても複雑さの度合いが変わらないことである。 $D_B$ は相似性次元を拡張した意味でのフラクタル次元である。一方、式(1.10)を式(1.7)のボックス次元の拡張と考えることもできる。測度論の立場から定義されるボックス次元は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限での値である。この定義を少しゆるめて、有限の $\varepsilon$ からでもボックス次元が定義できると考えるのである。しかし、数学的な背景を考えると、著者はむしろ式(1.8)の観点から評価すべきだと考えている。 $D_B$ は一般にボックス次元と呼ばれるが、統計的自己相似性を評価する一つの指標である。式(1.9)の分布関数は、上式の $N(\varepsilon)$ に比例するから、分布関数によって定義された指数も次元と考えることができる。

統計的自己相似性を評価する方法として、相関関数に基づくものがある。相関関数の型がスケール変化に対して不変となることにより定義される。その様な型はやはりベキ指数型であり、指数は相関次元と呼ばれる。そのほか、リアス式海岸の相似性を調べるときのコンパス次元や、雲の形の場合には面積と周長の関係から求めるもの等がある。具体的な解析方法やその結果は文献[松下, 1992 : Avnir, 1989 : Kanamori, 1989]に詳しい。統計的自己相似性は厳密な意味での自己相似性の拡張と考えるより、むしろフラクタル図形の一つの属性と考えた方がよいのかもしれない。

## 1.5 流体力学におけるフラクタルの研究の概説

フラクタルの最大の効果は、複雑な形や分布を定量的に評価する基準を与えたことである。乱流との関連では、流れを一つの凍結した場としてとらえ、そこにあらわれる複雑な形や、統計量の分布を評価することに用いられてきた。乱流中の複雑な形であれ、散逸量の分布であれ、フラクタル構造に共通して言えることは、そこに階層構造（カスケード）の存在、一種のスケール不変性が見いだされることである。

乱流中にフラクタル性が構成されるメカニズム [高安, 1991] は、まだ何も明らかになっていない。リチャードソンのカスケードの歌を引き合いに出して、相似性の説明がなされることもあるが、*N.S.*方程式との関係については、レイノルズ数が十分に大きい場合に限り、方程式がある種のスケール不変な構成を持っていることが示されているにすぎない [Frisch, 1985]。いまのところ”実験的事実”として、フラクタルと乱流の関係が評価されている [Nelkin, 1989]。以下では、最も解析が進んでいる、乱流中の界面の形の定量化、散逸や渦度分布の特徴づけ、について述べよう。

### 1.5.1 界面のフラクタル構造

乱流場にあらわれる界面の中で最も興味あるものは、乱流／非乱流界面の形である。実験室内の乱流／非乱流界面がフラクタル構造を持つことを最初に報告したのは、Sreenivasanら [1986a] である。彼らは油煙を用いた可視化と熱線の出力から、噴流、境界層、二次元後流、混合層における乱流／非乱流界面のフラクタル次元を測定した。表 (1.1) にその結果をまとめて示す。また、簡単なオーダー評価程度の計算から界面を通過するフラックス (diffusive, convective, momentum, contaminant) を計算し、それらがレイノルズ数に依存しないことを用いて、界面のフラクタル次元  $D = 7/3$  を導いている [Sreenivasan, 1989a]。この値は後に説明するマルチフラクタルによって最終的な補正を施される。乱流／非乱流の区別を、渦度の大きさから考えれば、それは等渦度面と考えられる。瞬時の渦



度面の二次元的な分布を得ることは今のところ不可能であり、微小プローブ（Kovaszny のオリジナル型を改良した 4 本熱線）を用いた一次元測定から渦度界面の次元が測定されている [Fan, 1988 : Sreenivasan, 1991]。それによると、乱流境界層 ( $R_{e\theta} = 2500$ ) では、 $D = 2.37$  になることを報告している。

油煙を持ちいた可視化はレイノルズ数が高い場合には、乱流／非乱流界面を十分によく表しているとはいえない。油煙も微細な煙の粒だと考えれば、可視化によって得られた画像はスカラー界面と考える方が妥当である。現在、乱流場のフラクタル界面の解析は、スカラー界面に集中している。蛍光物質とレーザーを用いた可視化法 (L.I.F.) によって、二次元、三次元 ( $700\eta \times 600\eta \times 32\eta$ ;  $\eta = \text{Kolmogorov scale}$ : 解像度  $4\eta$ )、の物質面、等濃度面の解析がおこなわれた [Prasad, 1989, 1990a, b]。一般に乱流場でフラクタル構造 (スケール不変性) が成り立つ範囲は、コルモゴロフ・スケールと積分スケール程度の大きさの範囲 (以後、K-range と呼ぶ) である。しかし、スカラー場 ( $S_c \gg 1$ ) では、最小スケールはバチェラー・スケールとなり、コルモゴロフ・スケールとバチェラー・スケールの範囲 (以後、B-range) では別のスケールリング指数を持つことが報告されている [Prasad, 1990a]。K-range でのフラクタル次元が  $2.36 \pm 0.05$  である一方、B-range では幾分高く、噴流と二次元後流の測定から、 $2.7 \pm 0.03$  ( $S_c = 1930$ ) となる [Prasad, 1989, 1990a]。L.I.F. 画像の輝度が実際の濃度に対応しているかどうかは別にして、その画像は鮮明であり、解析も細部までおこなわれている。

噴流ノズル出口から下流方向へのフラクタル次元の変化、レイノルズ数の変化に対するフラクタル次元の変化が調べられている。ノズル出口直後や低レイノルズ数の場合には、界面のフラクタル次元はサポートの次元に等しい。しかし、下流方向への距離や、レイノルズ数の増加に対し、ある臨界値を越えると次元は急激に増加する。その傾向は、相転移によく見られるオーダーパラメータの変化に類似している。レイノルズ数 2000 の噴流実験によると、ノズル近くでは  $D = 1.0$  であるが、ノズル直径の 4 倍以内で急激に増加し、次元の値は最終的に  $D = 2.36$  に漸近する [Prasad, 1990a]。

L.I.F.による二次元計測では、薄いシート状の光を流れ場に照射して可視化する。レーザーシートは薄い方が理想的であるが、可視化領域が広い場合には、その厚さの広がりの影響を無視できなくなる。その様な観点から、レーザーシートの厚さと次元の関係が調べられた。レイノルズ数 4000 において、レーザーシートの厚さ  $h$  (コルモゴロフ・スケールで無次元化してある) を増加させた場合、フラクタル次元は  $D = D_0 + a \exp(-h^2/2\sigma^2)$  となる。ただし、 $a = 0.147$ ,  $\sigma = 6.82$  である。次元は最終的に 1.22 に漸近していく。この値は、三次元界面を二次元に射影したときの次元に一致するとしている [Prasad, 1990a]。これら一連の実験結果を理論的に考察したのは Constantin ら [1991] である。彼らはラグランジュ的にみた微小時間の流体要素の変形を、*N.S.*式に基づき議論した。フラクタル次元の値は実験結果によく一致し、レイノルズ数に対する次元の変化の様子も同様の傾向を報告している。

B-range におけるフラクタル次元の修正はシュミット数 ( $Sc \gg 1$ ) についてなされ、 $D = 3 - 2 \ln(\ln Sc^{1/2}) / \ln Sc$  となる [Sreenivasan, 1989a, 1991]。フラクタル次元は、シュミット数  $Sc \rightarrow \infty$  で  $D = 3.0$  に漸近する。

一方、同様の L.I.F. で可視化された噴流の解析では、異なる見解も示されている [Miller, 1991]。物質面および、等濃度界面が敷居値に依存しないとする Sreenivasan らの解析と異なり、Miller らはフラクタル次元が敷居値に依存してかわることを報告している。局所の平均濃度付近ではフラクタル次元はサポートの次元に等しく、局所平均から離れるに従って次元は減少していく。

現象はより複雑になるが、火炎面の形のフラクタル解析もおこなわれている。特に予混合火炎では乱流火炎の反応は flamelets と呼ばれる [Pope, 1987] 薄いシートに限られる。それゆえ、flamelets の表面積に関する理論的構成に多くの興味を持たれてきた。初期の研究は、それらを層流火炎の集まりとして扱おうとするものであった。しかし、Libby ら [1976] によって指摘されたように、これは適切なモデルとはいえず、火炎シートはむしろ界面の性質と良くにている。flamelets を記述する道具としてフラクタルの有効性を見いだし

たのは、Gouldin[1987, 1988a,b]である。彼はレイノルズ数 4800 ~ 10400 の噴流における非予混合 (nonpremixed) 火炎の研究から、界面のフラクタル次元  $D = 2.36 \pm 0.05$  を得ている。Mantzaras ら [1989] は、内燃機関内の予混合火炎に対して  $D = 2.36 \pm 3\%$  を得ている。これらの結果は、乱流中の界面の次元の結果に大変良く一致している。しかし、Chen ら [1989] は他の火炎に対して  $D = 2.31 \pm 0.07$  を得ているし、Murayama & Takeno[1988] は、空気とメタンの予混合火炎界面の断層写真から、平均の次元  $D = 2.26$  を得ている。Goix ら [1989] は同様の火炎に対して、次元  $D = 2.2$  を報告しており、Gouldin ら [1988b] は空気とメタンの予混合 v 火炎に対し、 $D = 2.1$  の低い値を得ている。Kerstein[1991] は Propagating surface に対して、 $D = 7/3$  を報告している。

これらの値に多少のばらつきがあるのは、主に以下の三つの理由が考えられる。まず第一に、流れ場自体のレイノルズ数が低い：流れ場の性質上レイノルズ数が上げられない。実際、Gouldin らの実験では、積分スケールレイノルズ数は 25 である。第二に、測定が流れ場の下流ではなく、火炎面の噴出出口の直後でおこなわれていること。第三に、可視化に用いたレーザーシートの厚さが十分に薄くないことである。いずれも Sreenivasan らの解析で次元への影響は調べられており [Prasad, 1990a]、それらを考慮すれば、上記の値は皆妥当な値と考えられる。

大気中に浮かぶ水滴を可視化の粒子だと考えれば、雲もスカラ-界面と考えられる。気象衛星の赤外線写真から、雲の面積と周長を測り、界面のフラクタル性を最初に報告したのは Lovejoy[1982] である。雲は、 $1 \sim 10^6 \text{ km}^2$  の広い範囲内でスケール不変性を有し、そのフラクタル次元は  $1.35 \pm 0.05$  である。この場合の特徴的な長さは、地上から雲までの高さ ( $\sim 10 \text{ km}$ ) であるが、上記のスケーリングの範囲が、この特徴的長さを越えて成立していることは興味ある結果である。また、気象レーダーに写る降雨領域の解析もおこなわれた。ただし、地球表面の曲率による影響で、レーダーによる分析は  $40000 \text{ km}^2$  以下の領域に限られる。解析の結果は、雲と同様な面積と周長の関係を有し、それゆえ、同じフラクタル次元を持っている。

Rys ら [1986] は、霰や雹をもたらす雲のフラクタル次元の測定をおこなった。大きなスケールの雲の解析は Lovejoy の結果に同様であったが、小スケールの雲（周長 3 km 以下）は次元  $1.0 \pm 0.1$  を有し、異なったスケールリング性が成り立つことを報告している。これは、激しい嵐の中では、小スケールの雲は垂直方向の対流速度成分が卓越し、水平方向への拡散が抑えられるためだとしている。

理論的考察は、Hentschel ら [1984] によっておこなわれた。彼らは、雲を受動的スカラー粒子と考え（つまり、温度、湿度、水滴の半径等の物理は無視する）、その内部で物質は相対拡散にもとづく乱流拡散によって広がると仮定した。全ての初期値を記述する二点構造関数に対する発展方程式を、界面の次元に結び付け、 $D = 7/3 + \mu/6$  を結論している。 $\mu$  は間欠性指数で  $\mu = 0.26$  としたとき、界面の次元は 2.37 となり、Lovejoy 等の結果にたいへんよい一致を与える。降雨領域をシミュレートするモデルとして、Lovejoy ら [1985a] はランダムな増分の加算和として領域を再現する手法を提示している。実際、その手法で構成された雲の図を見ると、自然の雲との区別はつけ難い。

雲の解析は全て二次元面に投影された画像をもとにおこなわれている。しかし、本来の三次元空間で考えると等方的なフラクタル構造を持つのではなく、セルフ・アフィン構造を持つことが予測される [Lovejoy, 1985b]。それゆえ、雲のフラクタル性を記述するためには、別の観点からの考察も必要であろう [Lovejoy, 1987]。

## 1.5.2 統計量分布の特徴付け

フラクタルの有用性は、複雑な形の定量化とともに、統計量の分布の幾何学的情報をえられることである。このためには、フラクタルの概念をより一般化したマルチフラクタル [Halsey, 1986] が用いられる。これについて簡単に説明しよう。

### 1.5.2.1 マルチフラクタル理論

いま、考えている空間を大きさ  $\ell$  の小さなボックスに分割する。その  $i$  番目のボックス内に含まれる測度を  $p_i$  とする。 $p_i$  の分布を知ろうと思えば、我々になじみの深い確率密度関数を求めればよい。しかし、 $\ell$  を徐々に小さく変化させたときの  $p_i$  の変化に注目すると、 $\ell$  に依存した指数  $\alpha : p_i \sim \ell^\alpha$  ( $\alpha$  はヘルダール指数と呼ばれる) を用いた方が有効である [Mandelbrot, 1989 : Meneveau, 1991]。同じ指数  $\alpha$  を持つボックスの数を  $N(\alpha)$  とすると、 $N(\alpha)$  も  $\ell$  に依存した指数  $f(\alpha) : N(\alpha) \propto \rho(\alpha) \ell^{-f(\alpha)}$  で定義される。これより明らかのように、指数  $\alpha$  を持ったボックスのフラクタル次元が  $f(\alpha)$  である。 $\ell$  を小さくしたとき、すなわち解像度を上げたときに存在するスケール不変な統計量の分布をフラクタルによってとらえ、そのフラクタル構造の多重構造として全体を現そうとしたのがマルチフラクタルである。

$\alpha$  と  $f(\alpha)$  の連続的な分布を求めるためには、 $p_i$  の分配関数を介して、一般化次元を定義して求める方法がよく用いられる [Halsey, 1986]。分配関数を定義する過程で、 $\alpha$  を内部エネルギー、 $f(\alpha)$  をエントロピーに対応させれば、マルチフラクタルの定式化は統計力学的手法をそのまま用いることができる。これに対し、関係式  $\alpha \sim \log p_i / \log \ell$  と  $f(\alpha) \sim -\log N(\alpha) / \log(\ell)$  から直接  $f$  と  $\alpha$  を測定する方法 [Gutzwiller, 1988] やボックスを三種類の大きさにだけ変化させて、簡略化して求める方法もある [Arneodo, 1987]。しかし、これらの方法ではスケール不変性の成り立つ範囲をあらかじめ定められないし、 $f-\alpha$  の持つ微妙なゆらぎを考えれば、この方法は実験データの解析にはあまり有効ではない。

Meneveau[1989]は、測度  $p_i$  のかわりに  $X = \log p_i$  の分布を考え、 $X$  のヒストグラムから  $N(\alpha)$  を求める方法を提案している。つまり、 $N(\alpha)d\alpha = -N(X)dX$  より、 $\Delta\alpha$  を固定して考えれば  $N(\alpha)$  は  $N(X)\Delta X$  に比例した量である。それゆえ、 $N(X)$  のヒストグラムから  $f - \alpha$  曲線を求められる。この方法は、 $X$  の変域が十分に大きく、ヒストグラムを正確に描けるだけの十分なデータが必要である。

情報量理論の概念を拡張して考え、 $f - \alpha$  スペクトルを構成する手法も報告されているので、それについて説明しよう [Chhabra, 1989a,b,c]。シャノンが導入した情報量エントロピー； $S = -\sum_i p_i \log p_i$  に対し、その様な情報生成過程におけるサポートの次元（情報量次元）が定義されている [Billingsley, 1965]。

$$d = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{i=1}^N p_i \log p_i. \quad (1.11)$$

この関係に注目し、 $q$  で重みをつけた測度（ただし、 $p_i(L)$  は長さ  $L$  のボックスに含まれる測度）

$$\mu_i(q, L) = [p_i(L)]^q / \sum_j [p_j(L)]^q, \quad (1.12)$$

の次元  $f$  も以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} f(q) &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{i=1}^N \mu_i(q, L) \log [\mu_i(q, L)] \\ &= \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, L) \log [\mu_i(q, L)]}{\log L}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

また、特異性強さ  $\alpha_i = \log p_i / \log L$  の平均値は、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{i=1}^N \mu_i(q, L) \log [p_i(L)] \\ &= \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, L) \log [p_i(L)]}{\log L}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

上式は、 $q$  の関数として  $f$  と  $\alpha$  を表したものであり、一般化次元を介して結ばれる関係；

$f = q\alpha - \tau$ ,  $\alpha = d\tau/dq$ ,  $\tau(q) = (q-1)D_q$  も満たしている。

マルチフラクタル理論の自然な拡張は、ヘルダ－指数  $\alpha$  の数を増やすことによっておこなわれている [Meneveau, 1990a,b : Lee, 1990]。最小ボックスの大きさが  $\eta$  のとき、距離  $r$  ( $r < \eta$ ) 離れた二点の特異点強さを  $\alpha$  と  $\alpha'$  とする。二点の指数がともに  $\alpha$  と  $\alpha'$  であるような組の分布がフラクタル的に分布するとき、その次元は  $f(\alpha, \alpha', \omega)$ ,  $\omega = \log r / \log \eta$  で与えられる。測度としては二点間の高次相関係数 [Cates, 1987] をもとに定式化されている。  $\omega$  を固定したとき、 $f - \alpha$  曲線は三次元平面となる [Honda, 1989]。

指数  $\alpha$  は負になる (negative dimension) こともあり、また、 $f - \alpha$  曲線と  $\alpha$  軸で囲まれた領域にも特異点が存在する (hidden singularity) ことも報告されている [Mandelbrot, 1988,1990 : Honda, 1989]。  $f - \alpha$  曲線を構成する技術的なことについては、Meisel ら [1992] を参照して頂きたい。

しかし、実際に  $f - \alpha$  曲線を実験データから計算してみれば明らかなように、たいいていの分布に対して  $f - \alpha$  曲線が求まってしまう。著者はこの点について、かねてから心配していた。おそらく無限集合のフラクタルが、有限個の離散点からの情報ではとらえられないのであろうと漠然と考えていた。最近 Aurell ら [1992] によって、この点が明確に議論されている。今後、マルチフラクタル解析をおこなう場合には、短絡的な議論を避け、上述のことを配慮し解析をおこなっていく必要がある。

### 1.5.2.2 マルチフラクタルの流体力学への応用

マルチフラクタル的測度は、ヘルダ－指数  $\alpha$  によって特徴づけられることは既に説明した。この様な測度分布が構成される背景には、測度と領域を細分化し、測度が集中する狭い領域を間欠的に構成する必要がある。良く知られた乗算過程 (multiplicative process [Feder, 1988]) は、マルチフラクタル分布を構成する一例である。

運動エネルギーが熱エネルギーにかわる最終段階を散逸領域と言うが、カスケード過程と乗算過程との類似の性質をふまえ、散逸率の分布がマルチフラクタルによって盛んに調べられている。しかし、実験的に測定できるのは、テイラーの仮説と等方性を仮定し

た瞬時散逸率でしかない。乗算過程で重要な分割比と測度の分配比を、渦の崩壊する大きさの比率とエネルギーの分配比に対応させて議論することは不可能である。最終的な散逸率の分布から、 $f - \alpha$ スペクトルを構成し、カスケード過程までを含めて議論することがおこなわれている。

Meneveau ら [1987b] は散逸場のマルチフラクタル性を、最初に実験的に報告した。代表的な流れ場（境界層、格子乱流、後流）において、積分スケールの 10 倍程度の測定データから、一般化次元  $D_q$  が求められている。 $f - \alpha$ スペクトルは  $D_q$  から容易に導かれる。しかし、得られた  $D_q$  はサンプルごとに異なり、そのゆらぎの幅は誤差のオーダーより大きい。彼らはこのゆらぎが流れ場に付随する根本的な性質であると報告している。

各  $q$  に対する  $D_q$  のアンサンブル平均から求めた  $f(\alpha)$  曲線は、流れ場の種類によらず、同一の分布になった。これは小スケールの運動の普遍性を主張するものである。サンプル領域を十分に長くとした場合には、 $D_q$  のゆらぎは無くなる。しかし、 $f(\alpha)$  曲線に負の部分が存在することになり [Chhabra, 1991]、スケーリング領域もコルモゴロフ・スケールと積分スケールの範囲からさらに狭くなることが報告されている [Meneveau, 1991]。

実験的に測定された  $f - \alpha$  曲線の解析から、エネルギー散逸の特異点を全て集めた集合の次元は 1 に非常に近いが、それよりも小さい (0.96)。散逸の大部分はこれらの特異点集合上の部分集合でおこり、その次元は漸近的に  $D = 0.87$  であることが報告されている [Meneveau, 1987b]。 $\beta$ モデルが散逸領域のフラクタル次元を三次元空間で、 $D = 2.87$  としめることは興味深い一致である。

前述した界面のフラクタル次元も、フラックスのゆらぎを考えマルチフラクタルによって補正すると、一般化次元を用いて  $D = 7/3 + 2/3(1 - D_{1/3})$  と表される。実験的測定から  $D_{1/3} = 0.96$  より、 $D = 2.36$  を得る [Sreenivasan, 1989a]。

スカラー散逸場に対しても同様な解析がおこなわれている。スカラー場ではシュミット数が十分に大きい場合、スケーリングの異なる二つの領域が存在する。各々の領域において、スカラー散逸率  $\chi$  のマルチフラクタル解析がおこなわれている。B-range におけ



る一般化次元  $D_q$  は、 $-10 < q < 10$  の範囲でサポートの次元に近く、このことは B-range での間欠性の補正が無視できることを示している。K-range での間欠性指数は  $0.35 \pm 0.05$  で、スカラー散逸場がエネルギー散逸場  $\varepsilon$  よりも間欠的であることを示している [Prasad, 1990 : Sreenivasan, 1991]。

Meneveau[1990b] は  $\varepsilon$  と  $\chi$  の散逸領域が少なからず相関をもち、測定されたマルチフラクタルスペクトルから求められた温度構造関数は、Antonia[1984] らの結果に本質的に一致していることを示した。

スカラー散逸率  $\chi$  の分布は二次元平面でも得られており、一次元測定の結果と比較されている。その趣旨は、次元の付加法則 (additive law) [Mandelbrot, 1982] の妥当性の確認である。1.3 節で解説したように、三次元空間内のフラクタル集合 (次元  $D_3$  を持つ) と二次元平面や直線との交点にできる集合 (次元  $D_2, D_1$ ) との間には、一般的に予想されるような付加法則 :  $D_3 = D_2 + 1 = D_1 + 2$  は成立しない。しかし、実験的事実として、この法則が成立することを報告している [Sreenivasan, 1991]。

同様のマルチフラクタル解析は、渦度の変動性分 [Fan, 1988 : Meneveau, 1990b : Mizutani, 1991] とレイノルズせん断応力の絶対値についてもなされている。また、直接数値計算による散逸場の解析も進んでおり、等方性乱流 [Hosokawa, 1990] やせん断流 [Keefe, 1989] において、実験で確認されたマルチフラクタル構造が確認されている。

### 1.5.3 エネルギーカスケードモデル

フラクタルの概念が理論的な研究で最も注目を集めたのは、カスケード過程の記述に用いられたことである。運動エネルギーは、大きなスケールの渦から小さな渦へと伝達され、最終的には熱エネルギーとして散逸する [木田, 1988]。当初、小スケールの運動は流れ場の違いによる大きなスケールの影響を受けず、普遍的で空間的に一様におこるものと考えられていた [Kolmogorov, 1941]。しかし、その後の実験的事実は必ずしも散逸が空間的に一様におこっているわけではなく、間欠的であることをうらづけることになる

[Batchelor, 1949 : Van Atta, 1980]。すなわち、散逸率  $\varepsilon$  のゆらぎを考慮する必要性を示唆している。これらに関する明快な解説は文献 [山田, 1987] に詳しい。

半径  $r$  の球領域 (体積  $V_r$ ) における平均の散逸率を

$$\varepsilon_r = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \varepsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1,13)$$

とすると、 $p$  次の重みづけをした間欠性指数  $\mu_p$  は、

$$\langle \varepsilon_r^p \rangle \sim \langle \varepsilon \rangle^p r^{-\mu_p}, \quad (1,14)$$

である。ただし、 $\langle \quad \rangle$  は平均である。特に  $p = 2$  の時を間欠性指数という。コルモゴロフ理論では、 $\mu_p \equiv 0$  である。 $\mu_p$  を実験的に評価するには、速度場の構造関数を調べることによってなされる。距離  $r$  離れた二点間の速度差を  $\Delta u$  とすると、 $\Delta u \sim \varepsilon_r^{1/3} r^{1/3}$  から、

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u)^p \rangle &= \langle \varepsilon_r^{p/3} \rangle r^{p/3} \\ &= \langle \varepsilon \rangle^{p/3} r^{p/3 - \mu_{p/3}} \sim r^{\zeta_p}, \end{aligned} \quad (1,15)$$

$$\zeta_p \equiv \frac{p}{3} - \mu_{p/3}. \quad (1,16)$$

指数  $\zeta_p$  をもとめることによって、 $\mu$  が評価されている。

この間欠性を表現するために、フラクタルが用いられている。 $\beta$ モデル [Frish, 1978 : Kida, 1982] は、散逸領域の形を等方的なフラクタル構造として表現するものである。そのフラクタル次元は、子孫指数  $s$  (offspring exponent) を用いて  $D = (3s - 5)/2$  と表せる。子孫指数とは第  $n$  世代の渦が第  $n + 1$  世代の渦  $\alpha^s$  ( $\alpha$  は定数) 個に崩壊するときの指数である。従って  $s = 3$  の時には渦領域の体積は不変、 $s > 3$  ( $s < 3$ ) の時には体積は増大 (減少) する。 $D$  は  $\beta$ モデルの枠組みの範囲内では決定することはできない。

マルチフラクタルモデル [Frish, 1985] は、散逸場の形ばかりでなく散逸率そのものを特徴づける。散逸場のマルチフラクタル性を仮定することによって、 $\zeta_p = (p/3 - 1)D_{p/3} + 1$  となることが導かれている [Sreenivasan, 1989a, 1991]。Anselment [1984] らがイナーシャ

ルレンジの範囲で、注意深く実験から求めた  $\zeta_p$  に上記の値はたいへん良い一致をしている。これより、散逸領域で求めた  $f - \alpha$  曲線がイナージアルレンジの性質もとらえていることを裏づけている。また、間欠性指数は  $\mu = -d^2\tau/dq^2|_{q=0}$ ,  $\tau = (1 - q)D_q$  で与えられ、 $\mu = 0.26 \pm 0.03$  と見積もられている。

このような散逸場のマルチフラクタル性を再現するモデルも提案されている。 $p$  モデル [Meneveau, 1987a] は二項分布に基づく簡単なモデルであるが、実験から得られる構造関数や  $f - \alpha$  曲線に最も近い分布を与える [Borgas, 1992]。他にランダム  $\beta$  モデル [Benzi, 1984] や対数正規分布を修正したモデル [Chechetkin, 1990] も提案されており、マルチフラクタル性の構成がなされている。

これに対し、バーガース乱流では速度勾配が大ききところでは、その確率密度関数が漸近的にレイノルズ数に依存しなくなる。この結果は小スケールのカスケードがフラクタルではないことを示している [Kraichnan, 1990]。

## 1.6 流体力学におけるカオスの研究

カオスの意義は、簡単な力学系からでも複雑な軌道を構成できることを示したことにある。本来、無限自由度を持つ  $N.S.$  方程式によって記述される流体の運動において、時間的周期運動や非周期運動が観測された場合、有限自由度の常微分方程式である力学系やカオスの概念がどこまで通用するのか？最近の一連の研究は、この疑問に対する解答を求めてなされてきたと言える [八幡, 1990]。

流体カオスの実験的研究は、比較的扱い易く、系の運動を外部から制御可能な closed-flow 系で主におこなわれてきた。例えば、レイリー・ベナール対流、テラー渦、カオス拡散等である。これに対し、Open-flow 系の研究は少なく、乱流遷移や振動する円柱後流の流れなど、限られた流れ場についてである。以下これについて簡単に解説しよう。

### 1.6.1 Closed-Flow System

水平な二平板間に流体を入れ、下面を加熱する。上下面の温度差が小さい場合には、マクロな流れのない熱伝導状態であるが温度差の増加とともに系が不安定化し、対流が現れる。これをレイリー・ベナール対流（以後、ベナール対流と略す）という。このとき、流体の運動は系全体で同期し、同じ状態にあると考えて、空間の一点での速度、温度を測定し、その時系列の解析がなされる。アスペクト比の小さな ( $< 5$ ) 直方体容器における実験では、レイリー数  $R$  の増加とともに運動周期が  $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$  倍になり、最終的には非周期運動を生じる現象（周期倍分岐）が観測される。周期倍分岐はカオスへの移行の一つの型で、例えば、ロジスティック写像で確認できる。このとき、周期倍分岐を生じるどの様な系においても等しい値をとる普遍定数（ファイゲンバウム定数： $F = 4.6692 \dots$  [Feigenbaum, 1978]) が存在する。ベナール対流系でも、ファイゲンバウム定数の測定がなされ、水銀を用いた実験で  $F = 4.4 \pm 0.1$  [Libchaber, 1982]、水を用いた実験で  $F = 4.3 \pm 0.8$  [Giglio, 1981] と報告されている。

カオスへの移行の別の型に、準周期運動からの遷移がある。これは系の運動が、二つの周波数  $f_1$ 、 $f_2$  によって記述される準周期状態から、レイリー数の増加とともにカオスへ移行する。レイリー数の増加とともに、比  $f_1/f_2$  が有理数に留まり (Phase-locked state) カオスへ移行する場合と、無理数に保ちながら遷移する場合がある [Schuster, 1988]。その詳細の説明は省略するが、いずれの場合においてもベナール対流系で実験的に確認されている [Gollub, 1980 : Fein, 1985 : Stavans, 1985]。

また、カオスへの移行に間欠的遷移があるが、これについても実験的に確認されている [Bergé, 1980 : Maurer, 1980] し、ベナール対流系のモデルであるローレンツ・モデルにおいても数値計算によって確認されている [Pomeau, 1980]。

以上の結果は、対流系の時間的振動が確率的ではなく、決定論的な有限自由度力学系によって支配されていることを強く示唆する。

低自由度力学系によって生み出されるカオスは、相空間でストレンジ・アトラクターを構成する。アトラクターはフラクタル構造をもち、その次元の測定がおこなわれている。観測時系列からでも計算可能な量として、相関次元  $\nu$  がある [Grassberger, 1983]。この方法は様々な時系列の解析に用いられており、ベナール対流系 (アスペクト比: 2, 1.2、プラントル数: 40、レイリー数:  $R/R_c = 235$ ) においては、 $\nu = 2.8 \pm 0.1$  が報告されている [Malraison, 1983]。

しかし、アスペクト比が大きい場合 ( $> 10$ ) には、対流系の運動は外部変数での制御が困難で、対流の空間的パターンの遷移がおこる。対流パターンは平行ロールではなく、各壁面にロール端面が垂直になる様に配置する。それゆえ、流れ場は転位、回位、粒界などの欠陥を含んだ織り目構造 (texture) をとり、欠陥の生成、消滅、運動が流れ場のパターンを決定する。これらの運動は低自由度力学系では、もはや記述できないことを注意しておかなければならない。

混合過程でのカオスの注目は、ハミルトン系 (二次元ポテンシャル流れ) での物質の混合についてである。分子拡散を無視すれば、このような流れ場での混合はおこりえな

い。しかし、系に周期的外力を加えてやることによって、効果的な混合を促進できることが、従来から経験的に知られていた。その理由はカオスとの関わりで説明することができる。これについて簡単に触れよう [Ottino, 1989]。

二次元の力学的軌道において、ある点が何回かの写像の後にもとの点に戻ることがある。このような点を周期点と言う。周期点には双曲型周期点と楕円型周期点が考えられるが、前者は双曲型不動点のまわりに漸近する軌道とそこから遠ざかる軌道が存在する。一方、後者には楕円点の近傍に閉じた閉軌道が存在する。物質混合の観点からすると、双曲点まわりの物質は一方向に伸ばされ、他方向に縮めらる。しかし、楕円点まわりの軌道に入った物質は、その閉軌道のなかを周り続けることになる。つまり、楕円周期点は物質混合をむしろ妨げることになる。効果的に混合を進めるには、双曲型周期点から出た軌道が、もとの周期点や別の周期点に入り、物質の引き伸ばしと折り畳みが必要である。このような状況は定常な系でも起こっているが、周期的な外力を系に加えることによって、より頻繁に実現されるのである。上述の周期点を特に「ホモクリニック交差点」、「ヘテロクリニック交差点」という。実は、パイこね変換で知られる馬蹄形写像は、ホモクリニック交差点の存在を意味し、逆にその様な点が一つ見つければ、馬蹄形写像が存在するための十分条件になるのである。パイこね変換は有限体積内での引き伸ばしと折り畳みとを繰り返すもので、最も効率の良い混合を実現できる [Devaney, 1987]。三次元の流れ場では、必ずしもこの様な説明は成り立たないが、今後、カオス混合は工学的にも重要になることが予想される。同様の観点から、ラグランジュ・カオスの研究も興味ある課題である。流体粒子の移動に注目した場合、上述の様な流れ場（瞬時の流れ場はポテンシャル流れであるが、周期的に流れの方向を変える場合）では、複雑な軌道を構成し、初期値に鋭敏に依存する [Wang, 1991]。盛んに研究されているのは偏心二重円筒内の流れで、二つの円筒を交互に周期的に回転させた場合である [Aref, 1986,1989a,1991 : Muzzio, 1992]。数値的なシミュレーションとしては、ポテンシャル流れにランダムな外力が加わった場合として流れ場は実現できるから、Langevin 方程式を用いた考察がおこなわれている [Aref, 1989a,1991]。

Batchelor の理論にあるようにスカラー場のパワースペクトルは、低波数では波数の逆数に比例する ( $-1$  乗則)。この指数は粒子のカオスの挙動に関連すること、そしてその波数領域においては、流れは乱流ではないとする報告もある [Vulpiani, 1989]。

そのほか、我々の日常生活の中にもカオスの現象は存在する。蛇口から落ちる水滴や、小石を投げた時にできる水面波についてもカオス的な挙動が観測されている [船越, 1989 : Pritchard, 1986]。

### 1.6.2 Open-flow system

Open-flow 系でのカオスの研究は、まだあまり報告されていない。それは、本質的に測定可能なデータが限られている (例えば、任意の位置での瞬時の速度場の情報を得ることはできない) ことと、解析手法も十分に整っていないからである。Open Flow 系は本来、時空カオス [Kaneko, 1985, 1992] の観点から解析される必要がある。しかし、時空カオスそのものが現在活発に研究されており、実験データの解析に応用できるまでには、今しばらく時間が必要である。

カオスの観点からの先駆的研究は、一次元の速度信号データを用いて相関次元  $\nu$  が測定された [Sreenivasan, 1986a : Kozlov, 1988] ことである。表 (1.2) にその結果をまとめる。比較的高いレイノルズ数においても、有限の次元を持っていることは興味ある結果であるが、著者らも論文中で述べているように、必ずしも乱流がカオスであるとは断言していない。現在では、相関次元が有限になったとしても、必ずしもカオスでないことが報告されている [Provenzale, 1991]。

層流から乱流への遷移は、流体力学の最も興味ある課題の一つである。その最も最初のもは、ランダウによって与えられた。彼は乱流が無限自由度を持つのは、互いに独立な周波数の波の重ね合わせと考えた。相空間で考えれば、乱流への遷移はリミットサイクルが無限回のホップ分岐を起こして達成される  $\infty$  次元トラスとして説明するのである。これに対して、ルエールとターケンスは有限回のホップ分岐 ( $\geq 3$ ) の後に乱流が現

れると主張した [Newhouse, 1978]。乱流をカオスと考えれば、そのいずれもカオスへいたる道筋としては否定されている。カオスへいたる過程としては、(1) 周期倍分岐、(2) 間欠性カオス、(3) 準周期からカオス、(4) 不連続転移が分かっている。実験的結果として、(2)、(3) の過程から乱流への遷移が報告されているので、簡単に触れることにしよう。

低レイノルズ数の一様流中におかれた円柱の後流には、二次元的なカルマン渦列が構成される。しかし、円柱を流れに垂直方向に振動させると、その後流には三次元的な渦列がうまれる。円柱の振動数を上げると、後流は乱流へと遷移する。この過程は円柱の周波数  $f_0$  と渦の励起される周波数  $f_1$  によって記述される [Sreenivasan, 1985 : Van Atta, 1987]。つまり、乱流への遷移過程が上述の”準周期からカオス”と同様のシナリオを持つのである。熱線の出力からスペクトルを求めることによって、このことを確認している。スペクトルには  $f_0$ 、 $f_1$  の二つの鋭いピークを持つ状態（準周期）から、円柱の振動数を増すことによって連続スペクトル（乱流）への移行が確認されている。しかし、これだけでは不十分である。準周期からカオスへいたる過程は、一般にサークル・マップ

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - (K/2\pi) \sin(2\pi\theta_n)$$

を用いた、トーラス上での軌道の崩壊として説明される。そのことをより詳細に対応させて調べる必要がある。Olinger[1988]らは、 $\Omega = f_0/f_1$ 、 $K = a/D$  ( $D$ は円柱直径、 $a$ は円柱を振動させる振幅) と対応関係をつけサークル・マップとの対応を調べた。円柱を振動させることによって、励起される渦のモードは多少変化して  $f'_1$  になる。 $\omega = f_0/f'_1$  とし、 $\Omega$  を変化させると、平面  $(\Omega, \omega)$  には”悪魔の階段 (devil's staircase)”が構成される。これはサークルマップと同様な性質である。 $\omega$  を一定の値（黄金比の逆数）に保ち、 $K \rightarrow 1$  と変化させた場合のカオスへの移行を考察している。また、ポアンカレ断面上のアトラクターのフラクタル構造を、マルチフラクタルスペクトルによって理論値と比較している。Sirovich[1985]は準周期状態への移行（パワースペクトルには、 $f_0$  と  $f'_1$  の線形結合のピーク： $f_0 \pm f'_1$ ,  $2f_0$ ,  $2f_0 \pm f'_1$  … が現れる、）を古典的な *Karman* の理論から考察している。カオス的な状態になった時の輸送現象については Batcho[1991]、数値計算の結果について



は Karniadakis[1989] を参照していただきたい。

これに対して、円柱の乱流への遷移には外層の乱れの大きさが重要であることが報告されている [Schneider, 1990]。主流の乱れの大きさを変えながら、円柱後流でのアトラクターの次元を埋め込み次元の方法で再構成している。外部からノイズを加えて構成したヘノン・アトラクターとの対比から、円柱後流のアトラクターは主流乱れの大きさによって決定され、それゆえ、この乱流遷移の過程での低自由度モデルの可能性を否定している (なぜなら、ノイズは無限自由度を持つから)。

Ruelle[1971]、Newhouse[1978] によって提示された乱流遷移のシナリオを、数値的に確認する試みが Kida ら [1989] によって行われている。動粘度を変化させ ( $10 \leq 1/\nu \leq 2000$ 、ただし、離散値)、外部から大きさ一定の低周波を *N.S.*式に加えた場合の系の安定する状態が調べられている。乱流は本来時間・空間的な構造であるが、系の時間的な変化のみに注目すれば、周期 3 の準周期状態の後にカオス状態が現れる。しかし、この状態は空間的な構造やエネルギースペクトル、テイラーのマイクロスケール・レイノルズから判断しても”乱流”とは言えないことを報告している。周期 3 の状態が系に加えられた外力にも関わらず存在することに対して、Ruelle らの言う外力は *N.S.*方程式に対しては一般的なものとはならないことを示唆している。

乱流とカオスのもう一つの興味は、アトラクターの次元を測ることである [Guckenheimer, 1986]。アトラクターが高次の場合 ( $> 10$ ) には、前述した埋め込み次元の方法での議論はできず、リアプノフ次元を測定し、考察がなされる。リアプノフ指数  $\lambda_i$  は軌道の拡大率で、自由度の数だけ存在する。リアプノフ指数を大きい順に  $j$  個たしたとき、正になる最大の整数として  $j$  を定義する。すなわち  $c(j) \equiv \sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$  であるが  $\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$  である。リアプノフ次元  $D_L$  は、 $D_L = j + c(j)/|\lambda_{j+1}|$  と定義される。実験から  $D_L$  を求めることは、ほぼ不可能に近いが、数値計算による試みがなされている。その先駆は乱流のモデル方程式に対して、Yamada & Ohkitani[1987,1988] によってなされた。最近の *N.S.*方程式の直接数値計算 (周期境界条件を施したポアズイユ流れ、圧力勾配レイノルズ数は

3200)の結果から、 $D_K = 352$ と報告されている [Keefe, 1992]。この結果は流れ場が決定論カオスに支配されており、 $N.S.$ 方程式の解がストレンジ・アトラクターであることを示している。アトラクターが有限次元に落ち着くことは有限個のモードでの乱流の記述が可能であり、Keefeらが論文中で盛んに主張するように  $K.L.$  展開による乱流の記述の有効性が今後重要となるであろう。これに対し、単独のストレンジ・アトラクターの観点から乱流を理解しようとする試みに悲観的な意見も多数ある [Crutchfield, 1988 : Struminskiy, 1990]。乱流の本質がカオスであるとは思えないが、その一側面は確かにカオス的な性質を備えている。

仮に乱流がカオスだとすれば、乱流制御の問題はカオス制御の問題となる。一次元自由度のカオスについては、既に試みはなされている [Ditto, 1990]。系に外部から小さな攪乱を加えることによって、カオス状態を除去できることが報告されている [Ott, 1990]。カオス混合についても、少量のポリマーを加えることによって、カオス領域を減少させることができる [Leong, 1990]。カオス制御は工学的にも重要であるが、乱流との関連ではより高次のカオスの制御の問題が研究される必要がある。

## 1.7 カオス・フラクタルの工学への応用

著者が研究を始めた当初、これらの概念はまだ新しく、工学的応用の可能性を尋ねられる度に困惑した。しかし、その発展はめざましく、カオスは表 (1.3) に示した広範囲にわたって応用が試みられている [合原, 1992]。その立場は、混合過程のようにカオスの特徴を積極的に利用しようとする場合と、振動・制御の様にカオスを除去しようとする立場に分かれる。カオスの工学的応用が期待される一つの理由は、その実装が容易におこなえることである。簡単な電子・電気回路や光学系からでもカオスは生まれる。経済コスト、設備施設等を考えると工学的ニーズは十分に満足している。しかし、現在の状況は、まだ、実装段階までいっておらず、応用の基本原理を模索しているといえる [合原, 1992]。

実用化が報告されている例としては、 $1/f$  ゆらぎの電化製品 (エアコン、扇風機、洗

濯機など)がある。1/f ゆらぎとは、パワースペクトルが周波数の逆数に比例する場合である。これはカオス的な信号が持つゆらぎとも密接に関係している。人間の五感が心地よく感じる信号は、1/f 型のパワースペクトルを有しており [武者, 1980]、この点を巧みに利用した製品化である。生命現象が特有のゆらぎを持つならば [西江, 1992]、そのゆらぎから健康状態を判断することもできる。指先に付けたキャップ型のセンサーから、脈波や心拍のリズムを取り込み解析をする。信号を基に再構成されたカオス・アトラクターは、疲労、緊張、ほろ酔いなど、その時の健康状態を示す特徴的な形になる。痴ぼう症や神経症の場合には、さらに独特の図形を描く。人間の脳波もやはりカオスと関わっている [津田, 1990]。人間の頭脳により近いコンピュータを作るため、カオスを用いての研究は始まっている。神経回路網（ニューラルネットワーク）についても、やりイカを用いた実験から、外部信号に対して非線形反応を示し、カオスへの引き込みが観測されている。そのモデルとして登場したのがカオスニューラルネットワークである [合原, 1992]。

フラクタルの重要性は、複雑な図形の定量的評価にある。工学的な応用もこの観点からなされている。衛星写真に写った気象画像は、太陽光線を反射して白く輝く積雪領域と雲の部分を区別することが、従来から困難であった。フラクタル的な画像処理を施せば、雲の部分を容易に識別できることが報告されている [高木, 1986]。機械加工の分野では、試料表面の凹凸を評価する目安としての試みがある [Majumdar, 1990 : 伊藤, 1992a, 1992b]。加工表面の粗さがセルフアフィン・フラクタルになることから、そのハースト指数を構造関数及びパワースペクトルの解析によって求めている。表面の状態を記述する新しい一つの指標としてフラクタルの重要性は今後さらに増していくと思われる。表面の構造がフラクタルになると、接触面積が急激に増大する。生体内の肺や毛細血管などは自然な形でフラクタル構造をとっている [Goldbarger, 1990]。工学的反応などでも、反応面積を増大させ活発な反応をおこなうためには、人工的にフラクタル構造をもつ試料を作ればよい。製鉄プロセスの前処理行程において、高炉原料の鉄鋼石（焼結鉱）内部の微細構造がフラクタルになるように熱処理することが試みられている。焼結鉱とは粉状の鉄鋼石の

表面をとかし、多孔質の塊として固め、これを約 20 (mm) に粉砕したものである。高炉に入れる鉄鉱原料の約 7 割を占める。焼結鉄は投入過程で崩壊しないようにある程度の強度と還元性を高めるため多くの気孔を必要とする。この相反する条件を満たし、工業生産ベースに乗せるためには、焼結行程の自動化が不可欠である。その第一段階として、焼結鉄の特性を定量化しなければならない。その基準にフラクタルが用いられたのである。フラクタル次元が 1.68 ~ 1.70 になるように加工された焼結鉄を用いると、現状では 8 割程度の歩留まりを 9 割以上に引き上げることが期待される [稲角, 1992a, 1992b]。

河川の形はフラクタルの代表的図形であるが、そのフラクタル次元を用いて大雨時の洪水が起こるまでの時間を予測する式が提案されている [小川, 1991a, 1991b]。河川の長さや流域面積の間には従来から経験則 (Hack の法則) が成り立つことが知られていたが、これはまさにフラクタル図形が満たす条件に他ならない。一方、河川の洪水到達時間についてもモデル化による式が提案されており、両式を連立することによって、フラクタル次元を用いた洪水到達時間の定式化が可能となる。実際にその定式化は、多摩ニュータウンの過去 14 年に及ぶデータの解析の結果からも妥当性が確認されている。都市河川は度重なる改修工事と下水道整備事業によって、本来の姿を大きく変えている。このような定式化は都市水害の防災において重要であるし、今後の河川改修工事をするうえの目安を与えてくれる。また、災害時の都市部ライフラインシステム (例えば、ガス低圧管網、配電網や上下水道網) における震害の評価基準として、フラクタルが用いられている [中川, 1991]。災害時における、人間の行動パターンまでフラクタルによって定量化されている [横山, 1991]。

金属材料等の亀裂やひび割れの形もフラクタルによって定量化できる [Horvath, 1991]。舗装道路にはいるひび割れもフラクタル構造を持ち、その次元が 1.3 以下であれば、線状ひび割れ、1.3 ~ 1.6 で面状ひび割れ、1.6 以上となった場合には、亀甲状ひび割れと分類されている [阿部, 1992]。もちろんこの様な定量化は、舗装の補修工事の方法を選択する上での基準として役立つ。フラクタル次元が 1.3 以下であれば、シーリング等で対応でき

るが、それ以上の場合には切削カバーやオーバーレイ等の面的な対応が必要となる。次元が1.6を越えてしまうと、構造的な破損として打換えが必要となる。

フラクタルが有望視されている分野に、画像データの圧縮に関するものがある [徳永, 1922]。この問題はいかに少ないデータを用いて、もとの画像を鮮明に再生できるかにある。統計的自己相似性に注目し、細部と同様な形を持つ図形を一つのグループにまとめ、その様なグループを多数作ることによって、画素のデータ量を大幅に少なくできる可能性がある。また、フラクタルを用いたコンピュータ・グラフィックスも活発におこなわれている。簡単な繰り返し計算から構成されるランダム・フラクタルを用い、自然界の風景や植物の形まで巧みに構成される [Levin, 1980]。

ここへ揚げた例は、フラクタル・カオスの工学的応用のごく一部である。今後ますます発展することは確実である。

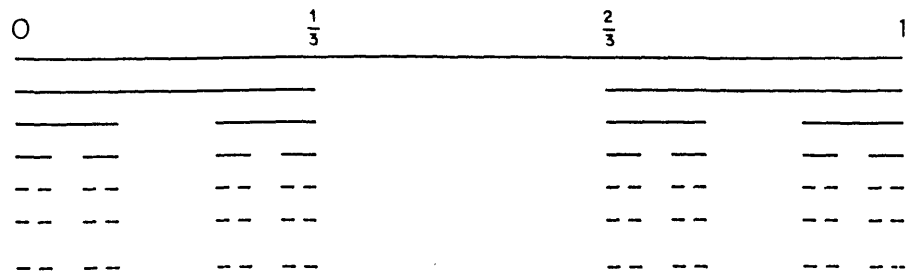


図 (1.1) カントール集合

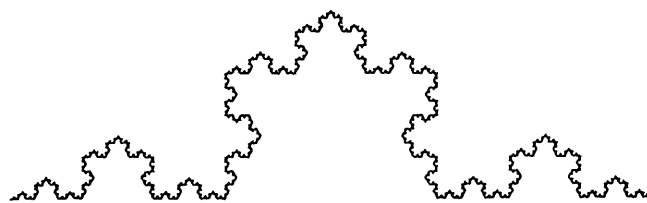


図 (1.2) コッホ曲線

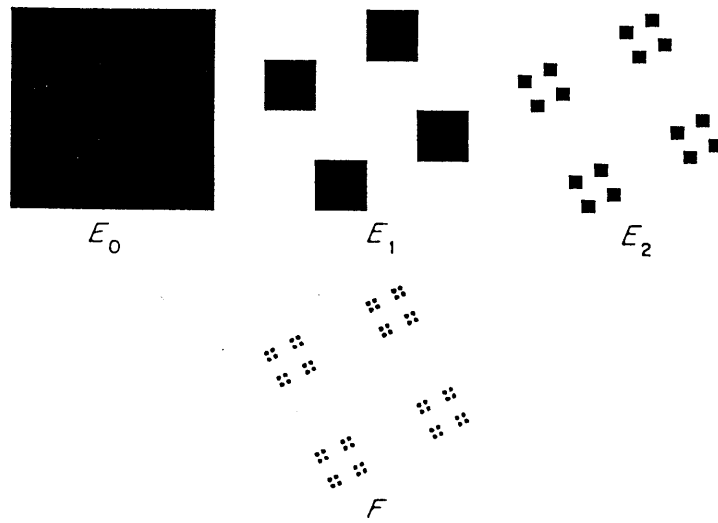


図 (1.3) カントールダスト

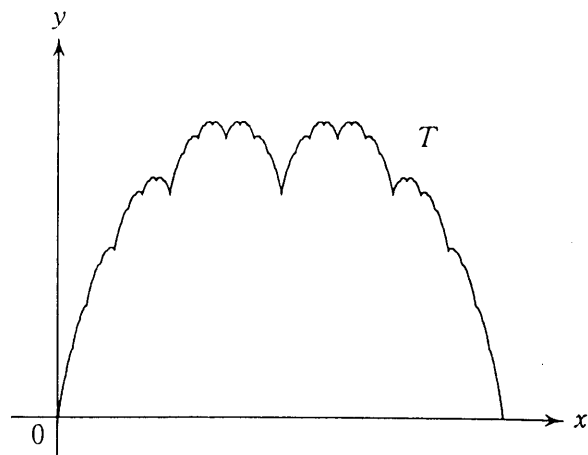


図 (1.4) 高木関数

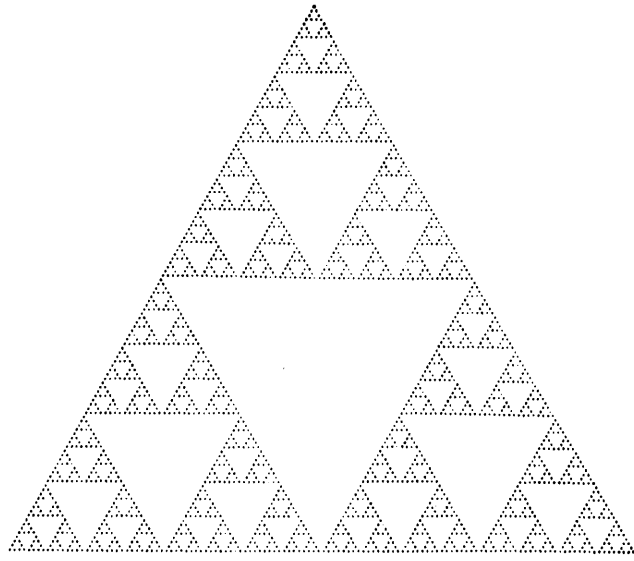


図 (1.5) シェルピンスキーギャスケット

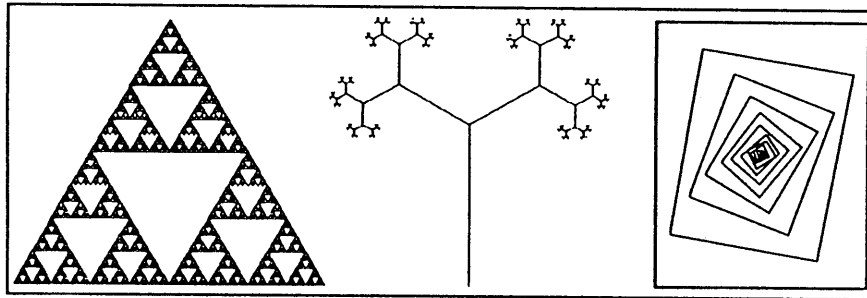


図 (1.6) 自己相似性



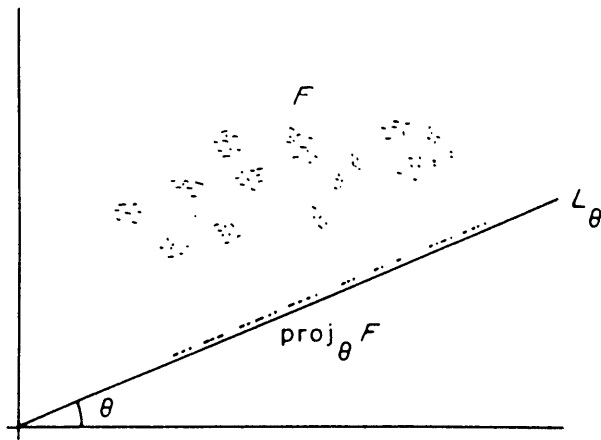


図 (1.7) フラクタル図形の射影

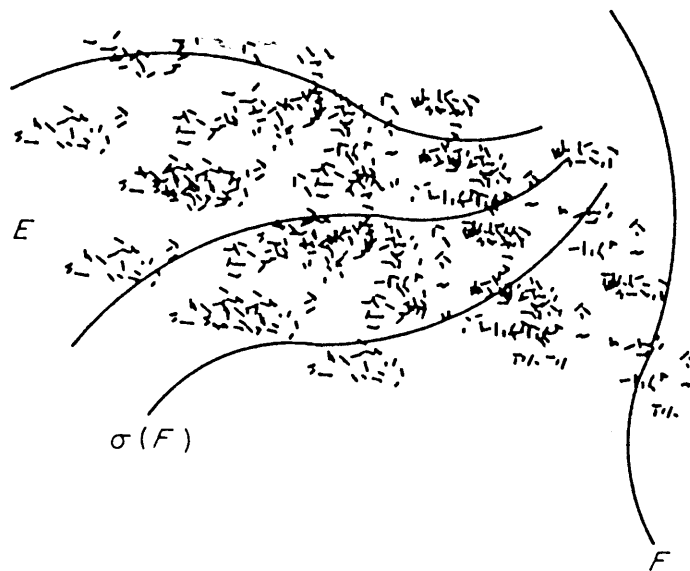


図 (1.8) フラクタル図形の交わり

表 (1.1) 界面のフラクタル次元一覧 [Sreenivasan, 1991]

スケール変化の範囲	[ $\eta$ , $L$ ]			[ $\eta_b$ , $\eta$ ] <sup>a</sup>
流れ場	1次元断面 <sup>b</sup>	2次元画像	3次元画像	
円形噴流	2.36	2.36	2.36	2.7 ( $S_c=1930$ ) <sup>c</sup>
二次元後流	2.40	2.36	2.36	2.7 ( $S_c=1930$ )
二次元混合層	2.39	2.34	—	—
境界層	2.40	2.38	—	—

- <sup>a</sup> 全てのデータはテーラーの仮説を用いて、一次元断面から得られた。
  - <sup>b</sup> 噴流と後流に対する一次元の測定は、二次元画像データの断面から得られた。テーラーの仮説を用いて評価されたものもある。一次元の測定は幾分高い次元の値をもたらすことを注意しなければならない。しかし、実験的不確かさから、この結果に対して重要性をおくことはできない。多くの測定から得られたフラクタル次元の平均値と統計的誤差は、 $2.36 \pm 0.05$  である。流れによって次元の大きさが微妙に異なるのは、重要ともそうでないとも言える。ここでは後者の立場にたつ。
  - <sup>c</sup> シュミット数 ( $S_c$ ) は Wareら(1983)から採用した。誤差は、 $\pm 0.03$  である。
- $\eta_b$  : バッチェラー・スケール,  $\eta$  : コルモゴロフ・スケール,  $L$  : 積分スケール

表 (1.2) アトラクターの次元一覧 [Sreenivasan, 1986b]

流れ場	レイノルズ数 ( $R_e = U_0 d / \nu$ )	相関次元 ( $\nu$ )	最大リアプノフ指数 ( $\lambda_1$ )
円柱の後流 <sup>1</sup>	67	2.6	0.65 (bits/orbit)
軸対称噴流 (未発達) <sup>2</sup>	1000	6.3	0.95 (bits/orbit)
軸対称噴流 (発達) <sup>3</sup>	1000	3.2	—
曲がり管 <sup>4</sup>	6625	6.0	0.40 (bits/orbit)

- <sup>1</sup>  $d$  は円柱の直径、 $U_0$  は上流速度；測定は直径の10倍下流で円柱から1倍離れたところでおこなった。
- <sup>2</sup>  $d$  はノズル直径、 $U_0$  はノズル出口速度；測定は直径の2倍下流のポテンシャル・コアでおこなった。
- <sup>3</sup> リアプノフ指数は計算されてない。なぜなら次元を計算した後、データを喪失したからである。
- <sup>4</sup>  $d$  は管直径、 $U_0$  は断面平均速度；データは管中心上である。

表 (1.3) カオスの応用例 [合原, 1992]

カオスコンピューティング	カオス符号化
カオスニューラルネットワーク 一般シフト写像 最適化問題 学習・自己組織化 次世代アナログコンピュータ	反復関数系のアトラクターによる 画像圧縮 カオス信号通信 カオス暗号
決定論的非線形予測	カオスパターン認識
地震予知 感染症の流行予測 気象、地球環境、生物資源などの 変動予測、経済予測	センサー 音声認識 フラクタル画像認識・特徴抽出 微細な差異の高感度識別
カオスの実装	カオスアート
レーザー系 人工膜 電気・電子回路 光電子回路	カオス音楽 カオスCG フラクタルCG
カオスメモリー	カオスゆらぎの利用
高速メモリー検索 動的シソーラス (類語辞典) 大容量メモリー 動的連想メモリー	音声合成 カオス家電 (カオスゆらぎのエアコン 扇風機、洗濯機などへの応用)
カオスの同定やモデリング	バイオカオス
複雑な工学プラント (原子炉、電力 系統) のモニタリングや異常検出 音声合成 フィルタリング	脳波、脳磁界、心電図、脈波などの 解析・診断 麻酔や睡眠のモニタリング 感性工学 ストレス工学
非線形工学システムにおけるカオス発生とその制御	
カオス振動の除去 (弾性体や回転体などの機械系発電機やモーターなどの 電気系、船舶、関節形係留塔など) 乱流や燃焼の制御 核融合炉のプラズマ閉じこめ問題、ロボット制御 ホメオダイナミックス制御、カオスの混合 (化学プラント、熱交換機、燃焼)	

## 第2章 乱流境界層における等速度点集合のフラクタル性

[中村, 1988 : 辻, 1991b,1992a]

### 2.1 緒言

カオス、フラクタルといった概念が自然現象を理解するうえで必要不可欠なものとして認められ、短期間に膨大な研究がなされつつある。機械工学の分野においても、例えば非線形振動や混合過程などでカオスの挙動が解析されており、今後多方面にわたりその応用に期待がもたれている [合原, 1992]。

本章では乱流境界層中における等速度点集合のフラクタル性について報告する。等速度点集合の定義は後述するが、これらは熱線より得られる速度信号から求められ、時間的なスケールを持つ集合である。同様の研究は既に Sreenivasan ら [1986a] の研究グループがおこなっているが、彼らの研究では実験データを解析するうえで重要となってくるフラクタル構造の存在する領域（自己相似性が成立するスケール変化の範囲）が明確にされていない [Sreenivasan, 1986a]。彼らが用いた解析法（ボックス法；後述）では、このフラクタル構造の存在する領域を明確にして解析しない限り、得られる結果も大きく異なってしまう恐れがある [Caswell, 1986]。そこで、本章ではこの等速度点集合にフラクタル構造が存在する領域を明確にして解析をおこなった。また、等速度点集合の空間的構造を理解することを試み、瞬時の乱れエネルギー領域との関係を調べた。

過去のフラクタル関連の研究では、主に諸現象中に現れる統計量の分布や形がフラクタル構造を持ち、それらがフラクタル次元によって定量的に評価できることが重要とされてきた [Feder, 1988 : Sreenivasan, 1991]。しかし、今後はそのフラクタル性が現れる原因や他の物理量、力学特性との関連を明らかにすることが、現象を理解する上で重要となる。その様な立場からも、乱流境界層における等速度点集合のフラクタル性と力学特性との関連をより明確にすることが望まれる。そこで、前解析の結果をふまえ、瞬時レイノルズ応力と等速度点集合の関連を条件付き平均によって解析した。

フラクタル図形を解析する代表的な手法として Box Counting Algorithm (ボックス法; 以後、B.C. 法と略す)、相関関数を用いる方法、確率分布関数を用いる方法 (以後、P.D. 法と略す)、パワースペクトルを用いる方法等 [Feder, 1988] があるが、解析の容易さ、精度などを考えて B.C. 法、P.D. 法の二種類を採用した。

等速度点集合は局所平均速度付近を除いてフラクタル構造を有し、そのフラクタル次元  $D$  は  $D \leq 0.4$  と見積られる。この時のスケール変化の範囲はコルモゴロフ・スケールと最大渦のスケールである。また、フラクタル構造を持つ等速度点集合は、瞬時のレイノルズ応力が正となる領域に含まれることを明らかにした。以下、これについて報告する。

乱流場のフラクタル性は、乱流の持つカオスの側面のあらわれである。本結果は乱流特性の一部は決定論的に捉えうる可能性を示唆し、乱流の理解、ひいては予測に寄与するものである。

## 2章で用いた主な記号

$\tilde{u}$  : 流れ方向瞬時速度

$U_0$  : 層外主流平均速度

$U(y)$  : 流れ方向局所平均速度

$\delta$  : 境界層厚さ

$u$  : 流れ方向変動速度

$u'$  : 流れ方向変動速度 *r.m.s.* 値

$TH$  : 敷居値 ( $= \tilde{u}/U_0$ )、式 (2.13)

$u_{th}$  : 敷居値速度、式 (2.1)

$B_{th}(t)$  : 等速度点集合、式 (2.2)

$B_{th}(t, H')_i$  : 第  $i$  象限に含まれる等速度点集合、式 (2.23)

$A(t)$  : 乱れエネルギー集合、式 (2.19)

$\tau_k$  : コルモゴロフ時間スケール

$\tau_\ell$  : 自己相関より決まる最大渦の時間スケール

$P_r(\ell)$  : 確率分布関数、式 (2.12)

$P_f$  : Fine grained *pdf*

$-\tilde{uv}$  : 瞬時レイノルズ応力

$-\overline{uv}$  : 時間平均レイノルズ応力

$-(\tilde{uv})_i(H)$  : 瞬時レイノルズ応力の集合平均、式 (2.14)

$H, H'$  : ホールサイズ

$S_i(t, H)$  : 四象限分割法の定義関数、式 (2.15)

$S'_i(t, H')$  : 四象限分割法の定義関数、式 (2.24)

$D_B$  : ボックス法によって決定される等速度点集合のフラクタル次元

$D_P$  : 確率分布関数より決定される等速度点集合のフラクタル次元

$D_d$  : 乱れエネルギー集合のフラクタル次元

$D$  : フラクタル次元 (非整数次元の総称とする)

## 2.2 実験条件及び解析方法

### 2.2.1 実験条件

本研究で解析の対象とした乱流境界層は、圧力勾配のない平板乱流境界層である。速度信号は前縁から 1900 (mm) の位置において、I 型および X 型プローブを用い定温度型熱線流速計 (Hayakawa, Model-HC30) により測定された。熱線は直径 5 ( $\mu\text{m}$ ) のタングステン線に銅メッキをほどこし、受感部の長さは 1 (mm) である。アナログ信号は 5 kHz でサンプリングをおこない、フロッピーディスクに保存された。解析に用いた離散化データは、各  $y/\delta$  の位置で約 120000 個、24 秒の測定によって得られた全てを用いた。速度信号にフィルターはほどこしていない。その後の処理は名古屋大学大型計算機センターのスーパーコンピュータを用いておこなった。

本境界層は、層外主流の平均速度  $U_0 = 5.0$  (m/s)、境界層厚さ  $\delta = 40.0$  (mm)、運動量厚さ  $\theta = 4.80$  (mm)、レイノルズ数  $Re_\delta = U_0\delta/\nu = 1.4 \times 10^4$ 、 $Re_\theta = U_0\theta/\nu = 1.69 \times 10^3$  である。主流方向の平均速度は、Klebanoff の実験データ [Schlichting, 1955] によく一致するものの、その乱れは多少大きな値であった。Clauser 線図法 [中村, 1986] を用いて計算された壁面摩擦係数  $C_f$  及び摩擦速度  $u_*$  は各々 0.0039 , 0.22 (m/s) であった。コルモゴロフの時間スケール及び最大渦のスケールは境界層全域にわたりそれぞれ、 $\tau_k \sim 1.5$  (ms) ,  $\tau_l \sim 20.0$  (ms) と見積った。なお、コルモゴロフ・スケールは、テイラーの関係式から散逸率を見積もり求めた。最大渦のスケールは、流れ方向速度の自己相関関数が横軸と最初に交わる位置とした。

### 2.2.2 等速度点集合の定義

図 (2.1.a) には、本解析に用いた速度信号と等速度点の概要が示されており、図 (2.1.b) には 2.3.4 節で説明する瞬時の乱れエネルギーの分布が示されている。図 (2.1.a)



において、縦軸は流れ方向の瞬時速度を層外主流の平均速度で無次元化したものであり、横軸は時間を示す。図中 $\tilde{u}$ が一定となる直線を以後、敷居値と呼び記号  $TH$  であらわす。図は  $TH = \tilde{u}/U_0 = 0.85$  の場合を示している。 $TH$  と速度信号との交点にできる横軸上にたてられた縦棒の位置が等速度点集合である。この時、敷居値によって定義される速度を敷居値速度と呼び記号  $u_{th}$  で表す。

$$u_{th} = U_0 \cdot TH . \quad (2.1)$$

後の解析のため、これらの等速度点集合を以下のように定義しておく。

$$B_{th}(t) = \{t \mid u_{th} = \tilde{u}(t)\} . \quad (2.2)$$

解析を行うデータの時間的な長さを区分 (Segment) と呼ぶことにし、この区分長さ内で得られる等速度点集合に対しフラクタル次元を決定する。

### 2.2.3 等速度点集合の物理的意味と支配方程式

等速度点集合の意味について考えることにする。この集合は Sreenivasan ら [1986a] によって導入されたが、これまで熱線出力データのフラクタル性を抽出する方法としてのみ考えられてきたようなので、その流れ場に関連した意味を以下の二つの観点から調べることにする。

その第一は Stratonovich [1963] が考察し、Lundgren [1967] によって乱流の確率密度関数に利用された各点確率密度関数 (fine grained probability density function、以下 *fpdf* と略す。訳語は意味を考えて後につけたものである) に関係したものである。*fpdf* は一般に考えることができるが、ここでは流れ方向瞬時速度  $\tilde{u}(x, y, z, t)$  に限って取り扱うことにする。敷居値速度を状態変数、 $\tilde{u}$  をランダム変数とし、パラメータの値を省いて書けば

$$P_f(u_{th}) = \delta(u_{th} - \tilde{u}) , \quad (2.3)$$

で定義される関数が  $fpdf$  である [O'Brien, 1980 : Pope, 1985]。  $\delta$  はディラックの  $\delta$  関数である。乱流実験の統計量解析で一般に考えられるように、定常性とエルゴード性を仮定すれば、等速度点集合は式 (2.3) の  $P_f \neq 0$  を満たす  $t$  軸上の点集合となっている。  $P_f(u_{th})$  の支配方程式は、  $P_f(u_{th}) = \tilde{P}$  と略記すると式 (2.3) の時間微分項、

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}} \delta(u_{th} - \tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{u}} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u_{th}} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

を非圧縮  $N.S.$  方程式、

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{u} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 \tilde{u}, \quad (2.5)$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} - \left( \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \nabla^2 \tilde{u} \right) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u_{th}} &= 0. \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{u} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u_{th}} - \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \nabla^2 \tilde{u} \right) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u_{th}} &= 0. \end{aligned}$$

左辺第二項を変形すると、

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{u} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u_{th}} = u_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u_{th}} = -u_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{u}} = -u_i \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i},$$

となるから、  $\tilde{P}$  の支配方程式は以下のようなになる。

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{P} + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \nabla^2 \tilde{u} \right) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u_{th}} = 0. \quad (2.6)$$

ただし、  $\mathbf{u}$  は速度ベクトル、  $p$  は圧力である。この式は超関数の意味で成り立つことに注意しなければならない [Lundgren, 1967]。即ち、任意のテスト関数と式 (2.6) との積に対し、その積分値がゼロになる。また、  $fpdf$  の重要な性質は、  $f$  を通常確率密度関数とすると、

$$\langle \delta(u_{th} - \tilde{u}) \rangle = f(u_{th}), \quad (2.7)$$

が成り立つことである [Pope, 1985]。ただし、  $\langle \rangle$  はアンサンブル平均をあらわす。従って、式 (2.6) のアンサンブル平均を取れば Lundgren が導いた一点確率密度方程式になる

[Lundgren, 1967]。以上の議論から明らかのように、等速度点集合  $B_{th}$  は上式を通じて確率密度関数に関係しており、図 (2.1.a) 中の各パルスの位置に  $\delta$  関数のピークがあると考えれば、このパルス列は  $fpdf$  であるところの式 (2.3) のグラフそのものである。

第二の解釈は、流体粒子の移動に関するものである。流体粒子のラグランジュ的移動は、乱流拡散の中心課題の一つであったが、最近はさらに流体のカオス的混合 [Ottino, 1989] や、流体粒子の運動からレイノルズ応力や組織構造を解析する試みに関連して研究されている [Bernard, 1990]。

いま、テイラーの仮説が成り立つとし、 $u_{th}$  で動く座標系  $\Sigma_{th}$  から瞬間的にみると、等速度点集合は  $\Sigma_{th}$  でながれ方向瞬時速度がゼロとなる点の集合である。従って  $\Delta t$  時間内の流体粒子の  $x$  方向移動のみを考えると、この流体点是不動点である。この様な解析は瞬時流線をトポロジ-的観点から考察するうえで有効である。不動点の数は組織構造との関わりで、流れ場を記述するのに用いられる [Antonia, 1989]。  $x - y$  平面の瞬時流線方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{\tilde{u} - u_{th}}, \quad (2.8)$$

で定義されるから、等速度点集合は相対流線が  $x$  軸に垂直になる点集合である。もちろんこの様な点は  $\Sigma_{th}$  の取り方によるので、それ自身では物理的に大きな意味は付け難いが、後に述べるように、この様な点の分布がフラクタル集合であることは興味あることである。

#### 2.2.4 ボックス・カウンティング法

区分長さ (Segment) をある大きさ  $\varepsilon$  のボックスに等分割し、その中に一つ以上の等速度点を含むボックスの数を  $N(\varepsilon)$  とする。この時、等速度点集合全体は大きさ  $\varepsilon$  のボックス  $N(\varepsilon)$  個によって覆われる (近似される)。  $\varepsilon$  の大きさを変化させたとき、

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D_B}, \quad (2.9)$$

なる関係が常に成り立てば、等速度点集合はフラクタルと定義され、指数  $D_B$  はフラクタル次元 (Box Dimension) を与える [Feder, 1988]。  $D_B$  は本来、測度論の立場から定義さ

れるが [Dubuc, 1989 : Falconer, 1990]、上記の考え方が示すように図形が持つ幾何学的な性質によって定義される相似性次元  $D_S$  の拡張と考えることもでき [Feder, 1988]、本研究では統計的な自己相似性を評価する指数として  $D_B$  を考えることにする。カントール集合やコッホ曲線などには  $D_S$  が定義される一方、リアス式海岸や積乱雲の形などの統計的な相似性を有するものには、拡張された意味での  $D_B$  が見積られる。

図 (2.2) は代表的な例として  $y/\delta = 0.70$ 、 $TH = 0.86$  の等速度点集合を B.C. 法で解析した結果を示す。図中、破線と実線の二つの直線部分を認めることができるが、実線部分は傾きが  $-1$  であり、この大きさのボックスで等速度点集合を近似すると直線となることを意味している。これに対し  $N(\varepsilon)$  の変化を破線で近似できる領域にフラクタル構造が存在し、この部分の傾きが  $D_B$  である。破線は横軸上に立てられた以下に説明する矢印の範囲  $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$  で最小二乗法を用いて決定した。自然現象中に現れるフラクタル性には、この様に自己相似性が成り立つ有限な領域が存在する。カントール集合のようにどんな細部を見ても全体と同じ形が存在するわけではない。したがって、フラクタル次元  $D_B$  は  $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$  の関数である [Caswell, 1986]。しかし、以前になされた研究ではこの自己相似性の成り立つ領域が明確にされないまま、フラクタル次元  $D_B$  の定量的な議論がおこなわれている [Sreenivasan, 1986a]。そこで、本研究では  $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$  を以下のように決定し同様の解析をおこなった。

$\varepsilon_{min}$  は変化させるボックスの最小値で、これより小さなスケールは乱流渦としての特性を持たないことより、コルモゴロフの時間スケール  $\tau_k$  を対応させた。一方  $\varepsilon_{max}$  は図 (2.2) の様な多くのデータを解析し、経験的に

$$\varepsilon_{max} = AVE + RMS/2, \quad (2.10)$$

と決定した。ここで、 $AVE$  と  $RMS$  は各々等速度点の間隔の平均値と r.m.s. 値である。仮に等速度点間隔の分布がポアソン過程だとすれば、式 (2.10) によって全要素の 77.7% が含まれることになり、正規分布だとすれば 69.1% が含まれることになる。

この様に決定された  $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$  の範囲において、最小二乗法を用いてグラフの

傾きを計算し、同時に直線近似の目安として相関係数  $R$  を求めた。グラフは  $|R| = 1.0$  の時、完全な直線近似となり、本解析では  $|R| < 0.97$  となるデータは解析の対象から外した。後に述べるように、数値速度  $u_{th}$  が局所の平均速度  $U(y)$  に等しくなる位置付近を除いては、等速度点集合は  $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$  の範囲で明確にフラクタル構造が存在し、この時  $\varepsilon_{max}$  は、ほぼ最大渦のスケール  $\tau_\ell$  と等しくなる。等速度点集合のフラクタル性が局所平均速度付近で曖昧になる理由、及びそのスケール変化の範囲がコルモゴロフ・スケールと最大渦の範囲になることの物理的解釈は 2.3.2 節で述べる。

### 2.2.5 確率分布関数を用いる方法

等速度点の時間間隔を表すランダム変数を  $L$  とし、その状態変数を  $l$  とすると、一般に定義される確率分布関数  $P(l)$  は、 $L$  が  $l$  よりも小さな確率  $Prob\{L \leq l\}$  を表すものであるが、本解析では便宜上  $P_r(l)$  を次のように定義する、

$$P_r(l) = 1 - P(l), \quad (2.11)$$

$P_r(l)$  は  $L$  が  $l$  よりも大きな確率を表すものである。等速度点集合がフラクタルになる場合には、 $l$  の変化に対して

$$P_r(l) \propto l^{-D_P}, \quad (2.12)$$

なる関係を満足する必要がある [Feder, 1988]。分布関数  $P_r(l)$  がスケールの変化 (式 (2.11) での  $l$  の変化) に対して普遍的関数の形を持つことは、等速度点集合が統計的に自己相似になっていることを意味する。

図 (2.3) は  $P_r(l)$  と  $l$  との関係を両対数プロットしたものの代表例で  $y/\delta = 0.70$ 、 $TH = 0.88$  の場合である。図中の  $\square$  印が等速度点集合の解析結果を示しており、明確に直線部を認めることができる。式 (2.12) からこの部分の傾きがフラクタル次元  $D_P$  を与える。図中二つの矢印はフラクタル構造 (自己相似性) の成立する範囲  $[l_{min}, l_{max}]$  をあらわしており、 $l_{min} = \varepsilon_{min}$ 、 $l_{max} = \varepsilon_{max}$  とした。この範囲において直線部が存在するこ

とは明確であり、その傾きを最小二乗法により決定し、相関係数  $|R| < 0.97$  なるデータは削除した。なお、図中の×印は比較のために、フラクタル構造を持たない点集合としてポアソン過程を代表例にとってシミュレートして得られた  $P_r(\ell)$  の分布を示す。グラフには直線部は存在せず滑らかに変化していることがわかる。

## 2.2.6 区分長さの影響

解析をおこなううえで区分長さ (Segment) は重要なパラメータとなってくる。図 (2.4) 及び表 (2.1) は、B.C. 法から得られるフラクタル次元に対する区分長さの影響を調べた結果である。グラフは区分長さが長くなるにしたがって全体として滑らかに変化するようになる。しかし、前述のようにフラクタル構造が存在する領域を明確にして求めたフラクタル次元は、区分長さの影響をあまり受けずほぼ一定の値となっている。従って、以下の解析では、 $TH$  の変化に対して十分な数の等速度点 (最低 100 個以上) がとれるように、区分長さを  $2.0 \times 10^3$  (ms) (最大渦のスケールの 100 倍程度) に固定して解析をおこなうことにする。図中、横軸上の  $\varepsilon_{max}$  の位置が多少ばらつくが、式 (2.10) の定義より区分長さが十分大きい時には一定値になる。

一方、参考文献 [Sreenivasan, 1986a, p373, Fig.14] にも同様な解析がおこなわれているが、それは不明瞭なものに見える。すなわち、区分長さが短い場合 (壁に垂直方向の積分スケールの 50 倍程度) ではグラフに明確な傾き一定の領域が存在するが、区分長が大きくなると (同、430 倍) グラフは滑らかに変化する。その結果として等速度点集合は区分長さが小さい場合にしかフラクタル性を示さないと報告されている。しかし、グラフがどの範囲で明確な傾き一定の直線になり、どの範囲で滑らかに変化するのか曖昧なままである。これはフラクタル構造の存在する範囲  $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$  を明確に決定せずに解析したためであり、上記に示したようなここでの解析の方がより厳密であると考えられる。

### 2.2.7 数居値の定義

等速度点集合を定義するための数居値  $TH$  を、パラメータ  $P$  を用いて以下のようにあらわす。

$$TH = U(y)/U_0 + P \cdot (u'/U_0). \quad (2.13)$$

ここで、 $U(y)$  は局所の平均速度、 $u'$  はその位置での r.m.s. 値である。 $P = 0$  は数居値速度が局所平均速度となる位置を示し、以後この値をゼロ交差 (Zero-crossing [Sreenivasan, 1983]) と呼ぶことにする。等速度点集合は、 $y/\delta$  と  $P$  によって、分布が大きくかわることに注意しよう。

### 2.2.8 瞬時レイノルズ応力

時間平均レイノルズ応力  $-\overline{uv}$  に対して、時刻  $t$  での瞬時のレイノルズ応力を  $-\widetilde{uv} \equiv -u(t) \cdot v(t)$  とする。四象限分割法に従い、 $i$  象限における瞬時レイノルズ応力の集合平均を以下のように定義する [Lu, 1973]。

$$\frac{-(\widetilde{uv})_i(H)}{|\overline{uv}|} = -\frac{1}{|\overline{uv}|} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \widetilde{uv} \cdot S_i(t, H) dt, \quad (2.14)$$

ここで、 $S_i(t, H)$  は定義関数で、

$$S_i(t, H) = \begin{cases} 1 & : |\widetilde{uv}| > H \cdot u' \cdot v' \text{ で } i \text{ 事象の場合,} \\ 0 & : \text{Otherwise.} \end{cases} \quad (2.15)$$

を満たす。添え字  $i$  は四象限分割による表記、 $H$  はホールサイズである [Lu, 1973]。各々の事象は、 $i = 1$  : 外向き相互作用過程、 $i = 2$  : エジェクション過程、 $i = 3$  : 内向き相互作用過程、 $i = 4$  : スイープ過程と呼ばれる。

## 2.3 解析結果及び考察

### 2.3.1 フラクタル次元の比較

一次元上のフラクタル構造を持つ点列に対して、式 (2.9) 及び式 (2.12) で各々定義される次元  $D_B$ 、 $D_P$  の値は近似的に一致する [Shlesinger, 1984]。以後、両者の次元を  $D$  で表す。図 (2.5) は境界層内の代表的な点において、敷居値 (すなわち  $P$ 、式 (2.13) の定義) を変化させたときの二つの方法による次元の変化を示している。ただし、□印は B.C. 法より求めた次元を表し、×印は P.D. 法より求めた次元を表している。グラフ横軸上で  $P = 0$  は敷居値速度が局所平均速度となる位置、すなわち、ゼロ交差 (Zero-crossing [Sreenivasan, 1983]) である。

ゼロ交差付近においては、二つの方法で求めた次元は大きくずれている。これに対し、 $|P| \geq 1.5$  では両者の次元は  $D \leq 0.4$  の範囲で非常によく一致する。この両者の次元が一致する敷居値においては、スケージングの範囲はコルモゴロフ・スケールと最大渦のスケールである。なお、両者の方法で求めた次元が異なることについての物理的解釈は次節で述べる。

図 (2.6) には敷居値速度をパラメータとしてみたときの、フラクタル次元の境界層厚さ方向への変化を代表的な点を選んで示す。各々の敷居置速度で定義された等速度点集合は、空間的にその次元が変化している。□印、×印はそれぞれ B.C. 法、P.D. 法で求めた次元であり、図中の破線は各々の敷居置速度が局所平均速度と等しくなる  $y/\delta$  の位置を示す。これは式 (2.13) より、ゼロ交差の位置を表す。次元は破線の位置付近で比較的大きな値をとり、そこから離れるに従って減少していく。また、両者の次元が一致するのはゼロ交差付近を除いた領域のみである。



### 2.3.2 ゼロ交差における等速度点集合について

B.C. 法 及び P.D. 法から求まる等速度点集合のフラクタル次元は、ゼロ交差付近で大きく異なった。これは等速度点集合がゼロ交差において明確なフラクタル構造を持たないことを予測させるものである。同様の傾向は、過去の研究でも示されている [Sreenivasan, 1986a] が、十分な検討がなされておらず、これについて考察をおこなう。

図 (2.7) にゼロ交差における解析の一例を示す。ゼロ交差においては式 (2.10) によって経験的に決められた  $\varepsilon_{max}$  は小さな値をとる。これは速度信号と数居値との交差回数が増加し、主に  $AVE$  が小さくなるためである。それゆえ  $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$  の範囲は狭くなりグラフは二つの矢印の範囲で直線部を持つかどうかの判断は難しい。むしろ P.D. 法の結果からするとポアソン過程に近いといえる。

これらの解析結果を解釈するため、一つのモデルを提案しよう。現象論的な説明であるが、瞬時の等速度点集合を等速度面の観点から考えることにする。数居値速度  $u_{th}$  を固定し、

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = u_{th}, \quad (2.16)$$

によって、ある時刻にその点での  $\tilde{u}$  が  $u_{th}$  に等しくなる点の集合を考える。これらの点をなめらかに補間した面は、コルモゴロフ・スケールの厚さを持ち、大小様々な泡の層の様な面構造あるいは組織を作ると考えられよう。図 (2.8) はこの面組織を  $x - y$  面で切断したときに現れるであろう曲線群を、ブラウン運動を使って模式的に描いたものである。ただし、ブラウン運動はイメージを得るための便宜的なものである。 $U(y) = u_{th}$  となる高さを  $Z_0$  軸とすれば、これはゼロ交差の位置を表す。 $Z_0$  軸に平行な直線と等速度面組織との交点にできる一次元点列が等速度点集合である。凍結乱流の仮説によれば、式 (2.1) の時間的等速度点集合は、この空間的等速度点集合と等価なものとなる。

瞬時速度  $\tilde{u}$  が  $u_{th}$  となっている等速度点の単位時間あたりの数  $N$  は  $Z_0$  軸付近で最大値  $N_0$  を取り、そこから離れるにつれて減少することが実験データの解析により明らかとなった。これは図 (2.8) の  $u_{th}$  の縦軸と瞬時速度分布との交点が  $Z_0$  軸付近で最も多いこと

に対応している。速度変動の振幅は有限であり、平均速度がせん断を持っているので  $Z_0$  軸から離れるにつれて、ある  $u_{th}$  に対応する等速度面組織はまばらなものとなり、単一のフラクタル界面を構成する。フラクタル構造を持った単一の等速度面が  $Z_0$  軸との交点に作る等速度点集合は、フラクタル構造を持っている。しかし、図 (2.8) に示すように泡層の面組織によって  $Z_0$  軸上に作られる等速度点集合はもはやフラクタル性は示さない。このことを簡単なシミュレーションによって考えてみよう。例えば、単一のブラウン運動によって  $Z_0$  軸上に構成されるランダム・カントール集合はフラクタル次元  $D = 0.5$  を持つ [Feder, 1988] が、図 (2.8) に示す様な複数のブラウン運動によって構成されたランダム・カントール集合にはフラクタル性は存在しない。図 (2.9) は複数のブラウン運動によって  $Z_0$  軸上に構成されたランダム・カントール集合を P.D. 法を用いて解析した結果である。もはや直線部は存在せず、滑らかに変化している。これはゼロ交差における実験データの解析結果と同様であり、B.C. 法、P.D. 法より求まる次元が一致しなかったのは、ゼロ交差付近では等速度面が泡層の面組織を構成し、フラクタル性は打ち消されたと考えるのが妥当であろう。

ゼロ交差における等速度点集合の間隔の分布が本解析のように指数分布になるという報告 [Sreenivasan, 1983] もあれば、対数正規分布になるという報告 [Badri narayanan, 1977] もある。単位時間あたりのゼロ交差の回数  $N_0$  は、マイクロスケールや乱流中の整構造 (Fine-Structure)、そして渦度の分布と関連することが報告されている [Sreenivasan, 1983 : Badri narayanan, 1977]。ゼロ交差における等速度点間隔の確率分布を調べることによって、Sreenivasan は小スケールの渦と大スケールの渦では分布の形態が違ふことを示しているが、この時の小スケールの渦と大スケールの渦との境界が、式 (2.10) によって経験的に定義した  $\varepsilon_{max}$  に一致することは興味深い結果である。

### 2.3.3 フラクタル次元の変化

ゼロ交差付近を除いて、等速度点集合は明確なフラクタル構造を持っている。しか

し、そのフラクタル次元の値は一定ではなく、ゼロ交差から離れるに従って減少する。これは等速度界面が唯一のフラクタル次元を持つことに矛盾する様であるが、以下のように解釈される。

図 (2.10) はゼロ交差から離れた位置で、単一のフラクタル構造を持った等速度面の断面  $S$  を描いたものである。図は右上に示した図形 (ジェネレーター) をもとに構成されたフラクタル図形である [Feder, 1988]。

等速度面  $S$  のフラクタル次元 (ハウスドルフ次元) を  $dim_H(S)$  とする。任意の直線  $m$  と  $S$  との交点にできる等速度点集合  $S \cap m$  の次元  $dim_H(S \cap m)$  は、第 1 章で解説した様に、

$$dim_H(S \cap m) \leq \max\{0, dim_H(S) + dim_H(m) - n\}, \quad (2.17)$$

である。ただし、 $n$  は図形を含む空間の次元であり、

$$dim_H(m) = 1, n = 2, \quad (2.18)$$

となる [Falconer, 1990]。つまり、直線が等速度面とどの様に交差するかによって、たとえ等速度面が唯一のフラクタル次元を持つ構造であっても、等速度点集合のフラクタル次元は異なる。なお、前述のように凍結乱流の仮説を用いて集合  $S \cap m$  を集合  $B_{th}(t)$  と等価であると考えられる。

ゼロ交差付近では等速度面は泡層の面組織を構成し、フラクタル構造は打ち消されていたが、ゼロ交差から離れるにしたがって単一の等速度面が存在するようになる。そのため B.C. 法、P.D. 法によってフラクタル構造の存在を確認することができた。しかし、ゼロ交差から離れるに従って等速度面の存在する割合は少なくなり、等速度点集合も減少する。スケール変化の範囲が有限であることを考えれば、ゼロ交差から離れるほどフラクタル次元は小さな値を取るであろう。

乱流場に現れるフラクタル性の定性的な解釈は、大小様々なスケールの渦の幾何学的な構成と深い関わりを持つと考えられている [Mandelbrot, 1982]。大きな渦はやがて小

小さな渦へと崩壊し、小さな渦はさらに小さな渦へと崩壊する。この過程を自己相似的と考えるのである。それゆえ、乱流場のフラクタル性は最小渦と最大渦のスケール変化の範囲で存在するといえる。実際に B.C. 法、P.D. 法より求まるフラクタル次元が一致する領域においては、スケール変化の範囲は最大渦と最小渦の範囲に一致している。また、乱流場のフラクタル性は流れ場の種類によらず、普遍的に存在することが予測される。

### 2.3.4 等速度点集合と乱れエネルギー

流体力学的には速度変動そのものより変動エネルギーが重要であり、フラクタルとの関連について考察してみよう。

流れ方向の瞬時速度  $\tilde{u}(t)$  に対してその変動分を  $u(t)$  とする。瞬時の乱れエネルギーは  $u(t)^2$  となり、一般に乱れエネルギーと呼ばれるのはその平均値  $\overline{u(t)^2}$  である。ここで熱線より得られる速度信号を用いて、時間軸上の集合  $A(t)$  を以下のように定義する

$$A(t) = \{t \mid u(t)^2 \geq \overline{u(t)^2}\}, \quad (2.19)$$

図 (2.1.b) は  $y/\delta = 0.56$  における瞬時の乱れエネルギー  $u(t)^2$  を示している。図中に示された数居値は乱れエネルギー  $\overline{u(t)^2}$  であり、時間軸上の間欠的なパルスの位置が集合  $A(t)$  である。次に式 (2.13) の  $P$  を用いて数居値速度を以下のように表し、これより集合  $B(t)$  を定義する。

$$u_{th} = U(y) + P \times u', \quad (2.20)$$

$$B(t) = \{t \mid B_{th}(t), 1.5 \leq |P|\}. \quad (2.21)$$

つまり、集合  $B(t)$  は B.C. 法より求まるフラクタル次元と、P.D. 法より求まるフラクタル次元がよい一致を示す等速度点集合の全体を示す。集合  $A(t)$  と  $B(t)$  の包含関係は式 (2.19)、(2.20)、(2.21) より、

$$B(t) \subset A(t), \quad (2.22)$$

となる。図 (2-11) は集合  $A(t)$  に対して、先に述べた B.C. 法を用いてフラクタル性を解析した結果の一例である。グラフには明確な直線部が存在し、集合  $A(t)$  はフラクタル構造を持つことがわかる。横軸上の矢印は各々  $\varepsilon_{max} = \tau_l$ 、 $\varepsilon_{min} = \tau_k$  とし、破線部の傾きがフラクタル次元  $D_d$  である。なお、相関係数はほとんどの場合が  $-1$  であった。乱れエネルギーの分布がフラクタルになることは理論的には導かれてはいないし、著者らの知る限りこの結果を使った乱流モデルもない様である。速度変動の分布を考えれば、集合  $A(t)$  は壁近くのバースト発生領域では複雑な構造を持っているであろう。つまり、バーストは半秩序を持つとしても発生した乱れ構造は複雑である。その複雑さはフラクタル次元によって定量的に見積られる。図 (2.12) に示すように、集合  $A(t)$  のフラクタル次元は壁近くで大きな値をとり、外縁にいくにしたがって減少していく。

### 2.3.5 四象限分割法に基づく統計量

数居値パラメータ  $P : |P| \geq 1.5$  によって定義される等速度点集合はフラクタル構造を持ち、乱れエネルギー領域のフラクタル性と関連していることを明らかにした。乱れエネルギーの生成に重要なのはレイノルズ応力であるから、等速度点集合のフラクタル性とレイノルズ応力とは何らかの関係を持っていることが予測される。この様な観点から四象限分割法によって、より詳細な解析をおこなった。瞬時レイノルズ応力と等速度点集合のフラクタル性の関係を論じる前に、本境界層におけるレイノルズ応力及びそれに関する統計量の分布が妥当なものであるかを調べる必要がある。

図 (2.13) は相関係数  $-\overline{uv} / u'v'$  を縦軸に、壁からの距離を横軸にして示してある。境界層外縁を除いてほぼ一定の値をとっている。図中に Lu & Willmarth[1973] の値を示した。なお、この一定値に対しては、今までに 0.48 (Townsend)、0.5 (Klebanoff) などが報告されている [Lu, 1973]。図 (2.14) は四象限分割を用い、前図で示したレイノルズ応力への各象限からの寄与を、 $H = 0$  として示す。境界層全体を通じて、二象限からの寄与が最も多い。 $y/\delta < 0.5$  の領域では、二象限及び四象限からの寄与はほぼ同じ程度であるが、

それより外縁では四象限からの寄与は減少する。二象限からの寄与が間欠領域で増加するのは、低速流体塊の通過が顕著になるからである。一象限と三象限からの寄与は少なく、境界層中ではほぼ一定の値である。

図(2.15)は、各  $y/\delta$  の位置におけるレイノルズ応力への各象限からの寄与を、ホールサイズをパラメータとして示したものである。 $H$ が増加すれば、各象限からの寄与は減少する。特に一象限と三象限からの寄与は急激に減衰する。四象限からの寄与も  $y/\delta$  が小さなところでは優勢であるが、外縁では殆ど二象限からの寄与である。つまり、間欠領域では低速流体塊 ( $u < 0, v > 0$ ) の通過が、レイノルズ応力の生成に大きく関わっている事がわかる。

以上の解析結果を過去の研究 ([Lu, 1973 : Raupach, 1981 : 大坂, 1987a, 1987b]) と比較し、本境界層はレイノルズ応力による条件付け解析をおこなうのに妥当であると判断できる。

### 2.3.6 等速度点集合と瞬時レイノルズ応力の関連

等速度点集合を瞬時レイノルズ応力で条件づけて考える。即ち、 $i$  象限に含まれる等速度点集合を、

$$B_{th}(t, H')_i \equiv B_{th}(t) \cdot S'_i(t, H'). \quad (2.23)$$

ただし、定義関数は

$$S'_i(t, H') = \begin{cases} 1 & : |\overline{uv}| > H' \cdot |\overline{uv}| \text{ で } i \text{ 事象の場合,} \\ 0 & : \text{Otherwise.} \end{cases} \quad (2.24)$$

とする [Raupach, 1981]。式(2.15)との相違は、瞬時のレイノルズ応力が、時間平均の何倍になるかを考えている点である。式(2.24)による定義の方が相対的な評価がしやすく、以後の解析では  $H'$  をパラメータとして用いる。勿論、 $\sum_i B_{th}(t, H')_i / B_{th}(t) = 1$  である。等速度点集合  $B_{th}(t, H' = 0)_i$  のフラクタル性の解析には P.D. 法を用いた。図(2.16)にその結果の一例を示す。グラフが示すとおり二象限と四象限の等速度点集合にはフラクタル

性が存在するものの、一象限と三象限のグラフには直線部が存在せず、フラクタル性は見られない。つまり、瞬時レイノルズ応力が正の領域に含まれる等速度点集合にのみ、フラクタル性が存在すると言える。この結果は  $y/\delta$  の位置によらず、 $|P| \geq 1.5$  を満たす等速度点集合全てについて成り立っていることを確かめた。以後の解析ではフラクタル構造を持つ第二及び第四象限内の等速度点集合にのみ限って解析をおこなう。パラメータ  $P < 0$  は第二象限、 $P > 0$  は第四象限を各々示す。

等速度点集合  $B_{th}(t)$  にフラクタル性が認められた (図 (2.3)) のは、式 (2.23) によって定義された第二、第四象限内の等速度点集合のフラクタル性が主に反映した結果である。しかし、集合  $B_{th}(t)$  は第一、第三象限内の等速度点集合も含んでいるため、そのフラクタル次元の値は多少大きくなる (第3章参照)。このことは例えば、集合  $E$  のハウスドルフ次元を  $dim_H(E)$  とすると、第1章で説明した性質 (単調性) によって解釈されよう [Falconer, 1990]。

$$E \subset F \quad \text{ならば} \quad dim_H(E) \leq dim_H(F). \quad (2.25)$$

しかし、この厳密な数学の話がここでの解析結果の様に有限スケールでの話にどこまで成り立つかは、今のところまだ明確には示されていない。この問題については、後の機会に報告をおこなう。

図 (2.2)、(2.16) において直線部 (即ちフラクタル構造が存在する範囲) が、横軸上に立てられた矢印  $l_{min}$  よりも小さな領域にまで成立する傾向にある。これは、本解析における  $\tau_k$  の見積り (等方性と凍結乱流仮説によって、流れ方向の瞬時速度のみから求めた) が十分に正確ではないことと、横軸が対数スケールであるためその差異が顕著に表れたことによる。しかし、この直線領域が成立する最小スケールから、逆にコルモゴロフ・スケールを評価することも可能である。仮に図から直線部が存在する最小スケールを  $-0.2$  とすると、 $\tau_k \sim 10^{-0.2} \sim 0.63 (msec)$  となる。これを空間スケール  $\eta_k = (\tau_k \cdot \nu)^{1/2}$  に換算すると  $\eta_k \sim 0.95 (mm)$  であるが、この値の妥当性について考察してみよう。

格子乱流中における実験の測定結果によると、基準レイノルズ数  $Re = U_0/\nu$  が

0.066 ~ 0.466 × 10<sup>6</sup>の範囲で  $\eta_k$  は 0.16 ~ 0.82 (mm) である [蒔田, 1988]。本実験の基準レイノルズ数が 0.38 × 10<sup>6</sup>であることを考えると、フラクタル的な観点から見積もった  $\eta_k \sim 0.95$  (mm) は妥当な値と考えられる。ただし、これらのスケールは熱線の空間分解能を考えると、もはや余り詳細な議論をする事は難しいと言わざるを得ない。

図 (2.17) はパラメータ  $P$  を一定に保って、ホールサイズを変化させた場合のフラクタル次元の変化である。第二象限のフラクタル次元は外縁に向かって緩やかに減少していく。一方第四象限の値は、間欠領域で急激に減少し、外縁で再び増加する。これは、図 (2.14)、(2.15) からわかる様に  $y/\delta > 0.5$  では、第四象限のレイノルズ応力への寄与が少なくなることに対応している。ホールサイズを大きくしても、次元があまり変化しないのは、フラクタル構造を持つ等速度点集合が瞬時レイノルズ応力の大きな領域に含まれている事を示している。この傾向は二象限及び四象限いずれについても言える。

次に測定点を固定し、パラメータ  $P$  を変化させたときの結果を二つの測定点 ( $y/\delta = 0.1, 0.7$ ) について図 (2.18) に示す。横軸は  $P$  の絶対値である。 $P$  の絶対値が等しい二つの等速度点集合は、式 (2.13) より明らかな様に、レイノルズ分解したときの変動速度の大きさが等しい第二、第四象限内の集合を意味する。この時、フラクタル次元は  $P$  の値の増加とともに減少する。これは、大きな変動速度を持った等速度点集合ほど構造が複雑でないことに対応する。どの  $P$  の値に対しても、二象限における等速度点集合の方が大きな値を持っている。間欠領域 ( $y/\delta = 0.7$ ) においては第四象限のフラクタル構造は少なく、ほとんどが第二象限である。

以上の解析は、フラクタル構造を持つ等速度点集合 (即ち、 $|P| \geq 1.5$ ) にのみ限って解析をおこなったが、フラクタル性を明確に認められなかった等速度点集合 (即ち、 $|P| < 1.5$ ) についても考察を試みる。前節では、この二種の等速度点集合を区別するために、B.C. 法と P.D. 法を併用してフラクタル次元の変化を比較すれば良いことを示した。フラクタル構造を持つ等速度点集合が、大きな瞬時レイノルズ応力を持つことが明らかになったので、この結果を利用して等速度点集合を分離することができる。図 (2.19) は数



居値速度  $u_{th}$  を一定にし、高さを変えた場合の等速度点集合のフラクタル次元を示す。図中の点線はこの一定数居値速度が、局所平均速度に等しくなる  $y/\delta$  の位置を示している。ホールサイズの変化に対して、局所平均速度付近のフラクタル次元は大きく変化する。これは前節の研究からも明らかのように、等速度点集合のフラクタル構造が明確にならない領域である。つまり、瞬時レイノルズ応力による条件付けによっても、フラクタル構造を持つ等速度点集合を分離できることが分かる。

等速度点集合のフラクタル性が、瞬時レイノルズ応力の生成に関わる事は、現象論的には壁近くのバーストや間欠領域の整構造と何らかの関係を持つ事を示唆する。何故なら、VITA 法によって抽出されるバースト現象や、境界層内に人工的に作った馬蹄形渦においてはレイノルズ応力の生成が活発である事が、既に確認されているからである [Lu, 1973 : 蒔田, 1989]。

次章では等速度点集合のフラクタル性と整構造やバーストの関係について報告する。

## 2.4 結言

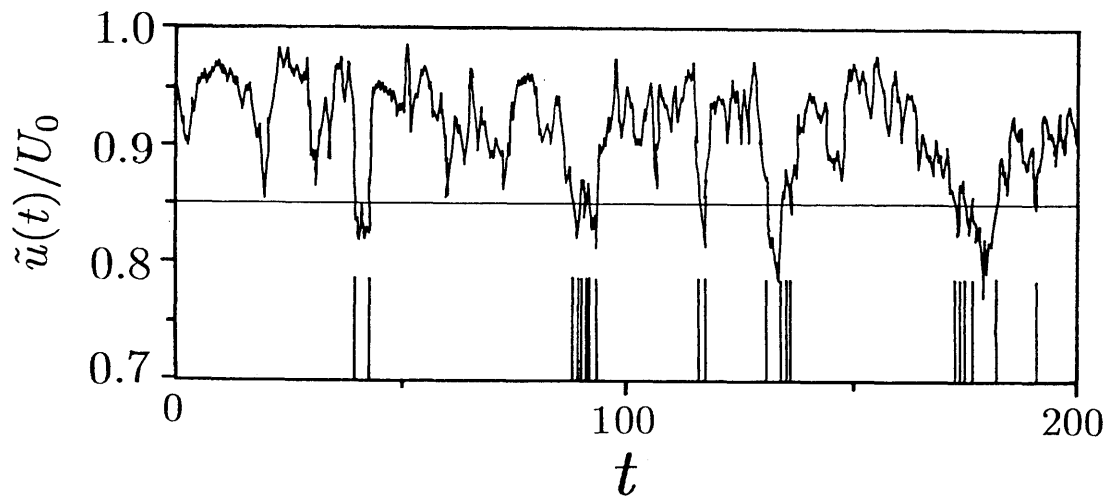
乱流境界層における等速度点集合のフラクタル性を解明するため、以前の研究では明確にされていなかったフラクタル構造の存在する領域（自己相似性が成立するスケール変化の範囲）を決定し、解析をおこなった。解析法としては B.C. 法及び P.D. 法の二種類を併用することを試みた。

また、瞬時レイノルズ応力によって条件付け解析をおこない、等速度点集合との関係を明確にした。これによって従来不足していた乱流のフラクタル性と力学特性の関連の一つを明らかにすることができた。

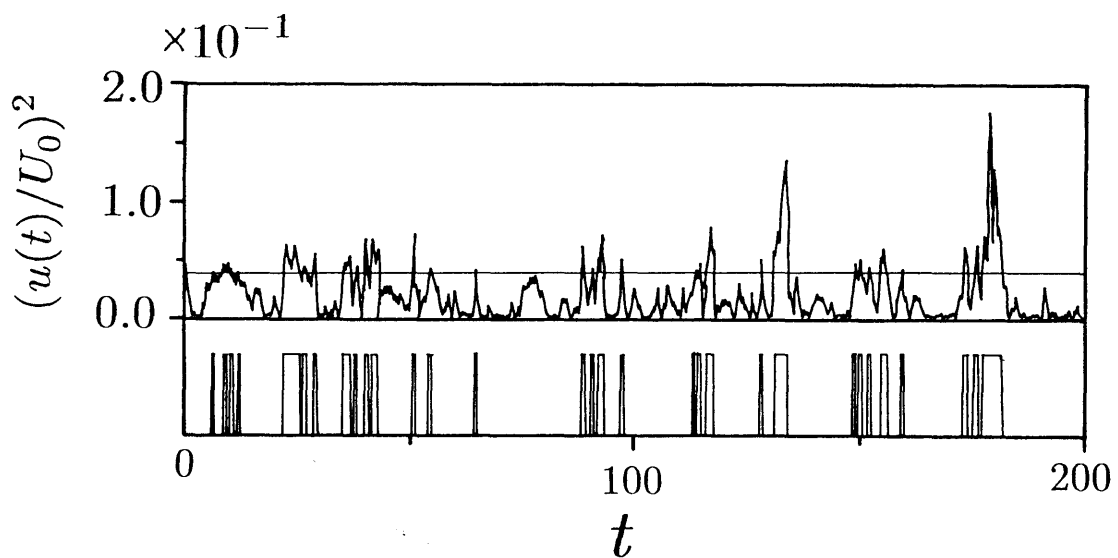
- (1) 乱流境界層内における等速度点集合は、局所平均速度付近を除いて、コルモゴロフ・スケール  $\tau_k$ （時間）と最大渦のスケール  $\tau_\ell$ （時間）の範囲内で明確にフラクタル構造を有し、そのフラクタル次元  $D$  は  $D \leq 0.40$  と見積られる。本方法で求めた等速度点集合のフラクタル性は、区分長さには依存しない。これに対し局所平均速度付近では、等速度点集合にフラクタル性は確認されない。
- (2) 瞬時の乱れエネルギーが、その平均値よりも大きな値を示す集合  $A(t)$  にはフラクタル構造が存在する。明確なフラクタル構造を有する等速度点集合は集合  $A(t)$  にすべて含まれており、乱れエネルギー領域のフラクタル性は等速度点集合のフラクタル性と密接に関係している。集合  $A(t)$  のフラクタル次元は、壁近くのバースト発生領域で最も高く、外層にいくに従って減少する。
- (3) 等速度点集合は式 (2.6) により流れの力学と関係する。
- (4) フラクタル構造を持つ等速度点集合は、瞬時レイノルズ応力が正となる領域、つまり第二象限と第四象限に含まれる。この結果はホールサイズ  $H'$  を 0,1,2 と変化させても変わらない。
- (5) 敷居値パラメータ  $P$  の絶対値を等しくして得られる二組の等速度点集合は、第二象限に含まれる等速度点集合の方がフラクタル次元が大きい。式 (2.6) の解にはフラクタル

ル構造を持つものがあることが実験的に示されたことになる。

- (6) フラクタル構造を持たない局所平均速度付近の等速度点集合は、レイノルズ応力による条件付きをおこなうことによって、フラクタル構造を持つ等速度点集合から分離できる。



(a) 瞬時速度波形及び等速度点集合



(b) 瞬時乱れエネルギー領域の分布

図 (2.1) 乱流境界層における流れ方向瞬時速度および瞬時乱れエネルギー波形 ( $y/\delta=0.56$ )

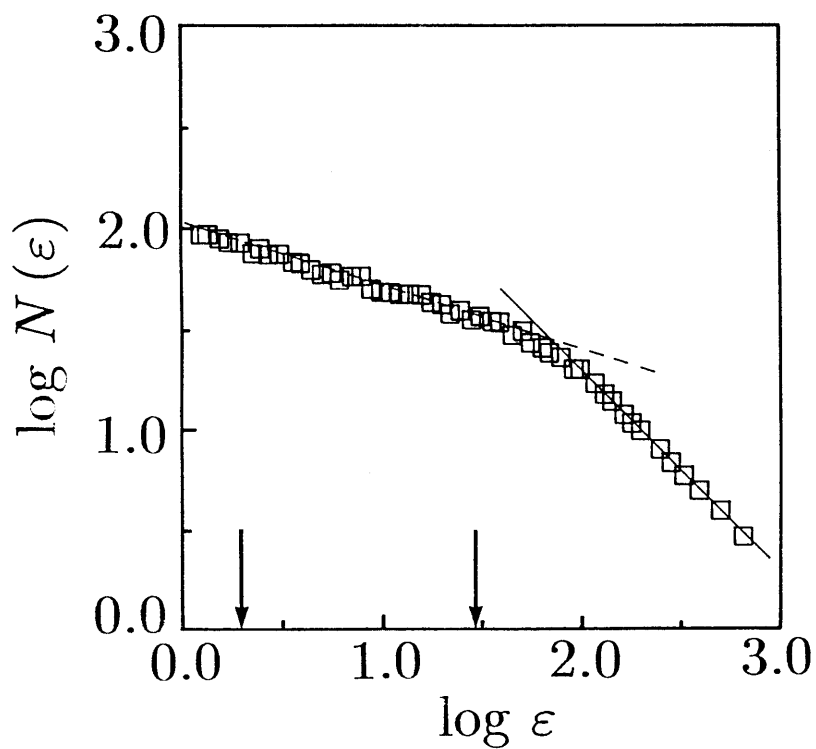


図 (2.2) B.C. 法の解析例 ( $y/\delta = 0.70, TH = 0.86$ )

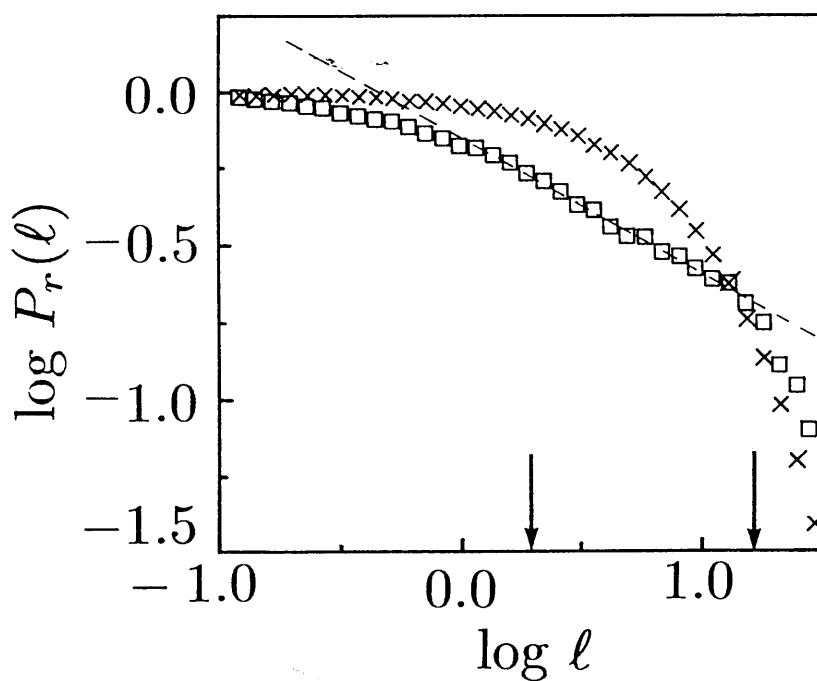


図 (2.3) P.D. 法の解析例  
( $y/\delta = 0.70, TH = 0.88$ , □ : Experiment, × : Poisson Process)

表 (2.1) フラクタル次元と区分長さの関係

	<i>Segment</i>	<i>D</i>	<i>R</i>
□	200 ( <i>ms</i> )	0.44	-0.97
○	600 ( <i>ms</i> )	0.45	-0.99
△	1000 ( <i>ms</i> )	0.43	-0.99
+	1400 ( <i>ms</i> )	0.43	-0.99
◇	2200 ( <i>ms</i> )	0.43	-0.99

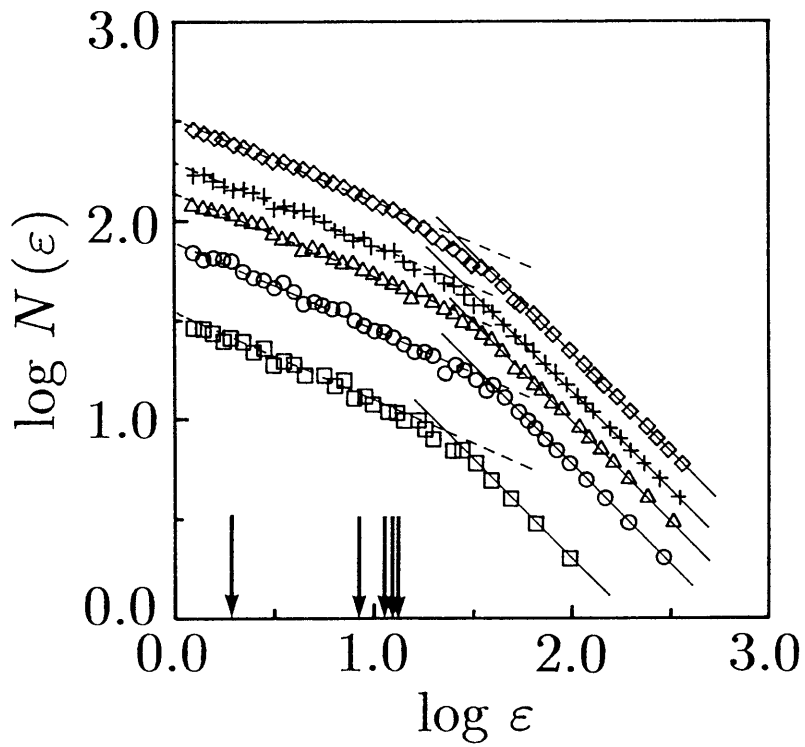
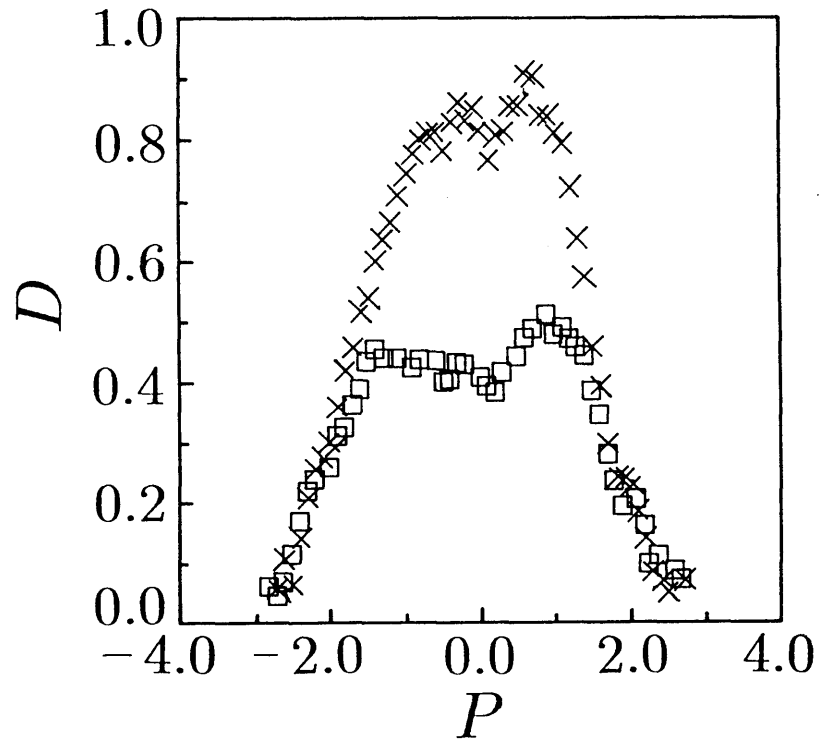
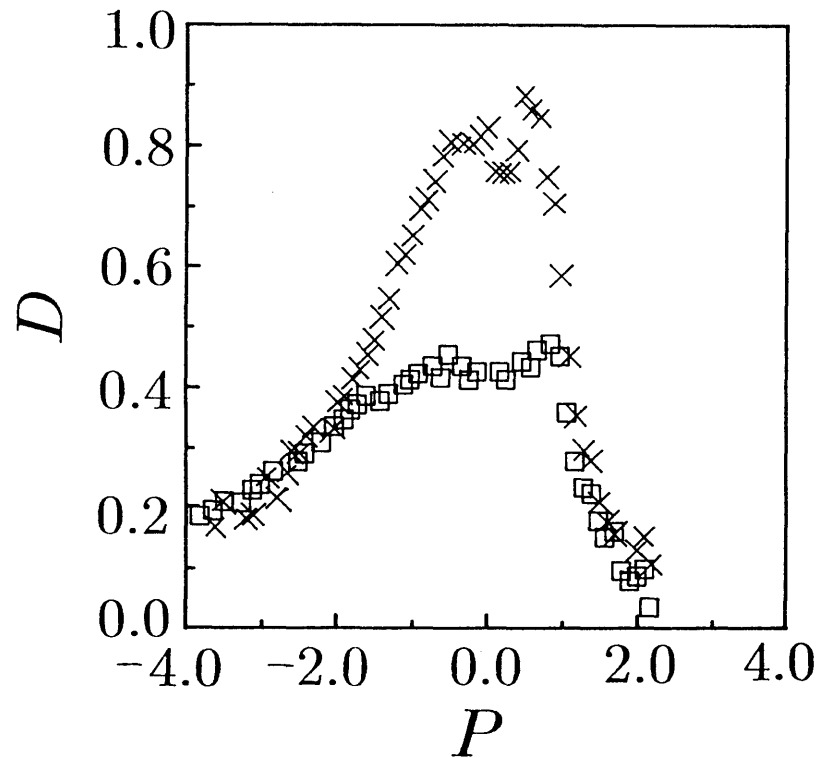


図 (2.4) フラクタル次元と区分長さの関係



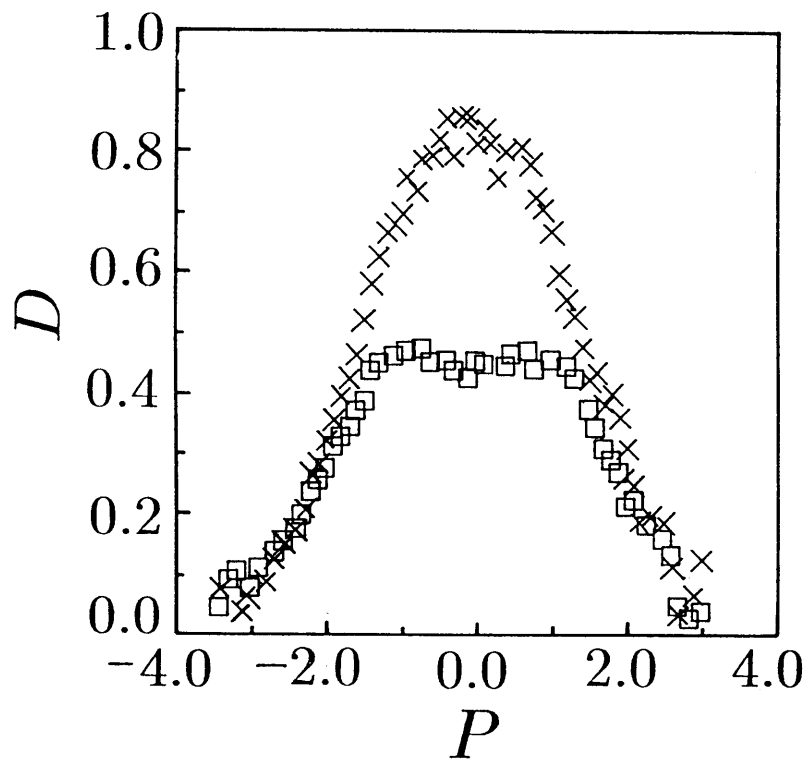
(a) 粘性底層付近 :  $y^+ = 21.8$



(b) 対数法則領域 :  $y^+ = 104.5$

図 (2.5) 敷居値パラメータ  $P$  を変化させたときの B.C. 法、P.D. 法より求まるフラクタル次元の比較

[□ : B.C. Method, × : P.D. Method]

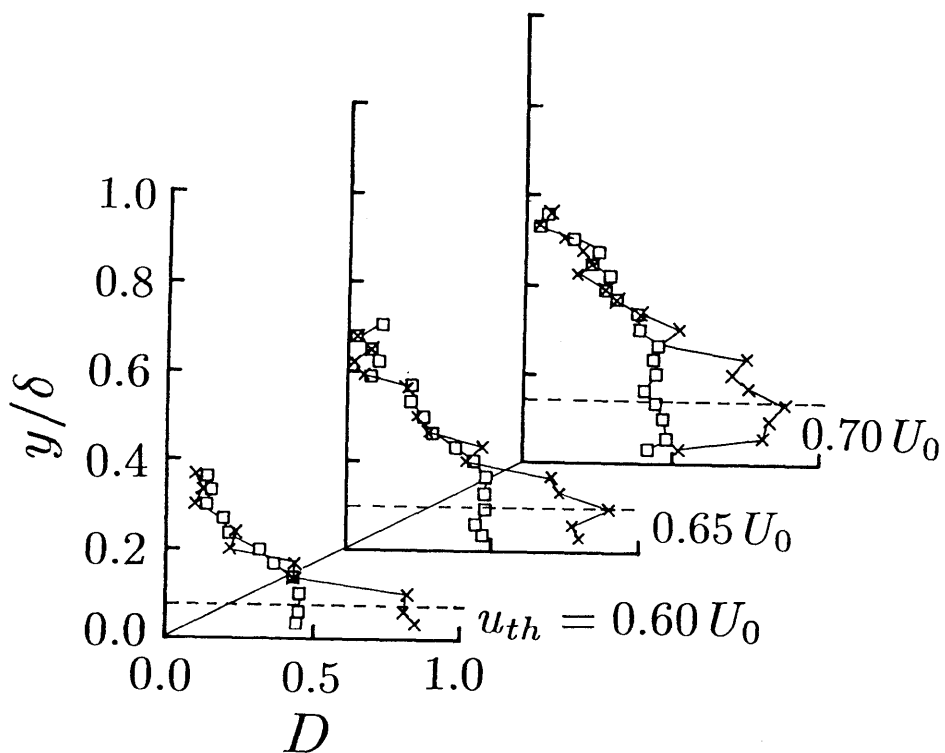
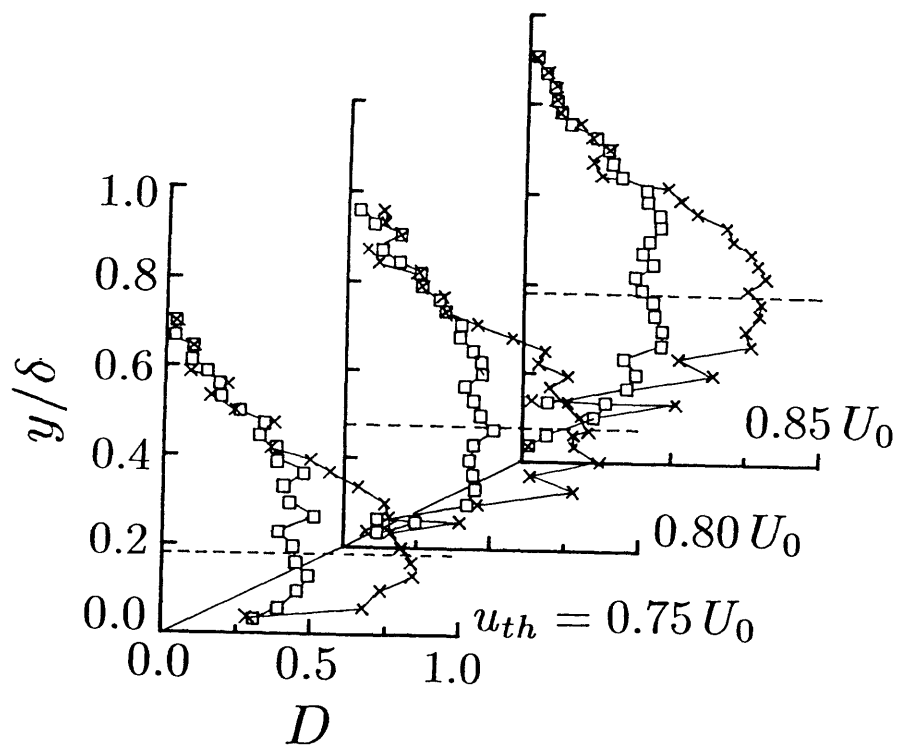


(c) 外層 :  $y^+ = 436.7$

図 (2.5) 敷居値パラメータ  $P$  を変化させたときの B.C. 法、P.D. 法より求まるフラクタル次元の比較

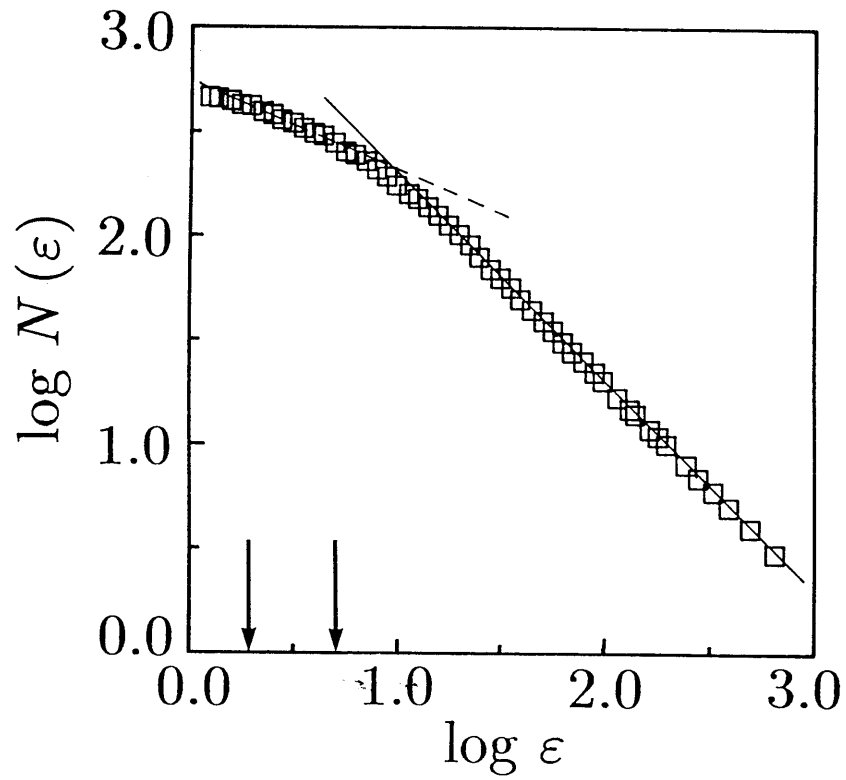
[□ : B.C. Method, × : P.D. Method]





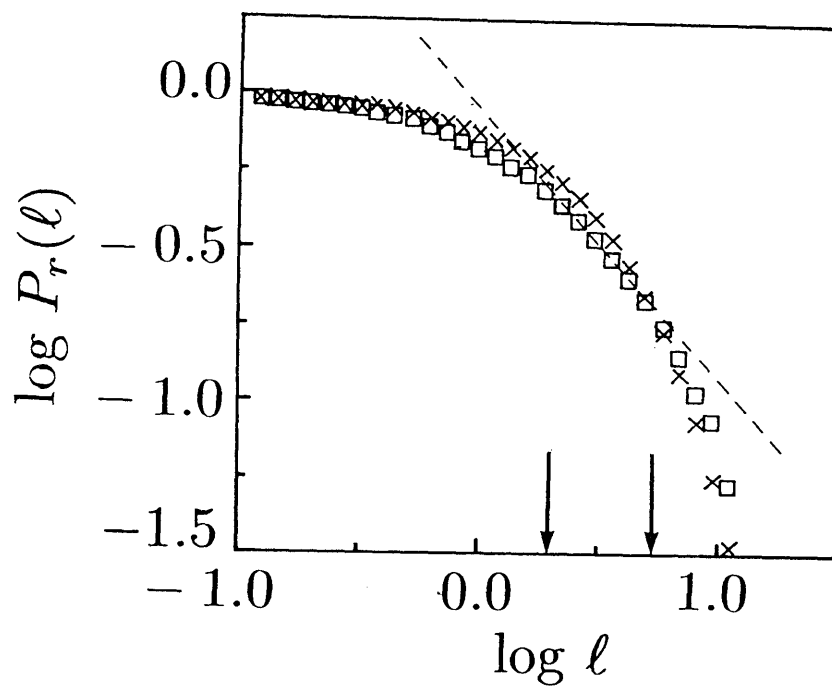
図(2.6) フラクタル次元の空間的な変化, 図中の波線は数居値速度が局所平均速度に等しくなる  $y/\delta$  の位置を示す

[□ : B.C. Method, × : P.D. Method]



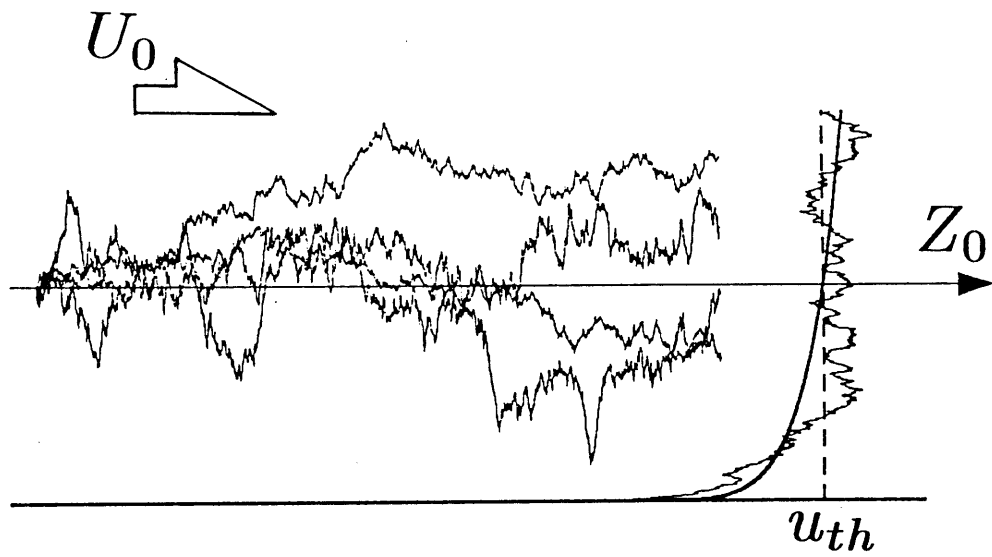
(a) ゼロ交差における B.C. 法の解析結果. 波線は横軸上の矢印の範囲で、最小二乗法から計算された直線. 実線は傾き-1の直線

図 (2.7) ゼロ交差におけるフラクタル次元の解析例 ( $y/\delta = 0.42$ )



(b) ゼロ交差における P.D. 法の解析結果. 波線は横軸上の矢印の範囲で、最小二乗法から計算された直線  
 [□: P.D. Method, ×: Poisson Process]

図 (2.7) ゼロ交差におけるフラクタル次元の解析例 ( $y/\delta = 0.42$ )



図(2.8) ゼロ交差付近の等速度面の概念図

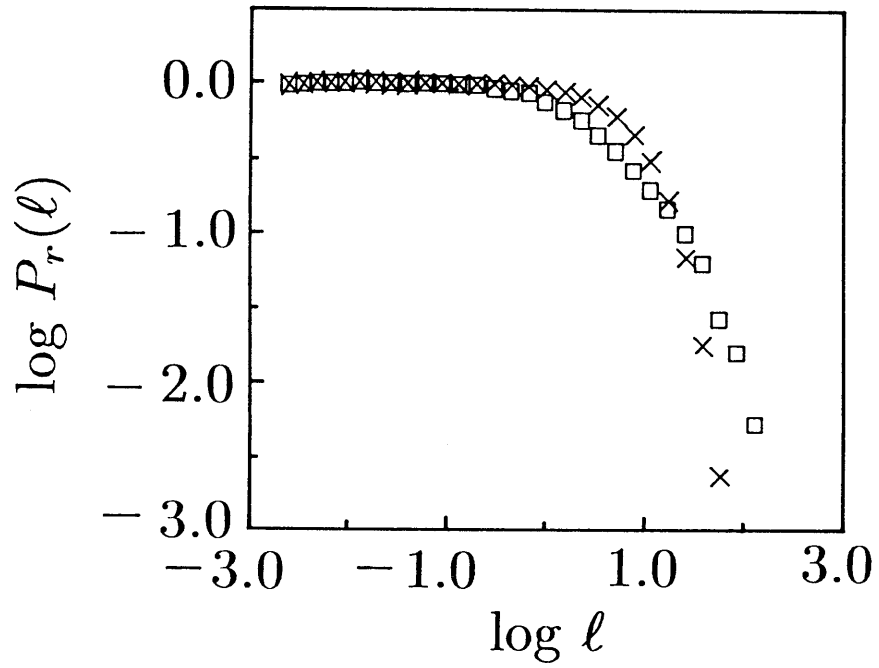


図 (2.9) 複数ブラウン曲線の P.D. 法による解析例  
 [□ : Brown Motion, × : Poisson Process]

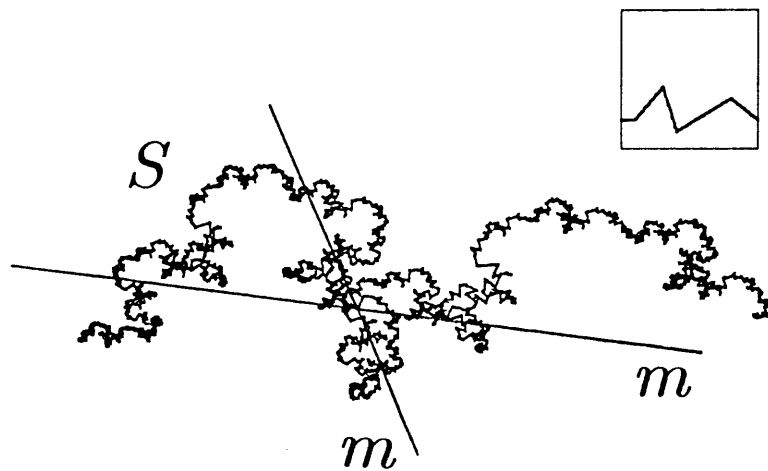


図 (2.10) 等速度面の概念図及びジェネレーター

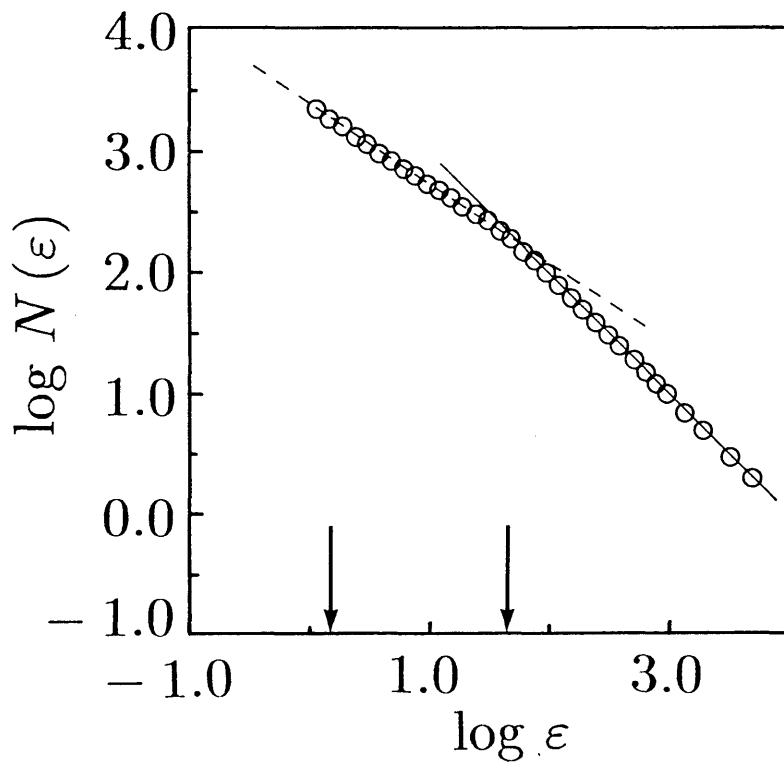


図 (2.11) 乱れエネルギー集合  $A(t)$  に対する B.C. 法の解析例  
 ( $y/\delta = 0.78$ )

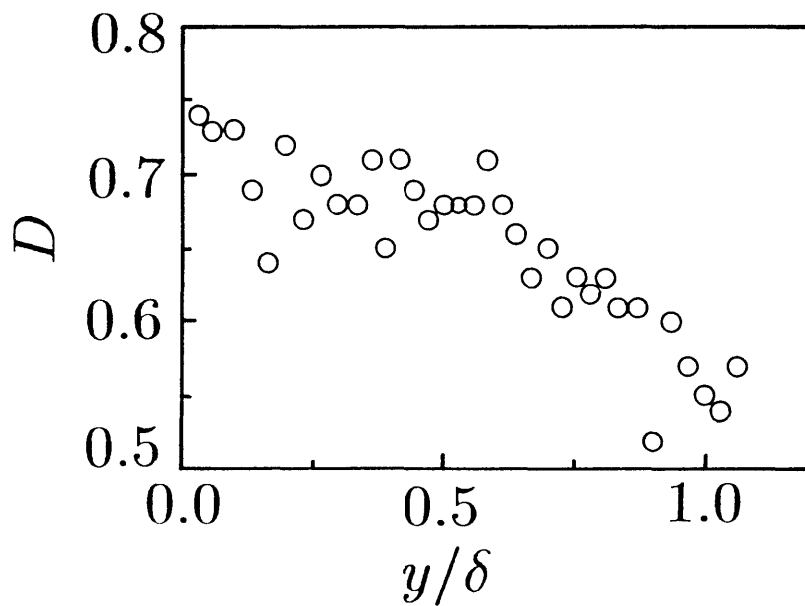


図 (2.12) 乱れエネルギー集合  $A(t)$  のフラクタル次元の  $y$  方向変化

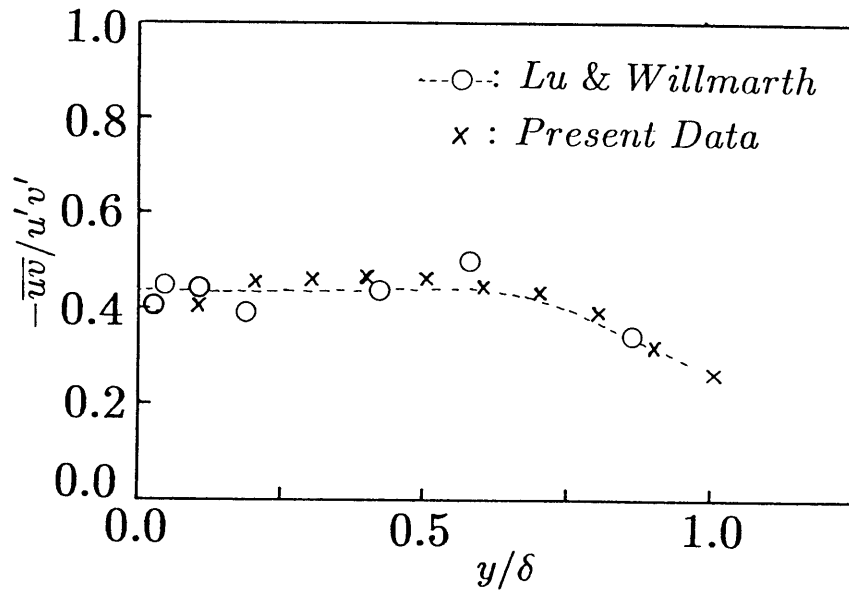


図 (2.13) 境界層中のレイノルズ応力の分布

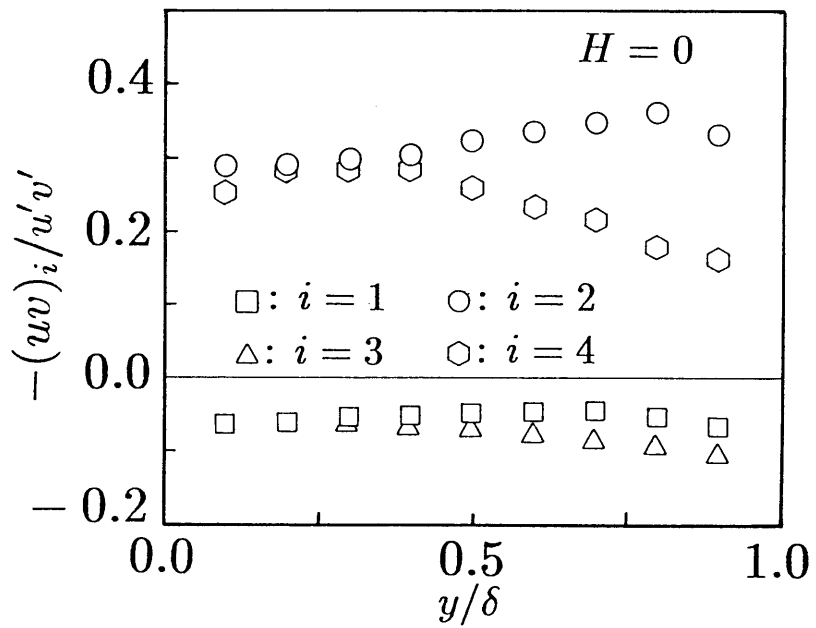


図 (2.14) ホールサイズをゼロにしたとき、各象限における瞬時レイノルズ応力の集合平均

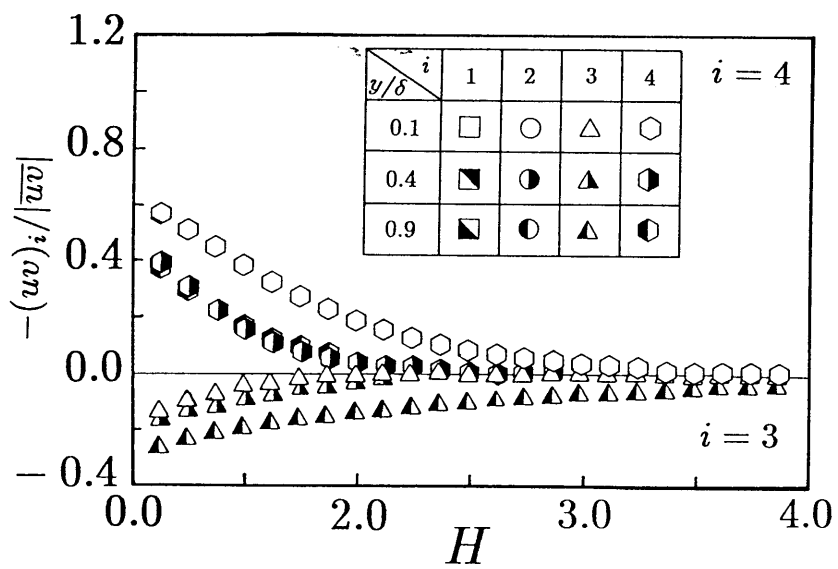
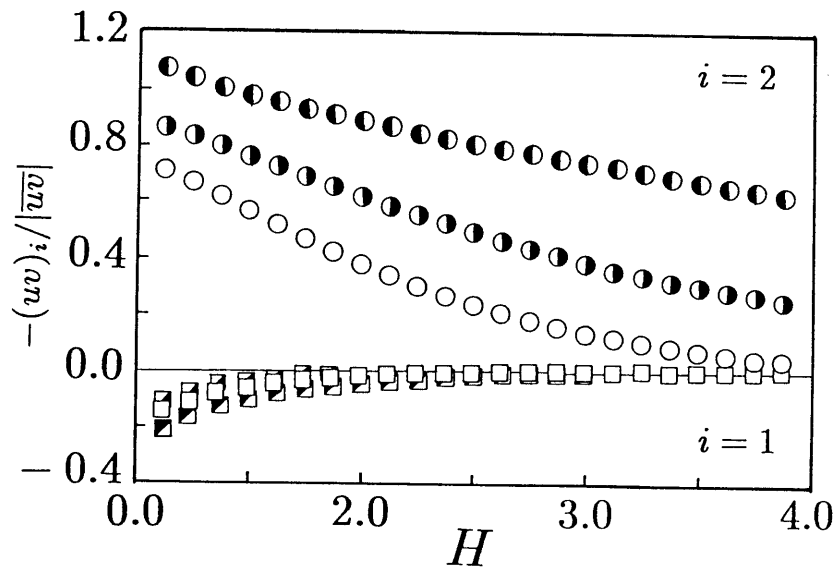


図 (2.15) ホールサイズをパラメータにしたときの、各象限におけるレイノルズ応力への寄与の大きさ



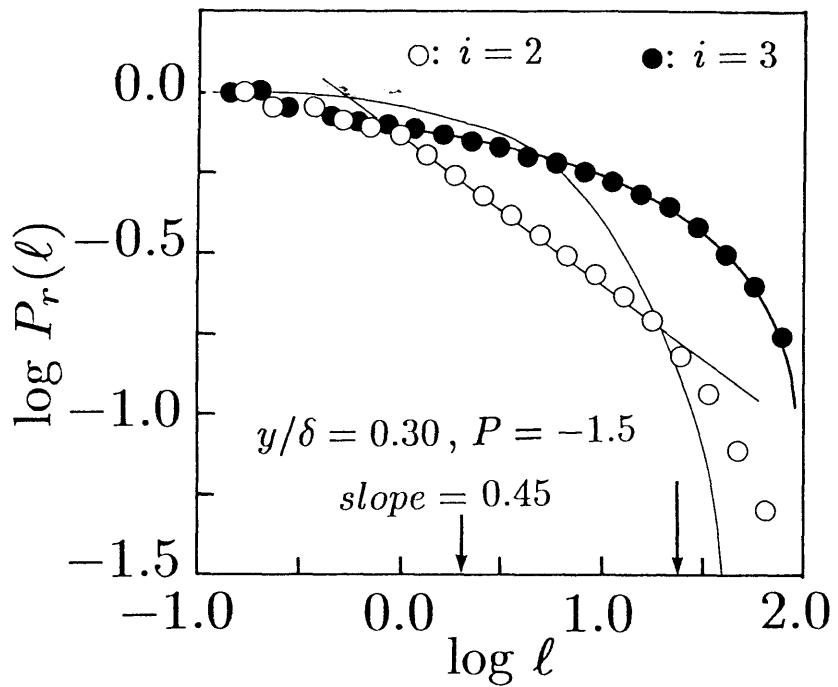
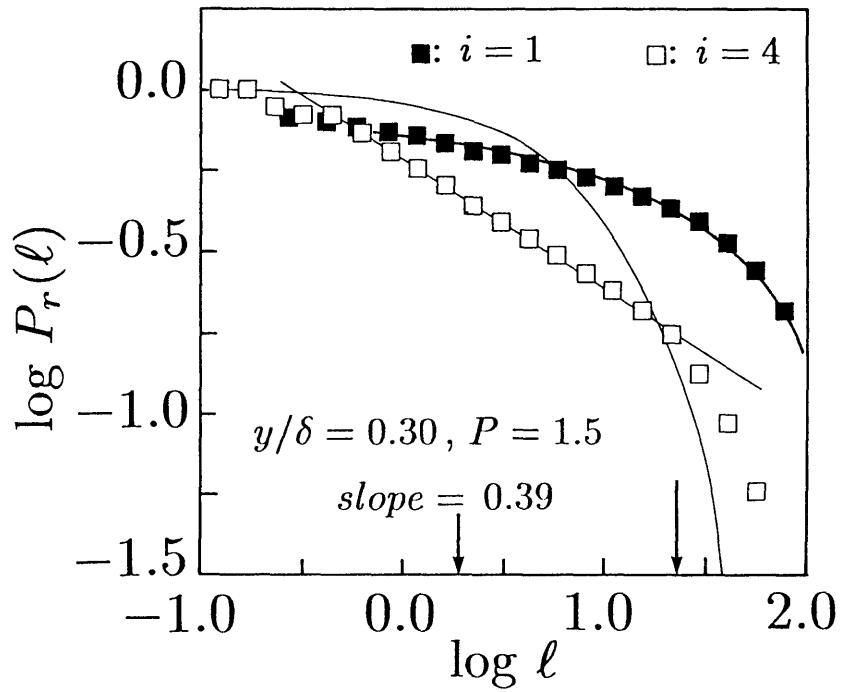


図 (2.16) 各象限内における等速度点集合の P.D. 法による解析例. 実線はポアソン分布、 $i$  は各象限を示す ( $H' = 0$ )

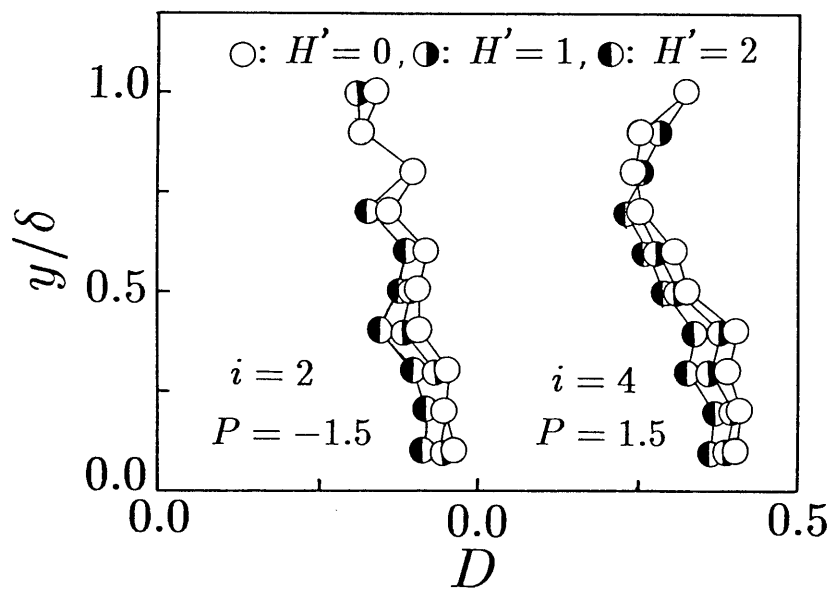


図 (2.17)  $P$ を一定に保ったとき、フラクタル次元の境界層中の変化

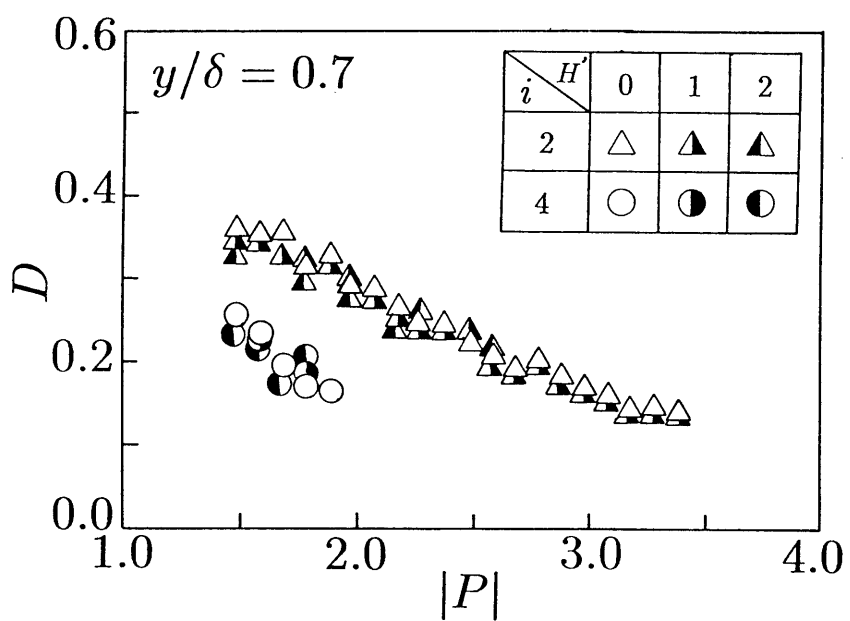
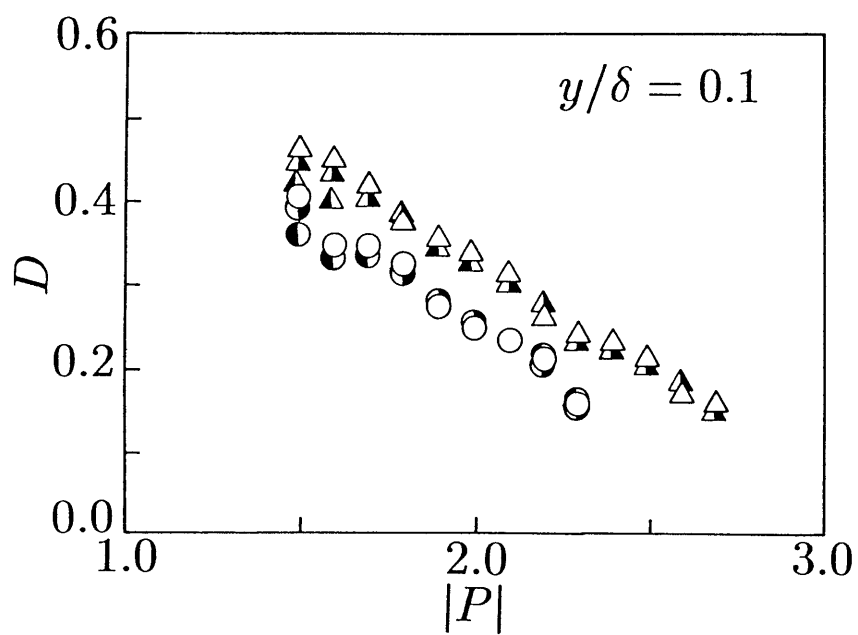


図 (2.18)  $P$  の変化に対する第二、第四象限内のフラクタル次元の変化

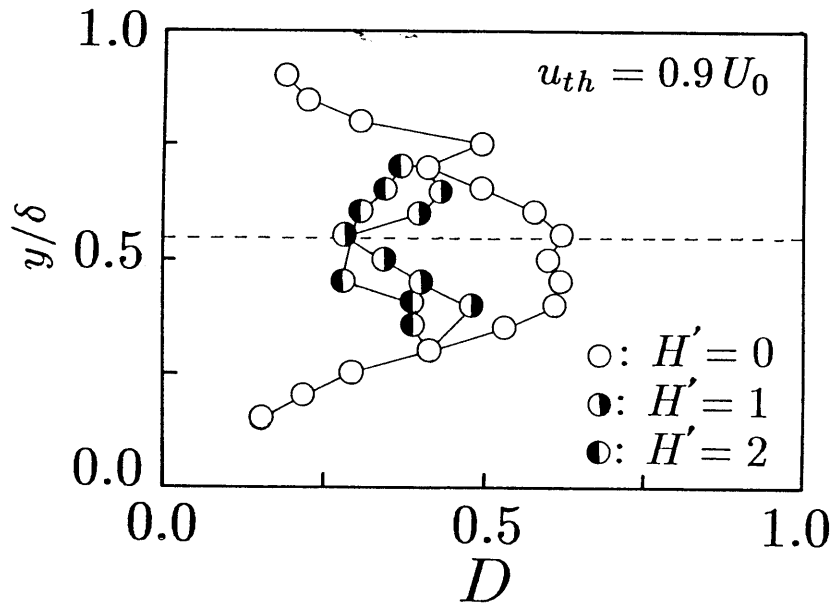
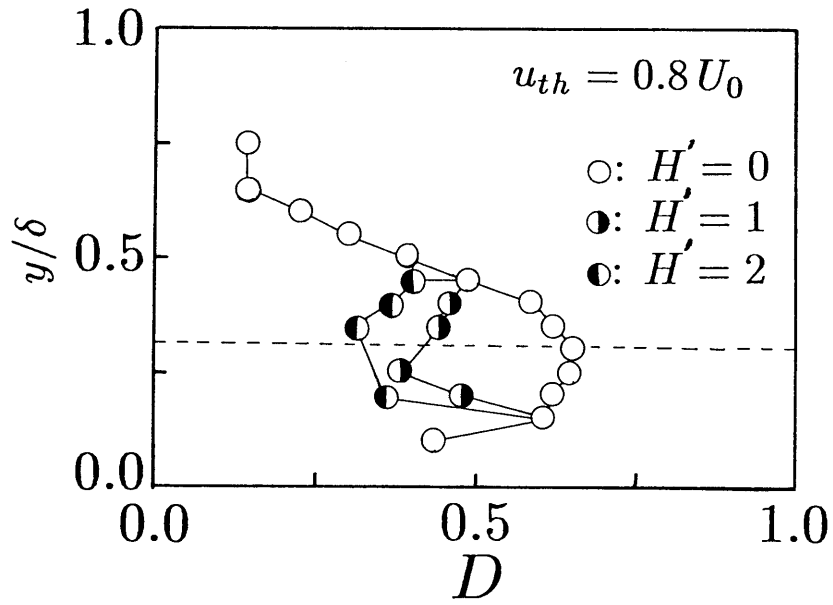


図 (2.19) 敷居値速度を一定にして、壁からの距離を変えたときのフラクタル次元の変化. レイノルズ応力による条件つき解析

## 第3章 乱流境界層壁近傍におけるバースト構造のフラクタル性

[中村, 1992b,1993 : 辻, 1992b,1992d]

### 3.1 緒言

乱流境界層中で測定された速度信号から抽出される、ある一定の速度を持つ点集合は等速度点集合と定義される。前章ではこれについてその構造を調べてきた。等速度点集合は、局所の平均速度付近を除きフラクタル構造を有する。そのフラクタル次元はおおよそ  $D \leq 0.4$  であり、境界層中の物理量としては瞬時レイノルズ応力に最も関連するという重要な性質がある。すなわち四象限分割法において、瞬時レイノルズ応力が正となる第二、第四象限にのみ、フラクタル構造を持つ等速度点集合は含まれている。

乱流境界層壁近くにおいては、レイノルズ応力の活発な生成機構が存在し、壁近くの低速流体が内層方向へ放出されたり、主流の高速流体が壁近くへと流れ込んでいる。この一連の過程を一般にバーストと呼ぶ。また、前者を特にエジェクション、後者をスィープと呼ぶこともある。しかし、多くの研究にもかかわらず、これらの現象に対して明快な解釈は今のところ存在しない。研究者や方法が異なれば、得られる肖像も異なる傾向にあるようである [Cantwell, 1981 : Robinson, 1991]。

本解析では特に境界層中の壁近くの領域 ( $y^+ < 100$ ) に注目し、等速度点集合のフラクタル性が、これらレイノルズ応力生成機構といかに関わるかを条件付け平均により解析した。バースト現象の抽出には、VITA 法 [Blackwelder, 1976,1983] と四象限分割法 [Lu, 1973] を用いた。これらの検出方法では、多くのパラメータの値を設定しなければならない。どのような値をとるかによって、抽出される現象も多少異なる。しかし、この点については明確な基準はなく、本解析では過去の研究で最も良く用いられる基準を代表として採用し、解析をおこなった。バースト検出には各種の方法があるが、本論文中で用いられるバーストという言葉は、VITA 法で抽出される現象及び四象限分割法で第二象限により抽出される現象を示すこととする。ただし、特に低速流体の放出及び高速流体の流

れ込みの過程を一つの現象として扱う時には、エジェクション、スweepという言葉を用いた。

等速度点集合のフラクタル性とバーストとの関連とは別に、バースト現象そのものの分布特性を調べた。VITA 法及び四象限分割法における定義関数が、バーストの大きさを含めた分布を表すと考え、その統計的性質をパワースペクトル等を用いて解析し、フラクタル的な観点から考察を試みた。

乱れエネルギーはカスケード過程を経て、最終的には熱エネルギーへと変換される。散逸場は当初、空間的に一様かつ等方と考えられてきたが、その後の実験から、散逸率は空間的に一様ではなく、局所的に高い散逸が集中する間欠的な分布を示すことが明らかになっている（この分野の明快なレビューは、文献 [山田, 1987] に詳しい）。対数正規分布モデル [Kolmogorov, 1962] や、 $\beta$ モデル [木田, 1987]、マルチフラクタルモデル [Frisch, 1985] 等は間欠的な分布を再現するために考案されたモデルである。本章では散逸率の分布を特徴づけるため、あえてこれらのモデルを用いた考察はおこなわず、より平易な方法でも十分に散逸場の間欠性をとらえられることを示す。すなわち、ある数居値以上を持つ高い散逸率を示す領域を分離し、数居値の変化に応じてその分布が自己相似的な構造を持つことに注目してフラクタルを用いて定量化した。また、前章で考察した様に境界層壁近傍においては、スweepとエジェクションが乱れの生成の大半を担っている。両者と散逸領域との関わりは興味ある課題であり、本章ではそれについての考察をおこなった。

バースト過程の抽出には、VITA 法と四象限分割法を用いた。しかし、いずれの方法も任意的パラメータを含み、その値によって抽出される構造も異なり、普遍的な議論をおこなうことは困難であった。そこで、バースト抽出法としてきわめて任意性を含む割合が少ない K.L. 展開 (*Karhunen - Loève Expansion*) によってバーストを抽出し、バースト構造および VITA 法との関わりについて考察した。K.L. 展開は経験的直交展開とも呼ばれ、流体力学への応用は Lorenz や Lumley によって最初になされた。最近ではバーストの低自由度モデルを構築するうえで用いられている [Moin, 1989, Sirovich, 1987]。

### 第3章で用いた主な記号

$\tilde{u}$  : 流れ方向瞬時速度

$U_0$  : 層外主流平均速度

$U(y)$  : 流れ方向局所平均速度

$u$  : 流れ方向変動速度

$v$  : 垂直方向変動速度

$u'$  : 流れ方向変動 *r.m.s.* 値 ( $u_{rms}$ )

$v'$  : 垂直方向変動 *r.m.s.* 値 ( $v_{rms}$ )

$\delta$  : 境界層厚さ

$P$  : 敷居値パラメータ、式 (3.2)

$-\overline{uv}$  : 時間平均レイノルズ応力

$-\widetilde{uv}$  : 瞬時レイノルズ応力

$H'$  : ホールサイズ、式 (3.7)

$i$  : 四象限分割法における各象限を示す値

$S_V(t, T^+)$  : VITA 法によるバースト定義関数、式 (3.6)

$S_R(t, H')$  : 四象限分割によるバースト定義関数、式 (3.7)

$S_E(t, s)$  : 散逸率定義関数、式 (3.30)

$P_r(\ell)$  : 確率分布関数

$D$  : フラクタル次元

$\psi_n(\mathbf{y}), \hat{\psi}_n(\mathbf{y}, \mathbf{k}_x)$  : *K.L.*直交基底、式 (3.11), (3.23)

$\lambda_n, \hat{\lambda}_n(\mathbf{k}_x)$  : 相関行列の固有値、式 (3.16), (3.23)

$\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{k}_x)$  : クロススペクトル、式 (3.22)

$S(\mathbf{y}, \mathbf{k}_x)$  : 位置  $\mathbf{y}$ におけるパワースペクトル、式 (3.27)

$C_M(\zeta)$  : 密度相関関数、式 (3.28)

$[\varepsilon(\tau)]$  : バースト発生後の散逸率の集合平均、式 (3.32)



## 3.2. 実験条件及び解析法

### 3.2.1 実験条件

対象とした乱流境界層は、圧力勾配のない平板乱流境界層である。層外主流の平均流速を  $5.0(m/s)$  に設定し、前縁より  $1900(mm)$  の位置において I 型及び X 型の熱線プローブを用い測定をおこなった。熱線は直径  $5(\mu m)$  のタングステン線に銅メッキをほどこし、受感部の長さを  $1(mm)$  (無次元化長さ  $l^+ = u_* l / \nu = 14.0$ ) とした。アナログ信号は、 $12\text{ bit}$  A/Dコンバータを使い、 $5\text{ kHz}$  でサンプリングをおこなった。

速度測定は本章での解析に応じて、以下の様におこなった。

- (1) 壁面近傍でのバースト検出のため、I 型および X 型プローブをそれぞれ単独で、壁近くから外層へトラバースした。最も壁近くの測定点は、 $y^+ = 27.97$  (I 型)、 $y^+ = 55.94$  (X 型) である。
- (2) 壁近傍でのバーストのスパン方向への分布を調べるため、X 型プローブを二本用いた 4 チャンネル同時サンプリングをおこなった。二本のプローブは  $y^+ = 30$  に設置し、移動プローブを Z 方向へトラバースした。これは、主に 3.3.3 章の密度相関関数を求めるためである。
- (3) K.L. 展開 (*Karhunen - Loève Expansion*) での解析のために、壁近傍 ( $y^+ < 100$ ) の領域で、I 型プローブによる二点相関を測定した。図 (3.1) に示すように、壁面上の一点から放射状に測定点を設ける。図中の黒丸が測定点である。後に説明するが、K.L. 展開をおこなう領域は、角度が一定となる放射線状の領域である。測定位置は極座標表示で内円から順に  $r^+ = 6.99, 13.99, 20.98, 27.97, 34.96, 41.96, 55.94, 69.93, 83.91, 97.90$  とした。また、このデータは VITA 法による集合平均波形を求める際にも用いた。

本境界層は、境界層厚さ  $\delta = 40.0(mm)$ 、運動量厚さ  $\theta = 4.80(mm)$  であり、それぞれの長さで定義されるレイノルズ数は  $Re_\delta = 1.4 \times 10^4$ ,  $Re_\theta = 1.69 \times 10^3$  となる。クラウ

ザ－線図法を用いて計算された壁面摩擦係数  $C_f$  は 0.0039、摩擦速度  $u_*$  は 0.22 (m/s) であった。なお、文章中にでてくる上付き添え字”+”は、壁変数（摩擦速度と動粘性係数）による無次元量を表す。

### 3.2.2 等速度点集合

図 (3.2) は境界層中の一点 ( $y/\delta = 0.56$ ) において測定された主流方向瞬時速度である。図中横軸に平行な実線を敷居値  $TH$  と呼び、図の場合は  $TH = \bar{u}/U_0 = 0.85$  である。敷居値によって定義される瞬時速度を特に敷居値速度と呼び、記号  $u_{th}$  ( $= TH \cdot U_0$ ) で表す。敷居値と瞬時速度との交点にできる時間軸上の位置の集合を等速度点集合  $B_{th}(t)$  と定義する。すなわち、

$$B_{th} \equiv \{t \mid \tilde{u}(t) = u_{th}\}. \quad (3.1)$$

図に示したパルスの位置が、等速度点集合の要素である。等速度点集合は時間軸上の一次元集合であるが、テイラーの凍結乱流の仮説により空間的に解釈することも可能である。

敷居値は、局所の平均速度  $U(y)$  とその位置での変動 r.m.s. 値  $u'$  を用いて以下のよう  
に定義する。

$$TH = U(y)/U_0 + P \cdot (u'/U_0). \quad (3.2)$$

敷居値の変化はパラメータ  $P$  の値を変化させることによっておこなった。なお、前章の研究によって等速度点集合がフラクタル構造を持つのは、 $|P| \geq 1.5$  を満たすものだけであることが明らかになっている。本章では特にフラクタル構造を持つ等速度点集合にのみ注目し、以後の解析では、その代表として  $P = -1.5$  に固定して得られる集合の解析をおこなった。

### 3.2.3 バースト検出基準

バースト現象の検出には、VITA 法と四象限分割法を採用した。VITA 法の検出基準 [大坂, 1986] については、Blackwelder ら [1983] に一致させた。以下これについて簡単に説明をおこなう。

流れ方向変動速度  $u(t)$  の時間幅  $T^+$  にわたる局所の平均値及び r.m.s. 値を  $u_A(t, T^+)$ 、 $u_R(t, T^+)$  とすると、

$$u_A(t, T^+) = \frac{1}{T^+} \int_{t-T^+/2}^{t+T^+/2} u(t') dt', \quad (3.3)$$

$$u_R(t, T^+) = \left\{ \frac{1}{T^+} \int_{t-T^+/2}^{t+T^+/2} u(t')^2 dt' \right\}^{1/2}, \quad (3.4)$$

であり、時刻  $t$  における乱れエネルギーのゆらぎは、

$$\text{var}(t, T^+) = u_R(t, T^+)^2 - u_A(t, T^+)^2, \quad (3.5)$$

となる。ただし、 $T^+$  は壁変数で無次元化した時間 ( $T \cdot u_*^2 / \nu$ ) であり、 $T^+ \rightarrow \infty$  のとき式 (3.5) の右辺第二項はゼロとなるから、 $\text{var}(t, T^+)$  は  $u'^2$  に等しくなる。VITA 法はこの局所の乱れエネルギーの偏差が、ある数居値を越えた場合をバーストの検出と定義するものである。バーストの定義関数は、以下のようになる。

$$S_V(t, T^+) = \begin{cases} 1 : \text{var}(t, T^+) > k \cdot u'^2 \quad \text{and} \quad du(t)/dt > 0, \\ 0 : \text{otherwise} . \end{cases} \quad (3.6)$$

無次元平滑化時間  $T^+$  及び数居値パラメータ  $k$  は、Blackwelder らの基準にあわせて、 $T^+ = 10$ 、 $k = 1.0$  とした [Blackwelder, 1983]。VITA 法で抽出されるバースト（以下、Vバーストと呼ぶ）は、流れ方向速度信号中の低速から高速側への急激な立ち上がりを検出するものであり、これはエジェクションの後にスィープが起こる一連の過程に対応する。

四象限分割法を用いてバーストを検出するには、まず、時間平均レイノルズ応力に対して、時刻  $t$  における瞬時のレイノルズ応力を  $-\widetilde{uv} \equiv -u(t) \cdot v(t)$  と定義する。これを用い、バーストの定義関数は、以下のようになる [Raupach, 1981]。

$$S_R(t, H') = \begin{cases} 1 : |-\widetilde{uv}| > H' \cdot |-\overline{uv}| \quad \text{and} \quad i = 2, \\ 0 : \text{otherwise} . \end{cases} \quad (3.7)$$

四象限分割法で抽出されるバースト（以下、Qバーストと呼ぶ）は、壁近傍から内層方向に放出される低速流体で、ある大きさ以上のレイノルズ応力の生成をもたらす現象である。これはエジェクション過程にあたるが、この後Vバーストに存在する様なスィープ過程が

存在するかどうかの判断はできない。粗面乱流境界層の場合には、VバーストとQバースト事象があまり相関を持たないことが報告されている [大坂, 1987a]。パラメータ  $H'$  は、検出されるQバーストの大きさを規定するためのものである。Raupach は外層パラメータで無次元化したQバーストの検出周期が、Vバーストのそれに一致するには、 $H' = 4.0$  とすればよいことを報告しているが [Raupach, 1981]、彼が求めた外層スケールでの無次元化時間は、レイノルズ数に依存するため、比較するには注意を要する [Blackwelder, 1983 : 大坂, 1986]。また、可視化実験との対応から、低速流体の放出過程には第一、第三象限内の現象も含まれていることが確認されており [Bogard, 1986, 1987]、さらに  $H' = 2.0$  とした場合が、可視化に見られる現象と最もよく対応したQバーストを抽出できると報告されている [Talmon, 1986]。本解析では、 $H'$  の値は固定せず、 $H'$  の値の変化に対する他の物理量の変化に重点をおいて調べた。

### 3.2.4 フラクタル次元

等速度点集合のフラクタル性の解析には、確率分布関数を用いておこなった。等速度点集合の隣合う二点の間隔を表すランダム変数を  $L$  とし、状態変数を  $l$  とする。本来定義される確率分布関数と異なり、便宜上次のような分布関数を用いる。

$$P_r(l) \equiv \text{probability} \{l < L\} . \quad (3.8)$$

フラクタル構造を持つ等速度点集合に対して、上式は以下のようにベキ法則を満たす。

$$P_r(l) \propto l^{-D} . \quad (3.9)$$

このとき指数  $D$  をフラクタル次元と呼び、一般に非整数の値をとる [Feder, 1988]。実際には、等速度点集合から上記の確率分布関数を計算し、式 (3.9) の両対数プロットをとったときの直線部の傾きとして、 $D$  は与えられる。

これに対し、式 (3.6), (3.7) により求まる定義関数の解析には、Box Counting Algorithm (以後 B.C. 法と略す) を用いた。図 (3.3) に示すような定義関数の時間軸を、大

長さ  $\varepsilon$  の box に等分割し、定義関数が 1 となる領域を少しでも含む box の数を  $N(\varepsilon)$  とする。フラクタル構造に対しては、 $\varepsilon$  の変化に対して以下の関係式が成立する [Feder, 1988]。

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D}. \quad (3.10)$$

ここで、指数  $D$  はフラクタル次元である。

定義関数のフラクタル次元とは、一次元軸上で関数の値が、1 となる区間の集合の次元である。それ故、 $0 < D < 1$ 、となる。

### 3.2.5 Karhunen – Loève Expansion

*Karhunen – Loève Expansion* (以後、K.L. 展開と略す) は、フーリエ展開やチェビシェフ展開と同様に正規直交展開の一種である。以下、この方法について簡単に説明しよう [Moin, 1989 : 日野, 1989]。

本解析で K.L. 展開をおこなう領域は、図 (3.1) において角度一定の放射線上の領域である。以下の説明は  $\theta = 0^\circ$  で  $0 < y^+ < 100$  の領域を **I** とし、この領域において K.L. 展開をおこなう。それゆえ、ランダム過程は壁からの距離  $y$  の関数である。領域 **I** において、ランダム過程  $u(y)$  を直交関数基底で以下のように展開する。

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(y), \quad (3.11)$$

ただし、直交関数の性質から

$$a_n = \int_{\mathbf{I}} u(y) \psi_n(y) dy, \quad \int_{\mathbf{I}} \psi_n(y) \psi_m(y) dy = \delta_{nm}. \quad (3.12)$$

K.L. 展開の特徴は級数の収束の速さにある。すなわち、ランダム変数をより少ない項数で近似できる。いま、 $u_N(y)$  を式 (3.11) の第  $N$  項までの和とすると、 $u(y)$  との二乗平均偏差を以下のように定義する。

$$e_N = \left\langle [u(y) - u_N(y)]^2 \right\rangle. \quad (3.13)$$

可積分な基底関数の変化に対して、 $e_N$  が最小となるようにする。これが K.L. 展開の直交基底であり、以下の積分方程式の解として与えられる。

$$\int_{\mathbf{I}} R(y, y') \psi_n(y') dy' = \lambda_n \psi_n(y), \quad (3.14)$$

ただし積分核は二点相関係数である。

$$R(y, y') = \langle u(y) u(y') \rangle. \quad (3.15)$$

$y$  が離散点でしか与えられない場合には、積分方程式 (3.14) は相関行列の固有値問題に帰着する。すなわち、(3.15) を (3.14) に代入して離散化すると

$$\mathbf{R} \psi_n(y) = \lambda_n \psi_n(y), \quad (3.16)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix}, \quad R_{ij} = \langle u(y_i)u(y_j) \rangle. \quad (3.17)$$

直交基底  $\psi_n(y)$  は、相関行列  $\mathbf{R}$  の固有関数となり、 $\lambda_n$  は固有値となる [Lumley, 1981]。積分核  $R(y, y')$  は、固有関数の単独な和として展開される (Mercer の定理 [Moin, 1989])。

$$R(y, y') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(y) \psi_n(y'), \quad (3.18)$$

即ち、ランダム変数は統計的に直交し、その二乗平均値は固有値に等しくなる。

$$\langle a_n a_m \rangle = \lambda_n \delta_{mn}. \quad (3.19)$$

以上の関係を用いると、領域  $\mathbf{I}$  における乱れエネルギーの総和は固有値の和として得られる。

$$\langle u^2(y) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n^2(y), \quad (3.20)$$

$$E = \int_{\mathbf{I}} \langle u^2(y) \rangle dy = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n. \quad (3.21)$$

すなわち、もっともエネルギーを持った基底は、固有値が最大の基底である。以後、固有値の大きい順に番号づけをしておく。整構造との関連から、K.L. 展開で注目するのは、エネルギー最大の第一基底である。ただし、三次元的な議論をする場合には、流れ方向速度変化の最も激しい垂直方向に K.L. 展開を用い、統計的に定常かつ等方と見なせる流れ方向およびスパン方向はフーリエ展開を用いる [Aubry, 1988]。

上述の議論は、 $y$  方向の K.L. 展開に  $x$  方向の情報は考慮されてはいなかった。以下では  $x$  方向を時間軸で置き換え波数空間とし、各波数からの寄与を考えた  $y$  方向の K.L. 展



開について考察する。それゆえ、相関係数は二点間の時間遅れ  $\tau$  の関数となる。式 (3.15) の二点相関は  $R(y, y', \tau)$ ,  $\tau = |t - t'|$  となり、 $x$  方向へは波数空間で考えるため、相関行列は、以下のクロススペクトルとなる。

$$\Phi(y, y', k_x) = \frac{1}{4\pi^2} \int R(y, y', \tau) e^{-ik_x \tau} d\tau. \quad (3.22)$$

よって K.L. 展開基底は、各波数の関数として以下の積分方程式の解となる。

$$\int_{\mathbf{I}} \Phi(y, y', k_x) \hat{\psi}_n^*(y', k_x) dy' = \hat{\lambda}_n(k_x) \hat{\psi}_n(y, k_x), \quad (3.23)$$

離散的な場合には、式 (3.23) の積分方程式は相関行列の固有値問題になる。ただし、今回は行列の各成分が複素数になり、複素固有方程式を解かなければならない。しかし、相関行列がエルミート行列になるため、固有値は常に実数になる。ランダム変数は K.L. 基底から以下のように再構成される。

$$\hat{u}(y, k_x) = \sum_n \hat{a}_n(k_x) \hat{\psi}_n(y, k_x). \quad (3.24)$$

直交基底  $\hat{\psi}_n(y, k_x)$  が満たす条件は、式 (3.12) と同様で

$$\int_{\mathbf{I}} \hat{\psi}_n(y, k_x) \hat{\psi}_m^*(y, k_x) dy = \delta_{nm} \quad , \quad \langle \hat{a}_n(k_x) \hat{a}_m(k_x) \rangle = \begin{cases} \lambda_n(k_x) & \text{for } n = m, \\ 0 & \text{for } n \neq m. \end{cases} \quad (3.25)$$

クロススペクトルおよびパワースペクトルは、各固有スペクトルから以下のように再構成される。

$$\Phi(y, y') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(k_x) \hat{\psi}_n(y, k_x) \hat{\psi}_n^*(y', k_x), \quad (3.26)$$

$$S(y, k_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(k_x) |\hat{\psi}_n(y, k_x)|^2. \quad (3.27)$$

### 3.3 解析結果及び考察

#### 3.3.1 等速度点集合とバーストとの関連

等速度点集合のフラクタル性が、バースト現象といかに関わるかを調べる前に、本解析によって抽出されたバーストの統計的性質を明らかにしておく必要がある。図(3.4)はVバーストとQバーストの発生周期を、壁変数で無次元化したものである。Vバーストの結果は、壁領域でほぼ一定の値をとり、それは Blackwelder ら [1983] の結果によく一致している。両バーストの平均発生周期は、壁変数で無次元化した場合と、外層のスケールで無次元化した場合ではレイノルズ数に対する依存の仕方は異なる。即ち、平板乱流境界層では外層スケールでの無次元化値がレイノルズ数の増加に伴い減少するのに対して、壁変数でのそれは、レイノルズ数の変化に対してもほぼ一定の値をとる。Blackwelder らの乱流境界層が、 $Re_\theta = 2500$  と本境界層よりレイノルズ数が幾分大きいのに、無次元化時間がよく一致するのは以上の理由による。

Qバーストの平均発生周期が、ほぼ一定値をとることはVバースト同様であるが、その値は非常に小さくなる。これは、四象限分割法が連続的に起こる短い周期の小規模のQバーストも、検出するからと考えられる。このことは、発生周期の確率密度関数によって確認できる。図(3.5)はバースト発生時間間隔の確率密度関数である。両軸は、その平均値 $\langle l \rangle$ で無次元化してある。四象限の場合には小さな発生周期の存在する確率が、Vバーストに比較して高くなっている。

図(3.6)はV及びQバーストの各々の集合平均波形である。縦軸は集合平均の値、横軸は壁変数で無次元化した時間である。集合波形は、およそ200個のバーストを平均した結果である。集合平均をとる際の、バーストの中心位置は定義関数の各パルスの中心とした。集合平均波形は、中心位置をどこに選ぶかによって得られる肖像は大きく異なる。しかし、バーストの平均的な大きさを予測することは可能である。図から明らかのように、Qバーストの平均的な大きさは、Vバーストの場合に比べてとても小さい。

次に、これら二種類の方法によって抽出されるバースト現象で、等速度点集合を条件つけた場合に、そのフラクタル性がいかに変化するかを考察する。つまり、バースト領域に含まれる等速度点集合と、それ以外の集合で構造がいかに異なるかを、フラクタル的な観点から考察する。ただし、既に述べたように、等速度点集合は予めフラクタル構造を持つもの（式(3.2)で  $P = -1.5$  として定義される等速度点集合）を代表例に解析をおこなった。条件付き平均をおこなう際のバースト領域の設定は、個々のバーストの大きさを決めることが困難なため、集合平均波形より一定のバースト領域を決定しておこなった。集合平均波形の値がゼロになるのは、平均的にみると、もはや抽出すべき構造が存在しないことである。それゆえ、各々の平均バースト領域は、Vバーストでは無次元化時間で  $-45 < T^+ < 45$  とし、Qバーストの場合は  $-15 < T^+ < 15$  とするのが妥当と考えられる。等速度点集合をバースト領域に含まれる集合と、含まれない集合に分割し、各々の集合のフラクタル性を確率分布関数を用いて調べた。

図(3.7.a)は四象限分割法で抽出されるQバーストで、条件付けをおこなった結果の一例である。グラフは式(3.9)の両対数プロットであり、直線部が存在することがフラクタル構造の存在する証拠である。この時、直線部の傾きがフラクタル次元を与える。横軸上の矢印は、自己相似性の成立する範囲であり、ほぼコルモゴロフ・スケールと最大渦スケールに対応する。この点についての詳細は第2章を参照していただきたい。

Qバースト領域に含まれる等速度点集合には、そのグラフに明確な直線部が存在しフラクタル構造を確認することが出来るが、Qバースト領域に含まれない等速度点集合には、グラフから分かるように直線部は存在せず、フラクタル構造を認めることは出来ない。

図(3.8)に  $H' = 2.0$  とした場合に、四象限分割法によって抽出されたQバースト領域に含まれる等速度点集合のフラクタル次元の壁からの距離に対する変化を示す。なお、 $0 \leq H' \leq 2.0$  であればその値にはほとんど変化はなかった。比較のため、条件付けをおこなわない場合のフラクタル次元の変化を示した。Qバースト領域に含まれる集合の方が、

小さな次元の値をとっている。この理由については第2章で説明をおこなったし、数学的基礎は第1章に述べた。

これに対し、VITA法による条件付けをおこなった結果は、Vバースト領域に含まれる等速度点集合及び、Vバースト領域に含まれない等速度点集合いずれにもフラクタル構造が存在した。即ち、図(3.7.b)の例に示す様に、いずれの確率分布関数の両対数プロットにも直線部を確認できる。図(3.9)はフラクタル次元の変化を示したものである。両者の値は壁領域でほぼ一定であり、Vバースト領域に含まれる方が幾分高い値をとっている。しかし次元の値は、図(3.8)に示した条件付きをおこなわなかった全体の等速度点集合の次元とほとんど変わらない。

以上の解析結果から考察すると、等速度点集合のフラクタル性は、四象限分割法によって抽出されるQバーストには依存するが、VITA法で抽出されるVバーストには独立と考えられる。

### 3.3.2 バースト定義関数のスペクトル

バースト分布の幾何学的な情報を得るには、式(3.6)、(3.7)での定義関数を用いるのがよい。各パルスの位置は、バースト発生位置に対応し、パルスの大きさはバーストの大きさに対応していると考えられるからである。仮に、時間軸を空間軸に置き換えられるとすれば、定義関数は壁領域におけるバーストの一次元的な情報を与えてくれる。なお、以後の解析では式(3.7)での第二象限( $i=2$ : Ejection)の定義関数に加えて、第四象限( $i=4$ : Sweep)の定義関数も解析をおこなった。

定義関数の時間平均値として、間欠係数 $\Gamma$ を考える[大坂, 1987a]。壁領域での間欠係数は、いずれの場合もほぼ一定であった。VITA法では $\Gamma = 0.024$ 、四象限の場合は第二及び第四象限で $H' = 2.0$ としたとき、 $\Gamma = 0.11$ であった。

四象限分割の場合は、パラメータ $H'$ の大きさによって定義関数の性質は異なる。図(3.10)にはスイープ及びエジクションの平均発生周期と間欠係数の値を、 $H'$ に対して

示した。 $H'$ が小さい場合には、第四象限の方が発生周期は短く、間欠係数も大きな値をとっている。しかし、 $H'$ が大きくなるとこの傾向は第二象限と逆転する。つまり、壁領域では小規模な現象としては、スweepが卓越するものの、大規模な現象としては、エジェクションが優勢である。

定義関数の性質をより詳しく調べるために、そのパワースペクトルを計算した。図(3.11)にその結果を示す。仮に、パルスの発生間隔の確率分布が指数型であれば、そのスペクトルはローレンツ型となる [武者, 1980]。つまり、低波数でパワースペクトルは一定値を取り、平均値付近で滑らかに変化し、高波数では周波数の $-2$ 乗に比例して減衰する。図に示したVバースト定義関数  $S_V$  のスペクトルは、まさにローレンツ型のスペクトルである。Qバースト定義関数  $S_R$  のスペクトルは、低波数部ではローレンツ型とはやや異なるが高周波付近ではおよそ $-2$ 乗のべき指数で減衰している。スペクトルの計算は、速度信号にコサイン型のウィンドーをかけ、2048個の離散点から計算されたスペクトルを32回平均して求めた。図中、傾きが $-2$ でない実線については、後ほど説明をおこなう。

### 3.3.3 バースト定義関数のフラクタル性

二種類の方法で求められた定義関数の相違をより明確にするため、フラクタル的な観点からの考察をおこなう。図(3.12)は定義関数から定まる区間集合(以下、単に定義関数と呼ぶ)をBox Counting Algorithmを用いて解析した結果の一例である。先に説明したとおり、直線部の傾きがフラクタル次元を与える。しかし、 $\varepsilon$ の大きなところであらわれる直線部は、傾きが $-1$ でフラクタル次元ではない。

Qバースト定義関数の両対数プロットには、明確な直線部が存在しフラクタル構造を確認できる。これは、壁領域の第四象限( $i = 4$ : Sweep)の定義関数についても確認された。また、 $H'$ の値を $0 \leq H' \leq 2.0$ で変化させても、フラクタル構造は存在した。しかし、Vバーストの定義関数の場合には、グラフは滑らかに変化し、フラクタル構造を確認することはできない。定義関数が仮に、バーストの大きさを含めた空間的な分布を特徴づ

けるものであるならば、四象限分割法によって抽出されるQバーストの時間的（空間的）分布は自己相似性を有している。ただし、物理現象を解析する際の自己相似性の意味は、小スケールでの現象もしくは分布が大きなスケールでのそれと統計的に同じことをいう。四象限分割法では、 $H'$ があまり大きくなければ、小スケールのバーストから規模の大きなバーストまで抽出でき、その分布が統計的に同じであると言える。一方、VITA法の場合は検出基準が厳しく、抽出されるVバーストは規模の大きなものばかりであると考えられる。それ故、その構造には統計的自己相似性は存在しない。なお、VバーストとQバーストのさらなる関連は、今後の研究課題である。

図(3.13)はQバースト定義関数のフラクタル次元の変化を示す。 $H'$ が小さいときには、第四象限(Sweep)の方が次元の値はわずかであるが大きくなっており、構造が第二象限(Ejection)より複雑になっていることを示唆する。しかし、 $H' = 2.0$ となると、次元の値は逆転し、第二象限の方が大きくなる。これは、前述した図(3.10)の傾向をよく捉えている。

次に、バースト構造のスパン方向(z軸)への分布を考察してみる。位置 $\mathbf{X} = (x, y, z)$ におけるQバーストの定義関数を、新たに $S_R(t, H', \mathbf{X})$ とする。 $x$ は境界層前縁から1900(mm)、 $y$ は $y^+ = 30$ に固定し、密度相関関数 $C_M(\zeta)$ を、

$$C_M(\zeta) = C_M(|z_1 - z_2|) \equiv \langle S_R(t, H', z_1) S_R(t, H', z_2) \rangle, \quad (3.28)$$

と定義すれば、Qバーストのスパン方向へのフラクタル性は、 $\zeta$ の変化に対して密度相関関数が、

$$C_M(\zeta) \propto \zeta^{-(1-D)}, \quad (3.29)$$

の関係を満たすことである[Feder, 1988]。ただし $\langle \rangle$ は時間平均であり、 $D$ はフラクタル次元である。図(3.14)に密度相関関数の両対数プロットを示す。第二、第四象限いずれの場合にも、明確な直線部が存在している。しかし、次元の値は図(3.13)の値とは異なる。 $H'$ の変化に対する次元の変化の傾向は同じであるが、定量的には一致しない。これは、ス

イープ、エジェクション領域が流れ方向とスパン方向では異なるフラクタル次元を持つ、セルフアフィン・フラクタル [松下, 1990] を構成しているからと考えられる。等方性乱流でない限り、乱流場は流れ方向 ( $x$  軸) と垂直方向 ( $y$  軸)、スパン方向 ( $z$  軸) では性質が大きく異なるから、上述の結果も妥当なものといえる。

次にフラクタルとパワースペクトルの関係についてふれる。一般にフラクタル構造を持つ集合 (ここでは点の分布に限る) の相関関数  $C(r)$  は、 $r$  の変化に対して  $r^{-s}$  のベキ構造を持っている。それ故、パワースペクトルも、ベキ構造を持ち [Shuster, 1988]、その指数は  $s$  の関数である。フラクタル次元  $D$  を持つ定義関数はそのパワースペクトルが高波数側で、傾き  $-(2 - D)$  で減衰することが報告されている [Vassilicos, 1990]。図 (3.12.a) より  $D \simeq 0.6$  であるから、スペクトルは  $-1.4$  程度の傾きを持つことになる。図 (3.11) にその傾きを持つ実線を示したが、傾き  $-2$  の実線と差異が小さいため、スペクトルの傾きを決定することは困難である。即ち、定義関数のフラクタル次元をパワースペクトルによって定める方法は、あまり有効とはいえず、むしろ B.C. 法で求めた方が明確に決定できることになる。

乱流境界層の壁領域において、四象限分割法から抽出されたエジェクション及びスィープの分布は、フラクタル構造を持つことを明確にすることができた。これらの分布が、どの程度の複雑さを持っているかはフラクタル次元が同じ図形を描いてみれば、概要を把握できよう。図 (3.15) はフラクタル次元 1.6 を持つ図形を、非整数ブラウン運動 [Feder, 1988 : 中村, 1992c] を用いて描いたものである。図の長方形の枠組みは境界層平板の一部を意図し、複雑な閉曲線群は壁近傍で瞬時レイノルズ応力を生成する領域を表すと考えていただきたい。フラクタル図形の特徴は、非常に細かな構造が集中して存在する一方、スケールの大きな構造も存在することである。本解析では一次元的なデータしか扱っていないので、すでに第 1 章で説明したように、二次元のフラクタル次元を見積もることは困難であるが [Falconer, 1990]、便宜上  $D = 1.6$  として図形を描いた。前述したように図はあくまで境界層中での現象を、フラクタルを用いて推測したもので、実際にこの様で

あるかは二次元的測定により確認しなくてはならない。

### 3.3.4 散逸場とフラクタル

エネルギー散逸場の間欠性は、最近の実験やシミュレーションによって活発な議論の対象となり、カスケード・モデルの構築など興味深い問題を多数提供している [細川, 1991]。ここでは、それらに対する若干の考察とバーストとの関わりについて述べることにしよう。熱線を用いた実験データから、瞬時の散逸量を厳密に求めることは、まず不可能である [Klebanoff, 1954]。ここではテイラーの凍結乱流の仮説と等方性を仮定して、近似的に  $\varepsilon(t) \simeq 15\nu(du/dt')^2|_{t'=t}$  と見積もった [中村, 1986]。図 (3.16) に瞬時散逸の分布を示す。縦軸は  $\varepsilon$  の時間平均値  $\langle \varepsilon \rangle$  で無次元化してある。速度微分は注目した点の前後 10 点を用い、7 次のスプライン補間によって計算した。散逸場が間欠的になっていることは、図を見れば明かであろう。ここでは、慣性小領域での議論は無視（境界層壁近傍ではパワースペクトルに慣性小領域はほとんど確認できない）して、図に示された分布をどの様に特徴づけるかを考える。最も重要かつ容易に計算される、相関、スペクトル、確率密度関数はいずれも間欠性と結びつく重要な情報を与えてくれる。計算は複雑であるが、 $\varepsilon$  の分布の幾何学的情報を取り入れた  $f - \alpha$  スペクトルも提案されており、最近の研究では  $\varepsilon$  の分布を最も良くとらえているという報告もある [Meneveau, 1991]。

ここでは、 $\varepsilon$  の間欠性をより簡潔に特徴づけてみる。瞬時の散逸に対して、以下の定義関数を導入する。

$$S_E(t, s) = \begin{cases} 1: & \varepsilon(t) > s < \langle \varepsilon \rangle, \\ 0: & \text{otherwise} . \end{cases} \quad (3.30)$$

定義関数の解析は、バーストの場合と同様である。数居値パラメータを大きくすれば、散逸の強い間欠領域を取り出すことができる。最も興味があるのは、この間欠構造にフラクタル性が有るか無いかである。図 (3.17) にその結果を示す。両対数プロットには直線部が存在し、フラクタル構造は確認できた。しかし、次元の値は数居値によって異なる。 $s$  が大きくなると、一定値に漸近する傾向にあるが (図 (3.18) 参照)、この辺りではグラフに



明確な直線部は存在しなくなってくる。s が大きな場合は、測定データを増やしてももう少し考察する必要がある。最近の報告によると [Sreenivasan, 1991 : Meneveau, 1991]、 $\varepsilon$  の分布がマルチフラクタルになっており、実験と同様なスペクトルが簡単な二項分岐モデル (p モデル [Meneveau, 1987a]) で再現できると言われている。しかし、実際に両者の確率密度関数 ( $p(\varepsilon_r) : \int_{V_r(x)} \varepsilon_r(x') dx' / V_r$ ) を比較してみれば分かることだが、 $\varepsilon$  の小さなところでの分布は一致しない。f- $\alpha$  スペクトルは、確率の小さなところも十分とらえ得る理論だが、その違いがでてこないのは疑問である。今のところ、実験データから f- $\alpha$  スペクトルを求めるには一般化次元  $D_q$  を介するのが主流であるが、どうもこのあたりに問題があるのではないか (有限サイズの影響等ではなく、実験データの解析に対する基本的な欠陥) と考えられる [Aurell, 1992]。

整構造はエネルギーカスケードの第一段階とも考えられ、散逸場に与える影響は大きい。本来、波数空間で議論する方が明快であるが、ここでは物理空間で考えてみる。バーストと散逸率との関係は、定義関数  $S_R(t, H')$  と  $S_E(t, s)$  との相関に現れるであろう。そこで、以下の相関関数、

$$C(\tau) \equiv \langle S_R(t_1, H') S_E(t_2, s) \rangle, \quad \tau = |t_1 - t_2|, \quad (3.31)$$

の分布を調べた。しかし、相関は確認されなかった。

次に集合平均を考えてみる。バーストの定義関数が、1 から 0 に変わる点を  $t_i : i = 1, 2, \dots, n$  とし (すなわち、 $t_i$  はバーストが終了する位置に対応する)、次式の集合平均を定義する。

$$[\varepsilon(\tau)] \equiv \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon(t_i) \varepsilon(t_i + \tau)}{n \langle \varepsilon \rangle}. \quad (3.32)$$

なお、この集合平均はエジェクション、スイープの各々の定義関数についておこなった。上式はエジェクション、スイープ終了後の散逸率の平均的な分布を表す。図 (3.19) にその結果を示す。興味深いのはエジェクション終了後に、非常に高い散逸率のピークが認められることである。一方、スイープ終了後には散逸率は、時間平均値  $\langle \varepsilon \rangle$  にほぼ同じであ

る。式 (3.31), (3.32) の関係については今後の研究課題とし、さらなる解析を加える予定である。

### 3.3.5 K.L. 展開によって抽出されるバースト

バースト現象の理解は、最終的には力学系的な観点からおこなわれる必要がある。K.L. 展開はその様な観点から、重要な情報を多数提供してくれる。以下では、その第一段階として、K.L. 展開で抽出されるバーストについて、その解析結果を報告する。

図 (3.20) に  $\theta = 0^\circ$  における K.L. 展開直交基底の最初の 6 個を示す。ただし基底は大きさ 1 に規格化しており、固有値の大きい順にその番号がつけられている。3.2.5 節で説明したように、固有値が最も大きい第一基底が、乱れエネルギーへの寄与が最大のパターンである。固有値が小さくなるにしたがって、基底が振動する周波数は増大する。表 (3.1) に固有値を示した。図 (3.21) は角度を変えた場合の第一基底の比較である。角度が大きくなるに従って、関数のピークを取る位置が注目点から外縁に移動している。

図 (3.22) は乱れエネルギーへの収束性 (式 (3.20)) を、 $n$  の変化に対して示したものである。実線は元来の乱れエネルギーである。いずれの角度においても  $n$  が 5 程度で、もとの分布によく収束している。しかし、第一基底が全エネルギーに寄与する割合は角度が大きくなるに従って、減少する傾向にある。これは式 (3.21) を用いれば、より明確に示すことができる。図 (3.23) は第一、第二基底の全エネルギーに対する割合を各角度に示したものである。やはり、角度の増加と共に第一基底の割合は減少している。しかし、その減少分を補うなかのごとく、第二基底からの割合が増加する。

K.L. 展開で抽出される構造と実際の物理現象との対応を議論することは困難で、現在まであまりなされていない。そこで、ここでは VITA 法によって得られるバーストの平均的肖像と K.L. 展開基底との重要な関係について報告する。図 (3.24) の上段は  $\theta = 0^\circ$  において、VITA 法で取り出されたバーストの 1 サイクルにわたる瞬時速度の集合平均波形である。 $T^+$  は壁変数で無次元化された時間遅れを表す。実線は平均速度分布である。

検出プローブは  $y^+ = 13.99$  に設置し、検出基準は 3.2.3 節で説明したとおりである。図 (3.24) の下段には上段に対応する、変動速度の集合平均波形が示してある。仮にスweep・エジェクションが、この集合平均波形でとらえられているとすれば、K.L. 展開基底との関連は興味深いものとなる。図 (3.24) 下段の集合平均速度分布を、式 (3.11), (3.12) に従って展開し各係数の変化を、バーストの1サイクルにわたって調べた (図 (3.25) 参照)。エジェクション過程では第一、第二基底からの寄与が最も大きく、スweep過程では第一基底からの寄与がほとんどである。第三、第四基底はほぼ対称になっていることから、両過程に同程度寄与していると考えられる。しかし、第五基底以降は係数はほとんどゼロであり、バースト過程への寄与は少ない。各々の展開係数は時間的に変化し、整構造の特徴を良くとらえている。係数をこちらから一意的に与えてやれば、それに対応する構造を抽出できることになる。また、係数を時間の関数とし、瞬時の速度場を式 (3.11) によって構成し、*N.S.*方程式に代入すれば、各係数の支配方程式を得る。この方向に発展したものがバーストの低自由度モデルである [Sirovich, 1987 : Aubry, 1988]。

次に流れ方向からの寄与を考慮にいれた解析をおこなう。すなわち流れ方向をフーリエ変換し、各波数における固有関数、固有値を考える。式 (3.23) に示すように、固有値は波数の関数になる。図 (3.26) に第三固有値までの波数に対する変化を示す。どの波数においても第一固有値が最も大きな値をとり、波数の増加とともにその値は減少する。この傾向は、 $\theta = 0^\circ$  と  $\theta = 60^\circ$  でほとんどかわらない。しかし、パワースペクトルへの寄与 (式 (3.27)) には角度の違いが明確にあらわれる。図 (3.27) は  $y^+ = 41.96$  におけるパワースペクトルへの各固有関数からの寄与を示す。 $\theta = 0^\circ$  では第一固有関数からの寄与が突出しているのに対して、 $\theta = 60^\circ$  ではその傾向はあらわれない。すなわち、パワースペクトルへの寄与は垂直方向に伸びた単独の構造が存在する一方、スパン方向に伸びた突出した構造は存在しない。

### 3.4 結言

乱流境界層における、等速度点集合のフラクタル性とバーストとの関連を二種の条件付き平均を用い調べた。さらに二種のバースト定義関数及び散逸領域をフラクタル的な観点から解析した。

壁近傍でのバースト構造を抽出するため、K.L. 展開を用い解析をおこなった。以下にその結論をあげる。

- (1) 乱流境界層における等速度点集合（式 (3.2) で、 $P = -1.5$  として定義された集合）のフラクタル性は、四象限分割法によって検出される Qバースト（パラメータ  $H' : 0 \leq H' \leq 2.0$ ）には依存するが、VITA 法で検出される Vバーストには独立である。
- (2) 壁領域の Qバースト定義関数には、統計的な自己相似性（フラクタル性）が存在する。そのフラクタル次元は、およそ  $D = 0.6$  ( $H' = 1.0$ ) である。これに対し、Vバースト定義関数には、フラクタル構造は存在しない。
- (3) Qバースト定義関数は、流れ方向とスパン方向ではそのフラクタル次元が異なるセルフアフィン・フラクタルである。
- (4) 以上よりバースト現象中のレイノルズ応力生成とフラクタル構造は完全に関係していることがわかる。すなわち、乱流境界層中のフラクタル構造は力学的現象に対応している。
- (5) テイラーの凍結乱流仮説と等方性を仮定して求めた散逸場で、ある数居値以上の高い散逸を示す間欠領域には、フラクタル性が存在する。しかし、数居値パラメータ（式 (3.30)）によって、間欠領域のフラクタル次元は異なる。
- (6) スweep・エジェクションの定義関数を用い、散逸場の集合平均波形を調べた。エジェクション終了後、散逸は時間平均散逸量の 2 倍近い値を持つ。しかし、スweep終了後には、その様な傾向は見られず、ほぼ時間平均値に等しい。

- (7) VITA 法で抽出されるバーストは、K.L. 展開基底と密接に関係し、主に第三基底までを用いて、バースト過程を再構成できる。
- (8) 乱れエネルギーへの第一基底関数からの寄与は、 $\theta$ が増加するに従って減少する。一方、第二基底関数からの寄与は増加する。
- (9) 壁近傍 ( $y^+ = 41.96$ ) におけるパワースペクトルへの寄与には、 $y$ 方向に伸びた単独の構造が存在する一方、スパン方向への広がりを持った支配的な構造は存在しない。

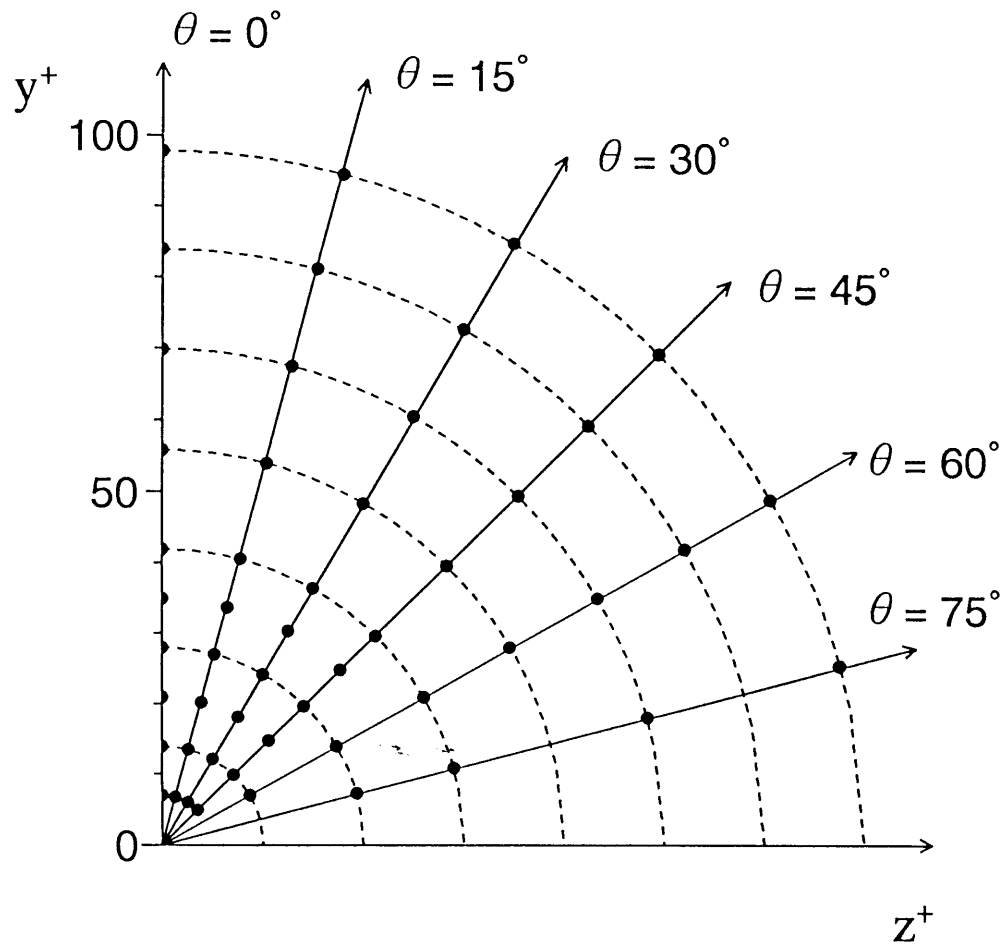


図 (3.1) 乱流境界層壁近傍 ( $y^+ < 100$ ) における速度測定位置

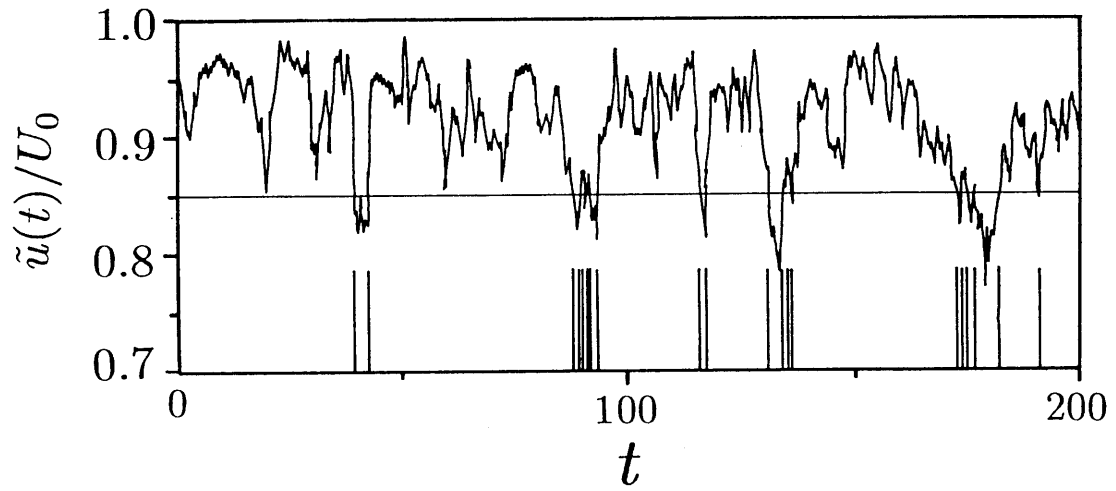


図 (3.2) 瞬時速度波形及び等速度集合  
( $y/\delta = 0.56$ )

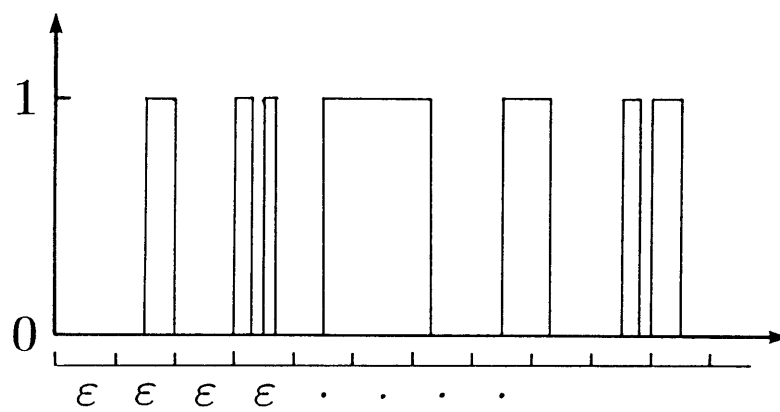


図 (3.3) 定義関数及び B.C. 法の説明

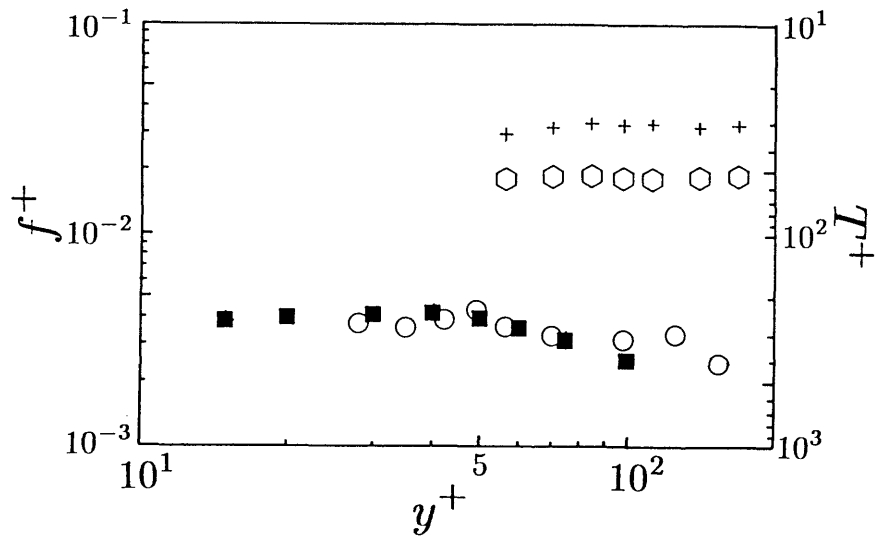


図 (3.4) 壁領域におけるバースト平均発生周期  $T^+$  及び周波数  $f^+$ . 横軸は壁からの距離を示す. ただし、値は壁変数で全て無次元化してある [■: Blackwelder, ○: VITA 法, +: 四象限分割法 ( $H' = 2.0$ ), ○: 四象限分割法 ( $H' = 4.0$ )]

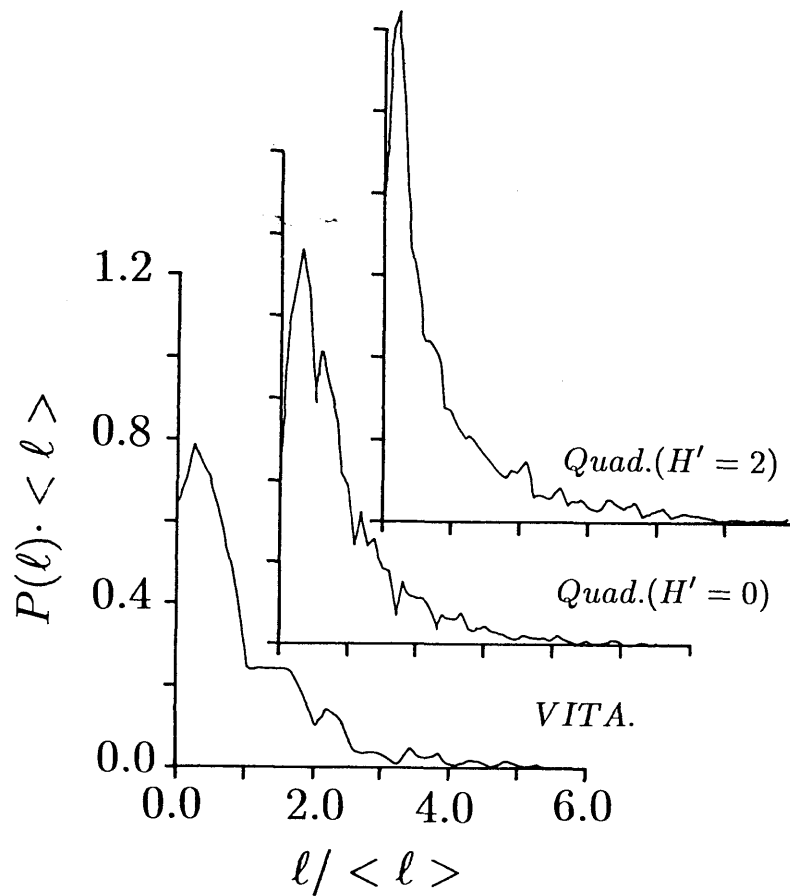
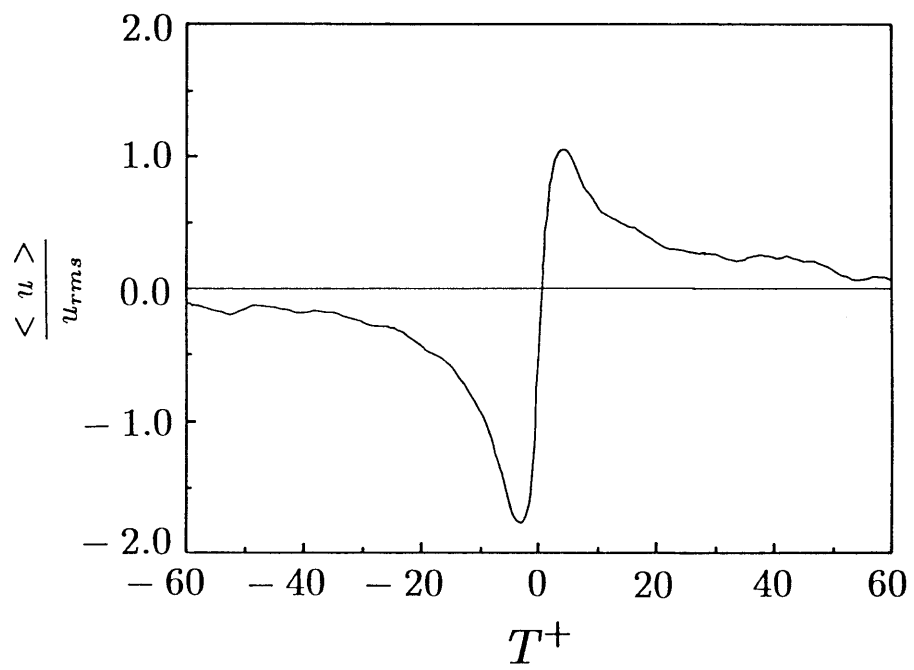


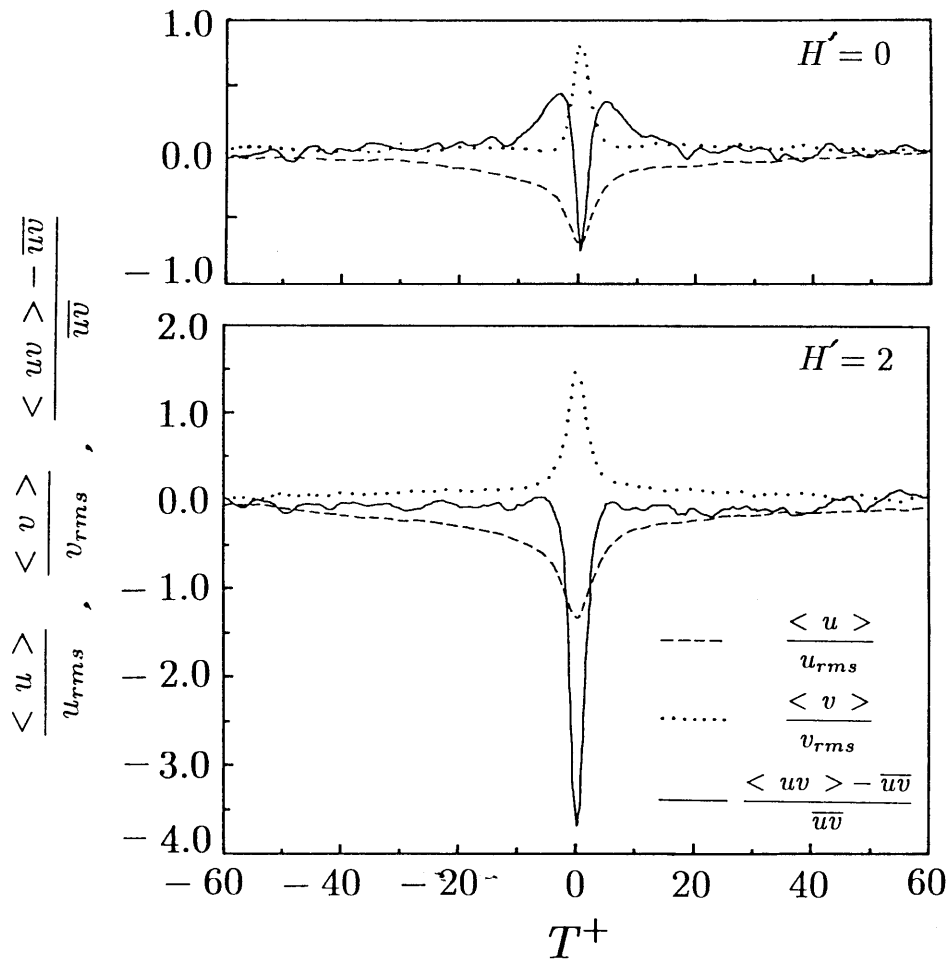
図 (3.5) バースト発生間隔の確率密度関数, 縦軸・横軸は平均値  $\langle l \rangle$  で無次元化してある





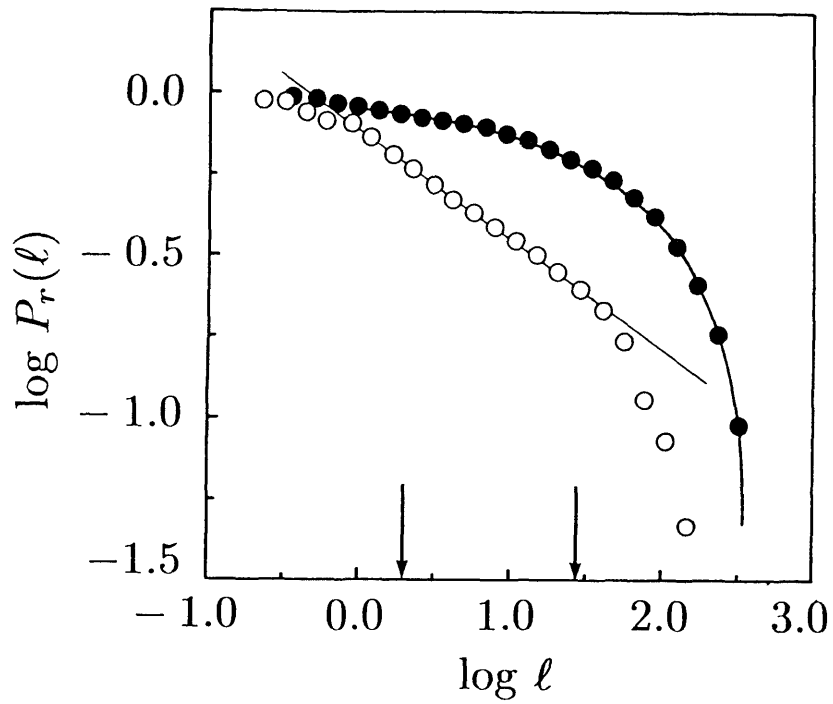
(a) Vバースト ( $y^+ = 27.97$ )

図 (3.6) VITA 法及び四象限分割法によるバースト集合平均波形

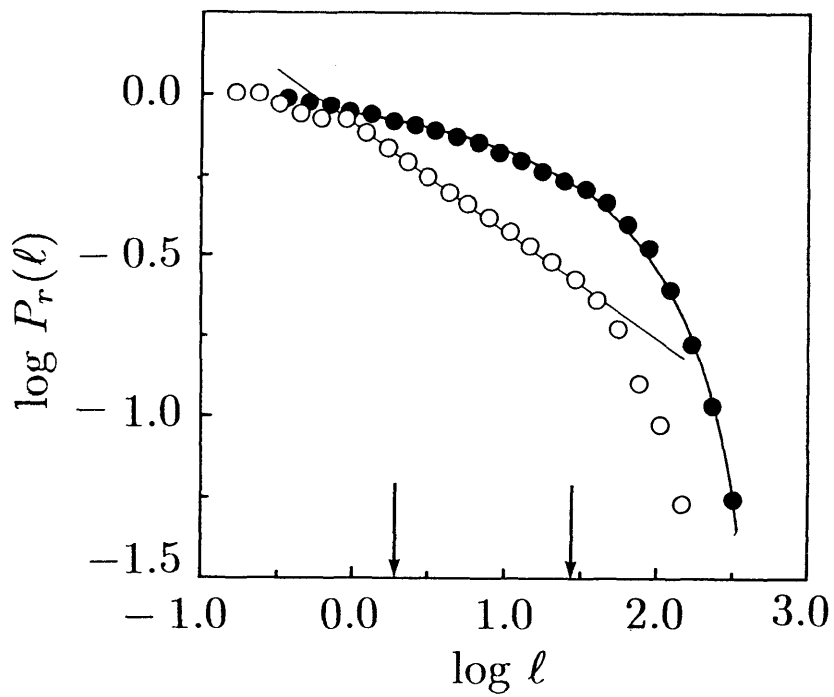


(b) Qバースト ( $y^+ = 55.94$ )

図 (3.6) VITA 法及び四象限分割法によるバースト集合平均波形



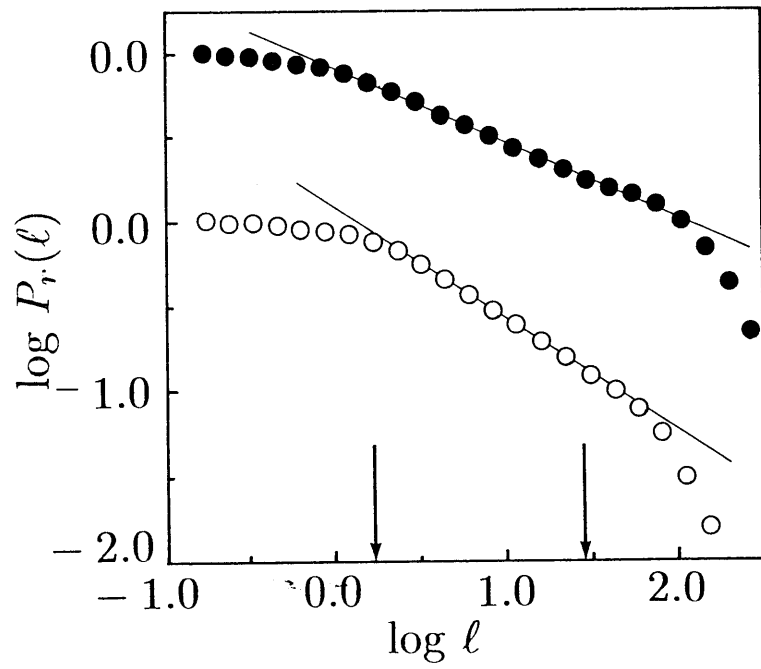
(i)  $H' = 1.0$



(ii)  $H' = 2.0$

(a) Qバーストで条件づけた確率分布関数 ( $y^+ = 55.94$ )  
 [o: Qバースト領域, •: 非Qバースト領域]

図 (3.7) バースト領域で条件づけた等速度点集合の確率分布関数による解析



(b) Vバーストで条件づけた確率分布関数 ( $y^+ = 34.97$ )  
 [○: Vバースト領域, ●: 非Vバースト領域]

図 (3.7) バースト領域で条件づけられた等速度点集合の確率分布関数による解析

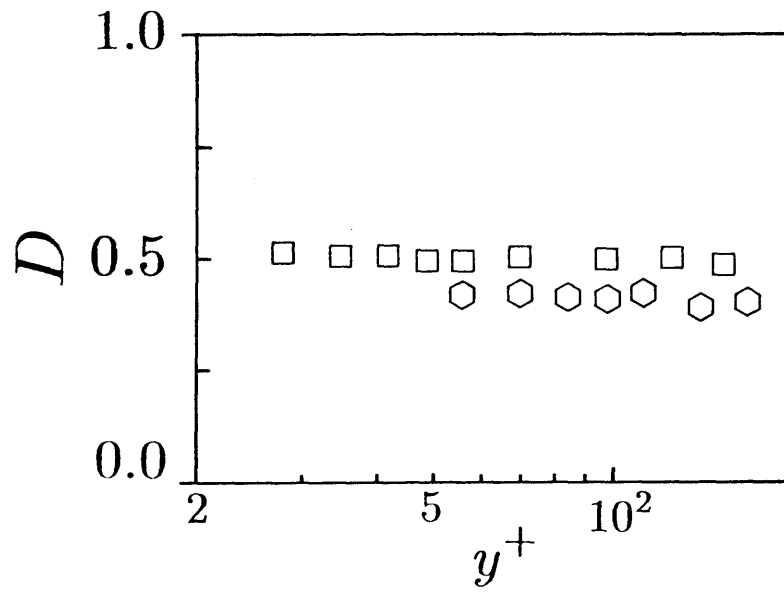


図 (3.8) 等速度点集合のフラクタル次元の  $y^+$  に対する変化  
 [○: Qバースト中の等速度点集合のフラクタル次元 ( $H' = 2.0$ ),  
 □: 無条件等速度点集合のフラクタル次元]

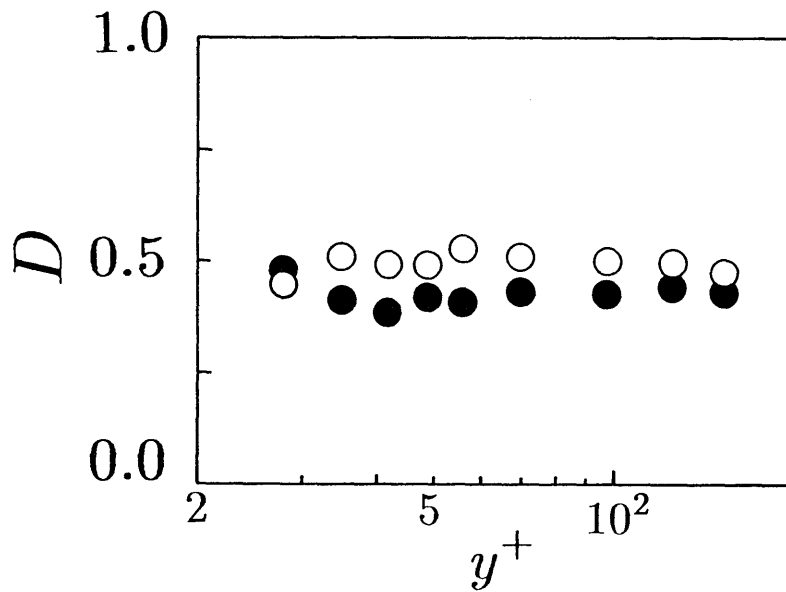


図 (3.9) VITA 法で検出される Vバーストで、条件付けをおこなった等速度点集合のフラクタル次元  
 [○: Vバースト領域, ●: 非Vバースト領域]

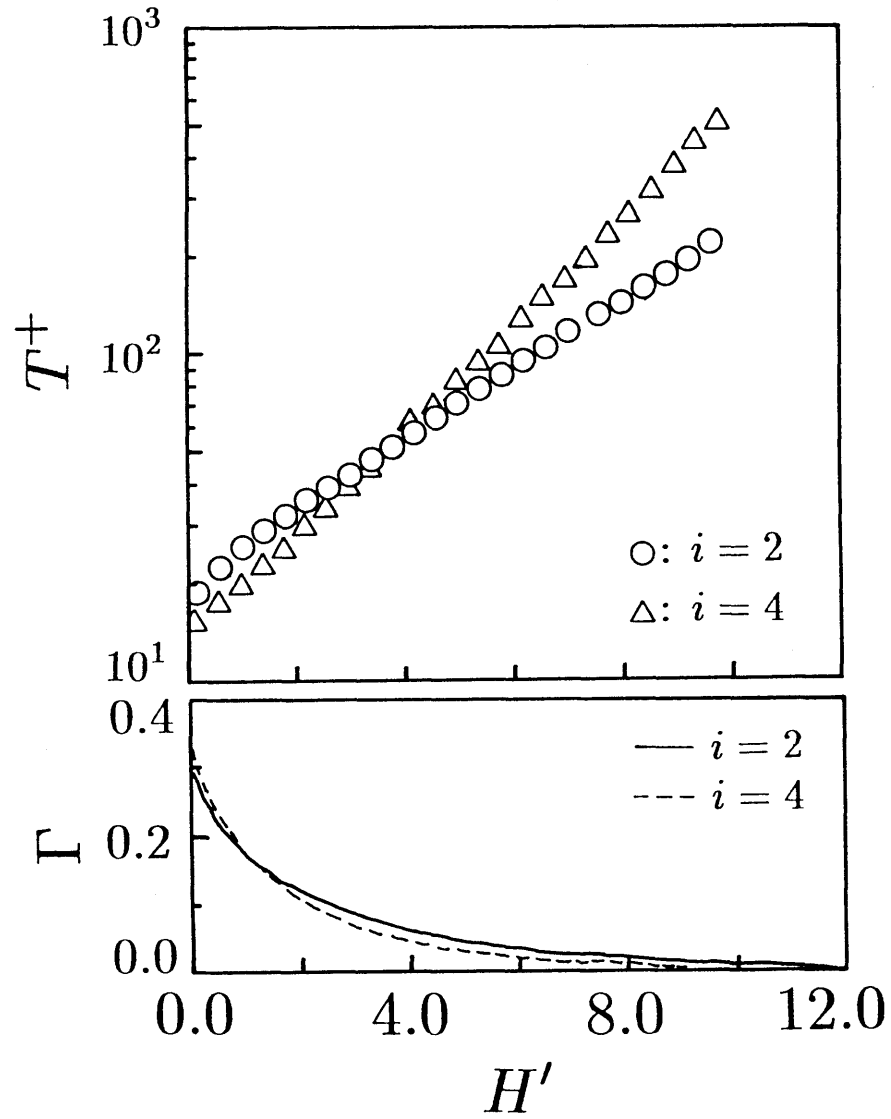
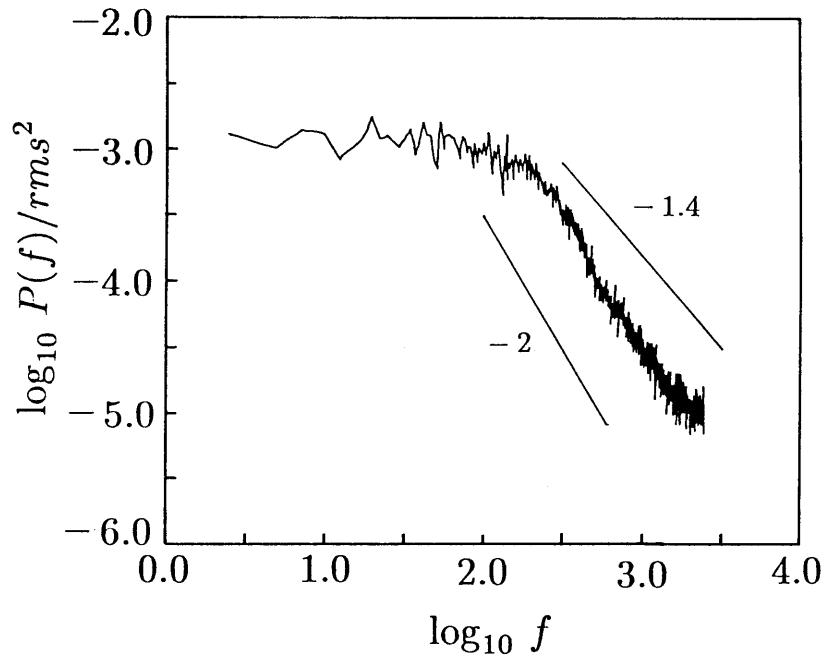
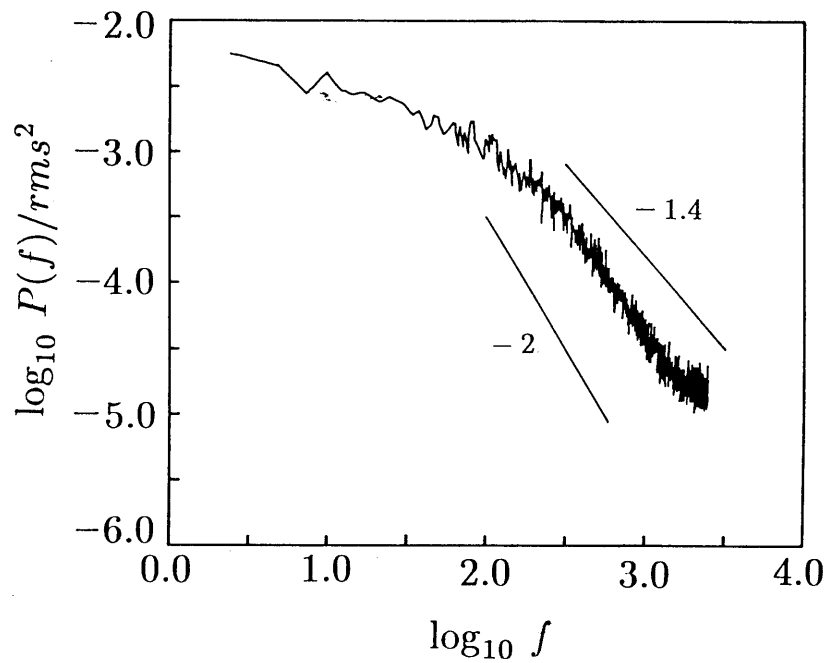


図 (3.10) 四象限分割法による第二、第四象限内の定義関数平均発生周期と、  
間欠関数の  $H'$  に対する変化 ( $y^+ = 55.94$ )

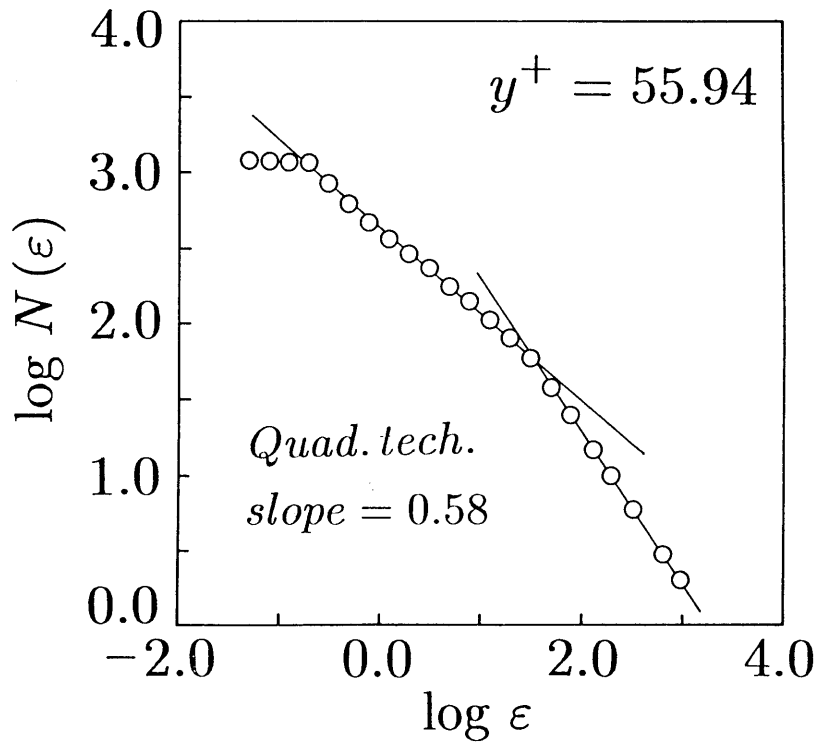


(a) Vバースト定義関数のパワースペクトル

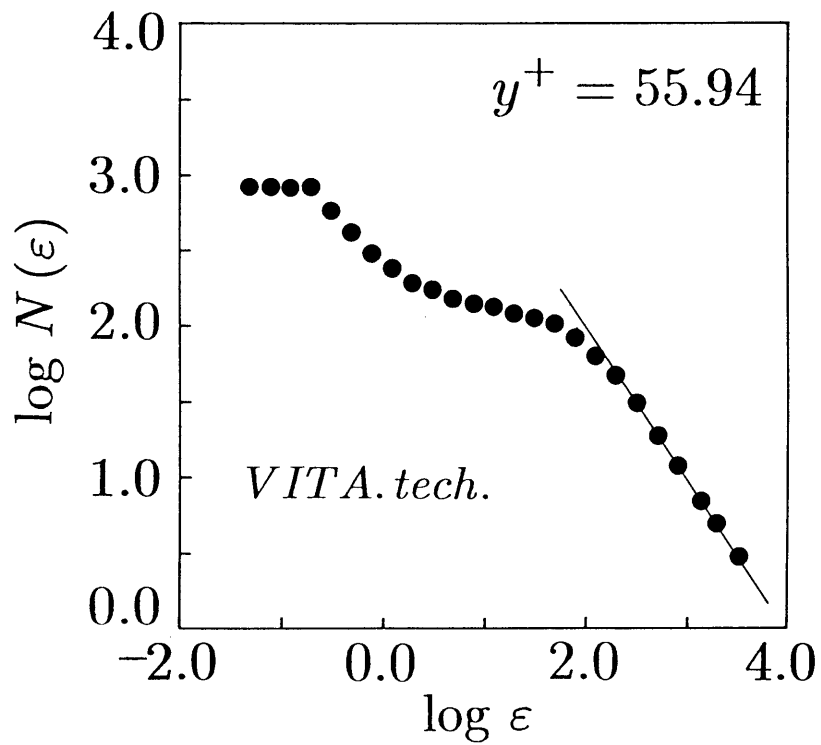


(b) Qバースト定義関数のパワースペクトル ( $H' = 2.0$ )

図 (3.11) 定義関数のパワースペクトル ( $y^+ = 55.94$ )



(a) Qバースト定義関数 ( $H' = 2.0$ )



(b) Vバースト定義関数

図 (3.12) 定義関数を B.C. 法で解析した一例



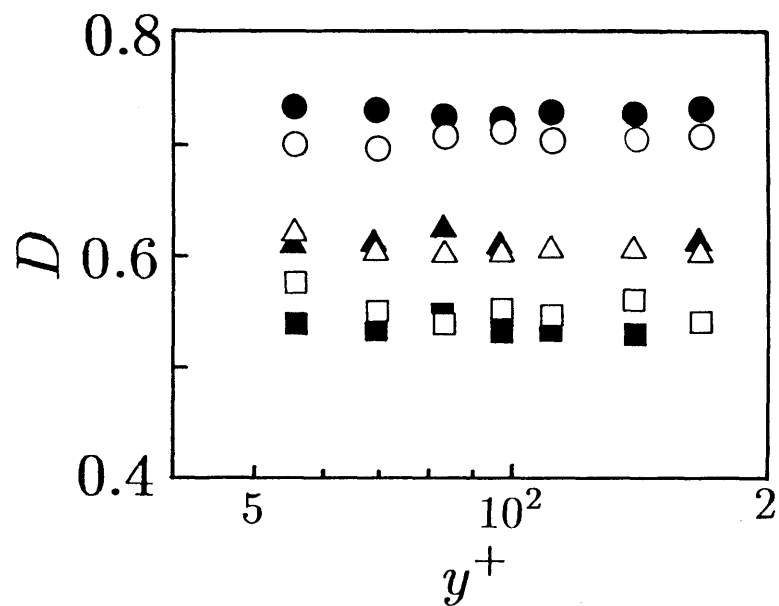


図 (3.13) 壁領域での定義関数のフラクタル次元の変化  
 [○ :  $i = 2, H' = 0$ , ■ :  $i = 4, H' = 0$ , △ :  $i = 2, H' = 1.0$ ,  
 △ :  $i = 4, H' = 1.0$ , □ :  $i = 2, H' = 2.0$ , ■ :  $i = 4, H' = 2.0$ ]

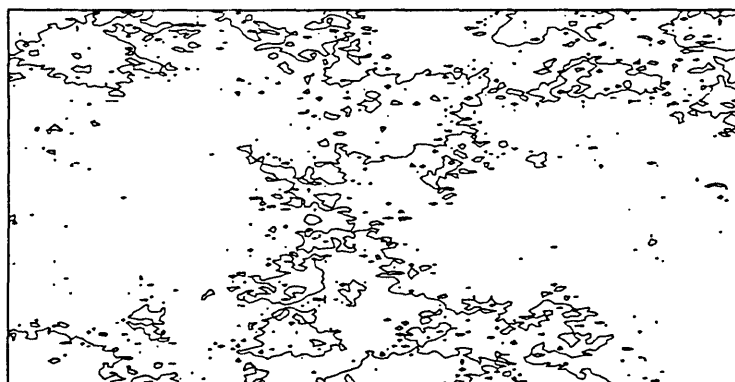
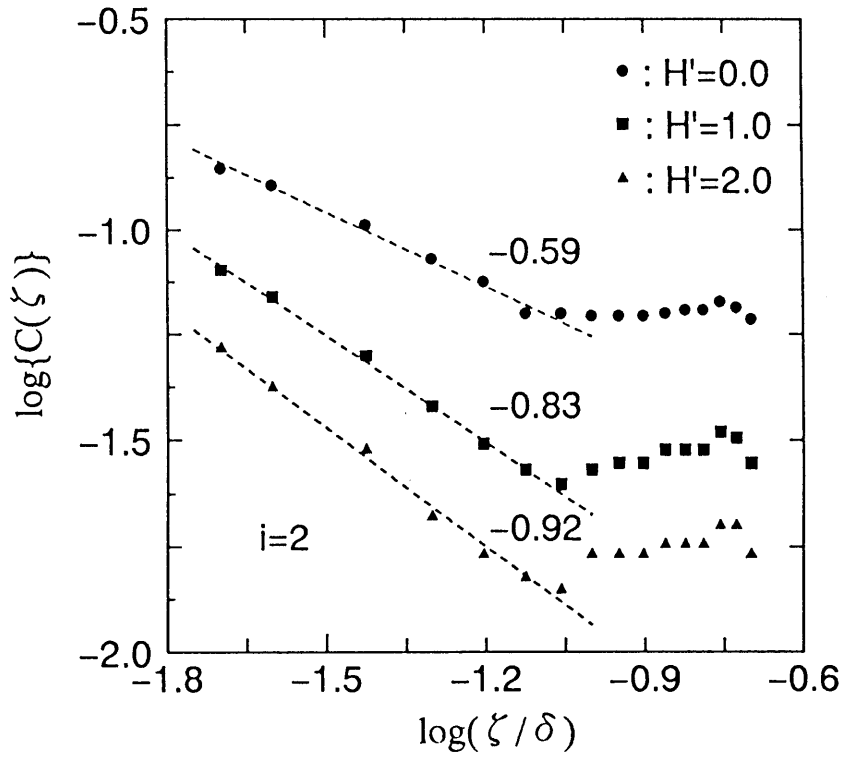
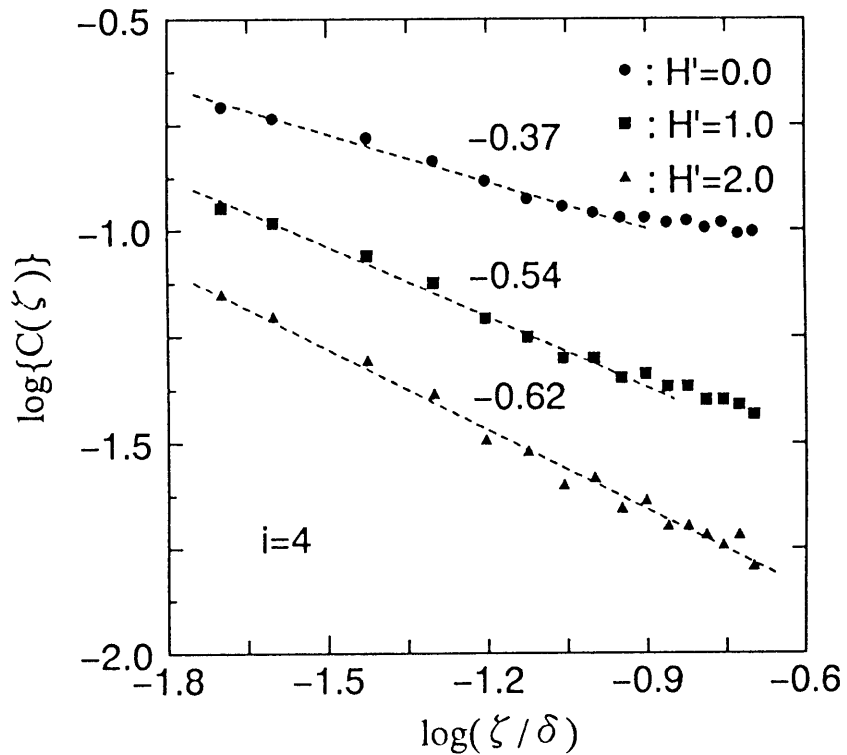


図 (3.15) 非整数ブラウン運動を用いて描かれたフラクタル構造を持つ図形



(a) 第二象限



(b) 第四象限

図 (3.14) 四象限分割における、第二、第四象限の定義関数のスパン方向への密度相関関数の変化. 図中の数字は直線部の傾きを示す

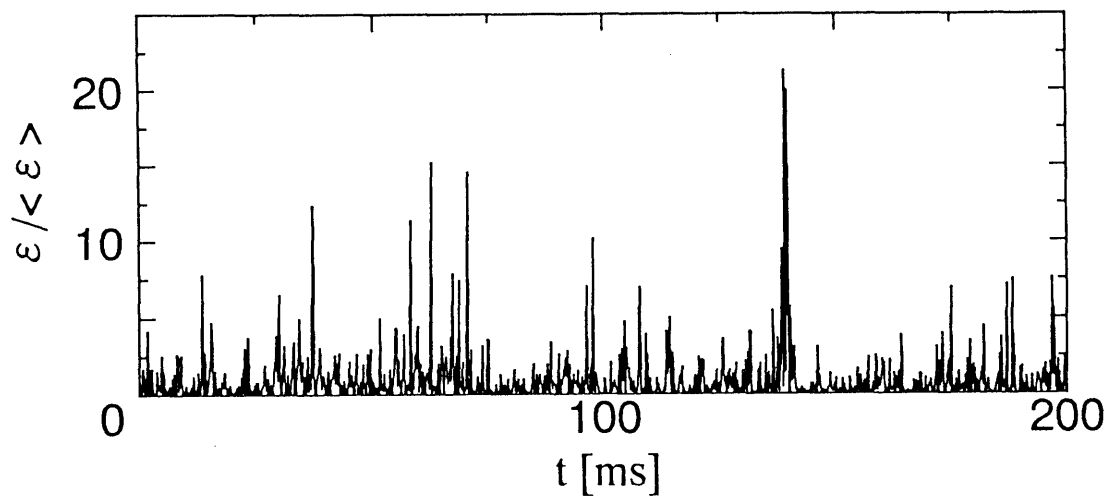


図 (3.16) 凍結乱流仮説と等方性を仮定した瞬時の散逸率 ( $y^+ = 55.94$ )

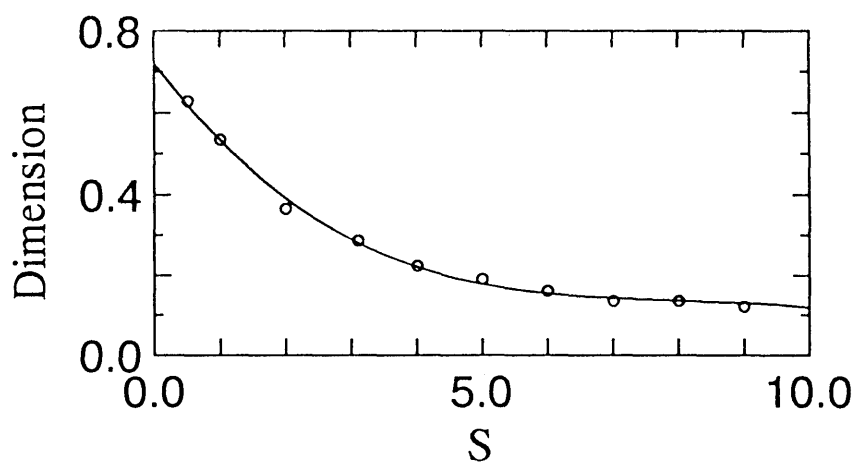
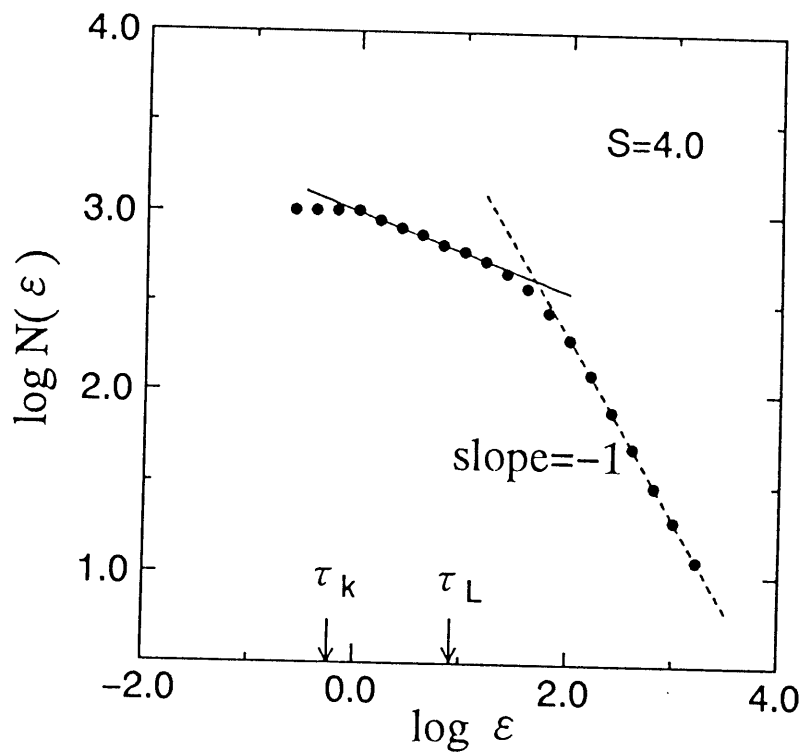
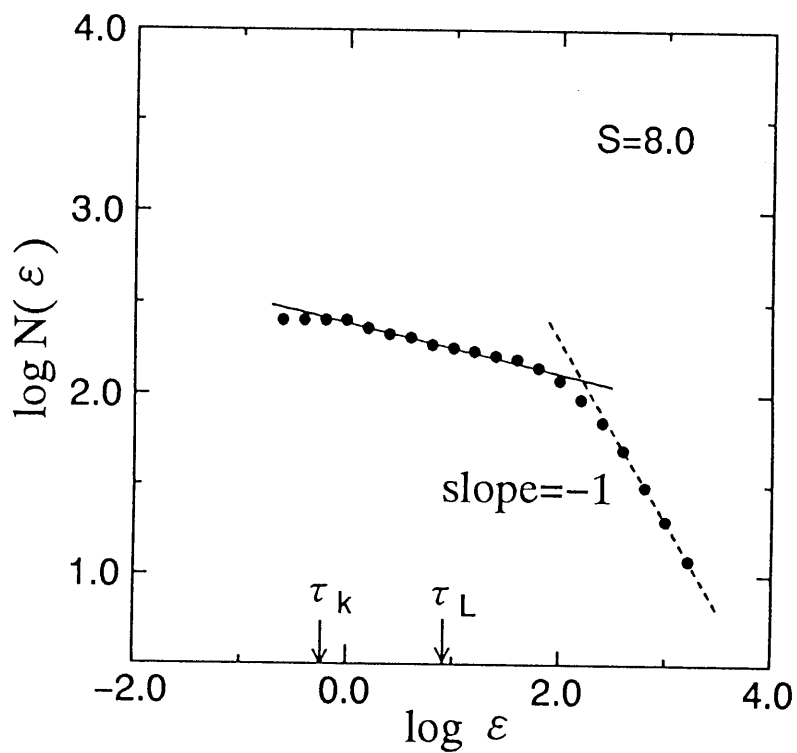


図 (3.18) 敷居値パラメータに対する次元の変化 ( $y^+ = 55.94$ )

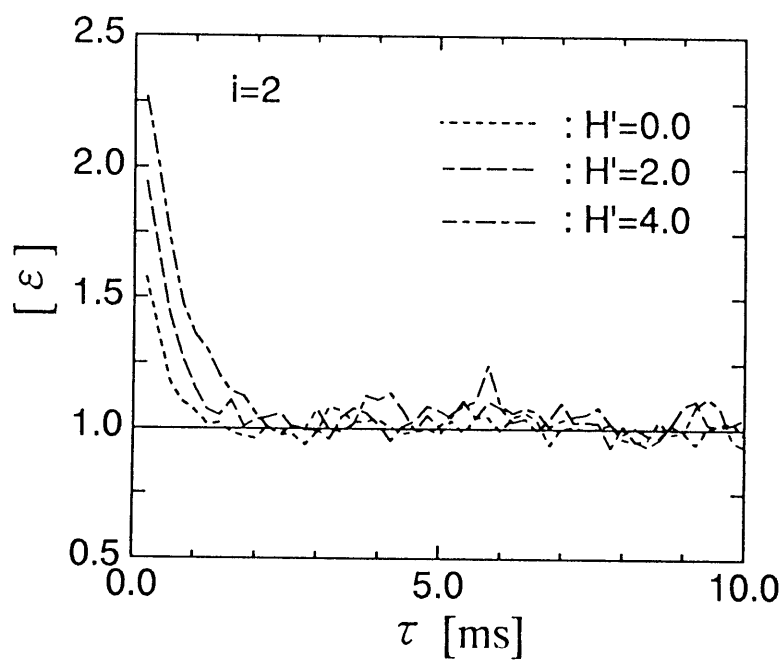


(a)  $s = 4.0$  の場合

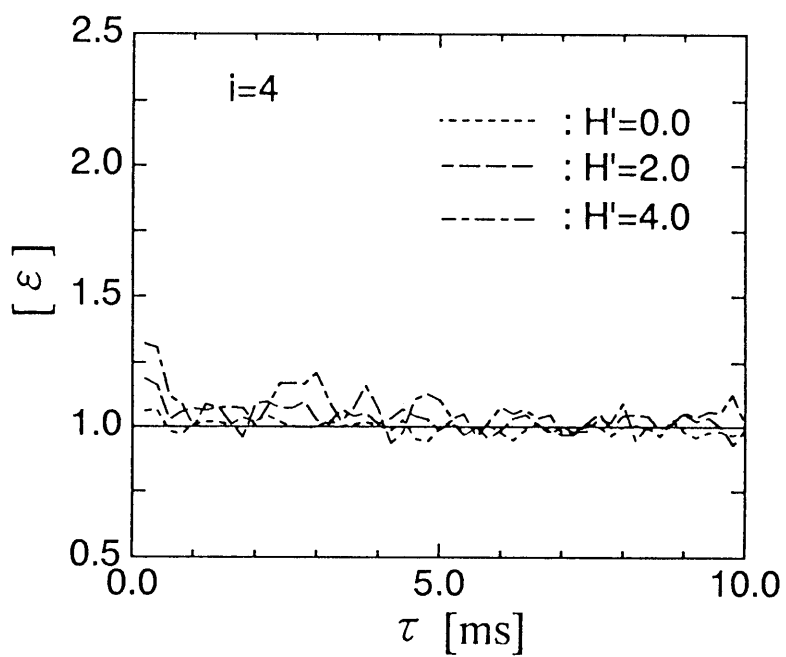


(b)  $s = 8.0$  の場合

図 (3.17) 散逸の定義関数のフラクタル性の解析 ( $y^+ = 55.94$ )



(a) エジェクション過程後の散逸率の集合平均波形



(b) スィープ過程後の散逸率の集合平均波形

図 (3.19) 散逸率の集合平均波形 ( $y^+ = 55.94$ )

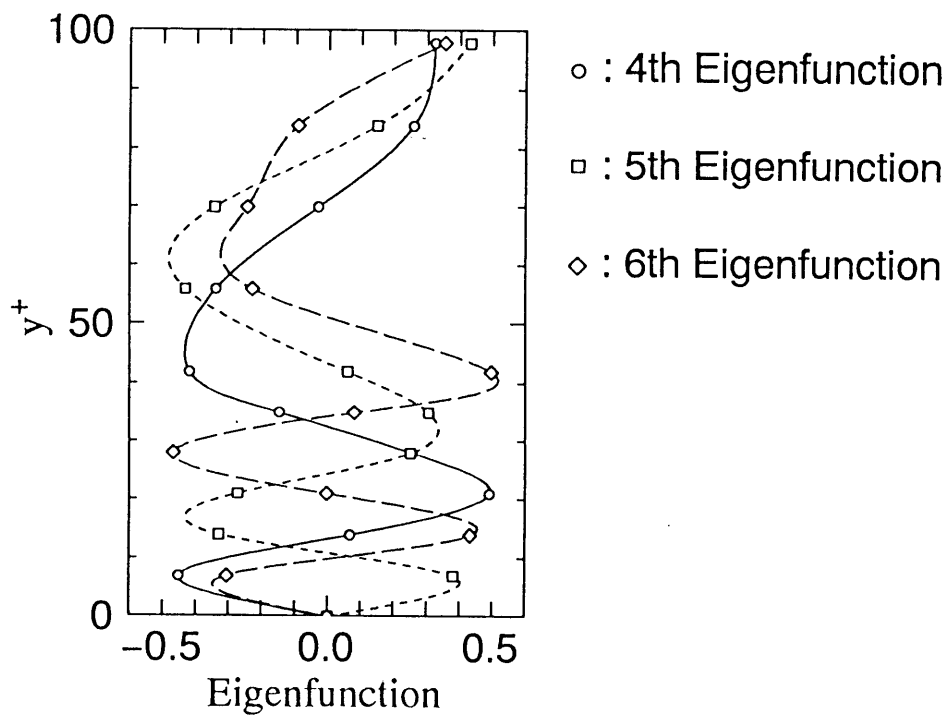
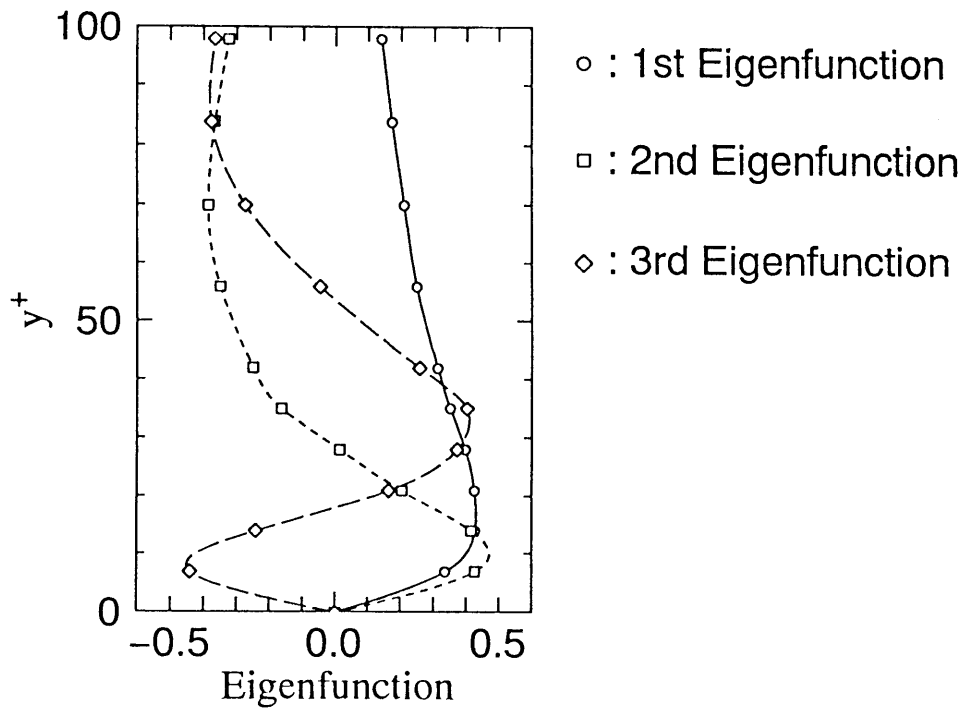


図 (3.20)  $\theta = 0^\circ$ における K.L. 展開の直交基底 (番号は固有値の大きな方から順につけてある)

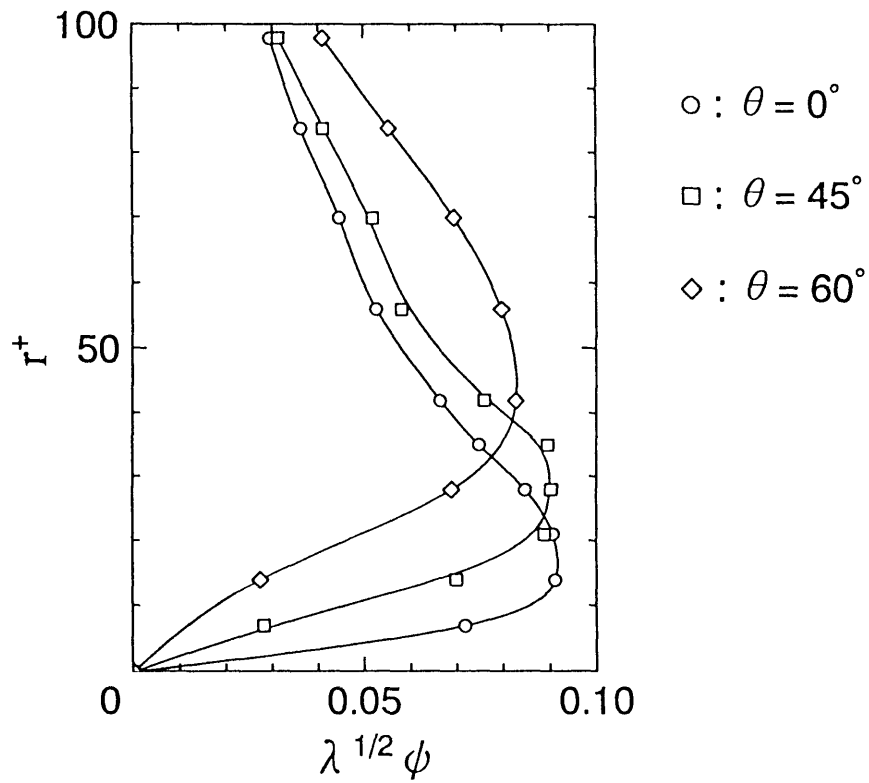


図 (3.21) 角度を変えた場合の第一基底関数の比較

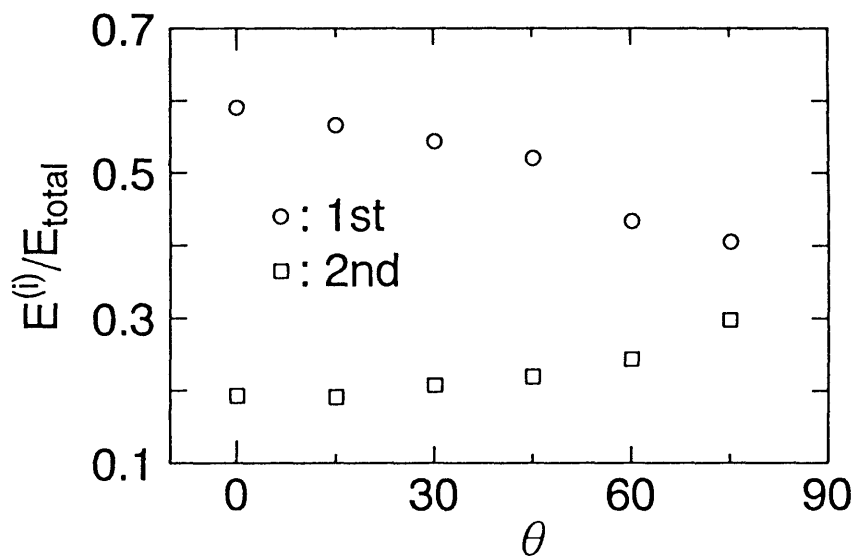


図 (3.23) 乱れエネルギーへの第一、第二基底関数からの寄与率の角度に対する変化

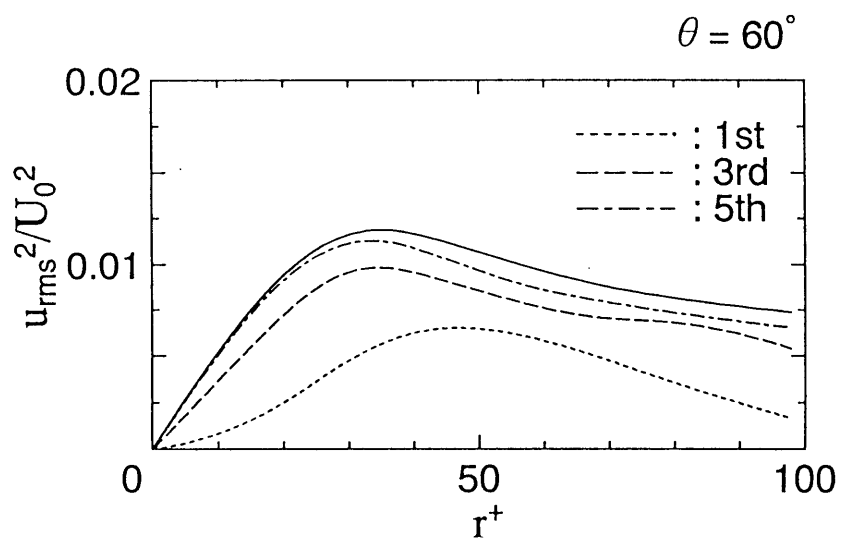
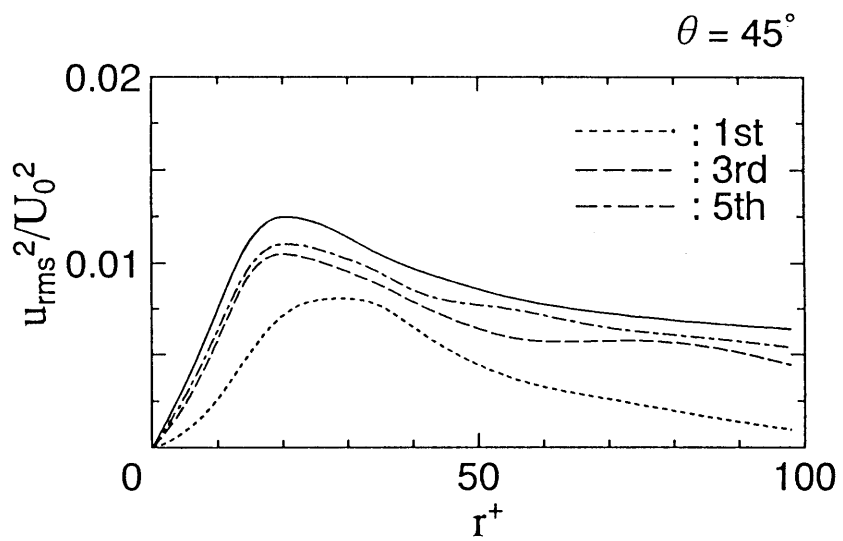
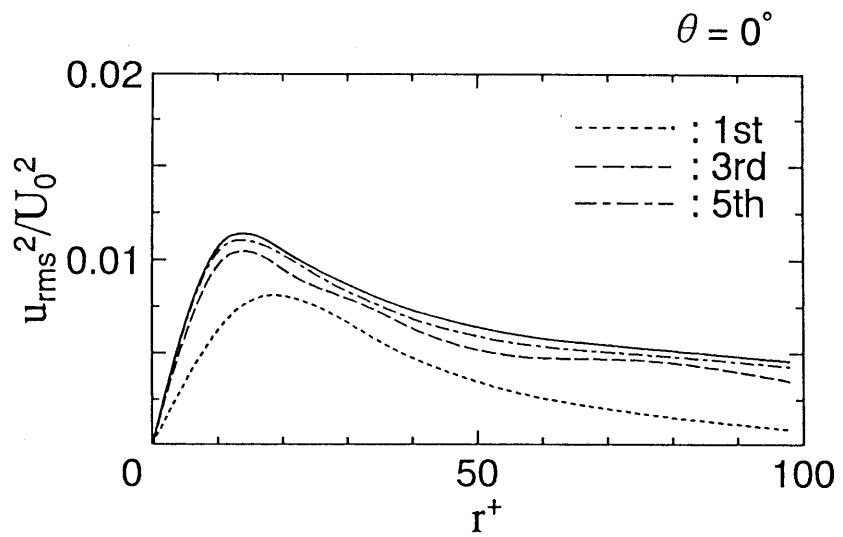
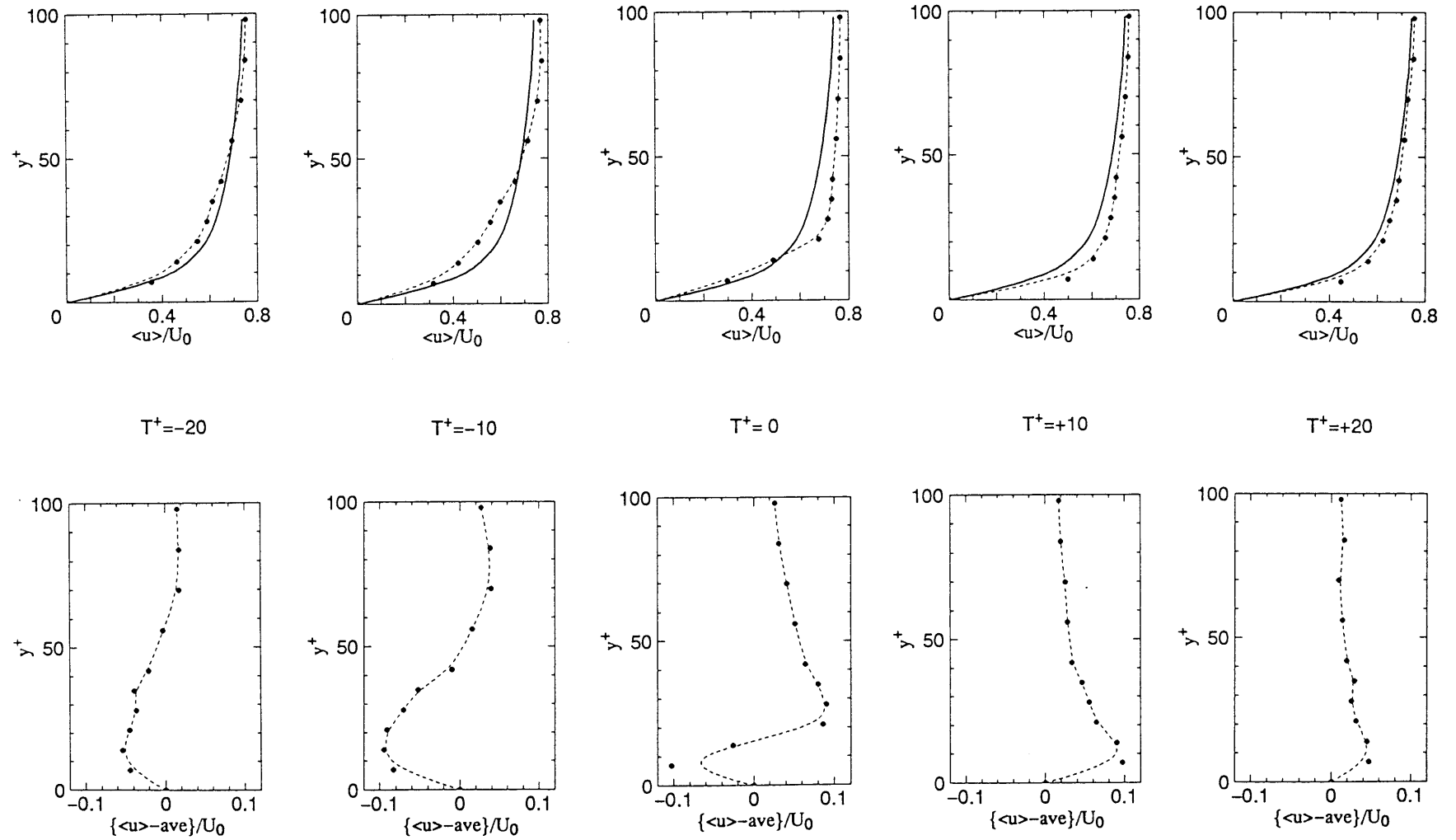
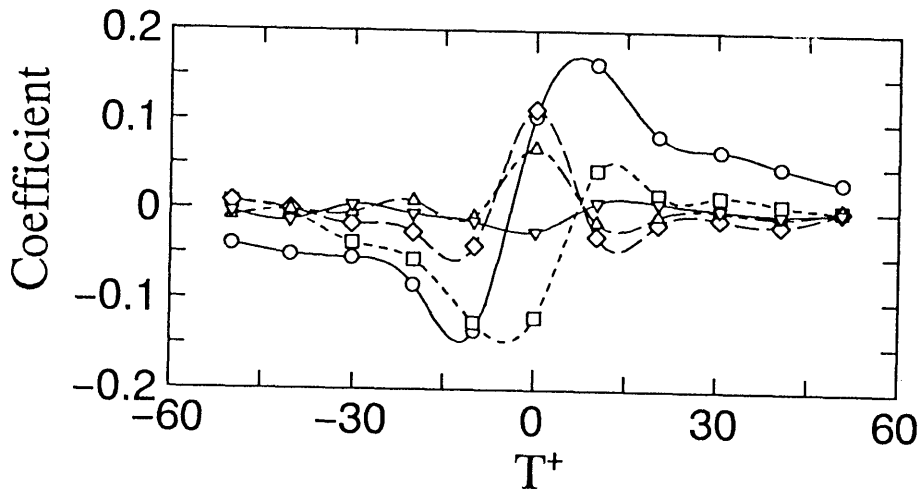


図 (3.22) 乱れエネルギー分布への各基底関数からの収束性 (実線は本来の乱れエネルギー分布、点線、波線、一点波線は各々第一、第三、第五基底までの乱れエネルギーへの寄与を示す。)

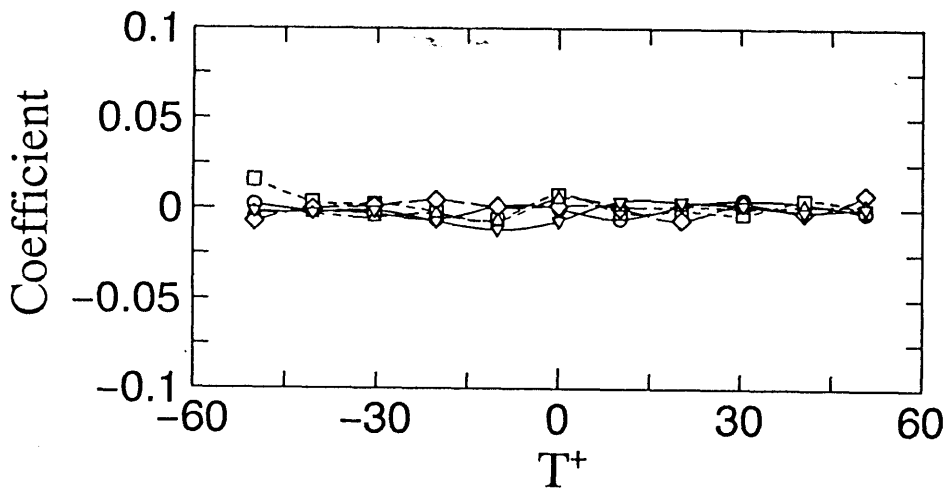


図 (3.24) VITA 法で抽出されるバーストの一周期にわたる集合平均波形



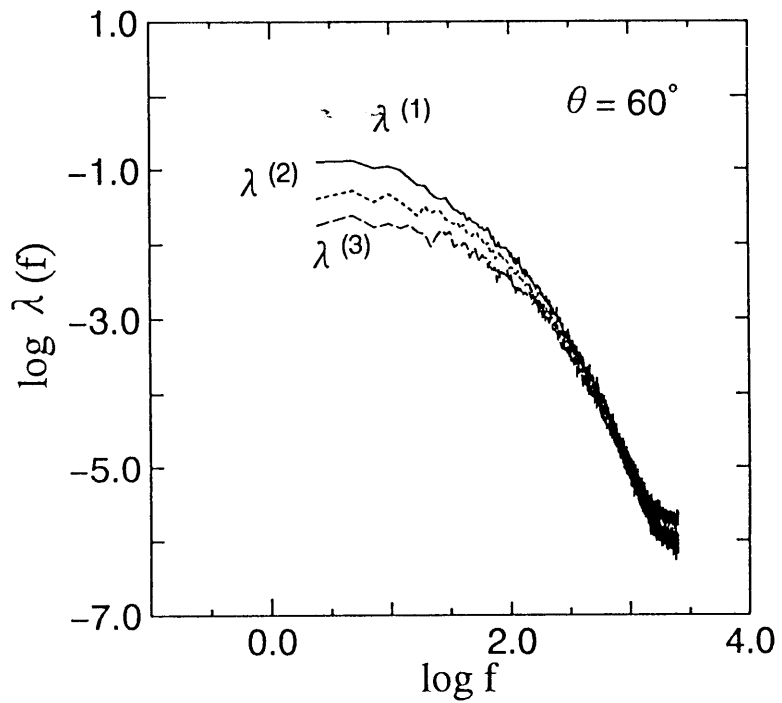
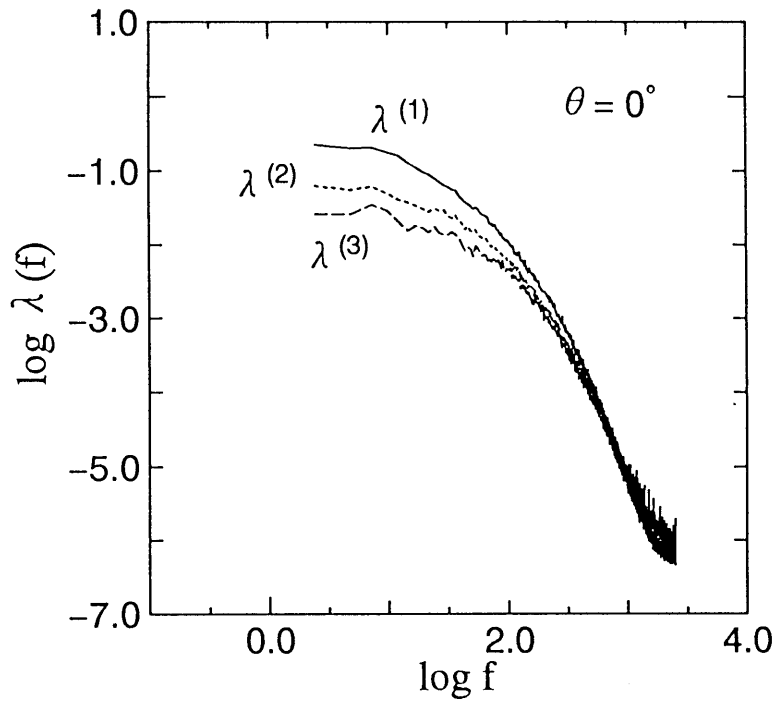


(a)  $\circ : a_1, \square : a_2, \diamond : a_3, \triangle : a_4, \nabla : a_5$



(b)  $\circ : a_6, \square : a_7, \diamond : a_8, \triangle : a_9, \nabla : a_{10}$

図 (3.25) バースト集合平均波形を K.L. 展開したときの各係数の変化. 横軸の時間はバースト期内の時間である



図(3.26) 第一、第二、第三固有値への各波数からの寄与

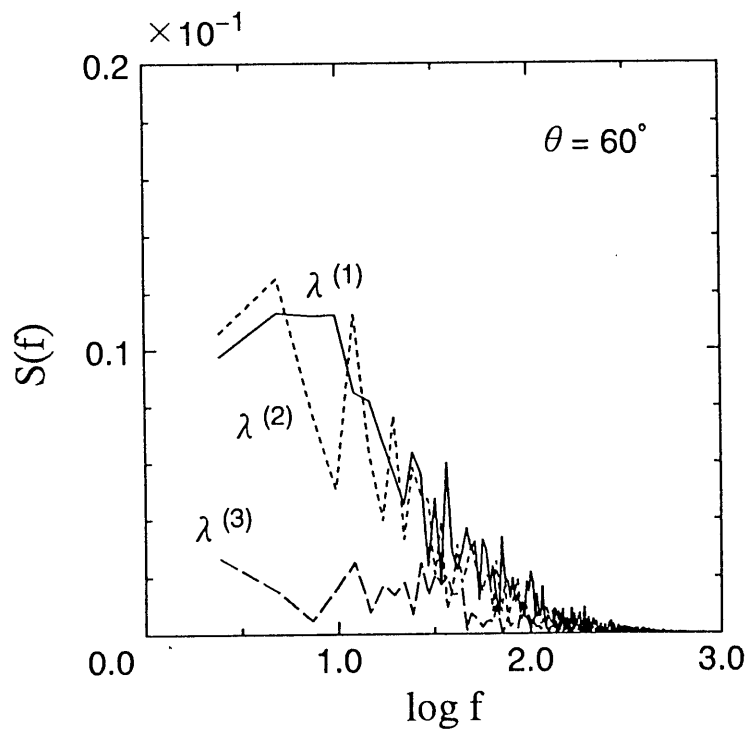
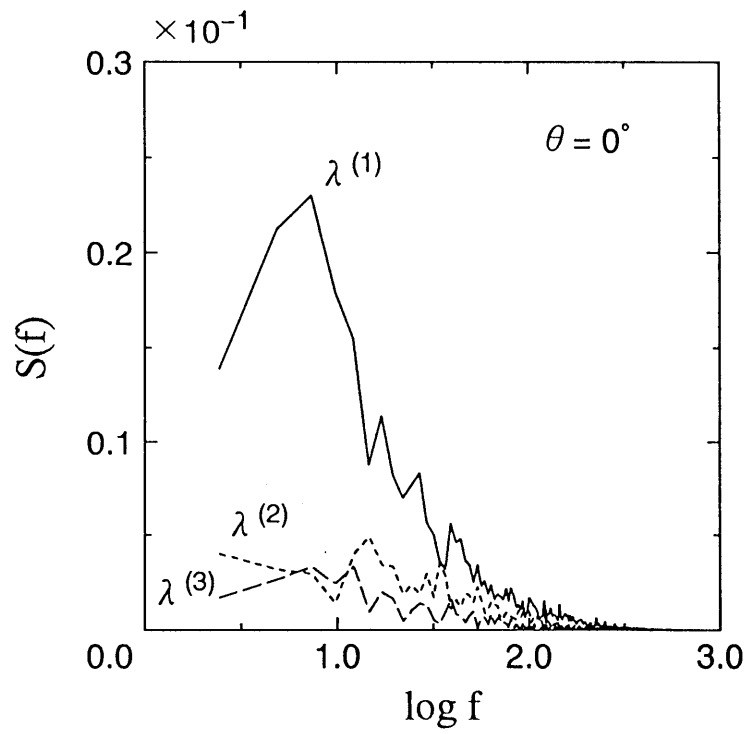


図 (3.27) パワースペクトルへの基底関数からの寄与  
( $y^+ = 41.96$ )

表 (3.1) K.L. 展開の固有値

	E i g e n v a l u e		E i g e n v a l u e
1	$45.618 \times 10^{-3}$	6	$1.194 \times 10^{-3}$
2	$14.935 \times 10^{-3}$	7	$0.654 \times 10^{-3}$
3	$8.057 \times 10^{-3}$	8	$0.492 \times 10^{-3}$
4	$3.600 \times 10^{-3}$	9	$0.336 \times 10^{-3}$
5	$2.190 \times 10^{-3}$	10	$0.189 \times 10^{-3}$

## 第4章 乱流境界層外縁の間欠的現象のカオスの解析

[辻, 1989, 1991a, 1991c, 1992c]

### 4.1 緒言

乱流境界層外縁の可視化写真により明らかに見られる乱流域と非乱流域の界面の分布 [Van Dyke, 1982] は、時間・空間的にランダムなものであり、境界層が渦度を持たない外部流体を取り込み乱流化して発達していく重要な領域として、従来より多くの実験的研究がなされてきた [Kovasznay, 1970 : Antonia, 1972 : Hedley & Keffer, 1974]。最近の研究によればこの外層部にある界面の構造には、境界層の内層部で起こるバースト現象が関係することが報告され、その重要性があらためて認識されている [Cantwell, 1981 : Robinson, 1991]。この領域の理論的研究 [Phillips, 1972 : Phillips, 1990] は困難であり、主として実験的調査がなされてきた [Paizis, 1974, 1975 : Turner, 1986]。しかし、それらの研究が主に境界層外縁における間欠係数分布や条件付き平均などの乱流統計量の解析に限られていたのに対し、乱流-非乱流界面の形の定量的評価をフラクタル概念を用いておこなうことが試みられている。乱流-非乱流界面の複雑な形はフラクタル構造を持ち、そのフラクタル次元は十分発達した乱流では、流れ場によらず、2.3 ~ 2.4 となることが報告されている [Sreenivasan, 1986a, 1989]。フラクタルが力学系の幾何学的側面を表現するものだとすれば、この結果は乱流-非乱流界面の現象を力学系的（カオスの）な観点から解析する必要性を示唆するものである [Mandelbrot, 1989]。しかし、境界層のような Open Flow 系をカオスの観点から解析した例は、あまり報告されていない [Sreenivasan, 1985 : Van Atta, 1987]。それは、流れ場自体が複雑で、特定の条件を課さない限り、既存のカオスの概念での解析は不可能なことが明かであったからである。乱流は時空カオスとして、解釈することが望まれるが [Kaneko, 1985, 1992]、それらの理論に見合うだけの実験データが得られないのも現実である。

本章では、乱流境界層外縁の間欠的現象を低自由度カオスの観点から解析をおこなっ

た。Open Flow 系でカオスが重要視されるのは、主に層流から乱流への遷移過程においてである [Sreenivasan, 1986b]。コントロール・パラメータをレイノルズ数  $Re$  数とし、 $Re$  の増加とともに、秩序（層流）から混沌（乱流）へと変化する。ここでは、コントロール・パラメータを壁からの距離  $y$  とし、一点でオイラー的に流れを観測した場合、 $y$  を外層から壁近くへと変化させると同様に層流から乱流への遷移を観測できる。この遷移過程を間欠性カオスの観点から解析をおこなった。Open-Flow 系のカオスの研究では、埋め込み次元の方法によってアトラクターを再構成したり、その相関次元を測定することがおこなわれる。間欠性カオスでは、アトラクターの構成は困難であり、ここでは他の方法での解析をおこなった。

確かに、十分発達した乱流場での自由度は非常に大きく [Constantin, 1985]、それが低自由度モデルで近似できるとは思えない。しかし、自由度ゼロの層流状態からいきなり高次の自由度への遷移が起こるとは考えづらく、その遷移過程には低自由度力学系での記述の可能性も残されている。ある特定の条件のもとで高次の力学系がそれよりも低い自由度で表せることは、例えば、自由度 3 のローレンツモデルがポアンカレ断面をとることによって、1 自由度系として表せることを思い出してほしい [Manneville, 1980]。

境界層外縁での乱流－非乱流の間欠的な分布を特徴づけるため、まず、間欠関数を定義し、これをもとに、二値値記号列  $\{S_i\}$  を構成した。記号列の意味は後述するが、 $\{S_i\}$  が間欠性カオスを生み出す離散力学系と同様な性質を示し、コントロール・パラメータの変化に対しスケール関数が存在することを明らかにした。また、統計的定式化に従い  $\{S_i\}$  のゆらぎを解析した。これにより、コルモゴロフ・エントロピー、エスケープレート、オーダーパラメータなど、従来とはまったく異なった観点から乱流の情報を得ることが可能となった。コルモゴロフ・エントロピーは内層に向かうに従って増加する。これは予測不可能性の増大を意味し、物理的には壁に近づくほど乱流状態の割合が増えることに対応する。また、外縁ほど小さなエスケープレートが存在する。これは境界層外縁での現象が、間欠性カオスと同様の性質を持つことを示唆するものである。

## 4章で用いた主な記号

$\bar{u}$  : 主流方向瞬時速度

$u$  : 主流方向変動速度

$U_0$  : 層外主流平均速度

$\delta$  : 境界層厚さ

$TH$  : 間欠関数決定のための敷居値

$N$  : 平滑化個数

$k$  : 二値化記号列  $S_i$  を構成する時のステップ数、式 (4.6)

$\Delta t$  : サンプルング時間 (= 0.2 ms)

$T_M$  : テイラーのマイクロスケール

$\Gamma$  : 間欠係数、式 (4.4)

$I_i$  : 間欠関数、式 (4.3)

$f_R$  : 乱流塊周波数、式 (4.5)

$S_i$  : 二値化記号、式 (4.6)

$\{S\}_n : \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

$P(\ell)$  : 非乱流領域  $\ell$  の確率密度関数

$p(\{S\}_n)$  : 記号列  $\{S\}_n$  をとる確率

$f(X)$  : 間欠性一次元写像、式 (4.7), (4.8)

$\varepsilon$  : 一次元写像のコントロールパラメータ、式 (4.8)



$X_c$  : 次元写像の乱流／非乱流の数居値

$Z$  : 間欠性写像の指数

$g_Z$  : 確率密度  $P(\ell)$  のスケール関数、式 (4.15)

$K$  : コルモゴロフ・エントロピー

$\psi(q)$  :  $q$  で重みをつけられたオーダーパラメータ

$\alpha$  : エスケープレート

## 4.2 実験条件及びデータ解析法

### 4.2.1 実験条件

本研究で解析の対象とした乱流境界層は、圧力勾配の無い平板乱流境界層である。層外主流の平均速度は  $U_0 = 5.0 (m/s)$  に設定した。境界層厚さは  $\delta = 40.0 (mm)$ 、それにもとづくレイノルズ数  $Re_\delta = 1.4 \times 10^4$  である。速度信号は前縁より  $1900 (mm)$  の位置で熱線風速計 (HAYAKAWA, model HC-30) により測定された。出力は A/D コンバータ (Micro Science, DAS-1898BPC) により  $5 kHz$  で離散化した後フロッピーディスクに保存し、その後の解析はこれらの離散データを用いておこなった。測定は銅メッキを施した直径  $5 (\mu m)$ 、長さ  $1 (mm)$  のタンゲステン線を用い I 型プローブを作成しておこなった。クラウザー線図法により求められた壁面摩擦係数  $C_f$  及び、摩擦速度は  $u_*$  は、 $C_f = 3.97 \times 10^{-3}$ 、 $u_* = 0.224 (m/s)$  である。

### 4.2.2 間欠関数の決定

境界層外縁での間欠的な界面の分布は、間欠関数によって大まかにとらえることができる。間欠関数の構成は従来から困難な課題であり、その一意的な方法はない [Hedley & Keffer, 1974b]。流れ場や実験条件によって最適な方法を選ぶ必要がある。しかし、今回注目したのは、境界層外縁の乱流／非乱流の分布が速度信号を見ても明確に区別できる領域である。それゆえ、用いる方法の違いによって得られる結果が大きくかわることはない。

乱流領域の判断基準は、渦度の大きさにおくのが最も妥当である。渦度を求めるには瞬時速度の各軸方向の微係数が必要である。ここでは各微係数が同程度の大きさを持つと仮定し [Rotta, 1962]、さらに凍結乱流仮説を用いて、流れ方向の時間微分が渦度に比例するとし、検出関数 (detective function) を構成した。離散化データの  $i$  番目の位置におけ

る速度変動の時間微分を差分で置き換え

$$\left| \frac{d\tilde{u}}{dt} \right|_i = |\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i| / \Delta t, \quad (4.1)$$

とした。 $\Delta t$  はサンプリング時間である。次に、ノイズや小スケールの変動を除去するため、注目した点の前後  $N$  点での平滑化をおこなった。

$$\left\langle \left| \frac{d\tilde{u}}{dt} \right| \right\rangle_i = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \left| \frac{d\tilde{u}}{dt} \right|_{i-N+j}. \quad (4.2)$$

これは乱流域と非乱流域の区別をより明確にするためにおこなわれるものであり、本来コルモゴロフ・スケール程度の大きさでおこなわれる必要がある。しかし、実際は熱線や測定器の誤差等を考慮し、ある程度大きな値でおこなわれる [Hedley & Keffer, 1974b]。式 (4.2) は評価関数 (Criterion function) と呼ばれる。

以上より離散点  $i$  における間欠関数は、以下のようになる。

$$I_i = \begin{cases} 0 & ; \left\langle \left| \frac{d\tilde{u}}{dt} \right| \right\rangle_{i-1} \leq TH \quad \text{and} \quad \left\langle \left| \frac{d\tilde{u}}{dt} \right| \right\rangle_i \leq TH, \\ 1 & ; \text{otherwise} . \end{cases} \quad (4.3)$$

$I_i = 1$  は乱流状態、 $I_i = 0$  は非乱流状態を表す。ここで、平滑化個数  $N$  と数居値  $TH$  の一意的な決定は困難である。そこで本解析では、間欠関数から以下のように計算される、

$$\Gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i, \quad (4.4)$$

$$f_R = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n (1 - I_i) I_i, \quad (4.5)$$

間欠係数  $\Gamma$  及び乱流塊周波数  $f_R$  が、過去におこなわれた主な実験値とよく一致するようにパラメータ  $N$  と  $TH$  を決定した。すなわち間欠係数は Klebanoff[1954] により求められた値に一致させ、乱流塊周波数は Hedley & Keffer[1974a] と Kovaszny[1970] らが与えた値の間に落ち着くようにした。図 (4.1) にここで用いた間欠関数決定の過程を示す。ただし、 $N$  と  $TH$  の組み合わせは幾種類もあり、その代表的なもの全てについて解析をおこなった。

### 4.2.3 二値化記号列の構成

乱流境界層外縁における乱流域と非乱流域の間欠的な分布を捉えるため、間欠関数から記号列  $\{S_i\}$  を以下のように構成する。

$$S_i = I_{k \cdot (i-1) + 1}, \quad k = [T_M / \Delta t] \quad (4.6)$$

以後、流れとの対応から  $S_i = 1$  を乱流状態、 $S_i = 0$  を非乱流状態と呼ぶことにする。ただし、 $T_M$  は各測定位置において、主流方向速度の自己相関係数から求められるテイラーのマイクロスケール、 $\Delta t$  はサンプリング時間 ( $0.2 \text{ ms}$ )、 $[ \ ]$  はガウス記号 (実数  $X$  に対して、 $[X]$  は  $X$  を越えない最大の整数) である。整数  $k$  は、境界層外縁 ( $y/\delta > 0.9$ ) では 5 から 7 であった。 $k = 1$  のとき、記号列  $\{S_i\}$  は間欠関数に一致する。しかし、間欠関数を構成したときの離散化時間は、あくまで A/D 変換による人為的なものであり、流れ場の特徴を表すためにはその流れ場に特有のスケールで離散化する必要がある。このことは、例えば埋め込み次元の方法によってアトラクターを再構成する際、適切な時間間隔をとる必要があることに対応している [Broomhead, 1989 : 佐野, 1987]。マイクロスケールはその意味で、流れ場の単位として妥当な離散化時間を与えてくれる。容易に予想できるように、 $k$  が極端に大きい場合や小さい場合には、 $\{S_i\}$  はランダムな記号列になる。以後  $k\Delta t$  を記号列の離散化時間と呼ぶ。

### 4.2.4 間欠的二次元写像

今日の爆発的なカオス研究の発端は、ロバート・メイの数値実験とリーとヨークの数学的考察である [山口, 1986]。彼らが扱った方程式は、ロジスティック方程式と呼ばれ、個体群生物学の分野から生まれた微分方程式である。彼はこの微分方程式を差分化し、今日の一般的な形 (二次元力学系) において解析をおこなった。カオスを数学的に扱ったリー・ヨークの定理が生まれる経緯には、たいへん興味深い話がある。これについては、山口

[1986]の著書に詳しく書かれている。カオスが注目を集めた最大の要因は、一次元写像の様な簡単な力学系からも複雑な振る舞いを生み出せることである [Devaney, 1986]。

カオスへいたる道筋には、(1) 周期倍分岐、(2) 間欠性カオス、(3) 準周期からカオス、(4) 不連続転移がある。ここでは間欠性カオスに注目した。それはコントロール・パラメータの変化に対する系の状態が、我々が扱う境界層外縁の現象に類似しているためである。間欠性カオスは、軌道が安定領域とカオス領域を交互に間欠的に行き交い、外部パラメータの変化によって最終的にカオスへと遷移する過程である。このとき、固定点まわりの軌道が不安定化する仕方によって三種類：Type I, Type II, Type III に分類される [Manneville, 1979 : Pomeau, 1980]。ここでは Type-III の間欠性カオスを一般化し、以下の写像を考察しよう。

$$X_{i+1} = f(X_i), \quad (4.7)$$

$$f(X) = \begin{cases} (1 + \varepsilon)X + uX^Z, & \text{for } 0 \leq X \leq X_c, \\ (1 - X)/(1 - X_c), & \text{for } X_c \leq X \leq 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

ここで  $Z$  は 1 より大きな変数、 $\varepsilon$  はコントロール・パラメータである。 $u$  は定数で、 $u = 1$  とした。 $u$  の値によって写像の本質が変わることはない。 $f(X)$  は、 $X_c$  で連続である。すなわち、 $(1 + \varepsilon)X_c + uX_c^Z = 1$  である。軌道  $X_i$  は  $[0, 1]$  で定義され、ラミナー領域 ( $0 \leq X_i \leq X_c$ ) と乱流領域 ( $X_c < X_i \leq 1$ ) に分割される。”ラミナー”という言葉は、間欠性カオスの解析では良く用いられる言葉である [Schuster, 1988] が前節の間欠関数の定義で用いた、”非乱流”と同様な意味である。ここでは実験との対応を重視し、”非乱流”を用いる。

図 (4.2) に一次元写像を示す。細い実線で示されたのが、軌道  $\{X_i\}$  の軌跡である。乱流領域に入った軌道は、式 (4.8) の下段の写像によって非乱流領域に再投入される。原点近傍に入った軌道は、再び乱流状態になるまでに多くの写像を繰り返さなければならない。これは長い非乱流状態が継続することにあたる。

再投入の仕方は、 $[0, 1]$  にまったくランダムにおこなえばよい。十分に長い軌道を考えれば、エルゴード性より式 (4.8) の下段の写像による再投入は”ランダムな再投入”と等価である (後に述べる数値シミュレーションでは、 $[0, 1]$  区間に等確率で再投入した)。

すなわち、乱流領域に入った軌道は確率  $X_c$  で非乱流領域の初期値、確率  $1 - X_c$  で乱流領域の初期値  $X_0$  が与えられ、軌道が再開する。

図 (4.3) に軌道の様子を示す。横軸にステップ数、縦軸は軌道  $\{X_n\}$  の値である。横軸と平行にひかれた実線の値は  $X_c$  である。この数居値  $X_c$  より上が乱流状態にあたる。コントロール・パラメータ  $\varepsilon$  を小さくすれば、写像  $f(X)$  と直線  $X_i = X_{i+1}$  との間のできる原点近傍の隙間が狭くなることになる。ここに再投入された軌道は、多くの写像を繰り返さないで再び乱流状態にはならず、つまり、長い非乱流状態を構成できる。一方、 $\varepsilon$  を大きくすれば、原点近傍に再投入された軌道も頻繁に乱流状態を実現できる。

軌道  $X_n$  から、二値化列  $\{S_i\}$  は以下のように構成する。

$$S_i = \begin{cases} 0 & : 0 \leq X_i \leq X_c \\ 1 & : X_c < X_i \leq 1 \end{cases}, \quad (4.9)$$

ここで、記号列  $\{S_i\}$  はセミ・マルコフ過程になる。すなわち、非常に長い非乱流状態 ( $S_i = 0$ ) は互いに長い相関 (long correlation) を持つが、希に起こる各乱流状態 ( $S_i = 1$ ) がマルコフ過程である。以後、 $S_i = 0$  の状態が続く期間を非乱流領域と呼ぶ。非乱流領域の長さ  $l$  の確率密度関数を  $P(l)$  とすると、セミ・マルコフ過程は確率  $P(l_1 + l_2)$  が、 $P(l_1) \cdot P(l_2)$  と表せないことである。

次に、確率密度関数  $P(l)$  を導出してみる。 $P(l)$  は、初期値  $X_0(l)$  と関係式:  $P(l)dl = p(X_0)dX_0$  によって結ばれる [Schuster, 1988]。ここで、初期値をとる確率は  $p(X_0) = 1/X_c$  である。それゆえ、

$$P(l) \propto \left| \frac{dX_0(l)}{dl} \right|. \quad (4.10)$$

$X_0(l)$  は軌道が非乱流領域  $l$  の後に、 $X_c$  よりも大きくなり、再投入されたときの初期値である。この逆写像  $l(X_0)$  を得るために、式 (4.8) における差分  $X_{i+1} - X_i$  を微分  $dX/dl$  で近似する。

$$\frac{dX}{dl} = \varepsilon X + X^Z. \quad (4.11)$$

ここで特に注目しているのは、長い非乱流領域の分布である。すなわち、それは小さな  $X_i$  の変化が続くことであるから、この近似の妥当性は保証される。上式の積分を実行す

ると、

$$\ell(X_0) = \int_{X_0}^{X_c} \frac{1}{\varepsilon X + X^Z} dX = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \ln \left( \frac{X_c}{X_0} \right) - \frac{1}{Z-1} \ln \left( \frac{X_c^{Z-1} + \varepsilon}{X_0^{Z-1} + \varepsilon} \right) \right], \quad (4.12)$$

すなわち、

$$X_0(\ell) = \frac{\varepsilon^{1/(Z-1)} X_c}{[(X_c^{Z-1} + \varepsilon)e^{(Z-1)\varepsilon\ell} - X_c^{Z-1}]^{1/(Z-1)}}. \quad (4.13)$$

式(4.10)より、十分小さな $\varepsilon$  ( $X_c \gg \varepsilon$ ) に対して

$$P(\ell) = C \ell^{-Z/(Z-1)} g_Z(\varepsilon\ell), \quad (4.14)$$

ここで、 $C$ は正規化のための定数であり、 $C = (Z-1)^{1/(Z-1)}$ である。 $g_Z$ はスケーリング関数であり、

$$g_Z(X) = \frac{X^{Z/(Z-1)} e^{(Z-1)X}}{(e^{(Z-1)X} - 1)^{Z/(Z-1)}}. \quad (4.15)$$

$g_Z$ の極限的ふるまいは、

$$g_Z(X) \sim \begin{cases} (Z-1)^{-Z/(Z-1)}, & \text{for } X \ll 1, \\ X^{Z/(Z-1)} e^{-X}, & \text{for } X \gg 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

確率密度関数  $P(\ell)$  は、 $\ell < \ell_c$  で  $\varepsilon$  によらず、指数  $r = Z/(Z-1)$  のべき法則を満たす。これは間欠性カオスの普遍則である [Schuster, 1988 : Procaccia, 1983]。

式(4.8)において  $Z = 4$  としたときの直接数値計算 ( $10^9$  ステップ) から、記号列  $\{S_i\}$  を構成し、非乱流領域の確率密度関数  $P(\ell)$  を計算した結果を図(4.4)に示す。ほぼ横軸上に立てられた矢印の範囲でべき乗則が成り立ち、その傾きは  $-Z/(Z-1) = -4/3$  である。矢印の意味については後ほど説明する。図(4.5)はスケーリング関数  $g_Z$  である。 $\varepsilon$  の変化に対して十分よく  $P(\ell)$  がスケールされている。以上の結果から考えて、上記の近似の妥当性が確認できる。

非乱流領域の平均値  $\langle \ell \rangle$  は、以下で与えられる。

$$\langle \ell \rangle = \int_1^\infty P(\ell) d\ell. \quad (4.17)$$

$$\langle \ell \rangle = \begin{cases} 1/(2-Z) & : 1 < Z < 2, \\ A\varepsilon^{-(Z-2)/(Z-1)} & : 2 < Z. \end{cases} \quad (4.18)$$

ここで、 $A$  は正の定数である。特に  $Z = 2$  の場合には、 $\langle \ell \rangle \sim -\ln \varepsilon$  となる。

#### 4.2.5 記号列のゆらぎの評価

乱流域と非乱流域の間欠的な分布は、先に定義した記号列  $\{S_i\}$  で捉えることができる。長さ  $n$  の記号列  $\{S\}_n = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n\}$  の存在確率を  $p(\{S\}_n)$  とする。  $n$  を一定にしたとき、この確率を見積もる量として  $\gamma$  を導入する： $p(\{S\}_n) \sim \exp(-n \cdot \gamma)$ 。同じ指数  $\gamma$  を持つ記号列  $\{S\}_n$  の数を  $N(\gamma)$  とすると、十分大きな  $n$  に対して、 $N(\gamma)$  は指数的に増大していく [Sano, 1986 : Sato, 1990]。それゆえ、 $N(\gamma)$  を指数  $h(\gamma)$  によって評価する： $N(\gamma) \sim \exp(n \cdot h(\gamma))$ 。  $\gamma$  の意味は、一次元マップにおける局所の軌道拡大率である。一方  $h$  はそのような拡大率をもった軌道が、 $n$  の増加と共にどの様に指数的に増大するかを示したものであるから、力学系のエントロピーに相当する。指数  $\gamma$  は一定ではなく、記号列  $\{S\}_n$  によって異なる。この指数  $\gamma$  の揺らぎについて考えてみよう。従来からゆらぎの解析には、その平均・分散値、確率密度、パワースペクトル等を調べることがなされてきた。しかし、ここでは別の観点から考察をしてみる。  $\gamma$  と  $h$  の定義において、 $\exp(-n)$  を第1章のマルチフラクタルの説明のところで用いた  $l$  と置き換えれば、それは、マルチフラクタルの定式化そのものである。つまり、指数  $\gamma$  を持った軌道がフラクタル次元  $h(\gamma)$  で分布し、このフラクタル構造の多重構造として全体の軌道の分布を特徴づけることができるわけである [Eckmann, 1986 : Sano, 1986]。結局そのような軌道を見いだせる確率は、

$$\exp(-n\gamma) \cdot \exp(nh(\gamma)) = \exp\{-n(\gamma - h(\gamma))\}, \quad (4.19)$$

となる。指数

$$\alpha(\gamma) = \gamma - h(\gamma), \quad (4.20)$$

をエスケープレートといい、非負の値をとる。  $\alpha > 0$  のとき、指数  $\gamma$  を持つ記号列  $\{S\}_n$  を見いだす確率 ( $\propto \exp(-n\alpha)$ ) は、 $n$  の増加とともに無限小になる。それゆえ、 $h = \gamma$  の特別な点を除いては記号列を観測することはできない。このような小さな確率を持った記号列を取り出すためにも、マルチフラクタルの定式化が有効になる。



以下、 $h(\gamma)$  と  $\gamma$  の導出について簡単に説明する [Sato, 1990]。マルチフラクタルの定式化は、第 1 章で説明したように分配関数を用いておこなう方法が一般的である。ここでもまず、その方法に従い以下の分配関数を定義する。

$$Z_n(q) = \sum_{\{S\}_n} [p(\{S\}_n)]^q . \quad (4.21)$$

和は全ての可能な記号列  $\{S\}_n$  についてとる。 $q$  は統計力学との対応を考えると、温度の逆数にあたる。 $q$  が負の時には小さな確率が強調され、正の時はその逆である。つまり、 $q$  は確率を強調して取り出すためのパラメータと考えられる。 $n$  が十分大きい場合、

$$Z_n(q) \sim \exp \{-f(q) \cdot n\} , \quad (4.22)$$

$$f(q) = (q - 1)K_q , \quad (4.23)$$

と見積られる。 $K_q$  は  $q$  次のレニ-エントロピーであり、特に  $q = 1$  の時コルモゴロフ・エントロピー  $K$  と呼ばれる。これは力学系が持つ平均の情報量生成の割合として定義される [Schuster, 1988]。例えば、定常運動に対してはその値はゼロとなる（何故なら、先の運動は完全に予測可能だから）。一次元力学系では、 $K$  は正のリアプノフ指数に対応する。つまり、隣接する 2 点間の  $n$  回写像後の距離を  $d(n)$  とすると、 $d(n) \sim \exp(n \cdot K)$  である。コルモゴロフ・エントロピーが大きいほど、カオスの特徴である予測不可能性が增大する割合は速い。

次に、 $f(q)$  をルジャンドル変換することによって、指数  $h$ 、 $\gamma$  は  $q$  の関数として、

$$\gamma(q) = df(q)/dq , \quad (4.24)$$

$$h(q) = q\gamma(q) - f(q) , \quad (4.25)$$

と求まる。 $q$  を連続的に変化させることによって得られる曲線が、 $h - \gamma$  スペクトルと呼ばれる [Sano, 1986 : Sato, 1990]。

間欠現象と一次元格子ガスモデルとの類似性に注目し、乱流状態 ( $S_i = 1$ ) の出現がセミ・マルコフ過程に従うとき、式 (4.21) の分配関数を近似し、 $f(q)$  が以下の代数方程式の解として得られることが示されている [Sato, 1990]。

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \exp(f(q)\ell) [P(\ell)]^q = 1, \quad (4.26)$$

ここで、 $P(\ell)$  は非乱流領域の長さが  $\ell$  となる確率である。

次に  $q$  で重み付けられたオーダーパラメータ  $\psi(q)$  を定義する。

$$\psi(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{\{S\}_n} \sum_{i=1}^n S_i [P(\{S\}_n)]^q / Z_n(q). \quad (4.27)$$

上式は  $f(q)$  を用いると、

$$\psi(q) = \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \exp f(q)\ell \{P(\ell)\}^q \right]^{-1}. \quad (4.28)$$

となり、 $q = 1$  では  $\psi(q) = \Gamma$  となる。もし、 $f(q)$  を直接計算しようとするれば、少なくとも  $2^{\ell_{max}}$  個の記号列を必要とする ( $\ell_{max}$  は、 $\ell$  の最大値)。これは、実験データなどの解析にはほとんど不可能である。しかし、上記の方法を用いれば、確率  $P(\ell)$  から、全ての量が計算される。

### 4.3 解析結果及び考察

実験データから式(4.6)に従い、二値化記号列  $\{S_i\}$  を構成した。一次元写像から得られる記号列との比較をおこなう前に、まず、前提条件の確認をする必要がある。すなわち、記号列はセミ・マルコフ過程でなければならない。これは  $i$  番目の非乱流領域の長さ： $\ell(i)$  がそれ以前の非乱流領域の長さに依存しないことである。そこで、連続して起こる非乱流領域の長さについて、以下の相関係数を定義した。

$$C_r = \frac{\sum_i \{\ell(i) - \langle \ell \rangle\} \cdot \{\ell(i+1) - \langle \ell \rangle\}}{\sum_i \{\ell(i) - \langle \ell \rangle\}^2}. \quad (4.29)$$

全ての記号列  $\{S\}_n$  に対して、 $C_r$  は 0.05 よりも大きくならなかった。また、二次元平面に点  $(\ell(i), \ell(i+1))$  をプロットすると、原点周りに一様な広がりを持った分布が得られた。つまり、実験から得られた記号列は一次元写像との比較をおこなうための前提条件は満足している。現象論的な解釈をすると以下のようなになる。境界層外縁では平均乱流継続時間  $\Gamma/f_R$  は、ほぼ  $k\Delta t$ , ( $k = 5$  or  $7$ ) に等しく、たとえ離散化時間単位で連続に乱流状態が出現しようと、それらは同一のバルジ内に含まれる確率は少ない。それゆえ、乱流状態  $S_i = 1$  は過去の状態には依存せずに実現される。一方、非乱流状態  $S_i = 0$  は、有限のステップ内で連続して実現される。この様な列  $\{S\}_n$  は前述のセミ・マルコフ過程である。

各測定位置 ( $y/\delta$ ) における記号列  $\{S_i\}$  から、非乱流領域の確率密度関数  $P(\ell)$  を計算した。図(4.6)にその結果を示す。 $\Gamma < 0.2$ 、もしくは、 $y/\delta > 0.9$  の外層領域で  $P(\ell)$  はべき法則： $P(\ell) \sim \ell^{-r}$  を満たす。図中の矢印はその範囲である。以後、べき法則が成立する  $\ell$  の最大値を、カットオフ長さ  $\ell_c$  で表す。非乱流領域の長さの確率密度関数は、過去にも多数報告されている [Antonia, 1972 : Hedley & Keffer, 1974a] が、ここでの解析とそれらとは非乱流領域の意味が若干異なることを注意しておく。

図(4.7)にべき指数の変化を示す。ただし、縦棒はエラーバーではない。4.2.2 節で論じた間欠関数は、任意パラメータ  $TH$  と  $N$  が設定条件を満たすいくつかの代表的な組み合わせに対して構成した。その各々の記号列  $\{S\}_n$  から計算された結果を示す範囲であ

る。指数は  $y/\delta > 0.9$  でほぼ一定値  $1.3 \sim 1.4$  を持つ。  $y/\delta > 1.06$  では乱流状態の出現が少なく、  $P(\ell)$  を評価することが困難になるので解析はおこなっていない。

式 (4.14) より、  $P(\ell)$  のべき指数は  $\varepsilon$  に依存せず、  $r = Z/(Z - 1)$  で与えられる。コントロール・パラメータ  $\varepsilon$  を境界層中の壁からの距離  $y/\delta$  に対応させて考えれば、一次元写像の確率密度関数は上記の実験データの解析結果と共通な性質を備えている。  $Z = 4$  とすれば、指数  $r = 4/3$  であり、実験結果に近い値となる。以後の解析では、  $Z = 4$  と固定し、一次元写像と境界層外縁の間欠現象との対応を詳細に調べていく。表 (4.1) に  $r \sim 4/3$  をもたらすパラメータの組み合わせと条件付き平均の結果をまとめておく。

コントロール・パラメータ  $\varepsilon$  と  $y/\delta$  との関係を明確にするため、非乱流領域の平均値  $\langle \ell \rangle$  について考察する。図 (4.8) に示す様に、境界層外縁の記号列  $\{S\}_n$  から計算された、平均値と  $y/\delta$  との関係は、

$$\ln \langle \ell \rangle = a(y/\delta) + b, \quad (4.30)$$

であり、最小自乗法によって求められた定数は  $a = 1.93$ 、  $b = -1.97$  である。一方、一次元写像では式 (4.16) から、

$$\ln \langle \ell \rangle = \ln A - [(Z - 2)/(Z - 1)] \ln \varepsilon. \quad (4.31)$$

定数  $A$  は、  $10^9$  ステップの直接数値計算より  $A = 1.36$  となる。よって、  $\varepsilon$  と  $y/\delta$  との一対一関係を導くことができる。

$$y/\delta = -0.14 \cdot \ln \varepsilon + 0.46. \quad (4.32)$$

次にカットオフ長さ  $\ell_c$  について考察する。  $\ell_c$  は間欠性を特徴づける最大スケールである。  $P(\ell)$  は  $\ell > \ell_c$  でべき構造を持たず指数的に減衰する。式 (4.14), (4.15) より、

$$\ell_c = 1/\varepsilon. \quad (4.33)$$

図 (4.8) 中の点線は、式 (4.32), (4.33) から求めた  $\ell_c$  の  $y/\delta$  に対する変化である。一方、式 (4.14) を実験結果の  $P(\ell)$  にあてはめて、直接  $\ell_c$  を求めることもできる。図中の縦棒はそ

の結果をエラーバーを含めて示してある。二つの方法で評価した  $\ell_c$  はよく一致している。縦軸上の矢印の位置は、記号列の離散化時間  $k\Delta t$  でスケールしなおした壁近傍のバースト発生の平均周期  $T_B$  ( $= 5.0\delta/U_0$ [Rao, 1971]) である。 $T_B$  が  $\ell_c$  と同じオーダーを持つことは、境界層外縁での間欠性を生み出す力学系の最大スケールが、バーストによって支配されていることを示唆する。

$P(\ell)$  のスケーリングについて考察する。図 (4.9) に示した  $P(\ell)/\ell^{-\gamma}$  と  $\ell/\ell_c$  の両対数プロットは、各  $y/\delta$  のデータが一つの実線上に良くスケールされる。図中の実線は、式 (4.15) である。以上の解析結果から判断して、境界層外縁での間欠性と一次元写像は、同様な性質を有していると判断できる。

次に記号列  $\{S\}_n$  からより詳細な情報を得るために、そのゆらぎを評価する。後の解析での比較のため、ランダムな記号列  $\{S\}_n$  をまず構成しておく。確率  $p$  で乱流状態  $S_i = 1$  がランダムに実現するとき、分配関数は

$$\begin{aligned} Z_n(q) &= \sum_{m=0}^n {}_n C_m p^{mq} (1-p)^{(n-m)q} \\ &= \{p^q + (1-p)^q\}^n. \end{aligned} \quad (4.34)$$

これを用いると、 $h$ 、 $\gamma$  は容易に導けて

$$\gamma(q) = -\{p^q \ln p + (1-p)^q \ln(1-p)\} Q, \quad (4.35)$$

$$h(q) = -p^q Q \ln(p^q Q) - (1-p)^q Q \ln\{(1-p)^q\} \quad (4.36)$$

$$\psi(q) = p^q Q, \quad (4.37)$$

ここで、 $Q = \{p^q + (1-p)^q\}^{-1}$  である。この場合、間欠係数  $\Gamma$  は  $p$  に等しくなる。コルモゴロフ・エントロピーは

$$K = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p), \quad (4.38)$$

となる。図 (4.10) は各  $y/\delta$  の位置において、式 (4.23), (4.24), (4.25) から計算された  $h-\gamma$  スペクトルである。比較のためランダムな記号列から得られる  $h(\gamma)$  ( $p$  を  $y/\delta = 0.97$  の

$\Gamma$ に等しいとおいた場合)を波線で示した。両者の違いは明かである。各スペクトルの最大値を与える $\gamma$ は、測定位置 $y/\delta$ によって大きくかわる。境界層外縁ほど、流れ場の自由度は少なく、相関も小さい。これは観測される記号列 $\{S\}_n$ のゆらぎが大きいことを示唆する。実際、図(4.10)に示されるとおり、外縁ほど $\gamma$ の変域が広がっている。 $h-\gamma$ スペクトルで $q < 0$ の領域(すなわち凸曲線の右半分)は、確率の小さな記号列が強調された結果である。しかし、この部分のスペクトルは含まれる誤差の影響を大きく受けていることを知っておく必要がある。この傾向は $f-\alpha$ 曲線の場合にも認められ、 $q < 0$ の部分を精度良く求めることの困難さは良く知られている[Meneveau, 1992]。それゆえ、以後の解析は $q \geq 0$ に限りおこなった。

$h(\gamma)$  スペクトルの最大値( $h(q=0)$ )は、トポロジカル・エントロピーと呼ばれる[Schuster, 1988]。この定式化では常に $\ln 2$ となる。なぜなら、 $S_i$ に許される状態を二種類に限定したからである。確かに同じ乱流状態であっても、それを細分すれば様々な状態(例えば組織構造に含まれるか否か、渦度の大きさはどのくらいか等)が存在する。しかし、ここではそれらを全て一つの乱流状態 $S_i = 1$ として扱っている。低自由度力学系で現象をモデル化するための制約である。

図(4.11)はコルモゴロフ・エントロピー： $K = h(q=1) = \gamma(q=1)$ の境界層外縁での変化を示す。内層に向かうに従って $K$ は増大する。これは内層ほど状態がより複雑になり、正確な予測が困難になることを表している。一次元写像 $F(X)$ における $K$ は正のリアプノフ指数に等しく、平均の軌道拡大率から

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |dF(X_i)/dX_i|, \quad (4.39)$$

とまとめらる。式(4.8)の間欠性写像から直接計算した結果を図中に実線で示す。+印は実験データから求めた値である。両者は良い一致を示している。乱流状態がランダムに出現する場合を、波線で図中に示した。これは式(4.34)から、 $p$ を各 $y/\delta$ の位置での間欠係数 $\Gamma$ に等しくおいて計算した結果である。傾向としては実験結果と同様に $y/\delta$ が小さくなると増加するが、定量的には良い一致は与えない。

図(4.12)はエスケープレートの変化である。 $\gamma$ の増加とともに $\alpha$ は減少し、横軸と $\gamma = K$ の位置で交わる。外層ほどエスケープレートの多くの部分は $\gamma$ 軸に近づく：すなわち $h(\gamma)$ スペクトルは $h = \gamma$ の直線に漸近する。多くの特異性 $\gamma$ に対して、観測可能な列が存在することは、前述したように、間欠性カオスの重要な特性である。図(4.13)は $q$ で重みをつけられたオーダーパラメータである。式(4.24)と(4.33)から求められた結果を示す。両者の違いは明かである。

なお、境界層外縁での以上のような考察に対して、乱流／非乱流界面のフラクタル性との関連での議論がなされている [Meneveau, 1992]。詳細は文献を参照して頂きたい。

#### 4.4 結言

乱流境界層外縁の間欠的現象をカオス的な観点から解析し、以下の結果を得た。

- (1) 間欠性カオスの一次元写像 (Type III) を一般化し、非乱流領域の確率密度関数を解析的に導いた。関数にはベキ乗則が成り立つ領域が存在し、その指数はコントロール・パラメータの変化に対して不変である。確率密度関数には、コントロール・パラメータの変化に対してスケーリング関数が存在し、その関数形を決定した。これらの結果は、直接数値シミュレーション ( $10^9$  ステップ) の結果と良い一致を示した。
- (2) 境界層外縁の間欠領域から決定された間欠関数を用いて、二値化記号列を構成した。記号列から決まる非乱流領域の確率密度関数には、ベキ法則が成り立つ。その指数は  $1.3 < r < 1.4$  で、壁からの距離  $y/\delta$  に依存しない。これはコントロール・パラメータを壁からの距離とすれば、一次元写像と同様な性質である。
- (3) 一次元写像と実験から求まる記号列とを比較するため、両者のベキ指数を一致させて (すなわち、一次元写像において  $Z = 4$ ) として解析をおこなった。非乱流領域の平均を比較し、両者のコントロール・パラメータが、

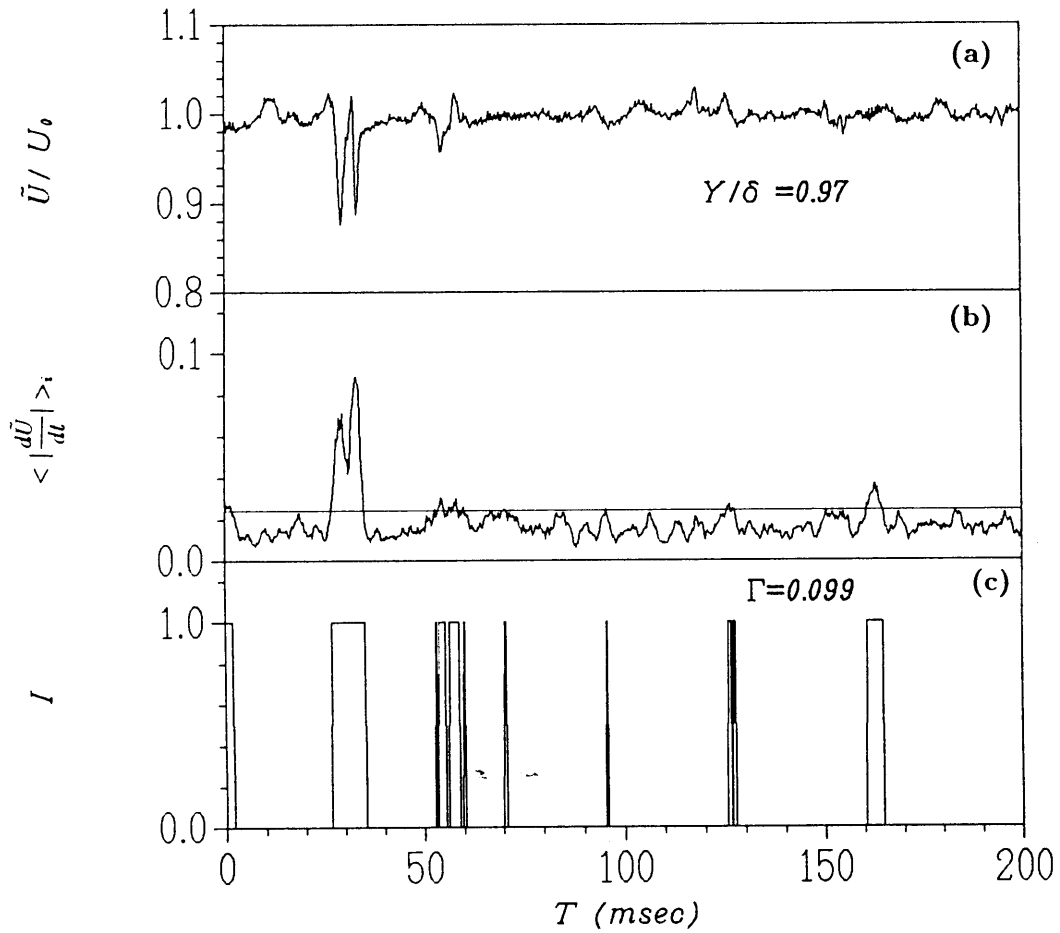
$$y/\delta = -0.14 \cdot \ln \epsilon + 0.46$$

の関係にあることを示した。この関係に基づき、実験より求まる確率密度関数のスケーリング関数を求めた。その結果は、一次元写像のスケーリング関数に良く一致した。

- (4) 確率密度関数にベキ乗則が成立する最大の長さを、カット・オフ長さ ( $l_c$ ) とすれば、一次元写像では  $l_c = 1/\epsilon$  である。一方実験より求まる確率密度関数にもカット・オフ長さが存在する。そのスケールは、壁近傍で起こるバーストの平均発生周期と同じオーダーである。これは界面の間欠的現象が、その最大スケールを壁面のバーストによって支配されていることを示唆する。



- (5) 記号列  $\{S\}_n$  のゆらぎをマルチフラクタル手法に基づき解析し、実験と一次元写像との対応をより明確にした。境界層外縁ほど記号列のゆらぎは大きい。この記号列のゆらぎは、ランダムな記号列がもつゆらぎとはまったく異なる。
- (6) コルモゴロフ・エントロピーは、内層に向かって増加する。これは記号列の予測不可能性の増大を意味し、現象論的には、系が複雑になっていくことに対応する。境界層外縁の間欠性を特徴づけるため、エスケープレート、オーダーパラメータを導入し、従来とはまったく異なった観点から情報を得ることができた。



図(4.1) 間欠関数決定過程

- (a) 瞬時速度を層外主流平均速度で無次元化 ( $y/\delta = 0.97$ )
- (b) 平滑化速度信号 (乱流隗周波数  $f_R = 0.54$ )
- (c) 間欠関数 (間欠係数  $\Gamma = 0.099$ )

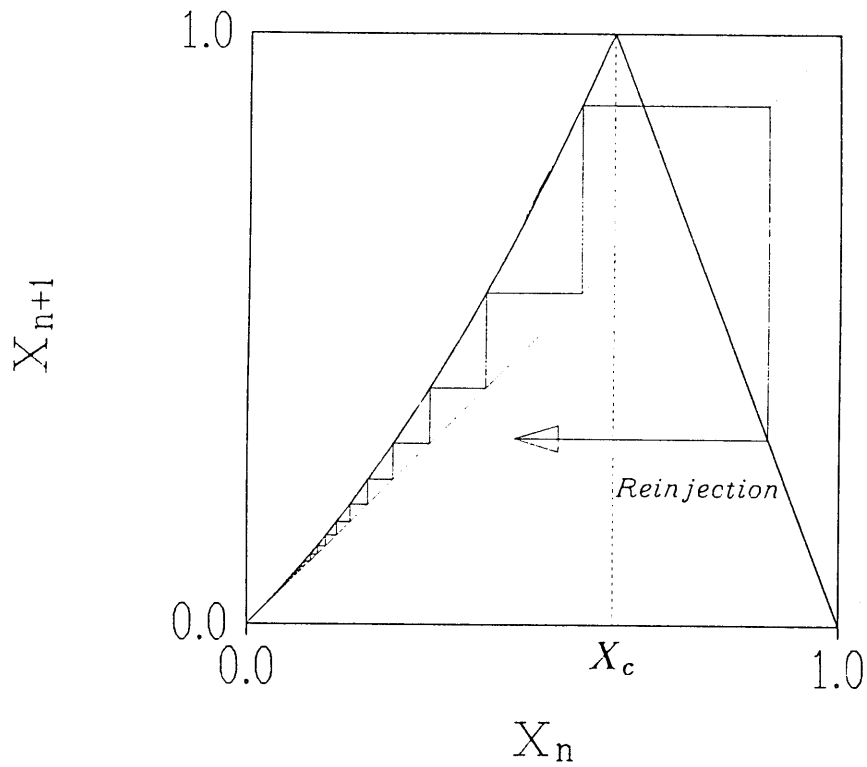


図 (4.2) 間欠性一次元写像 (式 (4.8))

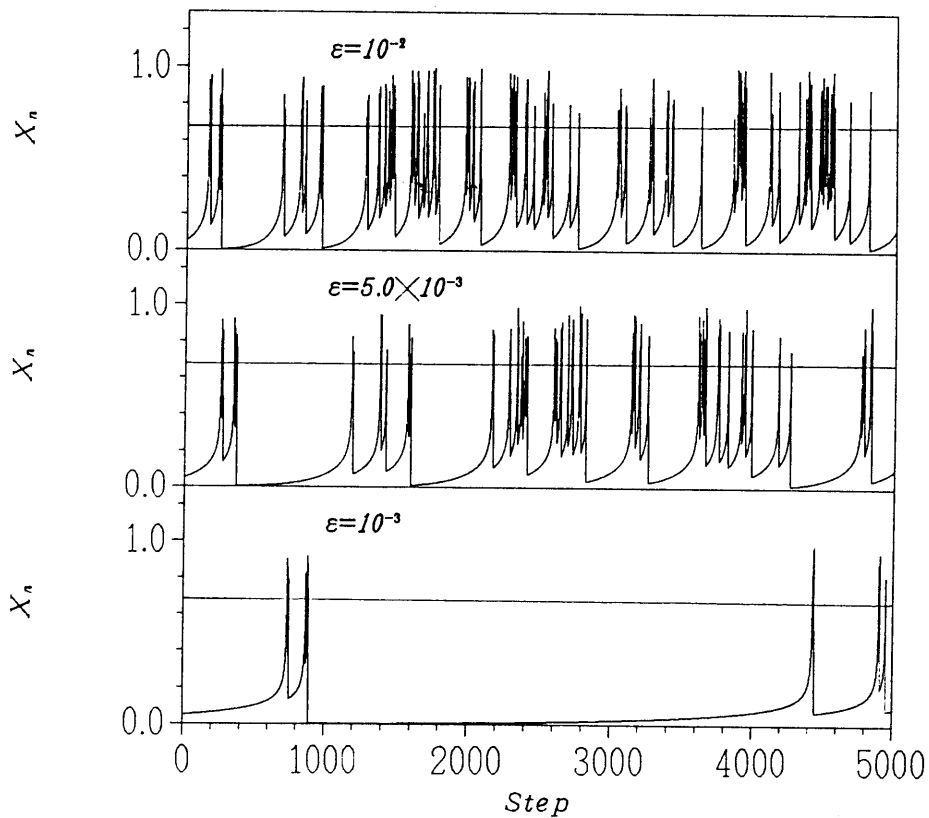
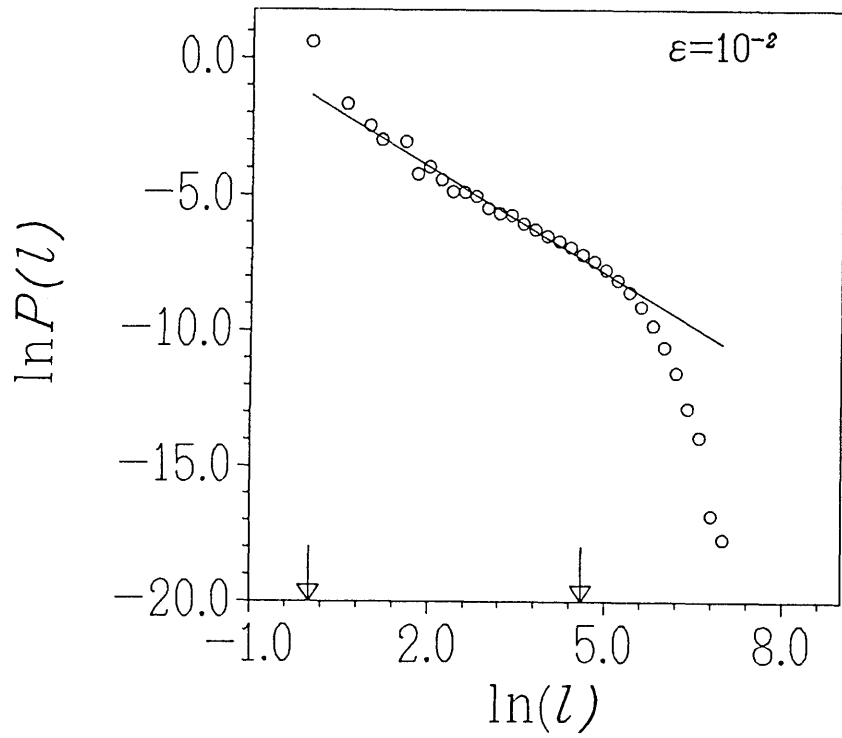
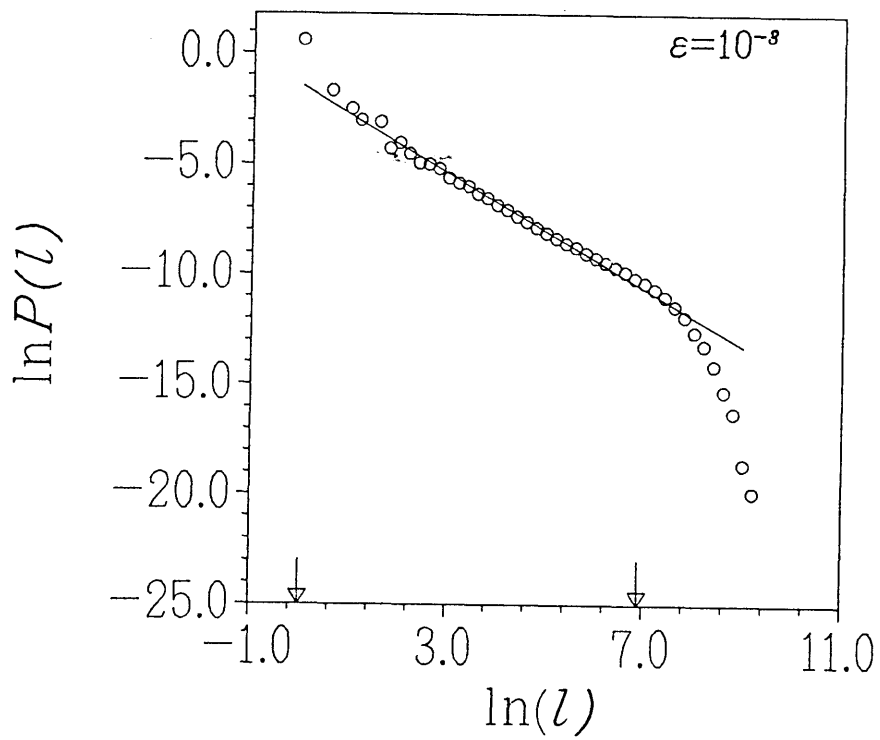


図 (4.3) 式 (4.8) で  $Z = 4$  とした場合の一次元写像の軌道  $X_i$ . コントロールパラメータ  $\epsilon$  に対する軌道の変化. 図中の実線は、数居値  $X_c$  を示す.

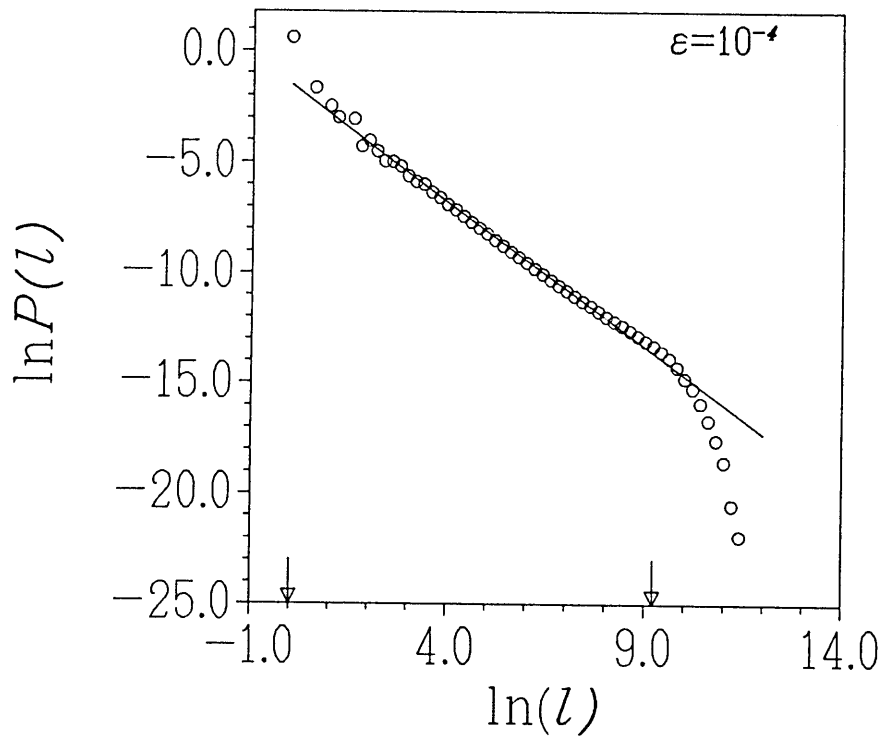


(a)  $Z = 4$ ,  $\epsilon = 10^{-2}$

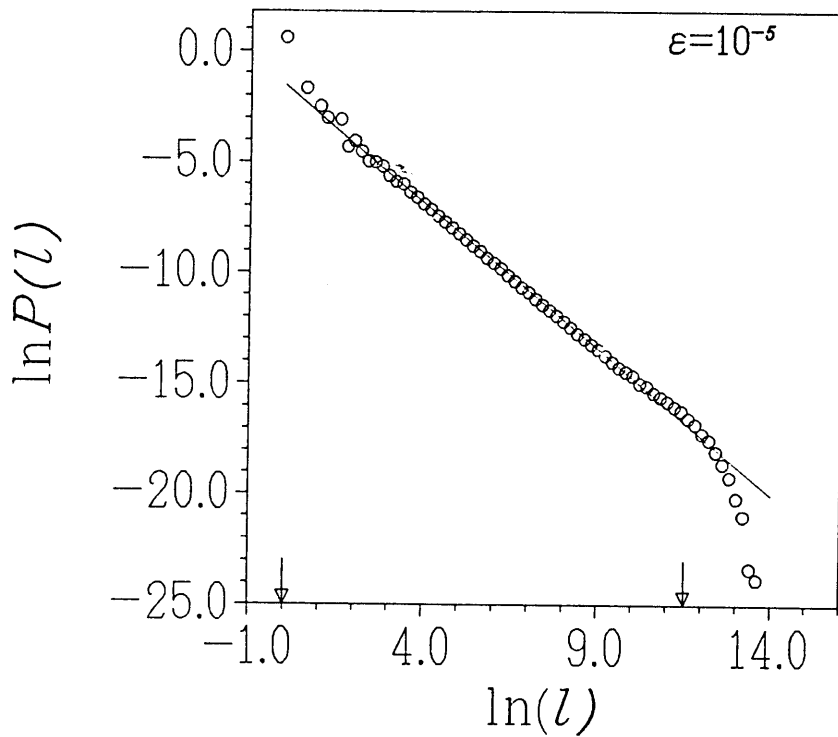


(b)  $Z = 4$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$

図 (4.4) 間欠性一次元写像における、非乱流領域  $l$  の確率密度関数の両対数プロット. 直線部の傾きは、 $-4/3$ .



(c)  $Z = 4$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$



(d)  $Z = 4$ ,  $\epsilon = 10^{-5}$

図 (4.4) 間欠性一次元写像における、非乱流領域  $l$  の確率密度関数の両対数プロット. 直線部の傾きは、 $-4/3$ .

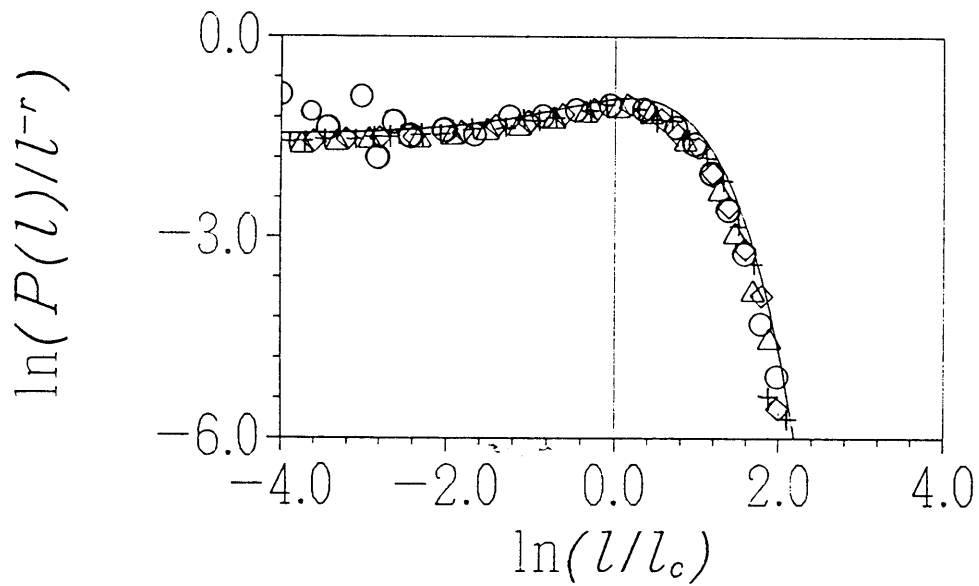
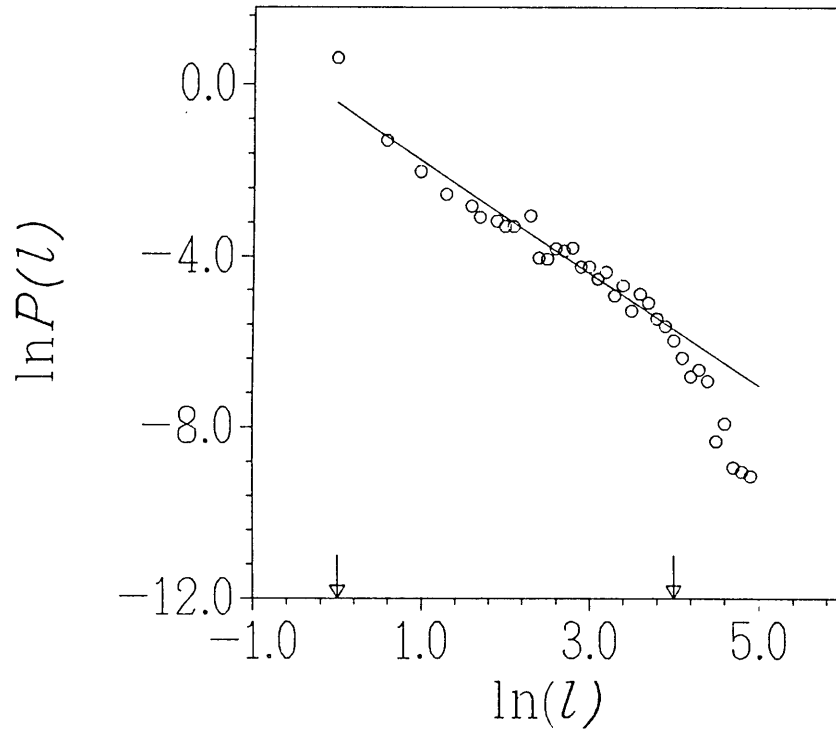
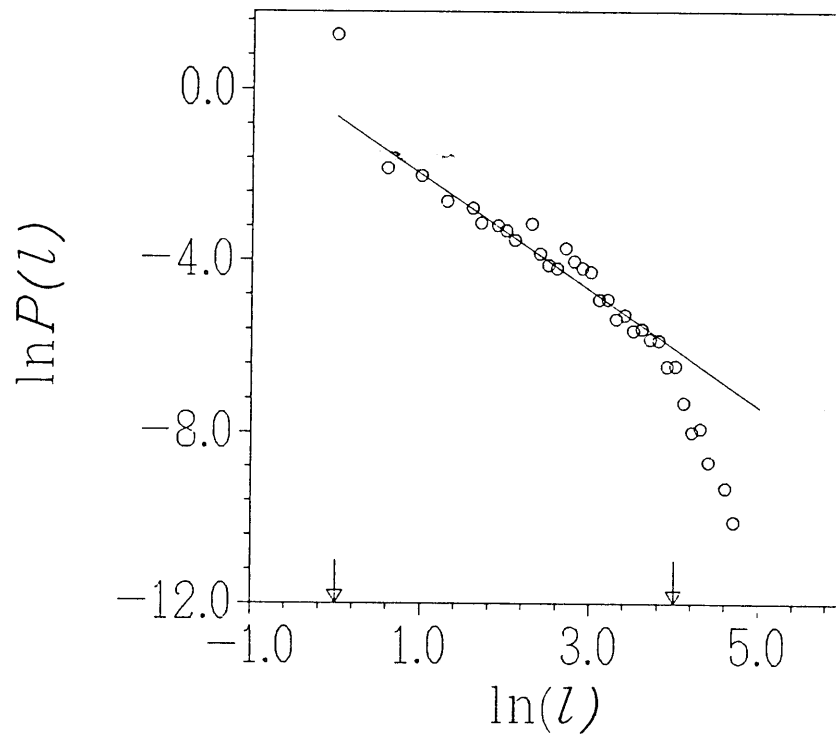


図 (4.5) シミュレーションから得られた確率密度関数のスケーリング  
 [  $\circ$  :  $\epsilon = 10^{-2}$ ,  $+$  :  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $\Delta$  :  $\epsilon = 10^{-4}$ ,  $\diamond$  :  $\epsilon = 10^{-5}$  ]  
 実線は式 (4.15) から求まるスケーリング関数  $g_Z(X)$

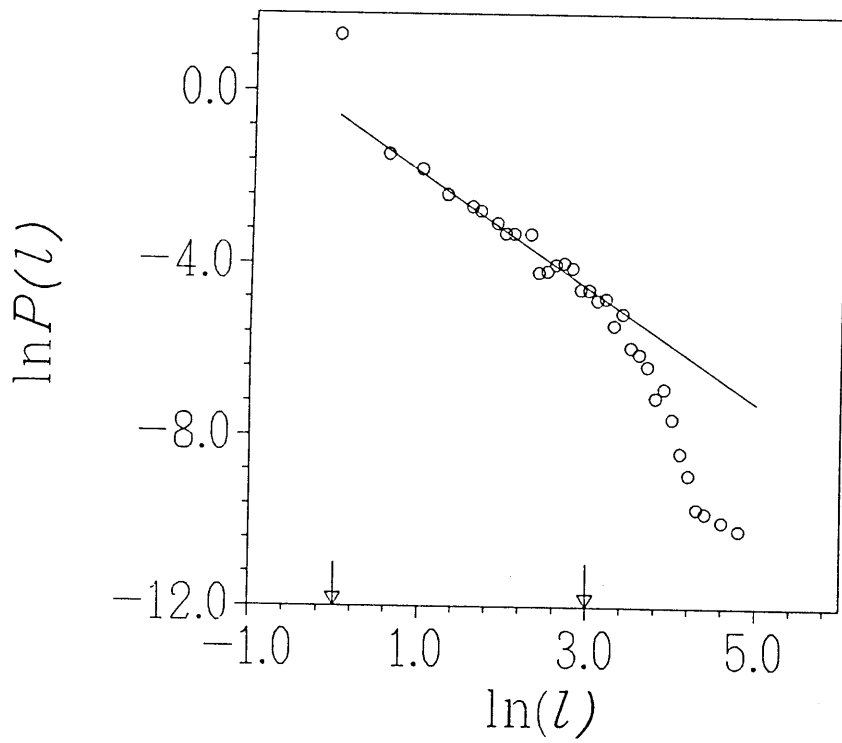


(a)  $y/\delta = 1.03$ 、直線部の傾き  $= -1.32$

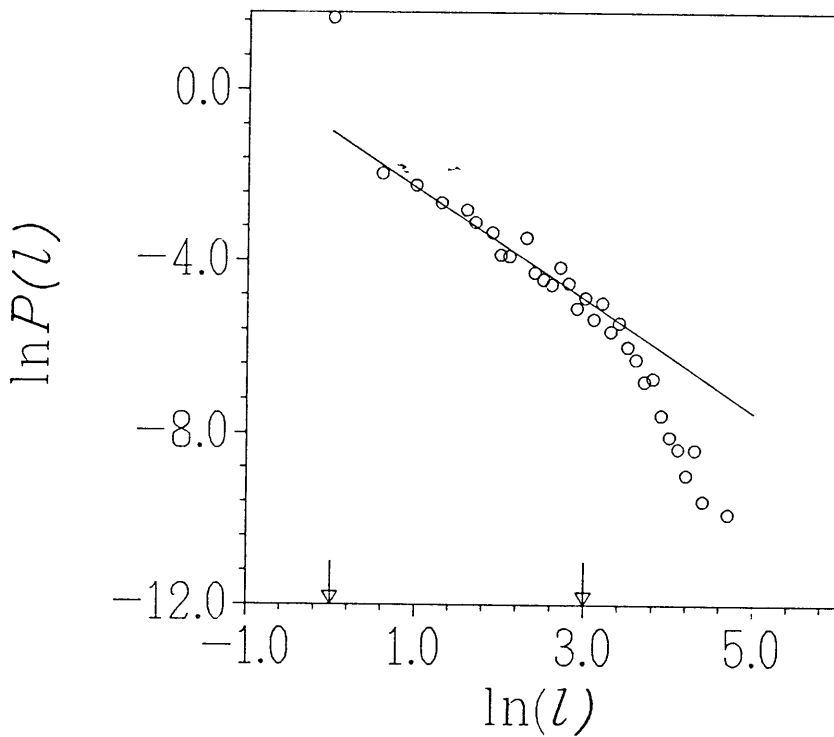


(b)  $y/\delta = 1.00$ 、直線部の傾き  $= -1.36$

図 (4.6) 実験より求まる非乱流領域  $l$  の確率密度関数の両対数プロット



(c)  $y/\delta = 0.97$ 、直線部の傾き  $= -1.33$



(d)  $y/\delta = 0.94$ 、直線部の傾き  $= -1.31$

図(4.6) 実験より求まる非乱流領域  $l$  の確率密度関数の両対数プロット



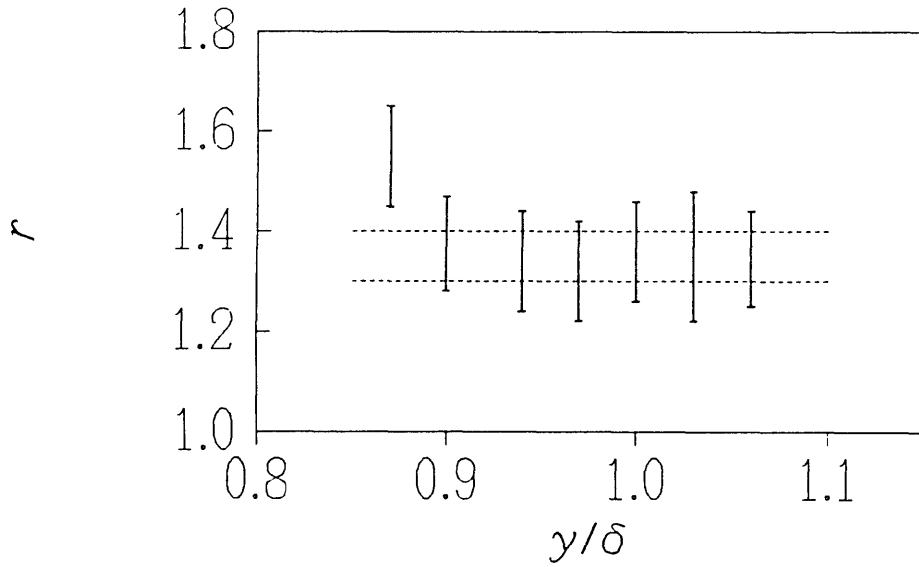


図 (4.7) 実験より求まる非乱流領域の確率密度関数のべき指数の値：実線で示された範囲はエラーバーではなく、間欠関数を構成する過程で条件を満たす数居値  $TH$  と平滑化個数  $N$  の全てに対して求められた指数の範囲である。

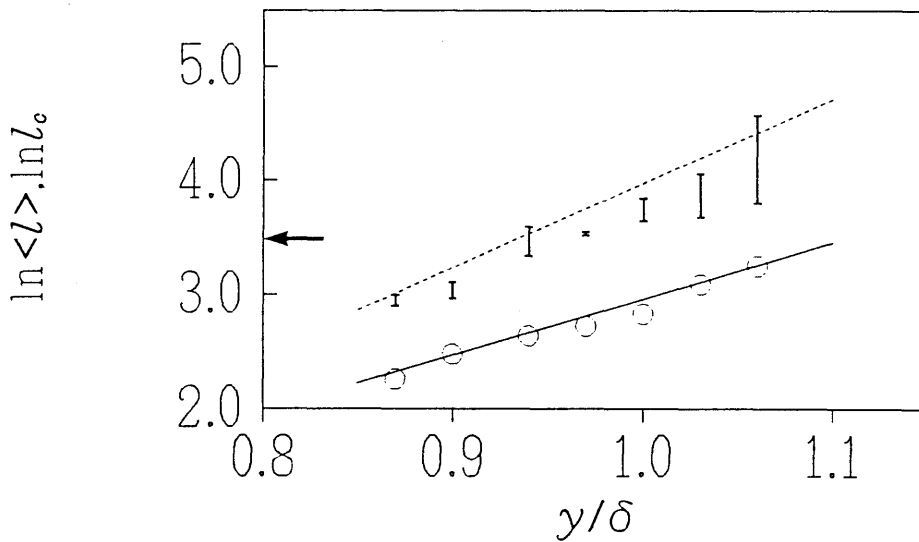


図 (4.8) 白丸は非乱流領域の平均値  $\langle l \rangle$ 、縦棒はカット・オフ長さ  $l_c$  の  $y/\delta$  に対する変化。実線は式 (4.32) を示し、波線は式 (4.32), (4.33) から求められる。横軸上の矢印は、バーストの平均発生周期  $T_B$  を離散化時間でスケールした値を示す。

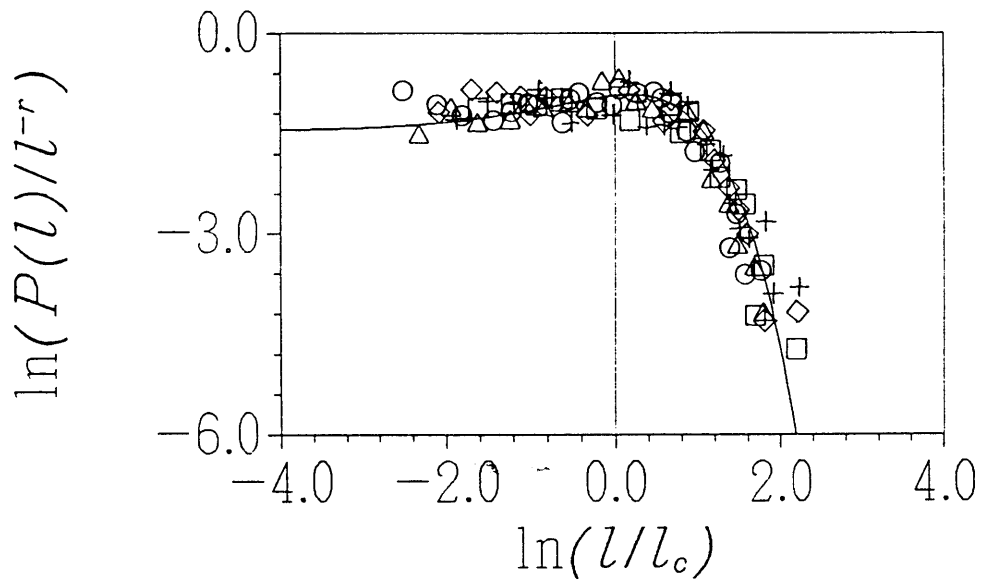


図 (4.9) 実験より求まる非乱流領域  $l$  の確率密度関数のスケーリング  
 [  $\circ$  :  $y/\delta = 1.03$ ,  $+$  :  $y/\delta = 1.0$ ,  $\Delta$  :  $y/\delta = 0.97$ ,  $\diamond$  :  $y/\delta = 0.94$ ,  
 $\square$  :  $y/\delta = 0.90$  ]. 実線は  $Z = 4$  としたとき、式 (4.15) から求まる  
 スケーリング関数  $g_Z(X)$

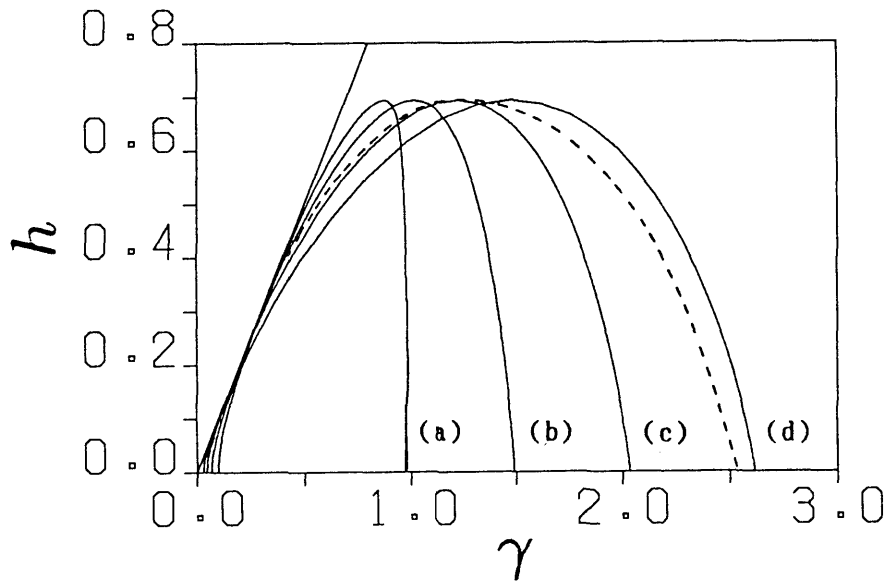


図 (4.10)  $h-\gamma$  スペクトル

(a) :  $y/\delta = 0.94$ , (b) :  $y/\delta = 0.97$ , (c) :  $y/\delta = 1.00$ , (d) :  $y/\delta = 1.03$ . 波線は間欠係数が  $y/\delta = 0.97$  に一致する、ランダム列の解析結果

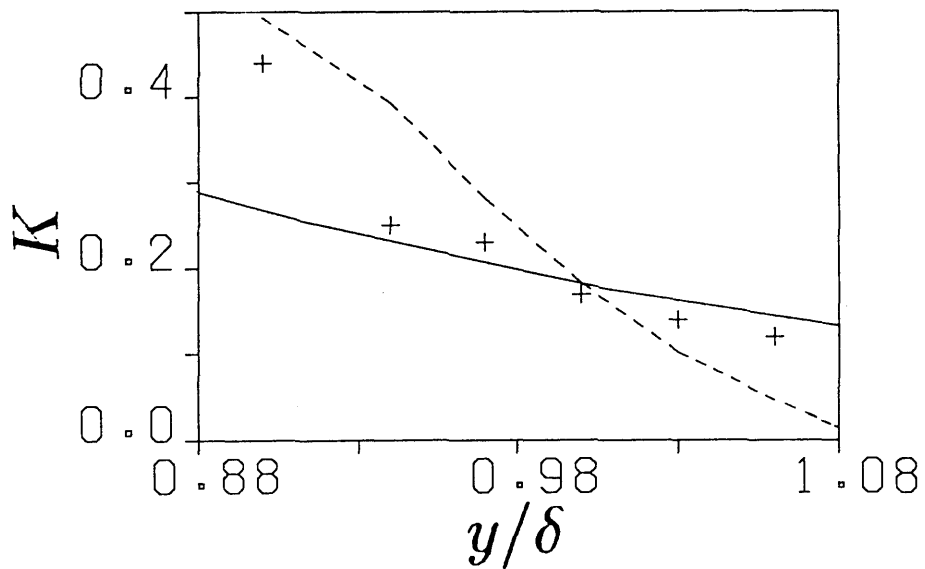
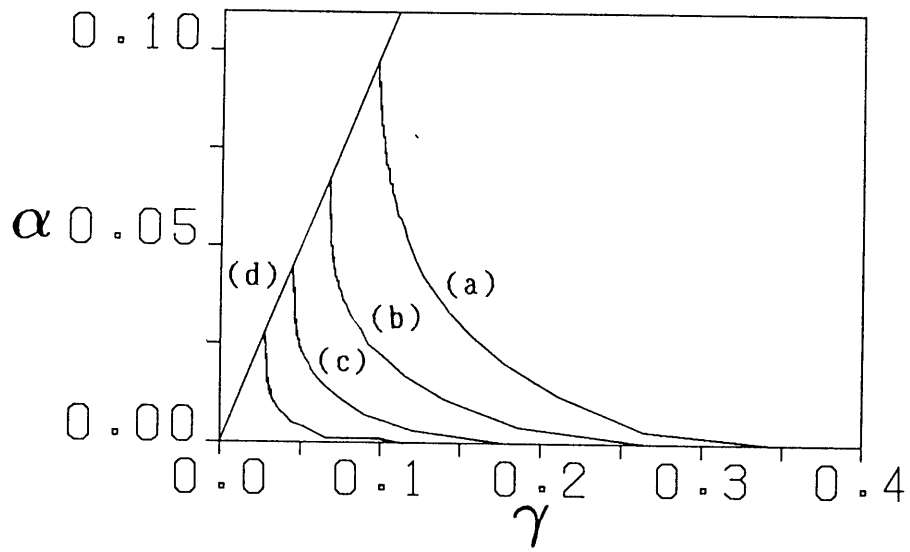
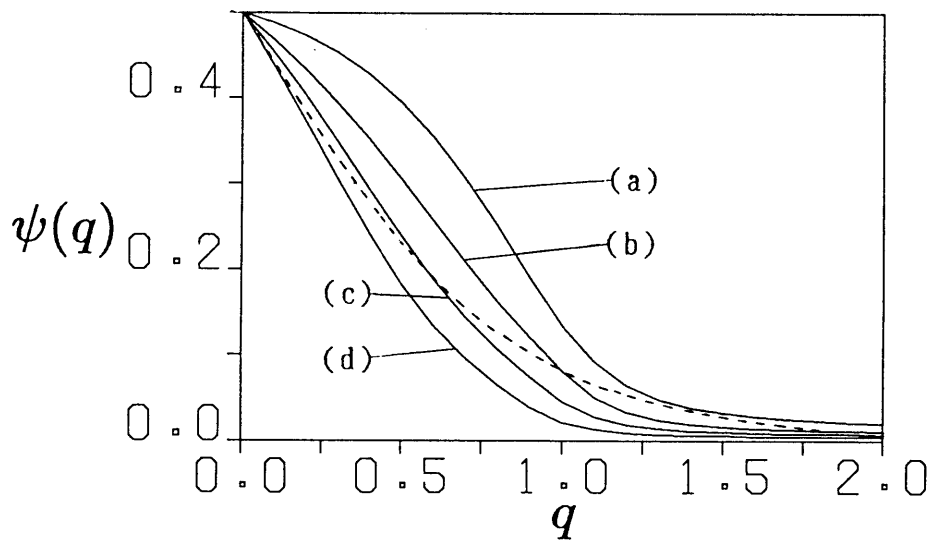


図 (4.11) + は実験よりまとまるコルモゴロフ・エントロピーの  $y/\delta$  に対する変化. 実線は式 (4.8), (4.39) から直接数値計算で求めた値. 波線は各  $y/\delta$  の位置での間欠係수에等しい値を持つランダム数列から、式 (4.38) に従い計算した結果.



図(4.12) エスケープレート、ただし  $q \leq 0$  の領域のみを示した。実線は  $h = \gamma$  の直線、 $\alpha(\gamma = 0)$  はコルモゴロフ・エントロピーに等しい。  
 (a) :  $y/\delta = 0.94$ , (b) :  $y/\delta = 0.97$ , (c) :  $y/\delta = 1.00$ , (d) :  $y/\delta = 1.03$ .



図(4.13)  $q$  で重みをつけたオーダーパラメータ。  $\psi(0) = \Gamma$  である。  
 (a) :  $y/\delta = 0.94$ , (b) :  $y/\delta = 0.97$ , (c) :  $y/\delta = 1.00$ , (d) :  $y/\delta = 1.03$ . 波線は間欠係数が  $y/\delta = 0.97$  に一致する、ランダム列の解析結果

表 (4.1) 非乱流領域の確率密度関数の指数  $r \simeq 4/3$  を与える各パラメータと、条件付き平均値.  $\bar{U}/U_0$ と $\tilde{U}/U_0$ は、乱流域と非乱流域で条件つけた平均速度 [Kovaszny, 1970].

$y/\delta$	$T_{II}$	$N$	$k$	$\Gamma$	$f_R \cdot \delta/U_0$
1.06	0.0260	4	7	0.045	0.3877
1.03	0.0252	5	7	0.058	0.4155
1.00	0.0246	5	7	0.076	0.4910
0.97	0.0243	6	7	0.099	0.5114
0.94	0.0230	8	7	0.143	0.5859
0.90	0.0231	8	7	0.191	0.6606

$y/\delta$	$U/U_0$	$u'/U_0$	$\bar{U}/U_0$	$\tilde{U}/U_0$
1.06	0.997	0.007	0.997	0.997
1.03	0.997	0.008	0.996	0.997
1.00	0.996	0.009	0.995	0.997
0.97	0.996	0.010	0.992	0.996
0.94	0.994	0.012	0.989	0.995
0.90	0.991	0.015	0.983	0.993

## 第5章 結論

乱流境界層における諸特性をカオス・フラクタル的な観点から解析し以下の結論を得た。各章ごとにまとめる。

### 第2章より得られた結言

乱流境界層における等速度点集合のフラクタル性を解明するため、以前の研究では明確にされていなかったフラクタル構造の存在する領域（自己相似性が成立するスケール変化の範囲）を決定し、解析をおこなった。解析法としては B.C. 法及び P.D. 法の二種類を併用することを試みた。

また、瞬時レイノルズ応力によって条件付け解析をおこない、等速度点集合との関係を明確にした。これによって従来不足していた乱流のフラクタル性と力学特性の関連の一つを明らかにすることができた。

- (1) 乱流境界層内における等速度点集合は、局所平均速度付近を除いて、コルモゴロフ・スケール $\tau_k$ （時間）と最大渦のスケール $\tau_\ell$ （時間）の範囲内で明確にフラクタル構造を有し、そのフラクタル次元  $D$  は  $D \leq 0.40$  と見積られる。本方法で求めた等速度点集合のフラクタル性は、区分長さには依存しない。これに対し局所平均速度付近では、等速度点集合にフラクタル性は確認されない。
- (2) 瞬時の乱れエネルギーが、その平均値よりも大きな値を示す集合  $A(t)$  にはフラクタル構造が存在する。明確なフラクタル構造を有する等速度点集合は集合  $A(t)$  にすべて含まれており、乱れエネルギー領域のフラクタル性は等速度点集合のフラクタル性と密接に関係している。集合  $A(t)$  のフラクタル次元は、壁近くのバースト発生領域で最も高く、外層にいくに従って減少する。
- (3) 等速度点集合は式 (2.6) により流れの力学と関係する。

- (4) フラクタル構造を持つ等速度点集合は、瞬時レイノルズ応力が正となる領域、つまり第二象限と第四象限に含まれる。この結果はホールサイズ  $H'$  を 0,1,2 と変化させても変わらない。
- (5) 敷居値パラメータ  $P$  の絶対値を等しくして得られる二組の等速度点集合は、第二象限に含まれる等速度点集合の方がフラクタル次元が大きい。式 (2.6) の解にはフラクタル構造を持つものがあることが実験的に示されたことになる。
- (6) フラクタル構造を持たない局所平均速度付近の等速度点集合は、レイノルズ応力による条件付きをおこなうことによって、フラクタル構造を持つ等速度点集合から分離できる。

### 第3章より得られた結言

乱流境界層における、等速度点集合のフラクタル性とバーストとの関連を二種の条件付き平均を用い調べた。さらに二種のバースト定義関数及び散逸領域をフラクタル的な観点から解析した。

壁近傍でのバースト構造を抽出するため、K.L. 展開を用い解析をおこなった。以下にその結論をあげる。

- (1) 乱流境界層における等速度点集合 (式 (3.2) で、 $P = -1.5$  として定義された集合) のフラクタル性は、四象限分割法によって検出される Qバースト (パラメータ  $H' : 0 \leq H' \leq 2.0$ ) には依存するが、VITA 法で検出される Vバーストには独立である。
- (2) 壁領域の Qバースト定義関数には、統計的な自己相似性 (フラクタル性) が存在する。そのフラクタル次元は、およそ  $D = 0.6$  ( $H' = 1.0$ ) である。これに対し、Vバースト定義関数には、フラクタル構造は存在しない。
- (3) Qバースト定義関数は、流れ方向とスパン方向ではそのフラクタル次元が異なるセルフアフィン・フラクタルである。

- (4) 以上よりバースト現象中のレイノルズ応力生成とフラクタル構造は完全に関係していることがわかる。すなわち、乱流境界層中のフラクタル構造は力学的現象に対応している。
- (5) テイラーの凍結乱流仮説と等方性を仮定して求めた散逸場で、ある数居値以上の高い散逸を示す間欠領域には、フラクタル性が存在する。しかし、数居値パラメータ（式(3.30)）によって、間欠領域のフラクタル次元は異なる。
- (6) スイープ・エジェクションの定義関数を用い、散逸場の集合平均波形を調べた。エジェクション終了後、散逸は時間平均散逸量の2倍近い値を持つ。しかし、スイープ終了後には、その様な傾向は見られず、ほぼ時間平均値に等しい。
- (7) VITA 法で抽出されるバーストは、K.L. 展開基底と密接に関係し、主に第三基底までバースト過程を再構成できる。
- (8) 乱れエネルギーへの第一基底関数からの寄与は、 $\theta$ が増加するに従って減少する。一方、第二基底関数からの寄与は増加する。
- (9) 壁近傍におけるパワースペクトルへの寄与には、 $y$ 方向に伸びた単独の構造が存在する一方、スパン方向への広がりを持った支配的な構造は存在しない。

#### 第4章より得られた結言

乱流境界層外縁の間欠的現象を間欠性カオスの観点から解析し、以下の結果を得た。

- (1) 間欠性カオスの一次元写像（Type III）を一般化し、非乱流領域の確率密度関数を解析的に導いた。関数にはベキ乗則が成り立つ領域が存在し、その指数はコントロール・パラメータの変化に対して不変である。確率密度関数には、コントロール・パラメータの変化に対してスケーリング関数が存在し、その関数形を決定した。これらの結果は、直接数値シミュレーション（ $10^9$ ステップ）の結果と良い一致を示した。
- (2) 境界層外縁の間欠領域から決定された間欠関数を用いて、二値化記号列を構成した。記号列から決まる非乱流領域の確率密度関数には、ベキ法則が成り立つ。その指数は



$1.3 < r < 1.4$  で、壁からの距離  $y/\delta$  に依存しない。これはコントロール・パラメータを壁からの距離とすれば、一次元写像と同様な性質である。

- (3) 一次元写像と実験から求まる記号列とを比較するため、両者のベキ指数を一致させて（すなわち、一次元写像において  $Z = 4$ ）として解析をおこなった。非乱流領域の平均を比較し、両者のコントロール・パラメータが、

$$y/\delta = -0.14 \cdot \ln \varepsilon + 0.46$$

の関係にあることを示した。この関係に基づき、実験より求まる確率密度関数のスケーリング関数を求めた。その結果は、一次元写像のスケーリング関数に良く一致した。

- (4) 確率密度関数にベキ乗則が成立する最大の長さを、カット・オフ長さ ( $l_c$ ) とすれば、一次元写像では  $l_c = 1/\varepsilon$  である。一方実験より求まる確率密度関数にもカット・オフ長さが存在する。そのスケールは、壁近傍で起こるバーストの平均発生周期と同じオーダーである。これは界面の間欠的現象が、その最大スケールを壁面のバーストによって支配されていることを示唆する。
- (5) 記号列  $\{S\}_n$  のゆらぎをマルチフラクタル手法に基づき解析し、実験と一次元写像との対応をより明確にした。境界層外縁ほど記号列のゆらぎは大きい。この記号列のゆらぎは、ランダムな記号列がもつゆらぎとはまったく異なる。
- (6) コルモゴロフ・エントロピーは、内層に向かって増加する。これは記号列の予測不可能性の増大を意味し、現象論的には、系が複雑になっていくことに対応する。境界層外縁の間欠性を特徴づけるため、エスケープレート、オーダーパラメータを導入し、従来とはまったく異なった観点から情報を得ることができた。

## 謝辞

本研究は昭和62年4月から平成5年1月にかけて、名古屋大学工学部機械情報システム学科流体機械実験室において、名古屋大学中村育雄教授の御指導のもとに行われたものであります。本論文を結ぶにあたり、長年にわたって始終丁寧な御指導と御鞭撻を賜りました中村育雄教授に対し、ここに謹んで感謝の意を表します。

本論文をまとめるに際し、名古屋大学竹野忠夫教授並びに菊山功嗣教授からは、有益な御教示と注意深い御検討を賜りました。ここに深く感謝申し上げます。

名古屋大学工学部応用物理学科本田勝也助教授には、本研究を進める上での貴重な御助言、御指導を賜りました。山口大学工学部大坂英雄教授には、乱流境界層に対する卓越した御助言を賜り、惜しめない励ましの言葉を頂きました。ここに深く感謝申し上げます。

研究を行う上で、学部学生時代より長きにわたり、常に変わる事なく、有益かつ示唆に富む議論をして頂いた名古屋大学角田博之助手に心より感謝いたします。

水力実験室の皆様には、酒井康彦助教授、櫛田武広助手の御助力をはじめとして、実験装置作成に際しては村上初男技官に多大なる御助力を頂き、厚くお礼申し上げます。また、ともに実験をおこない、議論をまじえた卒業生諸氏に心より感謝いたします。本論文をまとめるにあたり、御支援頂いた方々に厚くお礼申し上げます。

## 参考文献

- ◇ 阿部忠行, 小川 進, "舗装ひび割れのフラクタル解析", 土木学会論文集, No.442/V-16(1992), pp119-126.
- ◇ 合原一幸, 数理科学, No.348, サイエンス社, (1992), pp5-10.
- ◇ 合原一幸, "ひろがる工学への応用", 日経サイエンス, 1992年3月, pp26-33.
- ◇ Anselment, F.A., Gagne, Y, Hopfinger, E.J. & Antonia, R.A., "High-order velocity structure functions in turbulent shear flows", J. Fluid Mech., Vol. 140(1984), pp63-89.
- ◇ Antonia, R.A., "Conditionally sampled measurements near the outer edge of a turbulent boundary layer", J. Fluid Mech., Vol. 56(1972), pp1-18.
- ◇ Antonia, R.A. & Atkinson, J.D., "Use of a pseudo-turbulent signal to calibrate an intermittency measuring circuit", J. Fluid Mech., Vol. 64(1974), pp679-699.
- ◇ Antonia, R.A., Hopfinger, E.J., Gagne, Y. & Anselment, F., "Temperature structure functions in turbulent shear flows", Phys. Rev. A, Vol. 30(1984), pp2704-2707.
- ◇ Antonia, R.A., "The role of coherent structures", in "Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads 1989", Lecture Notes in Physics, No. 357.(1990), pp156-169.
- ◇ Aref, H. and Balachandar, S., "Chaotic advection in a Stokes flow", Phys. Fluids, Vol. 29(1986), pp3515-3521.
- ◇ Aref, H. and Jones, S.W., "Enhanced separation of diffusing particles by chaotic advection", Phys. Fluids A, Vol. 1(1989a), 470-474.
- ◇ Aref, H., Jones, S.W., Mofina, S. and Zawadzki, I., "Vortices, kinematics and chaos", Physica D, Vol. 37(1989b), pp423-440.
- ◇ Aref, H., "Stochastic particle motion in laminar flows", Phys. Fluids A, Vol. 3(1991), pp1009-1016.

- ◇ Arneodo, A., Grasseau, G. & Kostelich, E.J., "Fractal dimensions and  $f(\alpha)$  spectrum of the Hénon Attractor", *Physics Letters A*, Vol. 124(1987), pp426-432.
- ◇ Aubry, N., Holmes, P., Lumley, J.L. & Stone, E., "The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer", *J. Fluid Mech.*, Vol. 192(1988), pp115-173.
- ◇ Aurell, E., Frisch, U., Lutsko, J. & Vergassola, M., "On the multifractal properties of the energy dissipation derived from turbulence data", *J. Fluid Mech.*, Vol. 238(1992), pp467-486.
- ◇ Edited by Avnir, D., "The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry", John Wiley & Sons., (1989).
- ◇ Batchelor, G.K. & Townsend, A.A., "The nature of turbulent motion at large wave-numbers", *Proc. Roy. Soc. A*199(1949), pp238-255.
- ◇ Batcho, P. and Karniadakis, G., "Chaotic transport in two- and three-dimensional flow past a cylinder", *Phys. Fluids A*, Vol. 3(1991), pp1051-1062.
- ◇ Badri Narayanan, M.A., Rajagopalan, S. & Narasimha, R., "Experiments on the fine structure of turbulence", Vol. 80(1977), pp237-257.
- ◇ Benzi, R., Paladin, G., Parisi, G. & Vulpiani, A., "On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic system", *J. Phys. A : Math. Gen.*, Vol. 17(1984), pp3521-3531.
- ◇ Bergè, P., Dubois, M., Manneville, P. & Pomeau, Y., "Intermittency in Rayleigh-Bénard convection", *J. de Phys. Lett.*, Vol. 41(1980), pp L341-L345.
- ◇ Bernard, S.P. & Handler, R.A., "Dynamical significance of turbulent wall layer streaks", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 43(1990), pp s219-s226.
- ◇ Billingsley, P., *Ergodic Theory and Information.*, Wiley, New York, (1965).

- ◇ Blackwelder, R.F. & Kaplan, R.E., "On the wall structure of the turbulent boundary layer", *J. Fluid Mech.*, Vol. 76(1976), pp89-112.
- ◇ Blackwelder, R.F. & Haritonidis, J.H., "Scaling of the bursting frequency in turbulent boundary layer", *J. Fluid Mech.*, Vol. 132(1983), pp87-103.
- ◇ Bogard, D.G. & Tiederman, W.G., "Burst detection with single-point velocity measurements", *J. Fluid Mech.*, Vol. 162(1986), pp389-413.
- ◇ Bogard, D.G. & Tiederman, W.G., "Characteristics of ejections in turbulent channel flow", *J. Fluid Mech.*, Vol. 179(1987), pp1-19.
- ◇ Borgas, M.S., "A comparison of intermittency models in turbulence", *Phys. Fluids A*, Vol. 4(1992), pp2055-2061.
- ◇ Broomhead, D.S. & Jones, R., "Time-series analysis", *Proc. R. Soc. Lond.*, A423(1989), pp103-121.
- ◇ Cantwell, B.J., "Organized motion in turbulent flow", *Ann. Rev. Fluid Mech.* Vol. 13(1981), pp457-515.
- ◇ Caswell, W.E. & Yorke, J.A., "Invisible errors in dimension calculations : Geometric and systematic effects", in "FRACTALS IN PHYSICS", North-Holland, (1986), pp123-136.
- ◇ Cates, M.E. & Deutsch, J.M., "Spatial correlations in multifractals", *Phys. Rev. A*, Vol. 35(1987), pp4907-4910.
- ◇ Chechetkin, V.R., Lutovinov, V.S. & Turygin, A. Yu., "Multifractal structure of fully developed hydrodynamic turbulence. I. Kolmogorov's third hypothesis revisited", *Jornal of Statistical Phys.*, Vol. 61(1990), pp573-605.
- ◇ Chen, T.H. & Goss, L.P., "Propagation and fractals of turbulent jet diffusion flames", *AIAA Pap.*, No. 89-2529, (1989).

- ◇ Chhabra, A.B. & Jensen, R.V., "Direct determination of the  $f(\alpha)$  singularity spectrum", Phys. Rev. Lett., Vol. 62(1989a), pp1327-1330.
- ◇ Chhabra, A.B., Jensen, R.V. & Sreenivasan, K.R., "Extraction of underlying multiplicative processes from multifractals via the thermodynamic formalism", Phys. Rev. A, Vol. 40(1989b), pp4593-4611.
- ◇ Chhabra, A.B., Meneveau, C., Jensen, R.V. & Sreenivasan, K.R., "Direct determination of the  $f(\alpha)$  singularity spectrum and its application to fully developed turbulence", Phys. Rev. A, Vol. 40(1989c), pp5284-5294.
- ◇ Chhabra, A.B. & Sreenivasan, K.R., "Negative dimensions : Theory, computation, and experiment", Phys. Rev. A, Vol. 43(1991), pp1114-1117.
- ◇ Constantin, P., Foias, C. & Teman, R., "Attractors representing turbulent flows", Mem. American Math. Soc., Vol. 53, No. 314(1985).
- ◇ Constantin, P., Procaccia, I. & Sreenivasan, K.R., "Fractal geometry of isoscalar surfaces in turbulence : Theory and Experiments", Phys. Rev. Lett., Vol. 67(1991), pp1739-1742.
- ◇ Crutchfield, J.P. & Kaneko, K., "Are attractors relevant to turbulence ?", Phys. Rev. Lett., Vol. 60(1988), pp2715-2718.
- ◇ Devaney, R.L., "An introduction to chaotic dynamical systems", 後藤憲一訳, 共立出版 (1987).
- ◇ Ditto, W.L., Rauseo, S.N. & Spano, M.L., "Experimental control of chaos", Phys. Rev. Lett., Vol. 65(1990), pp3211-3214.
- ◇ Dubuc, B., Quiniou, J.F., Roques-Carmes, C., Tricot, C. & Zucker, S.W., "Evaluating the fractal dimension of profiles", Phys. Rev. A, Vol. 39(1989), pp1500-1512.

- ◇ Eckmann, J.P. & Procaccia, I., "Fluctuations of dynamical scaling indices in non-linear systems", Phys. Rev. A, Vol. 34(1986), pp659-661.
- ◇ Edger G.A., "Measure, Topology, and Fractal Geometry", Springer-Verlag.(1990).
- ◇ Falconer, K.J., "THE GEOMETRY OF FRACTAL SETS",  
Cambridge Univ. Press.(1985).
- ◇ Falconer, K.J., "FRACTAL GEOMETRY", John Wiley & Sons Ltd.(1990).
- ◇ Fan, M.S., "The multifractal nature of the turbulent streamwise vorticity measured in wind tunnel flows and atmospheric flow ", Fluid Mech. Rep. Yale Univ., Vol. 12(1988).
- ◇ Feder, J., "FRACTALS", Plenum Press, (1988). ; 松下 貢 他訳, 啓学出版, (1991).
- ◇ Feigenbaum, M.J., "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations", J. Stat. Phys., Vol. 19(1978), pp25-52.
- ◇ Fein, A.P., Heutmaker, M.S. & Gollub, J.P.,  
"Scaling at the transition from quasiperiodicity to chaos in a hydrodynamic system", Phys. Scr., Vol. T9(1985), pp79-84.
- ◇ Frisch, U., Sulem, P.L. & Nelkin, M., "A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence", J. Fluid Mech., Vol. 87(1978), pp719-736.
- ◇ Frisch, U. & Parisi, G., "Fully developed turbulence and intermittency", in "Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics Varenna Summer School LXXXVIII 1983", edited by Ghil, M., et al., North-Holland, New York, (1985), pp71-88.
- ◇ Giglico, M., Musazzi, S. & Perini, U., "Transition to chaotic behavior via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations", Phys. Rev. Lett., Vol. 47(1981), pp243-246.

- ◇ Goix, P.J., Shepherd, I.G. & Trinite, M., "A fractal study of a premixed V-shaped  $H_2$ /air flame", *Combust. Sci. Technol.*, Vol. 63(1989), pp275-286.
- ◇ Goldbarger, A.L. et. al. 西江弘訳, "身体の中のカオスとフラクタル", *サイエンス*, 1990年4月号, PP56-65.
- ◇ Gollub, J.P. & Benson, S.V., "Many routes to turbulent convection", *J. Fluid Mech.*, Vol. 100(1980), pp449-470.
- ◇ Gollub, J.P., McCarriar, A.R. & Steinman, J.F., "Convective pattern evolution and secondary instabilities" *J. Fluid Mech.* Vol. 125(1982), pp259-281.
- ◇ Gouldin, F.C., "An application of fractals to modeling premixed turbulent flames", *Combustion and Flame.*, Vol 68(1987), pp249-266.
- ◇ Gouldin, F.C., "Interpretation of jet mixing using fractals", *AIAA Journal*, Vol. 26(1988a), pp1405-1407.
- ◇ Gouldin, F.C., Hilton, S.H. & Lamb, T., "Experimental evaluation of the fractal geometry of flamelets", *Int. Symp. Combust.*, 22ed, (1988b), pp541-550.
- ◇ Gouldin, F.C., Bray, K.N.C. & Chen, J.-Y., "Chemical closure model for fractal flamelets", *Combustion and Flame.*, Vol. 77(1989), pp241-259.
- ◇ Gollub, J.P. & Benson, S.V., "Many route to turbulent convection", *J. Fluid Mech.*, Vol. 100(1980), pp449-470.
- ◇ Grassberger, P. & Procaccia, I., "Characterization of strange attractors", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 50(1983), pp346-349.
- ◇ Guckenheimer, J., "Strange attractors in fluids : Another view", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 18(1986), pp15-31.



- ◇ Gutzwiller, M.C. & Mandelbrot, B.B., "Invariant multifractal measures in chaotic hamiltonian systems, and related structures", Phys. Rev. Lett., Vol. 60(1988), pp673-676.
- ◇ Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I. & Shraiman, B.I., "Fractal measures and their singularities : The characterization of strange sets", Phys. Rev. A, Vol. 33(1986), pp1141-1151.
- ◇ 畑 政義, "フラクタルー自己相似集合について", 数学, Vol. 42(1990), pp304-316.
- ◇ Hedley, T.B. & Keffer, J.F., "Some turbulent/non-turbulent properties of the outer intermittent region of a boundary layer", J. Fluid Mech., Vol. 64(1974a), pp645-678.
- ◇ Hedley, T.B. & Keffer, J.F., "Turbulent/non-turbulent decisions in an intermittent flow", J. Fluid Mech., Vol. 64(1974b), pp625-644.
- ◇ Hentschel, H.G.E. & Procaccia, I., "Relative diffusion in turbulent media : The fractal dimension of clouds", Phys. Rev. A., Vol. 29(1984), pp1461-1470.
- ◇ 日野幹雄, "スペクトル解析", 朝倉書店, 第 17 刷 (1989), pp101-102.
- ◇ Honda, K., "Statistical mechanics formalism for multifractal patterns", Forma, Vol. 4(1989), pp49-54.
- ◇ Horvath, V.K. and Herrmann, H.J., "The fractal dimension of stress corrosion cracks", Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 1(1991), pp395-400.
- ◇ Hosokawa, I. & Yamamoto, K., "Intermittency of dissipation in a directly simulated fully-developed turbulence", Journal of the Physical Soc. Japan, Vol. 59(1990), pp401-404.
- ◇ 細川 巖, "乱流理論とマルチフラクタル", 日本物理学会誌, Vol. 46(1991), pp114-117.
- ◇ 船越満明, 井上進, "水面波のカオス", 日本物理学会誌, Vol. 44(1989), pp323-329.

- ◇ 稲角忠広, 笠間俊次, "焼結鉍製造における塊状化、緻密化過程の解析", 鉄と鋼, 第 78 年, 第 7 号 (1992a), pp107-114.
- ◇ Inazumi, T. and Kasama, S., "Structural analysis of iron ore sinter with computerized tomographic scanner and evaluation of sintering state", Proc. of "The 2nd Conference & Exhibition on Computer Applications to Materials and Molecular Science and Engineering at Yokohama, Japan", (1992b).
- ◇ 伊藤憲朗, 塚田忠夫, 笹島和幸, "フラクタルディメンションを用いた不規則表面凹凸の解析 (第 1 報)", 精密工学会誌, Vol. 58(1992a), pp865-870.
- ◇ 伊藤憲朗, 塚田忠夫, 笹島和幸, "フラクタルディメンションを用いた不規則表面凹凸の解析 (第 2 報)", 精密工学会誌, Vol. 58(1992b), pp1735-1740.
- ◇ Edited by Kanamori, H., Pure and applied geophysics, Vol. 131(1989), No. 4.
- ◇ Kaneko, K., "Spatial period-doubling in open flow", Physics Letters, Vol. 111, No. 7(1985), pp321-325.
- ◇ Kaneko, K., "Overview of coupled map lattices", CHAOS, Vol. 2, No. 3(1992), pp279-282.
- ◇ Karniadakis, G.E. & Triantafyllou, G.S., "The crisis of transport measures in chaotic flow past a cylinder", Phys. Fluids A, Vol. 1(1989), pp628-629.
- ◇ Keefe, L.R. & Dean, A.E., "Multifractal spectra in shear flows", 7th. Sym. Turbulent Shear Flows, Stanford Univ., (1989), pp30.3.1-30.3.5.
- ◇ Keef, R., Moin, P. & Kim, J., "The dimension of attractors underlying periodic turbulent poiseuille flow", J. Fluid Mech., Vol. 242(1992), pp1-29.
- ◇ Kerstein, A.R., "Fractal dimension of propagating interface in turbulences", Phys. Rev. A., Vol. 44(1991), pp3633-3635.

- ◇ Kida, S., "Statistics of active regions in the  $\beta$ -model of turbulence", Prog. Theor. Phys., Vol. 67(1982), pp1630-1632.
- ◇ 木田重雄, " $\beta$ モデルと藤坂・森モデル", ながれ, Vol. 6(1987), pp23-29.
- ◇ 木田重雄, "乱流の不思議なふるまい", 丸善出版, (1988).
- ◇ Kida, S., Yamada, M. and Ohkitani, K., "A route to chaos and turbulence", Physica D., Vol. 37(1989), pp116-125.
- ◇ Klebanoff, P.S., "Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient", NACA. Rep. 1247(1954), pp1135-1153.
- ◇ Kolmogorov, A.N., "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", First published in Russian in "Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 32(1941)", Translation by Levin, V. in Proc. R. Soc. Lond. A, Vol 434(1991), pp9-13.
- ◇ Kolmogorov, A.N., "Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence", First published in Russian in "Dokl.-Akad. Nauk SSSR, Vol. 32(1941)", Translation by Levin, V. in Proc. R. Soc. Lond. A, Vol 434(1991), pp15-17.
- ◇ Kolmogorov, A.N., "A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number", J. Fluid Mech., Vol. 13(1962), pp82-85.
- ◇ Kovaszny, L.S.G., Kibens, V. & Blackwelder, J., "Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer", J. Fluid Mech., Vol. 41(1970), pp283-325.
- ◇ Kozlov, V. V., Rabinovich, M. I., Ramazanov, M. P., Reiman, A. M. and Sushchik, M. M., "Correlation dimension of the flow and spatial development of dynamical chaos in a boundary later", Phys. Letters A, Vol. 128(1988), pp479-482.

- ◇ Kraichnan, R.H., "Models of intermittency in hydrodynamic turbulence", *Phys. Rev. Letts.*, Vol. 65(1990), pp575-578.
- ◇ Lanford III, O.E., "A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures", *Bull. Am. Math. Soc.*, Vol. 6(1982), pp427-434.
- ◇ Lee, S.J. & Halsey, T.C., "Some results on multifractal correlations", *Physica A*, Vol 164(1990), pp575-592.
- ◇ Leong, C.W. and Ottino, J.M., "Increase in regularity by polymer addition during chaotic mixing in two dimensional flow", *Phys. Rev. Letts.*, Vol. 64(1990), pp874-877.
- ◇ Edited by Levin, S., "Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants" in *Lecture Notes in Biomathematics* 79, (1980).
- ◇ Libby, P.A. & Williams, F.A., "Turbulent flows involving chemical reactions", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 8(1976), pp351-376.
- ◇ Libchaber, A., Laroche, C. & Fauve, S., "Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement", *J. de. Phys. Lett.*, Vol. 43(1982), pp L211-L216.
- ◇ Lovejoy, S., "Area-perimeter relation for rain and cloud areas", *Science*, Vol. 216(1982), pp185-187.
- ◇ Lovejoy, S. & Mandelbrot, B.B., "Fractal properties of rain, and a fractal model", *Tellus*, Vol. 37A(1985a), pp209-232.
- ◇ Lovejoy, S. & Schertzer, D., "Generalized scale invariance in atmosphere and fractal models of rain", *Water Resources Research*, Vol. 21(1985b), pp1233-1250.
- ◇ Lovejoy, S., Schertzer, D. & Tsonis, A.A., "Functional box-counting and multiple elliptical dimensions in rain", *Science*, Vol. 235(1987), pp1036-1038.

- ◇ Lu, S.S. & Willmarth, W.W., "Measurements of the structure of the Reynolds stress in a turbulent boundary layer", J. Fluid Mech., Vol. 60(1973), pp481-511.
- ◇ Lumley, J.L., "Coherent structures in turbulence", in "TRANSITION AND TURBULENCE", ACADEMIC PRESS, (1981), pp215-242.
- ◇ Lundgren, T.S., "Distribution functions in the statistical theory of turbulence", Phys. Fluids., Vol. 10(1967), pp969-975.
- ◇ Majumader, A. and Bhushan, B., "Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces", Journal of Tribology, Vol. 112(1990), pp205-216.
- ◇ 蒔田秀治, 阿部誠, 佐々浩司, 板橋明吉, "乱流境界層中の大規模渦構造の解明", 機論 B, Vol. 55, No.511(1989), pp606-614.
- ◇ 蒔田秀治, 飯田明由, "大規模乱流場の諸統計量の決定に関する実験的研究", 第 20 回乱流シンポジウム講演論文集, (1988), pp102-107.
- ◇ Mandelbrot, B.B., "The Fractal Geometry of Nature", Freeman(1982)., 広中平祐監訳, 日経サイエンス社 (1984).
- ◇ Mandelbrot, B.B.,  
"An introduction to multifractal distribution functions", in "Random Fluctuations and Pattern Growth : Experiments and Models", edited by Stanley, H.E. et al., Kluwer Academic Pub., (1988), pp279-291.
- ◇ Mandelbrot, B.B., "Fractal geometry : what is it, and what dose it do ?", Proc. R. Soc. Lond., A423(1989), pp3-16.
- ◇ Mandelbrot, B.B., "Multifractal measures, especially for the geophysicist", Pure and Applied Geophysics, Vol. 131(1989), pp 1-42.

- ◇ Mandelbrot, B.B., "Two meanings of multifractality, and the notion of negative fractal dimension", in "CHAOS/XAOC", edited by David K. Campbell, American Inst. Phys., New York(1990), pp79-90.
- ◇ Manneville, P. & Pomeau, Y., "Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems", Physica 1D(1989), pp219-226.
- ◇ Manneville, P. & Pomeau, Y., "Intermittency and the Lorenz Model", Phys. Lett. 75A(1979), pp1-2.
- ◇ Mantzaras, J., Felton, P.G. & Bracco, F.V., "Fractals and turbulent premixed engine flames", Combustion and Flame, Vol. 77(1989), pp295-310.
- ◇ Malraison, B., Atten, P., Berge, P. & Dubois, M., "Dimension of strange attractors : an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems", J. de Phys. Lett., Vol. 44(1983), pp L897-L902.
- ◇ 松下 貢, "自己相似・自己アフィン・マルチフラクタル", ながれ, Vol. 9(1990), pp145-157.
- ◇ 松下 貢編著, "医学・生物学におけるフラクタル", 朝倉書店, (1992).
- ◇ Maurer, J. & Libchaber, A., "Effect of the prandtl number on the onset of turbulence in liquid<sup>4</sup>He", J. de Phys. Lett., Vol. 41(1980), pp L515-L518.
- ◇ Meisel, L.V., Johnson, M. & Cote, P.J., "Box-counting multifractal analysis", Phys. Rev. A, Vol. 45(1992), pp6989-6996.
- ◇ Meneveau, C. & Sreenivasan, K.R., "Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence", Phys. Rev. Lett., Vol. 59(1987a), pp1424-1427.
- ◇ Meneveau, C. & Sreenivasan, K.R., "The multifractal spectrum of the dissipation field in turbulent flows", Nuclear Phys. B(Proc. Suppl.), Vo. 2(1987b), pp49-76.

- ◇ Meneveau, C. & Sreenivasan, K.R., "Measurement of  $f(\alpha)$  from scaling of histograms, and applications to dynamical systems and fully developed turbulence", *Physics Letters A*, Vol. 137(1989), pp103-112.
- ◇ Meneveau, C. & Chhabra, A.B., "Two-point statistics of multifractal measures", *Physica A*, Vol. 164(1990a), pp564-574.
- ◇ Meneveau, C., Sreenivasan, K.R., Kailasnath, P. & Fan, M.S., "Joint multifractal measures : Theory and applications to turbulence" , *Phys. Rev. A*, Vol. 41(1990b), pp894-913.
- ◇ Meneveau, C. & Sreenivasan, K.R., "The multifractal nature of turbulent energy dissipation", *J. Fluid Mech.*, Vol. 224(1991), pp429-484.
- ◇ Meneveau, C., "Comment on "Is intermittent motion of outer flow in the turbulent boundary layer deterministic chaos ?"[*Phys. Fluids A*3, 1941(1991)]", *Phys. Fluids A*, Vol. 4(1992), pp1587-1588.
- ◇ Miller, P.L. & Dimotakis, P.E., "Stochastic geometric properties of scalar interfaces in turbulent jets", *Phys. Fluids A*, Vol. 3(1991), pp168-177.
- ◇ Mizutani, H & Nakano, T., "Multifractal analysis of simulated two-dimensional turbulence", *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 58(1989), pp1595-1603.
- ◇ Moin, P & Moser, R.D., "Characteristic-eddy decomposition of turbulence in a channel", *J. Fluid Mech.*, Vol. 200(1989), pp471-500.
- ◇ Moore, C., "Unpredictability and undecidability in dynamical systems", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64(1990), pp2354-2357.
- ◇ Murayama, M. & Takeno, T., "Fractal-like character of flamelets in turbulent premixed combustion ", *Int. Symp. Combust.* 22nd, (1988), pp551-559.
- ◇ 武者 利光, "ゆらぎの世界", 講談社ブルーバックス, (1980).

- ◇ Muzzio, F.J., Meneveau, C., Swanson, P.D. and Ottino, J.M., "Scaling and multifractal properties of mixing in chaotic flows", Phys. Fluids A, Vol. 4(1992), pp1439-1456.
- ◇ 中川昌美, 佐武正雄, 猪股亮裕, "ライフラインシステムの震害評価におけるフラクタル次元の応用", 土木学会論文集, No.428/I-15(1991), pp177-182.
- ◇ 中村育雄, 大坂英雄, "工科系流体力学", 共立出版, 第2刷, (1986).
- ◇ 中村育雄, 酒井康彦, 角田博之, 辻 義之, "乱流境界層のフラクタル次元の決定法に関する一試み", 第22回乱流シンポジウム講演論文集, (1988), pp242-248.
- ◇ 中村育雄, "乱流現象", 朝倉書店, (1992a).
- ◇ 中村育雄, 辻 義之, 櫛田武広, 笹本健一朗, "Karhunen-Loève 展開を用いた乱流境界層中の整構造解析", 日本機械学会第70期全国大会講演論文集(C), (1992b), pp455-457.
- ◇ 中村育雄, 辻 義之, 伊藤正利, 河地典秀, "非整数ブラウン運動を用いた乱流速度信号の解析", 第24回乱流シンポジウム講演論文集, (1992c). pp345-350.
- ◇ 中村育雄, 辻 義之, 櫛田武広, 笹本健一朗, "空間相関に基づく Karhunen-Loève 展開を用いた乱流境界層中の整構造解析", 東海流体熱工学研究論文集掲載予定 (1993).
- ◇ Newhouse, S., Ruelle, D. & Takens, F., "Occurrence of strange axiom A attractors near quasi periodic flows on  $T^m, \geq 3$ ", Commun, Math. Phys. Vol. 64(1978), p35-40.
- ◇ Nelkin, M., "What do we know about self-similarity in fluid turbulence ?", J. Statistical Phys., Vol. 54(1989), pp1-15.
- ◇ 西江 弘, "生命現象を説明するカオス", 日経サイエンス, 1992年3月, pp34-39.
- ◇ O'Brien, E.E., "The probability density function approach to reacting turbulent flows", in "Turbulent Reacting Flow", Springer, (1980), pp185-218.



- ◇ 小川 進, "多摩ニュータウンの都市化に伴う流出変化とフラクタル", 水工学論文集, Vol. 35(1991a), pp129-134.
- ◇ Ogawa, S., "Runoff change with urbanization in a watershed and its fractal analysis", Proc. of The International Symposium on Environmental Hydraulics, Hong Kong", (1991b), pp1469-1475.
- ◇ Olinger, D.J. & Sreenivasan, K.R., "Nonlinear dynamics of the wake of an oscillating cylinder", Phys. Rev. Lett., Vol.60(1988), pp797-800.
- ◇ 大坂英雄, 望月信介, 西茂夫, "VITA法の検出基準についての一実験", 機論B, Vol. 52(1986), pp3224-3229.
- ◇ 大坂英雄, 望月信介, 西茂夫, "低レイノルズ数におけるd型粗面乱流境界層の組織構造(四象限分割法による解析)", 機論B, Vol. 53, No. 485(1987a), pp27-34.
- ◇ 大坂英雄, 望月信介, "d型粗面上の乱流境界層の組織構造(VITA法および四象限分割法による解析)", 機論B, Vol. 53, No. 487(1987b), pp789-796.
- ◇ Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A., "Controlling chaotic dynamical systems", in "CHAOS/XAOS", Edited by Campbell, K., AIP, (1990), pp153-172.
- ◇ Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A., "Controlling chaos", Phys. Rev. Lett., Vol. 64(1990), pp1196-1199.
- ◇ Ottino, J.M., "The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport", Cambridge Univ. Press., (1989):
- ◇ Paizis, S.T. & Schwarz, W.H., "An investigation of the topography and motion of the turbulent interface", J. Fluid Mech., Vol. 63(1974), pp315-343.
- ◇ Paizis, S.T. & Schwarz, W.H., "Entrainment rates in turbulent shear flows", J. Fluid Mech., Vol. 68(1975), pp297-308.

- ◇ Phillips, O.M., "The entrainment interface", J. Fluid Mech., Vol. 51(1972), pp97-118.
- ◇ Phillips, W.R.C. & Ratnanather, J.T., "The outer region of a turbulent boundary layer", Phys. Fluids A, Vol. 2, No. 3(1990), pp427-434.
- ◇ Pomeau, Y. & Manneville, P., "Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems", Commun. Math. Phys., Vol. 74(1980), pp189-197.
- ◇ Pope, S.B., "PDF methods for turbulent reacting flows", Prog. Energy Combust. Sci., Vol. 11(1985), pp119-192.
- ◇ Pope, S.B., "Turbulent premixed flames", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 19(1987), pp237-270.
- ◇ Prasad, R.R. & Sreenivasan, K.R., "Scalar interfaces in digital images of turbulent flows", Experiments in Fluids, Vol. 7(1989), pp259-264.
- ◇ Prasad, R.R. & Sreenivasan, K.R., "The measurement and interpretation of fractal dimensions of the scalar interface in turbulent flow", Phys. Fluids A, Vol. 2(1990a), pp792-807.
- ◇ Prasad, R.R. & Sreenivasan, K.R., "Quantitative three-dimensional imaging and the structure of passive scalar fields in fully turbulent flows", J. Fluid Mech., Vol. 216(1990b), pp1-34.
- ◇ Pritchard, W. G., "Instability and chaotic behaviour in a free-surface flow", J. Fluid Mech., Vol. 165(1986), pp1-60.
- ◇ Procaccia, I. & Schuster, H., "Functional renormalization-group theory of universal 1/f noise", Phys. Rev. A, Vol. 28(1983), pp1210-1212.
- ◇ Provenzale, A., Osborne, A.R. and Soj, R., "Convergence of the  $K_2$  entropy for random noises with power law spectra", Physica D, Vol. 47(1991), pp361-372.

- ◇ Rao, K.N., Narasimha, R. & Narayanan, M.A.B., "Bursting in a turbulent boundary layer", J. Fluid Mech., Vol. 48(1971), pp339-352.
- ◇ Raupach, M.R., "Conditional statistics of reynolds stress in rough-wall and smooth-wall turbulent boundary layers", J. Fluid Mech., Vol. 108(1981), pp363-382.
- ◇ Robinson, S.K., "Coherent motions in the turbulent boundary layer", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 23(1991), pp601-639.
- ◇ Rogers, C.A. & F.R.S., D.Sc., "HAUSDORFF MEASURES", Cambridge Univ. Press.(1970).
- ◇ Rotta, J.C., "Turbulent boundary layers in incompressible flow", Prog. Aeronautical Sciences, Vol. 2(1962), pp1-221.
- ◇ Rys, F.S., & Waldvogel, A., "Fractal shape of hail clouds", Phys. Rev. Lett., Vol. 56(1986), pp784-787.
- ◇ Sano, M., Ssato, S & Sawada, Y., "Global spectral characterization of chaotic dynamics", Prog. Theor. Phys., Vol. 76(1986), pp945-948.
- ◇ 佐野雅巳, "カオスの構造とフラクタル", 高安秀樹編「フラクタル科学」, 朝倉書店 (1987), pp58-114.
- ◇ Sato, S. & Honda, K., "Statistical physics of intermittency : Phase transitions and fluctuations of scaling indices", Phys. Rev. A, Vol. 42(1990), pp3233-3241.
- ◇ Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill, (1979).
- ◇ Schneider, S.P., "Free-stream turbulence : A limitation on fractal descriptions of open-flow systems", Phys. Fluids A, Vol. 2(1990), pp869-872.
- ◇ Schuster, H.G., "Deterministic Chaos, An introduction, 2nd edition", VCH verlagsgesellschaft mbH(1988).

- ◇ Shlesinger, M.F., "Williams-Watts dielectric relaxation : A fractal time stochastic process", J. Stat. Phys., Vol. 36(1984), p693-648.
- ◇ Sirovich, L., "The karman vortex trail and flow behind a circular cylinder", Phys. Fluids, Vol. 28(1985), pp2723-2726.
- ◇ Sirovich, L. & Winter. M., "An eigenfunction approach to large scale transitional structures in jet flow", Phys. Fluid A, Vol. 2(1990), pp127-136.
- ◇ Sirovich, L., "Turbulence and the dynamics of coherent structures", QUARTERLY OF APPLIED MATHEMATICS, Vol. XLV(1987), pp561-590.
- ◇ Sreenivasan, K.R., Prabhu, A. & Narasimha, R., "Zero-crossings in turbulent signals", J. Fluid Mech., Vol. 137(1983), pp251-272.
- ◇ Sreenivasan, K.R. "Transition and turbulence in fluid flows and low-dimensional chaos", in "Frontiers in Fluid Mechanics ", edited by Davis, S.H. & Lumly, J.L., Springer(1985), pp41-67.
- ◇ Sreenivasan, K.R. & Meneveau, C., "The fractal facets of turbulence", J. Fluid Mech., Vol. 173(1986a), pp357-386.
- ◇ Sreenivasan, K.R. & Ramshankar, R., "Transition intermittency in open flow, and intermittency routes to chaos", Physica 23D(1986b), pp246-258.
- ◇ Sreenivasan, K.R., Ramshankar, R. & Meneveau, C., "Mixing, entrainment and fractal dimensions of surfaces in turbulent flows", Proc. R. Soc. Lond., A421(1989a), pp79-108.
- ◇ Sreenivasan, K.R., Prasad, R.R., Meneveau, C. & Ramshankar, R., "Fractal geometry of interfaces and multifractal distribution of dissipation in fully turbulent flows", Pure and Applied Geophysics, Vol. 131(1989b), pp 43-60.

- ◇ Sreenivasan, K.R., "Fractals and multifractals in fluid turbulence", *Ann. Rev. Fluid Mech.* Vol. 23(1991), pp539-600.
- ◇ Stavans, J., Heslot, F. & Libchaber, A., "Fixed winding number and the quasiperiodic route to chaos in a convective fluid", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 55(1985), pp596-599.
- ◇ Strahle, W.C., "Turbulent combustion data analysis using fractals", *AIAA Journal*, Vol. 29(1991), pp409-417.
- ◇ Stratonovich, R.L., "Topics in the theory of random noise", Gordon & Breach, (1963), pp3-20.
- ◇ Struminskiy, V. V. and Skobelev, Y. B., "Strange attractors and turbulence", *Fluid Mech. Soviet Research*, Vol. 19(1990), pp1-12.
- ◇ 高安秀樹, "フラクタル", 朝倉書店, (1986).
- ◇ 高安秀樹編著, "フラクタル科学", 朝倉書店, (1987).
- ◇ 高安秀樹, "自然の複雑さとフラクタル", *科学*, Vol.61(1991), pp584-590.
- ◇ 高木幹雄, 日本経済新聞夕刊, 1986年9月16日, 科学と技術.
- ◇ Talmon, A.M., Kunen, J.M.G. & Ooms, G., "Simultaneous flow visualization and reynolds-stress measurement in a turbulent boundary layer", *J. Fluid Mech.*, Vol. 163(1986), pp459-478.
- ◇ Taylor, S.J. & Tricot, C., "Packing measure, and its evaluation for a brownian path", *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 288(1985), pp679-699.
- ◇ 遠山 啓, "無限と連続", 岩波新書, 第45刷, (1991).
- ◇ 徳永隆治, 井田 孝, "最も簡単なカオスの力学系 IFS", *数理科学*, No. 348(1992), pp35-41.

- ◇ Turner, J.S., "Turbulent entrainment : the development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows", J. Fluid Mech., Vol. 173(1986), pp431-471.
- ◇ 辻 義之, 本田勝也, 中村育雄, 佐藤信一, "乱流境界層における間欠性のマルチフラクタル解析", 物性研究, Vol. 51, No. 6(1989), pp738-743.
- ◇ 辻 義之, 中村育雄, 角田博之, 鈴木 健, "乱流拡散場における等濃度点集合のフラクタル性", 日本機械学会・山梨地方講演会論文集, (1990), pp25-26.
- ◇ Tsuji, Y., Honda, K., Nakamura, I. & Sato, S., "Is intermittent motion of outer flow in the turbulent boundary Layer deterministic chaos?", Phys. Fluid A, Vol. 3(1991a), pp1941-1946.
- ◇ 辻 義之, 本田勝也, 角田博之, 中村育雄, "乱流境界層における等速度点集合のフラクタル性", 機論B編, Vol. 57, No. 540(1991b), pp2554-2561.
- ◇ 辻 義之, 本田勝也, 中村育雄, 佐藤信一, "乱流境界層外縁における間欠的現象に対するマルチフラクタル解析", 第23回乱流シンポジウム講演論文集, (1991c), pp24-30.
- ◇ 辻 義之, 中村育雄, 伊藤正利, "乱流境界層における等速度点集合のフラクタル性 第二報：レイノルズ応力との関連", 機論B編, Vol. 58, No. 547(1992a), pp706-713.
- ◇ 辻 義之, 中村育雄, 伊藤正利, "乱流境界層における等速度点集合のフラクタル性 第三報：バーストとの関連", 機論B編, Vol. 58, No. 553(1992b), pp2722-2729.
- ◇ Tsuji, Y., Honda, K., Sato, S. & Nakamura, I., "Study on dynamical properties of intermittent phenomena in turbulent boundary layer", J. Phys. Soc. Japan, Vol. 61(1992c), pp10-14.
- ◇ 辻 義之, 中村育雄, "乱流境界層におけるバースト現象のフラクタル的構造", 京都大学数理解析研究所講究録, (掲載予定,1992d) 全 22 ページ.

- ◇ Tsuji, Y., Honda, K., Tsunoda, H. and Nakamura, I., "Fractal aspect of iso-velocity set in a turbulent boundary layer", to be published in J.S.M.E. international Journal, (1993).
- ◇ 津田一郎, "カオスの脳観", サイエンス社, (1990).
- ◇ Van Atta, C.W. & Antonia, R.A., "Reynolds number dependence of skewness and flatness factors of turbulent velocity derivatives", Phys. Fluids., Vol. 23(1980), pp252-257.
- ◇ Van Atta, C.W. & Gharib, M., "Ordered and chaotic vortex streets behind circular cylinders at low reynolds numbers", J. Fluid Mech., Vol. 174(1987), pp113-133.
- ◇ Van Dyke, M., "An Album of Fluid Motion ", Parabolic, California, (1982), p92.
- ◇ 八幡英雄, "カオスと流体", "カオス", 合原一幸編著, サイエンス社,(1990), pp161-204.
- ◇ Vassilicos, J.C. & Hunt, J.C.R., "Fractal dimensions and spectra of interfaces with application to turbulence", to be published.
- ◇ Vulpiani, A., "Lagrangian chaos and small scale structure of passive scalars", Physica D, Vol. 38(1989), pp372-376.
- ◇ Wang, L. P., Burton, T. D. and Stock, E. D., "Quantification of chaotic dynamics for heavy particle dispersion in ABC flow", Phys. Fluids A, Vol. 3(1991), pp1073-1080.
- ◇ 山口昌哉, "カオスとフラクタル", 講談社ブルーバックス (1986).
- ◇ Yamada, M. & Ohkitani, K., "Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence", J. Phy. Soc. Japan, Vol. 56(1987), pp4210-4213.
- ◇ Yamada, M. & Ohkitani, K., "Lyapunov spectrum of a model of two-dimensional turbulence", Phys. Rev. Lett., Vol. 60(1988), pp983-986.
- ◇ 山田道夫, "流体乱流とフラクタル", 数理科学, Vol. 291(1987), pp30-37.
- ◇ 横山秀史, 永田茂, 片山恒雄, 生産研究, Vol. 43(1991), pp41-44.