システムの受動性に関する研究

和 1250161

坂本 登

目 次

1	序章	3
	1.1 受動システムの概要	
	1.2 受動システムの例・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	
	1.3 研究の目的 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	8
	1.4 本論文の構成	9
2	非線形系におけるハイゲインフィードバック	10
	2.1 はじめに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	10
	2.2 非線形ハイゲインレギュレータ問題	_
	2.2.1 問題の定式化 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	11
	2.2.2 ハイゲインフィードバックの構成	12
	2.3 非線形ロバスト安定化問題	18
	2.4 おわりに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	25
3	非線形システムの受動化	26
	3.1 はじめに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	
	3.2 消散システム	26
	3.3 非線形系における有限ゲイン性と受動性の関係	31
	3.4 非線形 H∞ 問題と受動化問題の等価性 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	37
	3.4.1 状態フィードバックの場合・・・・・・・・・・・・・・・・・・	39
	3.4.2 出力フィードバックの場合・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	40
	3.5 おわりに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	42
4	γ -受動システム:その位相的性質と設計法	44
	4.1 はじめに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	44
	4.2 γ-受動システム · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	4.3 γ-受動システムの設計問題 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	49
	4.4 γ-正実システムの位相的性質····································	51
	4.5 おわりに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	
5	柔軟構造物の制御への応用	65
	5.1 はじめに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	65
	5.2 柔軟構造物の制御・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	66
	5.3 Example	

	5.4 おわりに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	74
6	結論 Bibliography · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	7 5 78
	謝辞 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	85
	口頭発表・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	86

Chapter 1

序章

1.1 受動システムの概要

受動性の概念は、電気回路網理論に端を発する. 受動的回路とは、R, L, C のみからなる回路のように、全体に加えたエネルギーは回路内で消費される一方で、回路内にはエネルギーの発生源を持たないものであり、エネルギー減衰系であるという物理的に非常に重要な性質を持っている. 制御理論において、受動性は古くから様々な概念・理論を生み出し、さらに現在もなお、制御工学における問題解決に新しい知見を与えている. これは受動性が物理的性質に深く根ざしているからに他ならない. 制御問題における最も基本的命題はエネルギー減衰系を構成することであるが、受動性の研究を通じて、そのための理解を深めることが可能であると言ってもよい.

60・70年代,受動性はフィードバックシステムの作用素論的安定解析において 重要な手段として用いられた[77,78,17,73]. そこにおける結果は現在「受動定理」と してよく知られている.受動定理は「受動的な電気回路のフィードバック結合によっ てつくられた合成回路は受動的であってその結果回路は安定であろう」という自然な 回路論的予想を正当化するものであり,特に非線形制御理論の安定解析において非常 に重要な役割をしている[58,15,5]. 受動的回路や受動的システムは正実関数によっ て表されるが[61],状態空間に基づく現代制御理論の発展に伴い,正実関数の代数的 表現が Kalman, Yacubovich らによって求められ,多入出力系へ Anderson[1] によっ て拡張された.これは正実性補題 (Positive Real lemma, Kalman-Yacubovich-Popov lemma) と呼ばれ,複素解析に基づいた正実関数が代数問題としてとらえられるとい う意味で制御理論の発展に大きく貢献した.たとえば,正実性補題は Riccati 方程式 [74],スペクトル分解[3] などとも関係が深く H^{∞} 制御の理論構築にも重要な役割を 果たしている[48]. 70年代には受動システムのエネルギー消散性という特徴はさら に一般化され、available, stored, dissipated energy 等のリヤプノフ関数の幾何学的 解釈を生み出すにいたった. これは Willems によって定式化されたもので、消散シ ステム理論と呼ばれる[75,76]. 消散システム論は、入出力の関係から定まるシステ ムに注入されたエネルギーが、内部エネルギーの増加に使われず消散することを意 味し、その入出力関係の取り方の特殊な場合として受動性を包含するような一般的 理論である. そして、その安定性は、正実性補題の非線形系への拡張とともに Hill、 Moylan らによって解析された[52, 24, 25, 26, 27]. 一方, 受動性と同様に長い歴史と 重要性を持つものに有界実性がある. 受動性がシステムに加えられたエネルギーと関 係があるのに対し、有界実性は入出力エネルギーの比の最大値と密接な関係がある. また、受動性が主に非線形系において重要な働きをするのに対し、有界実性は H^{∞} 制御理論の主役として知られているように、線形ロバスト制御理論において重要な役 割をしている.しかしながら、消散システム理論の枠組みから見れば両者とも消散シ ステムの特殊な場合であり、この意味から消散システム理論は線形・非線形にかかわ らずシステム論においてもっとも一般的な議論を可能とする枠組みを与えていると言 える。即ち、現代制御理論の二本の柱をなす受動性と有界実性を一つの枠の中で扱う ことを可能とするのが消散システム理論であり、制御問題はすべて消散システム論の 言葉で書かれると言っても過言ではない.

一方,現在非線形システムの研究における中心的命題のひとつに,大域的安定化問題がある[13,14,15]. 非線形系では,線形理論のように Lyapunov 方程式や Riccati 方程式のような安定性・安定化の一般論が成り立たないことがこの問題を難しいものにしている. また, Peaking 現象[67,68] という非線形特有の不安定化現象が発見され,この問題の扱いをデリケートなものにしている. しかしながら,受動システムはこの問題に対して非常に重要な役割を果たす. たとえば,システムをいくつかの直列結合に分解したとき,それらの結合が一種の受動性を満たすなら大域的安定化が可能である[39,59,56,15]. また,[15] において,この問題に対する様々な十分条件が受動性に基づいて得られている. また,オイラー・ラグランジュ方程式などで表される非線形機械系において,その受動性の重要性が有本らにより強く認識され[4,5],受

動定理や超安定論 [58] などによるロボットマニピュレータの運動制御が現在盛んに研究されている. これは、非線形機械系の制御の分野に新しい手法を提案する理論として注目を集めている [6, 7, 57].

受動定理は、安定性を保証するために、適応制御理論においても用いられる. しかし、受動システムは相対次数が1以下という特徴をもち、そのためプラントの相対次数が既知であるという仮定が必要になることがある. 近年開発された Integrater Backstepping 法は、この相対次数の制限を取り払うことによって受動性の概念を拡張することに成功し、大きな注目を集めている[35,50]. また Integrater Backstepping 法は、ある種の非線形システムのロバスト安定化問題に対しても有効であることが知られている[46,19]. 但し、この Integrater Backstepping 法による制御はゲインが大きくなるハイゲインフィードバックの一種であることをつけ加えておく.

また、現在の制御の主流の一つである H^∞ 制御理論も実用の時代を迎え、その制御性能の保守性が認識されるようになってきた。例えば、 H^∞ 制御はシステムの構造的な不確かさについては直接扱うことができないことはよく知られている。構造的不確かさにおいては位相情報が重要な役割をするが、 H^∞ 制御はゲインに着目した理論であり、これを扱うことはできない。これに対して、位相情報を積極的に用いようとする試みが、正実関数の位相拘束条件を用いてなされている [21]。正実関数は位相差が ± 9 0度以内という特徴を持っており、このような性質を閉ループ系にもたせようとする制御を正実制御という [60、66]。

1.2 受動システムの例

受動的システムの例をいくつかみてみよう.まず,受動性は次のように定義される. 詳しくは3章を参照されたい.

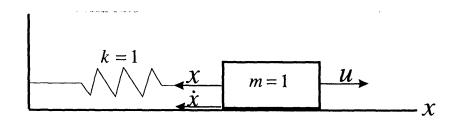
受動性の定義

 $^{\exists}C^{0}$ 級非負関数 V(x) (V(0)=0) が存在して、すべての入力 $u\in U$ 、初期値 $x_{0}=x(t_{0})$ に対して

$$V(x(t)) - V(x_0) \le \int_{t_0}^t u^T(s)y(s) ds$$

が成り立つときシステムは受動的であると言う.

Example 1.1 次のようなバネ・ダンパ系を考えよう.



$$\ddot{x} = -\dot{x} - x + u,$$
 $y = \dot{x}$

このとき

$$\int_0^t uy \, ds = \int_0^t (\ddot{x}\dot{x} + \dot{x}x + \dot{x}^2) \, ds$$

$$\geq \int_0^t (\ddot{x}\dot{x} + \dot{x}x) \, ds$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}^2(t) + x^2(t)) - \frac{1}{2}(\dot{x}^2(0) + x^2(0))$$

が成り立ち、上の定義を満たすのでシステムは受動的システムであることがわかる.

Example 1.2 (柔軟構造物) 柔軟構造物のダイナミクスは2階の微分方程式で表され、センサ・アクチュエータ・コロケーションのもとで、

$$\begin{cases} M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = B_0u \\ y = B_0^T\dot{x} \end{cases}$$

$$M = M^T > 0, \ D = D^T \ge 0, \ K = K^T \ge 0$$

と記述される. このときシステムは受動的. システムの伝達関数

$$sB_0^T(s^2M + sD + K)^{-1}B_0$$

は、正実関数となることが知られている.

Example 1.3 (ロボットマニピュレータ) ロボットマニピュレータのダイナミクス はオイラー・ラグランジュ方程式で表され、非線形性の強いシステムとなる.

$$egin{cases} H(q)\ddot{q}+\dot{H}(q)\dot{q}-\left[rac{\partial}{\partial q}\left\{K(q,\dot{q})-P(q)
ight\}
ight]^T=u \ y=\dot{q} \ \ K(q,\dot{q})=rac{1}{2}\dot{q}^TH(q)q \end{cases}$$

ここで, 全エネルギーは

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} + P(q) \ge 0$$

と表され,

$$\int_0^t y^T(\tau)u(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \dot{q}^T \left[H(q)\ddot{q} + \dot{H}(q)\dot{q} - \left[\frac{\partial}{\partial q} \left\{ K(q, \dot{q}) - P(q) \right\} \right]^T \right] d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} + P(q) \right\} d\tau$$

$$\ge E(q(t), \dot{q}(t)) - E(q(0), \dot{q}(0))$$

となり、受動的であることがわかる。

以上のように、受動性はシステムの物理的性質を強く反映している。また、受動性の定義中の関数 V(x) は系の内部エネルギーと見なされ(安定論におけるリヤプノフ関数の拡張)、不等式はこれが減少することを意味する。 $\S 1.1$ でも述べたように受動性が古くから様々な概念・理論を生み出し、さらに現在もなお、制御工学における問題解決に新しい知見を与えているのは、上で見たように受動性が物理的性質に深く根ざしているという性質によるものに他ならない。

1.3 研究の目的

本研究では新たな視点から受動性の解析を行い、それを通じていくつかの新しい理論的結果と手法を提案するとともに、それまで無秩序に点在していたいくつかの理論・概念に対し、有機的系統付けを与えることを目的とする。そして本論文全編を通じて、受動性の理解が今後も新理論の構築におけるアイディアのよい土壌となる可能性を秘めていることを主張する。

受動システムは最小位相性というシステム論において重要な性質を持つ.まず,ハイゲインフィードバックを考察することにより非線形システムの最小位相構造の解析を行う.最小位相性はハイゲインフィードバックと密接な関係がある(ハイゲインフィードバックの研究を通して非線形システムにおける最小位相性が発見された[45])ことはよく知られている.

次に、消散システム論の枠組みの中で、受動性と有界実性の関係を明らかにする。これには、Cayley-変換というシステムの双一次変換が重要な役割を演じる。Cayley-変換によって受動システムと有界実システムが双対的となることは知られている [2]が、本研究では受動化と有界実化(H^{∞} 問題)の関係、すなわち設計問題まで拡張して考察する。そして両問題の等価性を証明することを目的とする。

受動性と有界実性の双対的関係にもかかわらず、有界実性は入出力エネルギーの比の値を通してその強さが考えられるのに対し、受動性では受動的であるか・ないかの二者択一であるという大きな違いがある。本研究ではこの不整合性に対し一つの解法を与える。すなわち、強い受動システム、弱い受動システムを扱うことができる理論的枠組みを提案する。また、位相情報を積極的に用いるためのアプローチを提案することも本研究の目的の一つであり、これは受動システム(即ち正実関数)の位相拘束を拡張することによって可能となる。

1.4 本論文の構成

各章の概要は以下のとうりである.

第2章では、非線形系のシステム構造をハイゲインフィードバックにより考察する。まず、ハイゲインレギュレータ問題が解かれ、次に外乱項を持つ非線形系のロバスト安定化問題が考察される。その結果として本章で提案されるハイゲインフィードバックと近年注目を集めている Intergrater Backstepping 法との構造的同一性が示される。

第3章では、非線形 H^{∞} 問題とシステムの受動化問題が考察される。そのために、 非線形作用素の Cayley-変換が状態空間で表現され、さらにそれが一般化プラントに 対する Cayley-変換に拡張される。結果として両問題の等価性が証明される。準備の ために、本章はじめにおいて消散システムの理論を概説する。消散システム論は以 後、本論文の理論展開の枠組みを与えるという意味で、本質的役割をする。

第4章では、消散システム理論に基づき γ -受動性の概念が定義される。これは有限ゲインシステムにおけるゲインと同様に、受動システムにエネルギー消散の度合いの指標を持たせるものである。即ち、受動システムに対し消散性の強さを導入する。さらに本章では、非線形系の出力フィードバック漸近安定化定理、 γ -受動性の持つ位相条件による位相曲線整形法、受動定理の拡張とその有効性の例題による検証など、 γ -受動性の導入により得られる結果が示される。

第5章では、γ-受動システムの柔軟構造物の制御に対する応用を考察する. 特にスピルオーバ補償に対し、スモールゲイン条件とも、正実条件とも異なる新しい条件を示す.

第6章では、本研究内容を総括し、今後の研究課題について触れる.

Chapter 2

非線形系におけるハイゲインフィード バック

2.1 はじめに

制御系においてハイゲインフィードバックは外乱除去,目標追従性,パラメータ変動の影響の抑制など多くの利点を持つことが古くから知られている[69].しかし一般にシステムはフィードバックゲインを増加させていくと不安定になる傾向がある.そのためハイゲインフィードバックが可能なシステムの構造を明らかにすることは重要であり、線形系に対する研究から始まり、非線形系に対しても多くの研究がなされてきた[38,45,43,71,62]. これらの解析には特異摂動法[29][30]が非常に有効である.

受動性の特徴のひとつとして、最小位相性があり、これはハイゲインフィードバックと関係が深い、本章では非線形システムにおいてこのハイゲインフィードバックの効用を調べる。まず、非線形システムにおいてマルチパラメータのハイゲンフィードバック [53][54]を用いてハイゲインレギュレータの設計手法を示し、さらにその発展として非線形ロバスト安定化問題を考察する。ハイゲインレギュレータ問題は、線形系において Kimura[36] によって、いわゆる完全制御問題という一般的な形で主に幾何学的手法を用いて必要十分条件が求められている。また、村田ら [53][54] は右可逆、最小位相なシステムに対しマルチタイムスケールの特異摂動法を用いることにより、ハイゲインレギュレータの構成アルゴリズムを示した。本章では §2.2 において m 入力 p 出力の非線形系に対し村田らの結果を拡張し、安定かつ高性能なレギュレータを構成する。まず非線形系に対し非干渉化を行い、これに対して特異摂動法を用いてマルチパラメータのハイゲインフィードバックを設計する。

§2.3 では、完全線形化可能な1入出力非線形系が有界な時変不確定要素を含む場合のロバスト安定化問題に対し、§2.2 のマルチパラメータ・ハイゲインフィードバックが有効であることを示す。この種のシステムは、最近注目を集めている Backstepping 法が対象としているものである[46][19]. Backstepping 法とは、低次のシステムからある種の繰り返し操作を行うことにより、Lyapunov 関数を構成し、システムの相対 次数に依存せずロバスト安定化コントローラを設計する手法であり、適応制御系等への応用が多くなされている[35,51]. また、Backstepping 法によって求められるコントローラは多くの場合ハイゲイン構造を持つことが Freeman ら[19] によって指摘されている。ここにおける我々のもう一つの目的は Backstepping 法とマルチパラメータハイゲインフィードバックは本質的に同じ構造を持つことを示すことである。そのために、定理2.8 を特異摂動法ではなく、直接 Lyapunov 関数を構成することにより証明する。さらにそれぞれの手法の持つ長所、短所を明らかにする。

2.2 非線形ハイゲインレギュレータ問題

2.2.1 問題の定式化

入力に関して線形な m 入力 p 出力非線形系

$$\Sigma: \left\{ egin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u(t) \ y &= h(x) \end{aligned}
ight. \ G(x) &= \left[g_1(x), \cdots, g_m(x)
ight] \ x \in \mathbf{R}^n, \ u \in \mathbf{R}^m, \ y \in \mathbf{R}^p \end{array}
ight.$$

を考える. ここで f, G, h の成分は x に関して十分に滑らかとし,一般性を失うことなく x^0 は $f(x^0)=0$, $h(x^0)=0$ を満たす点と仮定する. このシステムに対して,正のパラメータ g を含む状態フィードバック

$$u = w(g, x), \ w(g, x^0) = 0, \ g$$
: 正定数

を用いる. 評価関数は, $J=\int_0^\infty y^T y \; dt$ を考える.

定義 2.1 (非線形ハイゲインレギュレータ問題: NHRP) 次のふたつの条件を満たすフィードバック

$$u = w(g, x)$$
 (g 正定数)

と、ある開集合 U^0 が存在するときNHRPは可解であるという.

i) ある g^* が存在し, $g \ge g^*$ ならば

$$\dot{x} = f(x) + G(x)w(g,x)$$

は 00 上漸近安定.

ii) $x(0) \in U^0$ ならば, $\lim_{g \to \infty} J = 0$

2.2.2 ハイゲインフィードバックの構成

まずシステム Σ に対し相対次数, 最小位相性等を定義する. 記号, 用語等は標準的なものに従う[31, 55].

定義 2.2 システム Σ が x^0 で相対次数 $\{r_1, \dots r_p\}$ を持つとは次の i), ii) を満たすときを言う.

i) ある x^0 の近傍 U が存在してすべての $i, j, k; 1 \le i \le p, 1 \le j \le m, k \le r_i - 1$ に対し

$$L_{g_j}L_f^kh_i(x)=0$$

ii) $rank A(x^0) = min(m, p);$

$$A(x) := \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{g_1} L_f^{r_p-1} h_p(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_p-1} h_p(x) \end{bmatrix}$$

ここで、スカラー関数 $\lambda(x)$ に対し、

$$egin{aligned} L_f \lambda(x) &= rac{\partial \lambda}{\partial x}(x) f(x), \ L_f^k \lambda(x) &= rac{\partial (L_f^{k-1} \lambda)}{\partial x}(x) f(x); \ L_f^0 \lambda(x) &= \lambda(x) \end{aligned}$$

と定義する.

定義 2.3 ある滑らかな連結部分多様体 $Z^* \subset h^{-1}(0)$, 滑らかな写像 $u^*: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, 近傍 $U \ni x^0$ が存在してすべての $x \in Z^* \cap U$ に対して

$$f^*(x) := f(x) + G(x)u^*(x) \in T_xZ^*$$

となるとき,組 (f^*, Z^*) をシステム Σ のゼロダイナミクスという.ここに, T_xM は可微分多様体 M の点 x における接べクトル空間を表す.

定義 2.4 システム Σ が最小位相とは、そのゼロダイナミクスが局所漸近安定であるときを言う.

このとき次の補題が成り立つ。

補題 2.5 システム Σ は x^0 で相対次数 $\{r_1, \dots, r_p\}$ を持つとする。もし, $m \ge p$ ならば Σ は状態フィードバック $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ によって非干渉化され,またあるフィードバック $u = u^*$ と Z^* が存在して, $(f + Gu^*, Z^*)$ がゼロダイナミクスを表す。 (証明) $\xi^i = col(\xi_1^i, \dots, \xi_{r_i}^i) = col(h_i, L_f h_i, \dots, L_f^{r_i-1} h_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$ ととると,ある $\eta = col(\eta_1(x), \dots, \eta_{n-r}(x))$, $(r := \sum_{i=1}^p r_i)$ が存在して $\Phi(x) = col(\xi^1(x), \dots, \xi^p(x), \eta(x))$ が局所座標となるようにできる。この座標系と,フィードバック

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{2.1}$$

$$\begin{cases}
\alpha(x) = -A^{T}(x)(A(x)A^{T}(x))^{-1}b(x), \\
\beta(x) = -A^{T}(x)(A(x)A^{T}(x))^{-1}; \\
b(x) = col(L_{f}^{r_{1}}h_{1}(x), \dots, L_{f}^{r_{p}}h_{p}(x))
\end{cases}$$
(2.2)

によってシステム Σ は次のように表される.

$$\dot{\xi}^{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \xi^{i} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v^{i}$$
 (2.3)

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)v \tag{2.4}$$

また $u^*=-A^T(x)(A(x)A^T(x))^{-1}$ であり、 $Z^*=\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,\xi^i=0,\,i=1,\cdots,p\}$ となる.

Remark 2.1 補題の条件が満たされるときシステムが右可逆となることが Hirshorn[28] と同様の方法により示される。また、定義より (2.4) において $\xi=0$, v=0 とおいたものがゼロダイナミクスを表す。

以上を準備として目的のフィードバックを設計しよう。まず線形部分 (2.3) に対するフィードバックを構成する。第i番目の線形ブロックに次のハイゲインフィードバックを行う。

$$v_{r_i}^i = -g_{i,r_i}(\xi_{r_i}^i - v_{r_i-1}^i); \ g_{i,r_i} := g^{a_{i,r_i}}$$

ここで、 $a_{i,r_i}>0$ は後に決定される. これにより r_i 番目(最下段)の方程式は

$$\dot{\xi}_{r_i}^i = -g_{i,r_i}(\xi_{r_i}^i - v_{r_i-1}^i),$$

となり、次のように2つのサブシステムに分けられる.

•退化システム:
$$\xi_{r_i,s}^i = v_{r_i-1}^i$$
•境界層システム: $\frac{d\xi_{r_i,f}^i}{d\tau_{r_i}} = -\xi_{r_i,f}^i$, $\xi_{r_i,f}^i := \xi_{r_i}^i - \xi_{r_i,s}^i$, $\tau_{r_i} = g_{i,r_i} \cdot t$

これにより、第 r_i-1 番目の方程式に対する入力として $v_{r_i-1}^i$ を用いることができる.

$$v_{r_{i}-1}^{i} = -g_{i,r_{i}-1}(\xi_{r_{i}-1}^{i} - v_{r_{i}-2}^{i});$$

$$g_{i,r_{i}-1} := g^{a_{i,r_{i}-1}}, a_{i,r_{i}} > a_{i,r_{i}-1}$$

ととり、これを繰り返す. すなわち、第j段目 ($j=2,\cdots,r_i$) に対して

$$v_j^i = -g_{i,j}(\xi_j^i - v_{j-1}^i)$$

 $g_{i,j} := g^{a_{i,j}}, \ 0 < a_{i,j} < a_{i,j-1}$

とする. ただし $a_{i,j}$ は特異摂動系の安定性を保証できる範囲にとる (実際には $\S 2.3$ に述べられる手法を用いる). 最後の段に対しては

$$v_1^i = -g_{i,1}\xi_1^i; \ g_{i,1} := g^{a_{i,1}}$$

ととる. 以上まとめて全体の入力として

$$v^{i} = v_{r_{i}}^{i} = -g_{i,r_{i}}(\xi_{r_{i}}^{i} + g_{i,r_{i}-1}(\cdots(\xi_{2}^{i} + g_{i,1}\xi_{1}^{i})\cdots)),$$

$$i = 1, \cdots, p$$
(2.5)

を得る.

$$J = \sum_{i=1}^p \int_0^\infty \xi_1^i \, dt$$

であるので NHRP ii) の条件は満たされることが分かる. ではフィードバック (2.5) が非線形部分 (2.4) を安定化していることを確かめよう. このとき次の補題が必要である [72].

補題 2.6

$$\dot{z} = f(z, \xi), \quad \dot{\xi} = g(\xi) \tag{2.6}$$

において $\xi=0$ は $g(\xi)$ の局所漸近安定な平衡点, z=0 は f(z,0) の局所漸近安定な平衡点とする. このとき $(z,\xi)=(0,0)$ は (2.6) の局所漸近安定な平衡点である.

実際,フィードバック (2.5) は線形部分の状態の線形結合であるので,システムが最小位相ならば Remark 2 と上の補題より非線形部分の局所漸近安定性が従う.以上より次の定理を得る.

定理 2.7 $m \ge p$ かつシステム Σ は x^0 において相対次数 $\{r_1, \cdots, r_p\}$ をもち、最小位相とする。このとき NHRP は可解であり、そのフィードバックは (2.1), (2.2), (2.5) で与えられる。

Example 2.1 次の3入力2出力システムを考える.

$$\dot{x} = \left[egin{array}{c} x_1 x_4 \\ x_2 \sin x_3 \\ x_2 - x_3^3 \\ x_1 x_4 - (x_2^2 + 1) x_4 \end{array}
ight] + \left[egin{array}{c} x_3 \\ 0 \\ 0 \\ x_3^2 + 1 \end{array}
ight] u_1 + \left[egin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}
ight] u_2 + \left[egin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}
ight] u_3$$

$$y=\left[egin{array}{c} x_1 \ x_2 \end{array}
ight],\; x=\left[egin{array}{c} x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \end{array}
ight]$$

これは相対次数 $\{1,1\}$ を持ち A(x), b(x) は

$$A(x) = \left[egin{array}{ccc} x_3 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 1 \end{array}
ight], \ b(x) = \left[egin{array}{c} x_1 x_4 \ x_2 \sin x_3 \end{array}
ight]$$

となる. またゼロダイナミクスは

$$\dot{x}_3 = -x_3^3, \ \dot{x}_4 = -x_4$$

となり(大域的)漸近安定である.定理によってハイゲインフィードバックを求めると

$$u_1 = -\frac{x_1 x_3 x_4}{x_3^2 + 1} + \frac{x_3}{x_3^2 + 1} v^1$$

$$u_2 = -\frac{x_1 x_4}{x_3^2 + 1} + \frac{v^1}{x_3^2 + 1}; \ v^1 = -g x_1$$

$$u_3 = -x_2 \sin x_3 + v^2; \ v^2 = -g x_2$$

となる. 閉ループシステムは

$$egin{align} \dot{x}_1 &= -gx_1, \ \dot{x}_2 &= -gx_2, \ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3^3, \ \dot{x}_4 &= x_1x_4 - (x_2^2 + 1)x_4 - x_1x_3x_4 - rac{x_1x_4}{x_3^2 + 1} \ -gx_3x_1 - rac{gx_1}{x_2^2 + 1} \ \end{array}$$

となり, $g \to \infty$ のとき $J \to 0$ となることがわかる.

2.3 非線形ロバスト安定化問題

次の n 次元システムを考える.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_{1} = x_{2} + \phi_{1}(x_{1}, \theta(t)) \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n} + \phi_{n-1}(x_{1}, \cdots, x_{n-1}, \theta(t)) \\ \dot{x}_{n} = u + \phi_{n}(x_{1}, \cdots, x_{n}, \theta(t)) \end{cases}$$
(2.7)

ここで ϕ_1, \dots, ϕ_n は x_1, \dots, x_n, θ に関し十分に滑らかとし, $\theta(t)$ は \mathbf{R}^p のコンパクト集合 Δ 上を動く未知パラメータ,さらに

$$\phi_j(0,\dots,0,\theta) = 0, \ j = 1,\dots,n, \ \forall \theta \in \Delta$$
 (2.8)

が成り立つと仮定する. このとき上のシステムを安定化するロバストフィードバック則を求めるのが本節の問題である. この類の安定化問題を扱った研究には matching 条件 $\phi_1=0,\cdots,\phi_{n-1}=0$ の下によるもの [9],matching 条件は満たさないが, ϕ_1,\cdots,ϕ_{n-1} は十分に小さいとしたもの [16] などがある. 一般の 1 入出力非線形系が有界な時変不確定要素を含むとき,状態フィードバックと座標変換によって (2.7)-(2.8) の形へ変換できるための十分条件は Marino ら [46] により幾何学的手法によって求められている. 従ってここでは (2.7)-(2.8) 式の形のシステムに対して議論をすすめることにする.

本節の主要結果は次の定理である.

定理 2.8 時変未知パラメータを含むシステム Σ に対し、次の性質を満たすフィードバック

$$u=u(x,g)$$
; (g は正定数)

が存在する. すなわち、任意のコンパクト集合 Ω に対してある $g^*>0$ が存在して、 $g>g^*$ なるすべての g に対して u=u(x,g) はシステム Σ を指数安定化し、閉ループ系の吸引領域は Ω を含む.

(証明) まず次の補題を証明しよう.

補題 2.9

$$\Sigma_{i}: \left\{ egin{aligned} \dot{x}_{1} = x_{2} + \phi_{1}(x_{1}, heta(t)) \ \dot{x}_{2} = x_{3} + \phi_{2}(x_{1}, x_{2}, heta(t)) \ & \dots \ \dot{x}_{i} = u_{i} + \phi_{i}(x_{1}, \cdots, x_{i}, heta(t)) \end{aligned}
ight.$$
 $heta(t) \in \Delta \subset \mathbf{R}^{p}$

に対し,以下を仮定する.

$$u_i = -g_i(x_i + g_{i-1}(x_{i-1} + \dots + g_2(x_2 + g_1x_1) \dots)),$$

 $g_j := g^{a_j}, \ j = 1, \dots, i, \ a_1 < a_2 < \dots < a_i$

により漸近安定化される.

- ある正定対称行列 P(g) が存在して、リヤプノフ関数は $x^i := col(x_1, \dots, x_i)$ の 2 次形式 $V_i = (x^i)^T P(g) x^i / 2$ で与えられる.
- 任意の原点を含むコンパクト集合 $\Omega\subset\mathbf{R}^i$ に対して、ある $g^*>0$ とある正定対称行列 $Q(x^i,\theta)$ で、各成分は (x^i,θ) の連続関数であるものが存在して $g>g^*$ ならば

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{1}{2} (x^i)^T (PA_i + A_i^T P) x^i + (x^i)^T P\Phi_i$$
$$\leq -(x^i)^T Q x^i, \ \forall x^i \in \Omega, \ \forall \theta \in \Delta$$

とできる. ここで

$$A_i = \left[egin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \ dots & 0 & 1 & \ddots & dots \ dots & \ddots & \ddots & 0 \ 0 & & 0 & 1 \ -\prod_{k=1}^i g_k & \cdots & \cdots & -g_i \end{array}
ight]$$
 $\Phi_i = col(\phi_1, \cdots, \phi_i)$

とする. このときシステム

$$\Sigma_{i+1}: \left\{ egin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(x_1, heta(t)) \ & \cdots \ & \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_i(x_1, \cdots, x_i, heta(t)) \ & \\ \dot{x}_{i+1} = u_{i+1} + \phi_{i+1}(x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, heta(t)) \end{array}
ight.$$

は, フィードバック

$$u_{i+1} = -g_{i+1}(x_{i+1} + g_i(x_i + \dots + g_2(x_2 + g_1x_1) \dots))$$

$$g_{i+1} := g^{a_{i+1}}, \ a_{i+1} > a_i$$

によって漸近安定化され、そのリヤプノフ関数 $V_{i+1}(x_1,\cdots,x_{i+1},g)$ は $x^{i+1}=[(x_1)^T,\cdots,x_{i+1}]^T$ の 2 次形式であり、任意の原点を含むコンパクト集合 $\Omega'\subset\mathbf{R}^{i+1}$ に対して、ある $g^{**}>0$ と正定対称行列 $\bar{Q}(x^{i+1},\theta)$ で、各成分は (x^{i+1},θ) の連続関数であるものが存在して $g>g^{**}$ ならば

$$\frac{dV_{i+1}}{dt} \le -[(x^i)^T x_{i+1}] \bar{Q}[(x^i)^T x_{i+1}]^T,$$

$$\forall (x_1, \dots, x_{i+1}) \in \Omega', \ \forall \theta \in \Delta$$

を満たす.

(補題の証明) $z_{i+1}=x_{i+1}+g_i(x_i+\cdots+g_2(x_2+g_1x_1)\cdots)$ と変数変換する. また行列 A を $A^T=[a_1^T,\cdots,a_i^T]^T$ のように行に分解しておく. このとき

$$z_{i+1} = x_{i+1} - a_i x^i (2.9)$$

と書け、システム Σ_{i+1} は

$$\Sigma'_{i+1}: \begin{cases} \dot{x}^i = Ax^i + e_i z_{i+1} + \Phi_i \\ \\ \dot{z}_{i+1} = -g_{i+1} z_{i+1} - a_i (Ax^i + e_i z_{i+1} + \Phi_i) + \phi_{i+1} \end{cases}$$

$$e_i = col(0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{R}^i$$

と書ける. Σ_{i+1}' に対する x^{i+1} の 2 次形式リヤプノフ関数を

$$V_{i+1}(x^i, z_{i+1}) = \frac{1}{2}(x^i)^T P x^i + \frac{1}{2}|z_{i+1}|^2$$

とおく. (2.8) より x^{i+1} , θ の連続関数 $\bar{\phi}_{j,k}$, $k=1,\cdots,j,\,j=1,\cdots,i+1$ を用いて

$$\phi_{j} = \sum_{k=1}^{j} \bar{\phi}_{j,k}(x_{1}, \cdots, x_{j}, \theta) x_{k}, \ j = 1, \cdots, i+1$$

と書ける. よって (2.9) とこれらの関数を用いて

$$\Phi_{i} = \bar{\Phi}x^{i}; \; \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\phi}_{2,1} & \bar{\phi}_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\phi}_{i,1} & \bar{\phi}_{i,2} & \cdots & \bar{\phi}_{i,i} \end{bmatrix}$$

$$\phi_{i+1} = \psi x^i + \bar{\phi}_{i+1,i+1}(z_{i+1} + a_i x^i);$$

$$(\psi:=[\bar{\phi}_{i+1,1},\cdots,\bar{\phi}_{i+1,i}])$$

と表すことができる. システム Σ_{i+1}' に沿った V_{i+1} の微分は

$$\frac{V_{i+1}(x^i, z_{i+1})}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} (x^{i})^{T} (PA + A^{T}P) x^{i} + (x^{i})^{T} e_{i} z_{i+1} + (x^{i})^{T} P \Phi_{i}$$

$$+ z_{i+1} (-g_{i+1} z_{i+1} - a_{i} (Ax^{i} + e_{i} z_{i+1} + \Phi_{i}) + \phi_{i+1})$$

$$\leq -(x^{i})^{T} Q(x^{i}, \theta) x^{i} - (g_{i+1} - g_{i} - \bar{\phi}_{i+1, i+1}) |z_{i+1}|^{2}$$

$$- z_{i+1} (a_{i} A + a_{i} \bar{\Phi} - \bar{\phi}_{i+1, i+1} a_{i} - \psi - e_{i}) x^{i}$$

$$= -X^{T} \begin{bmatrix} Q & \Psi^{T} \\ \hline \Psi & g_{i+1} - g_{i} - \bar{\phi}_{i+1, i+1} \end{bmatrix} X; \qquad (2.10)$$

となる. ここで $X:=[(x^i)^T z_{i+1}]^T$, $\Psi:=(a_iA+a_i\bar{\Phi}-\bar{\phi}_{i+1,i+1}a_i-\psi-e_i)/2$ とおいた. $|\bar{\phi}_{i+1,i+1}|$, $\Psi^TQ^{-1}\Psi$ は $\Omega'\times\Delta$ 上の連続関数なのでこの上で最大値をとる. 故に

$$g_{i+1} > g_i + \sup_{\substack{x^{i+1} \in \Omega' \\ \theta \in \Lambda}} (|\bar{\phi}_{i+1,i+1}| + \Psi^T Q^{-1} \Psi)$$

ととればシステムは漸近安定化される. このとき $\bar{Q}(x^{i+1},\theta)$ は (2.10) の行列より求めることができる.

定理の証明に戻り、i=1 のとき補題の仮定が成り立つことを示す. 即ちシステム

$$\Sigma_1 : \dot{x}_1 = u_1 + \phi_1(x_1, \theta(t))$$

に対して、フィードバック $u_1 = -g^{a_1}x_1$ を行う. $V_1 = x_1^2/2$ ととると、

$$\frac{dV_1}{dt} = -g^{a_1}x_1^2 + x_1\phi_1(x_1, \theta)$$
$$= -(g^{a_1} - \bar{\phi}_1(x_1, \theta))x_1^2$$

となる. ここで (2.8) より, x_1 , θ の連続関数 $\bar{\phi}_1(x_1,\theta)$ が存在して,

$$\phi(x_1,\theta)=\bar{\phi}_1(x_1,\theta)x_1$$

と書けることを用いた. $ar{\phi}_1(x_1, heta)$ は $\Omega imes \Delta$ 上で最大値をとるので,

$$g^{a_1} > \sup_{\substack{x_1 \in \Omega \\ \theta \in \Delta}} |\bar{\phi}_1|$$

ととればシステム Σ1 は漸近安定化される.

最後に漸近安定性が指数的であることを示そう。補題にあるようにして構成されたリアプノフ関数 $V=x^TPx/2$ をとる。ある $\sigma_1,\,\sigma_2>0$ をとって

$$\sigma_1 ||x||^2 \le V \le \sigma_2 ||x||^2$$

とできる. さらにある $n \times n$ 正定行列で、各成分は x, θ の連続関数であるものが存在して、システム Σ に沿った微分は

$$\frac{dV}{dt} = -x^T Q(x, \theta) x$$

となる. $Q(x,\theta)$ の連続性よりコンパクト集合 Ω に対して、ある σ_3 , $\sigma_4>0$ をとって

$$\sigma_3 I_n \leq Q(x, \theta) \leq \sigma_4 I_n, \ \forall x \in \Omega, \ \forall \theta \in \Delta$$

とできる. よって Gronwall の補題より

$$V \leq -\frac{\sigma_2}{\sigma_3} \frac{dV}{dt}$$

となり.

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-\sigma_3 t/\sigma_2}$$

より,指数安定性が従う.

Remark 3: 定理 2.8 の証明から分かるように、リヤプノフ関数とコントローラの構成アルゴリズムは Backstepping 法によるもの [46] と完全に同じである。両者の相違点は Backstepping 法では、リヤプノフ関数の時間微分を負定にするために一般

的な非線形関数を選ぶのに対し、定理では線形関数を選ぶという点である。そのため、Backstepping 法では大域的漸近安定性が言えるのに対し、定理では任意の与えられたコンパクト集合上における安定性となる。また非線形関数の大きさが線形的に大きくなるような(Linear growth condition)場合、定理のフィードバックによって大域的安定化ができるが原点から離れたところでのゲインが必要以上に大きくなる可能性があることも上の証明からわかるであろう。しかし、一方で線形フィードバックであるため、指数安定性が保証される、また、次の例題からもわかるように、構造や計算が非常に簡単であるなどの利点がある。

Example 2.2 次のシステムを考える.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 \theta(t) \\ \dot{x}_2 = u; \ |\theta(t)| \le 1 \end{cases}$$

このシステムを漸近安定化し、その吸引領域が $\Omega:=\{(x_1,x_2)\,|\,|x_i|\leq \omega_i,\ i=1,2\}$ を含むようなコントローラを設計しよう。定理にある手順で g_1 を求めると $g_1>\omega_1$ となり、 $V_2=x_1^2/2+(x_2+g_1x_1)^2/2$ の時間微分をとると

$$\dot{V}_2 = -X^T Q X, \; X = col(x_1, x_2 + g_1 x_1);$$
 $Q = \left[egin{array}{ccc} g_1 - x_1 heta(t) & -(g_1^2 - g_1 x_1 heta(t) - 1)/2 \ -(g_1^2 - g_1 x_1 heta(t) - 1)/2 & g_2 - g_1 \end{array}
ight]$

となる. 従って

$$g_2 > g_1 + \frac{(g_1^2 + g_1\omega_1 - 1)^2}{4(g_1 - \omega_1)}$$

ととればよい. またコントローラは

$$u = -g_2(x_2 + g_1x_1)$$

となる.

2.4 おわりに

非線形システムにおけるハイゲインフィードバックについて、ハイゲインレギュレータ問題とロバスト安定化問題をとりあげ、その有効性を確かめた。§2.2 では加入力 p 出力非線形システムに対しハイゲインレギュレータの設計手法を示した。求めた十分条件はシステムの最小位相性と一種の右可逆性(Remark 1)であり、この意味で線形系[53]の拡張となっている。§2.3 ではフィードバック線形化可能な非線形システムが有界時変な不確定パラメータを含む場合のロバスト安定化問題に対し、マルチパラメータハイゲインフィードバックが有効であり、いわゆる Backstepping 法と同じ構造を持つことを示した。そのため、定理 2.8 を従来の特異摂動法によらず、Lyapunov 安定論に基づいて証明した。また、両手法の持つ相違点、長所、短所についても考察した。

Chapter 3

非線形システムの受動化

3.1 はじめに

古典制御的周波数曲線整形を現代的意味から定式化し、系統的に取り扱おうとする H^{∞} 制御理論は、いわゆる DGKF の論文 [18] により解決され、それを非線形システムへ拡張しようとする動きがある [63, 64, 32, 33, 65]. スモールゲイン定理と受動定理の双対的関係 [2] から、スモールゲイン定理に基づく H^{∞} 問題と受動化問題にもそのような関係が成り立つと考えられ、これは線形系において Safonov ら [60] によって証明された.一方、 H^{∞} 問題もある種のエネルギー減衰系を構成するものであり、その意味から非線形システムに対しても受動化問題と双対的関係が成り立つことが予想される.本章の目的は、この問題に対する解答を与えることである.非線形システムにおいては、伝達関数などは考えることはできず、全て時間領域での議論となる.これは、70年代に盛んに研究された消散システム論を用いることで容易となる.

3.2 消散システム

ここでは本研究の基礎となる消散システムについて概観する。消散性は線形非線形を問わずダイナミカルシステムの研究において最も基礎となる概念であり、受動システムや H^∞ 理論で用いられる有限ゲインシステムは特殊な場合として含まれる。

つぎのようなシステムを考える.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)u \\ y = h(x) + J(x)u \end{cases}$$
(3.1)

ここで $u(t) \in \mathbf{R}^m$, $y(t) \in \mathbf{R}^p$, $x(t) \in X = \mathbf{R}^n$ である。許容入力の集合 U は \mathbf{R} 上の \mathbf{R}^m -値区分的連続関数からなる。関数 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $G: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n \times m}$, $h: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, $J: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{p \times p}$ はすべて x の滑らかな写像とする。一般性を失わずに f(0) = 0, h(0) = 0 を仮定する。以下の定義は主に [75] による。w を $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p$ 上で定義された実数値関数とする(supply rate と呼ばれる)。すべての $u \in \mathcal{U}$, $x_0 \in X$ と,対応する出力 $y(t) = h(\Phi(t, t_1, x_0, u)) + J(\Phi(t, t_1, x_0, u))u(t)$ に対し w(u, y) はつぎを満たすものと仮定する:

$$\int_{t_1}^{t_2} |w(u(s), y(s))| ds < \infty \text{ for all } t_1 \le t_2$$

ここで、 $\Phi(t_2,t_1,x_0,u)$ は $\dot{x}=f(x)+G(x)u(t)$ の初期値を $x(t_1)=x_0$ とする解の時刻 t_2 の値である.

定義 3.1 システム (3.1) が supply rate w(u(t),y(t)) に関して消散的であるとは C^0 級非負関数 $V:X\longrightarrow \mathbf{R}$ (storage function) が存在して、任意の $u\in\mathcal{U},\ x_0=x(t_0)\in X$ に対して

$$V(x) - V(x_0) \le \int_{t_0}^t w(s) \, ds$$
, for all $t \ge t_0$ (3.2)

となるときをいう.ここで $x = \Phi(t, t_0, x_0, u)$ である.

次の主張は消散システムの定義から直接導かれる[75][15].

命題 3.2 システム (3.1) が supply rate w に関し消散的ならば、次式で定義される

available storage $V_a(x)$ はすべての $x \in X$ について有限である.

$$V_a(x) := -\inf_{egin{array}{c} u \in \mathcal{U} \ t \geq t_0 \ x(t_0) = x \end{array}} \int_{t_0}^t w(s) \ ds.$$

さらに、可能な全ての storage function V は、 $0 \le V_a(x) \le V(x)$ を満たす。また $V_a(x)$ が C^0 級ならば V_a 自身が storage function となる。逆に $V_a(x)$ が全ての $x \in X$ で有限かつ C^0 級ならば、システム (3.1) は消散的である。

以下本論文では、available storage $V_a(x)$ は、もし存在するならば、滑らかな関数であると仮定する。次の補題は 2 次の supply rate $w(u,y)=y^TQy+2y^TSu+u^TRu$ に関して消散的となるための必要十分条件を述べているものであり、Positive Real Lemma や Bounded Real Lemma の拡張と見ることができる [24].ここに、 $Q \in \mathbf{R}^{p \times p}, S \in \mathbf{R}^{p \times m}, R \in \mathbf{R}^{m \times m}$ は定数行列であり、Q, R は対称行列である.

補題 3.3 任意の $y \neq 0$ に対し、 $u \in \mathcal{U}$ が存在し、supply rate は $w(u,y) = y^TQy + 2y^TSu + u^TRu < 0$ となると仮定する.このとき以下は等価である.

- i) supply rate w(t) に関しシステム (3.1) は消散的.
- ii) ある滑らかな関数 $V(x) \ge 0$ が存在し,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) + \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x)u \le w(t), \ \ V(0) = 0$$

を満たす.

iii) ある滑らかな関数 $V(x) \ge 0$ と,x の関数 $l: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q, W: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{q \times m}$ (q は ある自然数) が存在して,すべての $x \in X$ について

$$V(x) \ge 0, \qquad V(0) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) = h^{T}(x)Qh(x) - l^{T}(x)l(x) \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{2}G^{T}(x)\frac{\partial^{T}V}{\partial x} = \hat{S}^{T}h(x) - W^{T}(x)l(x)$$
(3.4)

$$\hat{R} = W^T(x)W(x) \tag{3.5}$$

となる. ここで,

$$\hat{R} = R + J^{T}(x)S + S^{T}J(x) + J^{T}(x)QJ(x),$$

$$\hat{S} = QJ(x) + S$$

である.

消散システムの安定性について下の補題がある[24]. まず非線形系における可検出性,可観測性は次のように定義される.

定義 3.4 (Zero-State Observability, Detectability) システム (3.1) が locally zero-state observable であるとは、0 の近傍 U が存在してすべての $x \in U$ に対し

$$h(\Phi(t, t_0, x, 0)) = 0$$
 for all $t \ge t_0 \implies x = 0$

が成立すること. また, (3.1) が locally zero-state detectable であるとは0 の近傍 U が存在して, すべての $x \in U$ に対し

$$h(\Phi(t, t_0, x, 0)) = 0 \text{ for all } t \ge t_0 \implies \lim_{t \to \infty} \Phi(t, t_0, x, 0) = 0$$

が成立することである. $U=\mathbf{R}^n$ のとき, zero-state observable または, zero-state detectable であるといわれる.

補題 3.5 任意の $y \neq 0$ に対し、 $u \in \mathcal{U}$ が存在し、supply rate は $w(u,y) = y^TQy + 2y^TSu + u^TRu < 0$ となるとする。 さらに、システムは zero-state detectable で、supply rate $w(u,y) = y^TQy + 2y^TSu + u^TRu$ に関して消散的、また正定な storage function をもつと仮定する。このときシステムは $Q \leq 0$ ならばリヤプノフ安定、Q < 0 ならば、漸近安定である。

次に本研究における主役である受動性と L^2 -ゲインシステムを定義しよう.

定義 3.6 システム (3.1) が受動的であるとは、m=p で、システムが supply rate $w(t)=\langle u,y\rangle=y^Tu$ に関し消散的であり、 storage function V(x) が $V(x_0)=0$ を満たす時を言う.

定義 3.7 システム (3.1) が γ 以下の L^2 -ゲインを持つとは、システムが supply rate $w(t)=\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2$ に関し消散的で、かつstorage function V(x) が V(0)=0 となる時を言う。システム (3.1) が γ 未満の L^2 -ゲインを持つとは、ある $0\leq \bar{\gamma}<\gamma$ が存在し、システムが $\bar{\gamma}$ 以下の消散的 L^2 ゲインを持つ時を言う。

また、受動性と非常に類似した概念に正実性がある.これは次のように定義される.

定義 3.8 システム (3.1) が正実であるとは、任意の $u \in \mathcal{U}, t \geq t_0$ に対して $x(t_0) = 0$ ならば

$$0 \le \int_{t_0}^t \langle u(s), y(s) \rangle \, ds$$

となる時を言う.

ここで、受動性と正実性の関係をまとめておこう [75, 15]. 状態 x が原点から可到達であるとは、ある $t \ge t_0$ と $u \in \mathcal{U}$ が存在して、 $x = \Phi(t, t_0, 0, u)$ となる時を言う.

命題 3.9 受動的システムは正実である。また、全ての状態が原点から可到達であり、available storage V_a が C^0 級であるような正実システムは受動的である。最後に、線形系においては受動性と正実性は等価である。

3.3 非線形系における有限ゲイン性と受動性の関係

以下本論文ではシステム (3.1) は正方、すなわち m=p を仮定する。システム (3.1) の入出力関係を表す非線形作用素を H

$$y = Hu, u \in \mathcal{U}$$

と表す。また以下では available storage $V_a(x)$ はもし存在するならば、滑らかな関数とする。次の定理は、状態空間上で H の Cayley-変換 $(H-I)(H+I)^{-1}$ が状態方程式の係数行列関数の簡単な変換によって実現されることを示している。

命題 3.10 任意の $x \in X$ に対して J(x) + I は正則と仮定する. このとき H の Cayley-変換 $(H-I)(H+I)^{-1}$ の状態空間表現は,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - G(x)(J(x) + I)^{-1}h(x) + \sqrt{2}G(x)(J(x) + I)^{-1}u \\ y = \sqrt{2}(J(x) + I)^{-1}h(x) + (J(x) - I)(I + J(x))^{-1}u \end{cases}$$
(3.6)

となる.

(証明) 作用素 H + I は

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + G(\xi)u \\ y = h(\xi) + (J(\xi) + I)u, \end{cases}$$

と表され、また J(x)+I は正則なので作用素 $(H+I)^{-1}$ は次のような状態空間表現を持つ.

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= f(\xi) - G(\xi)(J(\xi) + I)^{-1}h(\xi) + \sqrt{2}G(\xi)(J(\xi) + I)^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}u \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(J(\xi) + I)^{-1}h(\xi) + (J(\xi) + I)^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}u. \end{cases}$$

同様に作用素 H-I は

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sqrt{2}G(x)\frac{1}{\sqrt{2}}v \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{1}{\sqrt{2}}h(x) + (J(x) - I)\frac{1}{\sqrt{2}}v. \end{cases}$$

と表されるので、2つの作用素の積 $(H-I)(H+I)^{-1}$ は以下のように表される.

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) - G(x)(J(\xi) + I)^{-1}h(\xi) + \sqrt{2}G(x)(J(\xi) + I)^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}u \\ \dot{\xi} &= f(\xi) - G(\xi)(J(\xi) + I)^{-1}h(\xi) + \sqrt{2}G(\xi)(J(\xi) + I)^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}u \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(h(x) - (J(x) - I)(J(\xi) + I)^{-1})h(\xi) + (J(x) - I)(J(\xi) + I)^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}u. \end{cases}$$

ところで、状態 x と ξ の差 $x-\xi$ は次の微分方程式を満たす.

$$\dot{x} - \dot{\xi} = f(x) - f(\xi) - \sqrt{2}(G(x) - G(\xi))(J(\xi) + I)^{-1}h(\xi) + (G(x) - G(\xi))(J(\xi) + I)^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}u,$$

一般に非線形作用素は初期値に依存するが, $(H+I)^{-1}$,(H-I) ともに同一の H に対するものであるため,初期値 $x(t_0)=\xi(t_0)$ である.従って,任意の時刻 $t\geq t_0$ で $x(t)=\xi(t)$ となり, $\frac{1}{\sqrt{2}}u$, $\frac{1}{\sqrt{2}}y$ をそれぞれ u,y とおくことによって,作用素 $(H-I)(H+I)^{-1}$ の状態空間表現は(3.6) となる.

Cayley-逆変換の状態空間表現は、以下のようになる.

命題 3.11 任意の $x \in X$ に対して I - J(x) は正則と仮定する. このとき H の逆 Cayley-変換 $(I + H)(I - H)^{-1}$ の状態空間表現は,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)(I - J(x))^{-1}h(x) + \sqrt{2}G(x)(I - J(x))^{-1}u \\ y = \sqrt{2}(I - J(x))^{-1}h(x) + (I + J(x))(I - J(x))^{-1}u \end{cases}$$
(3.7)

となる.

これらによって Cayley-変換が受動的作用素を有限ゲイン作用素へ変換することを 状態空間上で証明することが可能となる. 定理 3.12 システム H が受動的ならばその Cayley-変換 $(H-I)(H+I)^{-1}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - G(x)(J(x) + I)^{-1}h(x) + \sqrt{2}G(x)(J(x) + I)^{-1}u \\ y = \sqrt{2}(J(x) + I)^{-1}h(x) + (J(x) - I)(I + J(x))^{-1}u \end{cases}$$

は 1 以下の L^2 -ゲインを持つ。逆に、もし $(J(x)+I)^{-1}$ が存在して $(H-I)(H+I)^{-1}$ が 1 以下の L^2 -ゲインを持つなら H は受動的である。

(証明) 補題 3.3 に基づいて証明する. まず後半の主張から証明する. 補題 3.3 より, ある関数 $V: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, l: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q, W: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{q \times m}$ が存在して,

$$V(x) \ge 0, \quad V(0) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)(f(x) - G(x)(J(x) + I)^{-1}h(x))$$

$$= -2h^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + I)^{-1}h(x) - l^{T}(x)l(x)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}\sqrt{2}G(x)(J(x) + I)^{-1}$$

$$= -\sqrt{2}h^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + I)^{-1}(J(x) - I) - l^{T}(x)W(x)$$

$$W^{T}(x)W(x)$$
(3.9)

$$= I - (J^{T}(x) + I)^{-1}(J^{T}(x) - I)(J(x) - I)(J(x) + I)^{-1}.$$
 (3.10)

を満たす. (3.10) 式の右辺は $2(J^T(x)+I)^{-1}(J(x)+J^T(x))(J(x)+I)^{-1}$ に等しいので, $W(x)=\sqrt{2}(J(x)+J^T(x))^{\frac{1}{2}}(J(x)+I)^{-1}$ を得る. $\bar{W}:=\frac{1}{\sqrt{2}}W(J(x)+I)$ とおくことにより,

$$\bar{W}^T(x)\bar{W}(x) = J(x) + J^T(x).$$
 (3.11)

を得る. 第3の方程式 (3.9) より

$$h^{T}(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} G(x)$$

$$= h^{T}(x) (J^{T}(x) + I)^{-1} (J(x) + J^{T}(x))$$

$$+ l^{T}(x) (J(x) + J^{T}(x))^{\frac{1}{2}}$$
(3.12)

を得,
$$\bar{l}(x) := (J(x) + J^T(x))^{\frac{1}{2}} (J(x) + I)^{-1} h(x) + l(x)$$
, とおくと,
$$\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} G(x) = h^T(x) - \bar{l}^T(x) \bar{W}(x). \tag{3.13}$$

が成り立つ. 最後に第2の方程式 (3.8) と (3.12) 式 から

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \\
= -2h^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + I)^{-1}h(x) - l^{T}(x)l(x) \\
-2h^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + I)^{-1}(J(x) - I)h(x) \\
-2l^{T}(x)(J(x) + J^{T}(x))^{\frac{1}{2}}(J(x) + I)^{-1}h(x) \\
= -2h^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + I)^{-1}J(x)h(x) \\
-2l^{T}(x)(J(x) + J^{T}(x))^{\frac{1}{2}}(J(x) + I)^{-1}h(x) - l^{T}(x)l(x) \\
= -h^{T}(x)\{J^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + I)^{-1} \\
+(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + I)^{-1}J(x)\}h(x) \\
-l^{T}(x)(J(x) + J^{T}(x))^{\frac{1}{2}}(J(x) + I)^{-1}h(x) \\
-h^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + J^{T}(x))^{\frac{1}{2}}l(x) - l^{T}(x)l(x) \\
= -h^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + J^{T}(x))^{\frac{1}{2}}l(x) - l^{T}(x)l(x) \\
-l^{T}(J(x) + J^{T}(x))^{\frac{1}{2}}(J(x) + I)^{-1}h(x) \\
-h^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + J^{T}(x))^{\frac{1}{2}}l(x) - l^{T}(x)l(x) \\
= -\bar{l}^{T}(x)\bar{l}(x) \tag{3.14}$$

を得る. 式 (3.11),(3.13),(3.14) により H の受動性が証明された.

逆に、もしH が受動的ならば、J(x) + I は補題3.3 より正則となる。あとは上の議論を逆にたどれば良い。

ところで、補題 3.5 からもわかるように、受動システムはリヤプノフ安定であるが漸近安定とは限らない。一方、制御系の設計の立場からは通常漸近安定性を要求する。これに関して次の命題が成り立つ。

命題 3.13 システム H は受動的で、locally zero-state detectable とする。もし、H の Cayley-変換が 1 未満の L^2 -ゲインシステムで正定な storage function をもつならば、H は局所漸近安定である。

(証明) $(H-I)(H+I)^{-1}$ は L^2 -ゲイン $\gamma < 1$ をもつと仮定する. 補題 3.3 より, V(x) > 0 ($x \neq 0$, V(0) = 0), l(x), W(x) が存在して

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)(f(x) - G(x)(J(x) + I)^{-1}h(x))$$

$$= -2h^{T}(x)(J^{T}(x) + I)^{-1}(J(x) + I)^{-1}h(x) - l^{T}(x)l(x)$$
(3.15)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}\sqrt{2}G(x)(J(x)+I)^{-1}$$

$$= -\sqrt{2}h^{T}(x)(J^{T}(x)+I)^{-1}(J(x)+I)^{-1}(J(x)-I) - l^{T}(x)W(x)$$
 (3.16)

 $W^T(x)W(x)$

$$= \gamma^2 I - (J^T(x) + I)^{-1} (J^T(x) - I)(J(x) - I)(J(x) + I)^{-1}$$
(3.17)

が成り立つ. (3.17) 式の右辺は

$$(J^{T}(x)+I)^{-1}\{(\gamma^{2}-1)J^{T}(x)J(x)+(\gamma^{2}+1)(J(x)+J^{T}(x))+(\gamma^{2}-1)I\}(J(x)+I)^{-1}\}$$

に等しく,したがって $\bar{W}(x)$ を

$$ar{W}(x) := rac{1}{\sqrt{2}} W(x) (J(x) + I)$$

と定義すれば

$$\bar{W}^{T}(x)\bar{W}(x) = \frac{1}{2}\{(\gamma^{2} - 1)J^{T}(x)J(x) + (\gamma^{2} + 1)(J(x) + J^{T}(x)) + (\gamma^{2} - 1)I\}, \quad (3.18)$$

を満たす. 次に (3.16) 式より

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)G(x)(J(x)+I)^{-1}h(x)
= -2h^{T}(x)(J^{T}(x)+I)^{-1}(J(x)-I)(J(x)+I)^{-1}h(x) - \sqrt{2}l^{T}(x)W(x)h(x)$$

となり、(3.15) とあわせて

$$\begin{split} &\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) \\ &= -2h^T(x)(J^T(x)+I)^{-1}J(x)(J(x)+I)^{-1}h(x) \\ &-2l^T\bar{W}(x)(J(x)+I)^{-1}h(x) - l^T(x)l(x) \\ &= -h^T(x)(J^T(x)+I)^{-1}(J(x)+J^T(x))(J(x)+I)^{-1}h(x) \\ &-2l^T(x)\bar{W}(x)(J(x)+I)^{-1}h(x) - l^T(x)l(x) \\ &= \frac{1}{2}h^T(x)(J^T(x)+I)^{-1}\{(J^T(x)-I)(J(x)-I) \\ &- (J^T(x)+I)(J(x)+I)\}(J(x)+I)^{-1}h(x) \\ &- 2l^T(x)\bar{W}(x)(J(x)+I)^{-1}h(x) - l^T(x)l(x) \\ &= h^T(x)\left\{\frac{1}{2}(J^T(x)+I)^{-1}(J^T(x)-I)(J^T(x)-I)(J(x)+I)^{-1} - \frac{I}{2}\right\}h(x) \\ &- 2l^T(x)\bar{W}(x)(J(x)+I)^{-1}h(x) - l^T(x)l(x) \\ &= \frac{\gamma^2-1}{2}h^T(x)h(x) \\ &- h^T(x)\left\{\frac{\gamma^2}{2}I - \frac{1}{2}(J^T(x)+I)^{-1}(J^T(x)-I)(J^T(x)-I)(J(x)+I)^{-1}\right\}h(x) \\ &- 2l^T(x)\bar{W}(x)(J(x)+I)^{-1}h(x) - l^T(x)l(x) \\ &= \frac{\gamma^2-1}{2}h^T(x)h(x) - h^T(x)(J^T(x)+I)^{-1}\bar{W}^T(x)\bar{W}(x)(J(x)+I)h(x) \\ &= \frac{\gamma^2-1}{2}h^T(x)h(x) - h^T(x)(J^T(x)+I)^{-1}\bar{W}^T(x)\bar{W}(x)(J(x)+I)h(x) \\ &- 2l^T(x)\bar{W}(x)(J(x)+I)^{-1}h(x) - l^T(x)l(x). \end{split}$$

を得る. したがって $ar{l}(x) := ar{W}(x)(J(x)+I)^{-1}h(x)+l(x)$ と定義すれば

$$rac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) = rac{\gamma^2 - 1}{2}h^T(x)h(x) - \bar{l}^T(x)\bar{l}(x)$$

と表される. これより

$$\{x \in \mathbf{R}^n | \dot{V} = 0 \text{ subject to } \dot{x} = f(x)\} \subset \{x \in \mathbf{R}^n | h(x) = 0\}$$

が成り立つ. 故に locally zero-state detectability と LaSalle の不変原理[40] から局所 漸近安定性が従う.

Cayley-変換の性質として次が成り立つ.

命題 3.14 Cayley-変換, 逆 Cayley-変換は, 可到達性, zero-state detectability, zero-state observability を保存する. したがって, 内部漸近安定なシステムの Cayley-変換は zero-state detectable であり, 逆も成り立つ. また, 同様なことが逆 Cayley-変換にも成り立つ.

(証明) 可到達性は $\dot{x}=f(x)+G(x)(u-(J(x)+I)^{-1}h(x))$ より従う. zero-state detectability や zero-state observability はシステム $(H-I)(H+I)^{-1}$ において $u\equiv 0$, $y\equiv 0$ としたときの解軌道がシステム H において $u\equiv 0$, $y\equiv 0$ としたときの解軌道と一致することから従う.

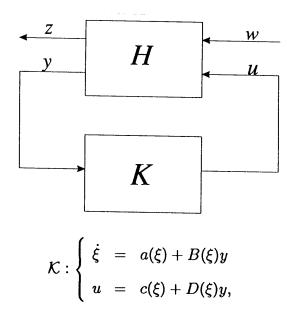
3.4 非線形 H^{∞} 問題と受動化問題の等価性

本節では次のような非線形システムを考える.

$$\mathcal{H}: \left\{ egin{array}{lll} \dot{x} &=& f(x) & +G_1(x)w & +G_2(x)u \ & z &=& h_1(x) & +J_{11}(x)w & +J_{12}(x)u \ & y &=& h_2(x) & +J_{21}(x)w \end{array}
ight.$$

ここに、 $u(t) \in \mathbf{R}^p$ は制御入力、 $z(t) \in \mathbf{R}^m$ は被制御出力、 $y(t) \in \mathbf{R}^r$ は観測出力、 $w(t) \in \mathbf{R}^m$ は外乱で、 \mathbf{R} 上の区分的連続関数とする、状態空間 $X = \mathbf{R}^n$ とする、入

力空間 U は \mathbf{R} 上の \mathbf{R}^{m} -値区分的連続関数の集合とする. また, $f: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{n}, G_{1}:$ $\mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{n \times m}, G_{2}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{n \times p}, h_{1}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{m}, h_{2}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{r}, J_{11}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{m \times m},$ $J_{12}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{m \times p}, J_{21}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{r \times m}$ は $x \in X$ の滑らかな関数とする. 一般性を失わず、 $f(0) = 0, h_{1}(0) = 0, h_{2}(0) = 0$ を仮定する. コントローラは次の形を仮定する.



本節の目的は次の2つの問題の関係を調べることにある.

定義 3.15 (受動化問題) システム \mathcal{H} に対し、閉ループシステムを内部局所漸近安定かつ受動的とするコントローラ \mathcal{K} を見つけよ.

定義 3.16 (H^{∞} 問題) システム \mathcal{H} に対し、閉ループシステムを内部局所漸近安定かつ 1 以下の L^2 ゲインをもつシステムとするコントローラ \mathcal{K} を見つけよ.

これは、状態フィードバック、厳密にプロパーなコントローラ ($D(\xi) \equiv 0$) による出力フィードバックのステップを経て行われる.

3.4.1 状態フィードバックの場合

ここではシステム H の観測出力が状態の場合を考える. 即ち,

$$\mathcal{H}': \left\{ egin{array}{lll} \dot{x} & = & f(x) & +G_1(x)w & +G_2(x)u \ z & = & h_1(x) & +J_{11}(x)w & +J_{12}(x)u, \end{array}
ight.$$

に対し、状態フィードバック

$$u = c(x)$$

による受動化問題と H^{∞} 問題を考察する. 各入力 $u \in \mathcal{U}$ に対し、 H_u はシステム \mathcal{H}' の w から z への作用素を表すものとする.

命題 3.17 $J_{11}(x)+I$ は、全ての $x \in X$ に対して正則と仮定する. このとき、Cayley-変換 $(H_u-I)(H_u+I)^{-1}$ は次の状態空間表現を持つ.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) + \sqrt{2}G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}w \\ + \{G_2(x) - G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)\}u \\ z = \sqrt{2}(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) + (J_{11}(x) - I)(J_{11}(x) + I)^{-1}w \\ + \sqrt{2}(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)u. \end{cases}$$
(3.19)

(証明) 命題 3.10 と同様の方法によって証明される.

定理 3.18 u=c(x) が \mathcal{H}' に対する受動化問題の解で,閉ループ系が正定な storage function を持つならば,u=c(x) はシステム (3.19) に対するゲイン 1 の H^{∞} 問題の解である.逆に, $J_{11}(x)+I$ が正則で u=c(x) がシステム (3.19) に対するゲイン 1 未満の H^{∞} 問題の解で閉ループ系が正定な storage function を持つならば,u=c(x) が \mathcal{H}' に対する受動化問題の解である.

(証明) 定理 3.12 の証明からわかるように storage function は Cayley-変換の前後で同一であることに注意する. まず, u=c(x) が \mathcal{H}' に対する受動化問題の解なら,定

理 3.3 から $J_{11}(x)+I$ は正則で Cayley-変換が定義でき、システム (3.19) の閉ループ系は 1 以下の L^2 -ゲインをもつ。さらに、 \mathcal{H}' の閉ループ系が局所漸近安定だから 命題 3.14 によって、システム (3.19) の閉ループ系は locally zero-state dectable で あり、よって内部局所漸近安定性がしたがう。逆に、u=c(x) がシステム (3.19) に 対するゲイン 1 未満の H^∞ 問題の解ならば、 \mathcal{H}' の閉ループ系は受動的で、上と同様にして locally zero-state detectable である。故に、命題 3.13 から局所漸近安定 となる。

3.4.2 出力フィードバックの場合

次に、コントローラが K で表されるような一般の出力フィードバックの場合を考える.

定理 3.19 もし K が H に対する受動化問題の解で,閉ループ系が正定な storage function をもつならば,それは次のシステムに対するゲイン 1 以下の H^{∞} 問題の解である.

$$\begin{cases}
\dot{x} = f(x) - G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) + \sqrt{2}G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}w \\
+ \{G_2(x) - G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)\}u
\end{cases}$$

$$z = \sqrt{2}(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) + (J_{11}(x) - I)(J_{11}(x) + I)^{-1}w \\
+ \sqrt{2}(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)u.
\end{cases}$$

$$y = h_2(x) - J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) + \sqrt{2}J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}w \\
- J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)u
\end{cases}$$
(3.20)

逆に $J_{11}(x)+I$ が全ての $x \in X$ に対して正則なとき, \mathcal{K} がシステム (3.20) に対する ゲイン 1 未満の H^{∞} 問題の解で,閉ループ系が正定な storage functin をもつなら,それはシステム \mathcal{H} に対する受動化問題の解である

(証明) まず、コントローラが厳密にプロパーなとき、すなわち、 $D(\xi) \equiv 0$ のときを考える. このとき、コントローラ K とシステム H の閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) \\ a(\xi) + B(\xi)h_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(x) \\ B(\xi)J_{21}(x) \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} G_2(x) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$z = h_1(x) + J_{11}(x)w + J_{12}(x)u$$

$$u = k(\xi).$$
(3.21)

で表される.変換 (3.19) を閉ループ系 (3.21) に適用すると

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) - G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) \\ a(\xi) + B(\xi)h_2(x) - B(\xi)J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) \end{bmatrix} \\ + \sqrt{2} \begin{bmatrix} G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1} \\ B(\xi)J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1} \end{bmatrix} w \\ + \begin{bmatrix} G_2(x) - G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x) \\ -B(\xi)J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x) \end{bmatrix} u \\ z = \sqrt{2}(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) + (J_{11}(x) - I)(J_{11}(x) + I)^{-1}w \\ + \sqrt{2}(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)u, \end{cases}$$

を得る. これはシステム (3.20) とコントローラ K の閉ループシステムに等しい. すなわち、(3.20) は H^{∞} の Cayley-変換である. 漸近安定性は定理 3.18 と同様に示される.

次に一般の場合を考える. このとき、システム (3.20) に対して、コントローラの well-posedness 条件に注意しなくてはならない. すなわち、

$$\Delta := I + D(\xi)J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)$$

が正則なとき、コントローラ $\mathcal K$ はシステム (3.20) に対して well-posed である. したがって、 $\mathcal K$ が (3.20) に対する H^∞ 問題の解なら、 Δ は正則である. また、 $\mathcal K$ が

H に対する受動化問題の解なら,

$$J_{11}(x) + J_{12}(x)D(\xi)J_{21}(x) + (J_{11}(x) + J_{12}(x)D(\xi)J_{21}(x))^T \ge 0$$

が成り立つ. これから Δ の正則性が保証され,(3.20) に対して well-posed となる. 最後に,

$$\Delta^{-1}D(\xi)J_{21}(x)(J_{11}(x)+I)^{-1}$$

$$=D(\xi)J_{21}(x)(I+J_{11}(x)+J_{12}(x)D(\xi)J_{21}(x))^{-1},$$

$$(J_{11}(x)+I)^{-1}J_{12}(x)\Delta^{-1}$$

$$=(I+J_{11}(x)+J_{12}(x)D(\xi)J_{21}(x))^{-1}J_{12}(x)$$

等に注意すれば、(3.20) と K の閉ループシステムが、 \mathcal{H} と K の閉ループシステム の Cayley-変換となっていることがわかる.

3.5 おわりに

受動システムはエネルギー減衰系であるという物理的特徴を持つ。特定の入出力間(例えば、外乱入力と制御出力)に対してそのような受動的性質を持たせようとする制御系設計問題を受動化問題と呼び、これを考察した。受動定理とスモールゲイン定理は Cayley-変換と呼ばれるシステムの双一次変換によって双対的となることが古くから知られているが、これがこの章における鍵を与える。非線形系を取り扱うために消散システム理論を用い、非線形系における受動性と有限ゲイン性の双対的性質を、非線形作用素の Cayley-変換を状態空間上で表現して証明した。そして、Caley-変換を一般化制御対象へ拡張することによって、受動化問題は H^{∞} 問題と等価であることを証明した。すなわち、受動化制御則はそれに付随した H^{∞} 問題を解くことによって求められ、逆に H^{∞} 制御則は付随した受動化問題を解くことによって求められ、逆に H^{∞} 制御則は付随した受動化問題を解くことによって求められる。消散システム論において、受動性と有界実性はエネルギーの概念の取り方が異なるが Cayley-変換によって双対的関係がある。本章では、これが設計問題(受動化問題と

 H^∞ 問題)に対しても成立することを示す意味で興味深い、つまり、 H^∞ 問題も、受動化問題と同様、エネルギー減衰系を構成することであり、両者のエネルギーの取り方は Cayley-変換によって結びつけられる.

Chapter 4

γ -受動システム:その位相的性質と設計法

4.1 はじめに

近年 H^∞ 制御理論(有界実理論)はフィードバックシステムの解析設計に非常に多く用いられている.しかし同時に H^∞ 制御理論はゲインのみに着目したものであり摂動等の位相情報を無視しているため,ときとして保守的な結果を与えることがある [11,21,22]. このような見地からいくつかの研究がなされている.Safonov [60] らは閉ループ系を正実とする制御器の構成法が H^∞ 問題に帰着されることを伝達関数の双一次変換(Cayley-transform)を用いて示し,また本論文 3 章では非線形システムにおける H^∞ 問題と受動化問題の等価性を Cayley-変換を用いて証明した.また,Haddadと Bernstein [21] は正実な摂動が加わったときのロバスト安定性,安定化可能性の十分条件を求めている.Sun [66] は代数的 Riccati 方程式(不等式)による手法によって閉ループ系を強正実とする制御器が存在するための必要十分条件を直接求めている.

有限ゲイン性、受動性はエネルギーの供給を表わす supply rate と、その散逸を表わす消散不等式で定義される消散システムの理論に基礎を置く(3章, [52, 24, 75] 参照). 本章ではエネルギー消散度の観点から新しいタイプの supply rate を導入することによって γ -受動システムを定義する.これは、 γ が小さいほど消散度が大きくなるという性質をもち、 $\gamma=1$ のとき通常の受動システムとなる.また、 γ -受動システムの解析には Cayley-変換が重要な役割をする.Cayley-変換はスモールゲイン定理と受動定理、または H^∞ 問題と受動化問題を結び付けるもの(3章参照)として

よく知られている [2, 17, 21, 60]. その結果, γ -受動システムとゲイン γ をもつ有限ゲインシステムは Cayley-変換によって双対的な関係にあることがわかる.これを用いて γ -受動システムの設計法を示す.最後に線形系の場合を考え, γ の導入により様々な興味深い性質が導き出されることを示す.第1に消散度 γ は線形系では伝達関数の最大位相差の指標となることである.これにより位相曲線の整形手法を提案する.第2に受動定理が,一方のナイキスト線図が左半面に存在しても二つのシステムの γ の間にある条件が満たされればフィードバック系の漸近安定性を保証する定理へ拡張される.そしてこれは構造的不確かさをもつシステムのロバスト安定解析において有効であることがバネ系の例を用いて示される.

4.2 γ -受動システム

まず、もう一度消散システムについて、特に、消散性について考察する。消散システムを表す不等式

$$V(x) - V(x_0) \le \int_{t_0}^t w(u(s), y(s)) ds$$

において、右辺は入出力関係からみたシステムへ与えられたエネルギーを表す.この入出力関係の取り方は supply rate w によって指定され、たとえば、有限ゲインシステムでは $w=\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2$ 、受動システムでは $w=\langle u,y\rangle$ であった.即ち,有限ゲインシステムでは、ペナルティ γ を付けた入力信号のエネルギーをシステムに与えられたものとし、出力信号のエネルギーをシステムから外へ取り出されたものとみていることになる.同様に、受動システムでは、入力と出力の内積 $\langle u,y\rangle>0$ のときは、システムは正の仕事を受け、エネルギーが加えられているとみている.一方左辺は、V は Lyapunov 関数の拡張と見なされるので、システムの内部エネルギーの増分を表す.従って消散性とは、入出力からシステムへのエネルギー供給率 w を決めたとき、それから求められるシステムへ加えられたエネルギーが完全には内部エネルギーの増加に使われず、外部へ消散していることを意味する.

次に、有限ゲインシステムのゲイン γ の消散性に対する働きを考えよう. より一般的に、二つの supply rate w_1 , w_2 が任意の u, $y \in \mathbf{R}^m$, に対して $w_1(u,y) \leq w_2(u,y)$ が成り立つとする. もしあるシステムが supply rate w_1 に関して消散的ならば、supply

rate w_2 に関しても消散的であるが、 w_1 による消散性は w_2 による消散性よりも大きなエネルギーの損失を保証する。従って

$$\gamma_1 \le \gamma_2 \ \Rightarrow \ \gamma_1^2 ||u||^2 - ||y||^2 \le \gamma_2^2 ||u||^2 - ||y||^2 \text{ for } \forall u, \forall y$$

より、有限ゲインシステムのゲイン γ は消散の度合いを測るものと見ることができる.

ところが、受動システムの supply rate は内積であるので、この様な消散性の強さを変化させることはできない。では、ここで受動システムにもこのような消散の度合いを決める指標を導入しよう。内積は二つのノルムの差 $4\langle u,y\rangle = \|u+y\|^2 - \|u-y\|^2$ で表すことが出来るが、 γ -受動システムの supply rate は内積の正の成分を減じるパラメータ γ を持つ。

定義 4.1 (γ -受動性) $\gamma \le 1$ とする. システム (3.1) が γ -受動的であるとはそれが supply rate $w(u,y) = \frac{1}{2}(\gamma^2||u+y||^2 - ||u-y||^2)$ に関して消散的,かつ storage function が V(0) = 0 を満たすときをいう.

γ-受動システムの安定性に関してつぎが成り立つ[24].

命題 4.2 システム (3.1) は γ -受動的で正定な storage function をもち locally zero-state detectable とする. $\dot{x}=f(x)$ は $\gamma=1$ ならばリヤプノフ安定, $\gamma<1$ ならば局所漸近安定である.

supply rate $\frac{1}{2}(\gamma^2||u+y||^2-||u-y||^2)$, $\gamma>0$ に関して消散的なシステムは $\gamma>1$ のとき,受動的とも安定とも限らない.よってこのクラスのシステムに対してつぎの 安定化の結果は重要である.

定理 4.3 J(x)=0 とする. システム (3.1) は locally zero-state detectable とする. もしこのシステムが supply rate $\frac{1}{2}(\gamma_1^2||u+y||^2-||u-y||^2)$, $\gamma_1>0$ に関して消散的で

正定な storage function V(x) をもつならば、出力フィードバック $u=-\phi(y)$ によって局所漸近安定化される。ここで $\phi(\cdot)$ はつぎを満たす任意の関数である。

$$\begin{cases}
\gamma_2^2 \|y + \phi(y)\|^2 - \|y - \phi(y)\|^2 > 0, \ y \neq 0 \\
\gamma_2^2 \|y + \phi(y)\|^2 - \|y - \phi(y)\|^2 = 0, \ y = 0
\end{cases}$$
(4.1)

$$\gamma_1 \gamma_2 \le 1, \ \gamma_2 > 0. \tag{4.2}$$

特に、出力フィードバック u=-ky がシステム (3.1) を局所漸近安定化する k>0 が存在する.

(証明) 消散不等式と (4.2) 式より閉ループ系に沿って

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le \gamma_1^2 ||y - \phi(y)||^2 - ||y + \phi(y)||^2
\le \gamma_1^2 ||y - \phi(y)||^2 - \gamma_1^2 \gamma_2^2 ||y + \phi(y)||^2)
\le -\gamma_1^2 (\gamma_2^2 ||y + \phi(y)||^2 - ||y - \phi(y)||^2)
\le 0$$

を得る. (4.1) より、 $dV/dt \equiv 0$ と置くと $y \equiv 0$ となり、zero-state detectability と ラ・サールの不変原理により漸近安定性が従う。特に、 $\gamma_1 \leq 1$ のときは $\gamma_2 = 1$ としてよいので、任意の k > 0 に対し $\phi(y) = ky$ は (4.1) を満たし、 $\gamma_1 > 1$ のときは、 $\gamma_2 < 1$ となり、(4.1) を満たす k は

$$\gamma_2^2(1+k)^2 - (1-k)^2 > 0$$

より求まる. すなわち,
$$\frac{1-\gamma_2}{1+\gamma_2} < k < \frac{1+\gamma_2}{1-\gamma_2}$$
 とすれば良い.

Remark 4.1 [15] において、zero-state detectable で正定な storage function をもつ受動システム (これは内部リヤプノフ安定となる) は出力フィードバックによって安定化されることが知られているが、本定理ではシステムは内部安定とは限らない.

また $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ のとき本定理は[15] の定理 3.2, 系 3.5 に一致する. この意味で本定理は [15] の結果の拡張となっている.

Example 4.1 つぎのような非線形システムを考える.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1^3 + 3x_1x_2 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12x_1 \\ 6 \end{bmatrix} u$$
$$y = 2x_1^2 + x_2$$

初期値として集合 $\{(x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2|x_1=0\}$ を考えるとこのシステムは内部不安定であることがわかる. しかし, $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2), \gamma_1=\sqrt{2}$ として

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x) = (2x_1^2 + x_2)^2 = -(1 - \gamma_1^2)h(x)^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}G(x) = 6x_1^2 + 3x_2 = (1 + \gamma_1^2)h(x)$$

$$\gamma_1^2 - 1 = 1 > 0$$

が成り立つことよりこのシステムは supply rate $\frac{1}{2}(\gamma_1^2||u+y||^2-||u-y||^2)$ に関し消散的である。また $h(x)\equiv 0$ とすると $2x_1^2+x_2\equiv 0$ となり $\dot{x}=f(x)$ は $\dot{x}_1=-2x_1^3$, $\dot{x}_2=\frac{1}{2}x_2$ となる。ここで,もし $x_2(t_0)\neq 0$ ならば $x_2(t)\to\infty$ となり $x_1^2+x_2\equiv 0$, $x_1(t)\to 0$ に反する。したがって $x_1(t_0)=x_2(t_0)=0$ を得る。故にこのシステムは zero-state observable である。故に定理の仮定を満たし

$$u = -ky; \; rac{1-\gamma_2}{1+\gamma_2} < k < rac{1+\gamma_2}{1-\gamma_2}, \gamma_1\gamma_2 < 1$$

によって漸近安定化される.実際 $\gamma_1 = \sqrt{2}$ より $\gamma_2 = 1/2$ ととることができ,このとき 1/3 < k < 3 となる.例えば,u = -y なるフィードバックによる閉ループシステムに沿い $\dot{V} = -5(2x_1^2 + x_2)^2 \le 0$ であり前と同様の議論によって $\dot{V} \equiv 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$ を得る.故に漸近安定となっている.

4.3 γ -受動システムの設計問題

本節では、閉ループ系を γ -受動システムとするコントローラを設計することを目的とする. まず、準備として Cayley-変換を用いて γ -受動システムを解析する. つぎの定理は L^2 -ゲイン γ をもつシステムと γ -受動システムが Cayley-変換を通し、双対的な関係にあることを示す. しかし定理中で γ は必ずしも 1 以下ではないことに注意されたい.

- 定理 4.4 i) J(x)+I はすべての $x \in X$ に対して正則と仮定する. $(H-I)(H+I)^{-1}$ が L^2 -ゲイン γ をもつシステムであることと,H が supply rate $w(u,y)=\frac{1}{2}(\gamma^2||u+y||^2-||u-y||^2)$ に関して消散的であることは等価.
 - ii) I-J(x) はすべての $x\in X$ に対して正則と仮定する. $(I+H)(I-H)^{-1}$ が supply rate $w(u,y)=\frac{1}{2}(\gamma^2\|u+y\|^2-\|u-y\|^2)$ に関して消散的であることと, H が L^2 -ゲイン γ をもつことは等価.

(証明): 証明は Hill-Moylan による定理 3.3 と Cayley-変換の状態空間表現に基づく. i) のみを証明する.

 (\Rightarrow) つぎの 3 式を満たす $\bar{V}(x)$, $\bar{l}(x)$, $\bar{W}(x)$ が存在することを示せば良い.

$$\begin{split} &\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(x)f(x) = \frac{\gamma^2 - 1}{2}h^T(x)h(x) - \bar{l}^T(x)\bar{l}(x) \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(x)G(x) = h^T(x)\left(\frac{\gamma^2 - 1}{2}J^T(x) + \frac{\gamma^2 + 1}{2}I\right) - \bar{l}^T(x)\bar{W}(x) \\ &\bar{W}^T\bar{W} = \frac{\gamma^2 - 1}{2}I + \frac{\gamma^2 + 1}{2}(J(x) + J^T(x)) + \frac{\gamma^2 - 1}{2}J^T(x)J(x) \end{split}$$

 $(H-I)(H+I)^{-1}$ に対して V(x), l(x), W(x) が存在して Hill-Moylan の 定理 の 3 式 (3.3), (3.3), (3.3) が成り立つ.

$$ar{l}(x) := V(x)$$
 $ar{l}(x) := ar{W}(x)(J(x)+I)^{-1}h(x)+l(x)$

$$ar{W}(x) := rac{1}{\sqrt{2}}W(x)(J(x)+I)$$

で定義される \bar{V} , \bar{l} , \bar{W} が上の3式を満たすことを確かめれば良い.

(←) 上の議論を逆にたどれば良い.

以上を準備として、 γ -受動システムの設計法を提案する. つぎの式で表わされる 非線形システムを考える.

$$\mathcal{H}: \left\{ egin{array}{lll} \dot{x} &=& f(x) & +G_1(x)w & +G_2(x)u \ & z &=& h_1(x) & +J_{11}(x)w & +J_{12}(x)u \ & y &=& h_2(x) & +J_{21}(x)w \end{array}
ight.$$

ここで $u(t) \in \mathbf{R}^{p}$ は制御入力, $z(t) \in \mathbf{R}^{m}$ は制御出力 $y(t) \in \mathbf{R}^{r}$ は観測出力, $w(t) \in \mathbf{R}^{m}$ は外乱で \mathbf{R} 上の区分的連続関数とし,また $x(t) \in X = \mathbf{R}^{n}$ とする.許容入力の集合 U は \mathbf{R} 上の \mathbf{R}^{m} -値区分的連続関数からなるとする. $f: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{n}, G_{1}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{n \times m}, G_{2}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{n \times p}, h_{1}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{m}, h_{2}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{r}, J_{11}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{m \times m}, J_{12}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{m \times p}, J_{21}: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{r \times m}$ はすべて x の滑らかな写像とする.また 3 章と同様, $f(0) = 0, h_{1}(0) = 0, h_{2}(0) = 0$ を仮定する.我々の目的はつぎの形のコントローラ

$$\mathcal{K}: \left\{ egin{array}{lll} \dot{\xi} &=& a(\xi)+B(\xi)y \ u &=& c(\xi)+D(\xi)y \end{array}
ight.$$

で、閉ループシステムを γ-受動システムとするものを見つけることである.

定義 4.5 (γ -受動化問題) ある与えられた γ に対し、閉ループシステムを内部漸近 安定かつ γ -受動的とするコントローラ K を見つけよ.

Cayley-変換によって γ -受動化問題は H^{∞} 問題に置き換えられることが示される.

定義 4.6 (H^{∞} 問題) ある与えられた γ に対し、閉ループシステムを内部漸近安定かつ γ 以下の L^2 ゲインをもつシステムとするコントローラ \mathcal{K} を見つけよ.

定理 4.7 $J_{11}(x) + I$ は正則,また $\gamma < 1$ とする.コントローラ $\mathcal K$ がシステム $\mathcal H$ に対する γ -受動化問題の解で閉ループ系が正定な storage function をもつことと $\mathcal K$ がつぎのシステムに対するゲイン γ の H^∞ 問題の解で閉ループ系が正定な storage function をもつことは等価.

$$\begin{cases}
\dot{x} = f(x) - G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) + \sqrt{2}G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}w \\
+ \{G_2(x) - G_1(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)\}u
\end{cases}$$

$$z = \sqrt{2}(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) + (J_{11}(x) - I)(J_{11}(x) + I)^{-1}w \\
+ \sqrt{2}(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)u
\end{cases}$$

$$y = h_2(x) - J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}h_1(x) + \sqrt{2}J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}w \\
- J_{21}(x)(J_{11}(x) + I)^{-1}J_{12}(x)u
\end{cases}$$

$$(4.3)$$

(証明) 定理 4.4 に基づけば、Cayley-変換の状態空間表現(命題 3.10) を用いて、 定理 3.19 の証明と同様にして証明できる.ここでは繰り返しになるので省略する.□

4.4 γ -正実システムの位相的性質

以下では特殊な場合として線形系を考える.

$$\Sigma: \left\{ egin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \ y = Cx + Du, \end{array}
ight.$$

 $(A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, D \in \mathbb{R}^{m \times m})$

そして $\S 4.2$ で導入された消散度 γ は伝達関数の最大位相差と密接な関係があることが示され、これにより位相曲線の整形手法を提案する。さらに、受動定理の一種の拡張定理を得る。そしてこの定理のロバスト安定解析に対する有効性を例によって示す。

線形系において受動性は正実性と等価である(命題 3.9). したがって線形 γ -受動システムを γ -正実システムと呼ぶことにする. まず, 正実システムが周波数領域で定義されることにならい, γ -正実システムを周波数領域で定義しよう. まず伝達関数の正実性は次のように定義される. 強正実性に関しては, 幾分異なった定義がいくつかあるが, ここでは [70,47] にしたがうものとする.

定義 4.8 伝達関数 G(s) は m 次正方行列とする.

- i) 伝達関数 G(s) が正実であるとは Re(s) > 0 で解析的であり, $G(s) + G^*(s) \ge 0$ for all $s \in Re(s) > 0$ を満たすときをいう.
- ii) 伝達関数 G(s) が強正実であるとはある $\epsilon > 0$ が存在して $G(s \epsilon)$ が正実となるときをいう.
- iii) 伝達関数 G(s) が拡張強正実であるとはある $\varepsilon > 0$ が存在して $G(s \varepsilon)$ が正実で, $G(\infty) + G^T(\infty) > 0$ となるときをいう.

正実性に関しつぎの重要な補題がある[3].

補題 4.9 (正実性補題) (C,A,B) は可制御可観測とする. システム Σ が正実である ための必要十分条件は,行列 $P=P^T>0$, L, M が存在して

$$PA + A^{T}P = -L^{T}L$$

$$PB = C^{T} - L^{T}M$$

$$M^{T}M = D + D^{T}$$

が成り立つことである. また (C,A) 可観測とは限らないとき, Σ が正実であるための必要十分条件は行列 $P=P^T\geq 0, L, M$ が存在して上の3式が成り立つことである.

γ-受動システムの消散不等式に対し Parseval の等式を用いて得られる伝達関数の不等式から、γ-正実システムをつぎのように改めて周波数領域で定義する.

定義 4.10 (γ -正実システム) $0 < \gamma < 1$ とする. 伝達関数 G(s) が γ -正実であるとは, $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ で解析的かつすべての $s \in \mathrm{Re}\, s \geq 0$ に対して次の (MI) 式を満たすときをいう.

(MI):
$$(\gamma^2 - 1)G^*(s)G(s) + (\gamma^2 + 1)(G^*(s) + G(s)) + (\gamma^2 - 1)I \ge 0$$

γ-正実性と正実性,強正実性の関係はつぎのようになる.

命題 4.11 γ -正実システムは強正実システムであり強正実システムはある γ に対して γ -正実システムとなる.

(証明) 前半の主張は明らか. 後半の主張に対しては, G が強正実ならば, ある十分に小さな $\varepsilon>0$ が存在して $G^*(s)+G(s)-\varepsilon(G^*(s)G(s)+I)\geq 0$ が成り立ち, $\gamma=\{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)\}^{1/2}$ と置けばよい.

γ-正実システムに対しつぎが成立する.

定理 4.12 (γ -正実性補題) (C,A,B) は可制御可観測とする. システム Σ が γ -正実 であるための必要十分条件はある行列 $P=P^T>0$,L,M が存在して

$$PA + A^{T}P = -(1 - \gamma^{2})C^{T}C - L^{T}L$$

 $PB = (1 + \gamma^{2})C^{T} - (1 - \gamma^{2})C^{T}D - L^{T}M$

$$M^{T}M = (\gamma^{2} - 1)I + (\gamma^{2} - 1)D^{T}D + (\gamma^{2} + 1)(D + D^{T})$$

が成り立つこと.

(証明) (必要性)

$$\Phi(s) := (\gamma^2 - 1)G^T(-s)G(s) + (\gamma^2 + 1)(G^T(-s) + G(s)) + (\gamma^2 - 1)I$$

とおく.

 $\Phi(s)$ $= (\gamma^2 - 1)B^T(-sI - A^T)^{-1}C^TC(sI - A)^{-1}B$ $+ (\gamma^2 - 1)B^T(-sI - A^T)^{-1}C^TD + (\gamma^2 - 1)D^TC(sI - A)^{-1}B$

$$+(\gamma^2-1)D^TD+(\gamma^2+1)(D^T+D)+(\gamma^2-1)I$$

 $+ (\gamma^2 + 1)\{C(sI - A)^{-1}B + B^T(-sI - A^T)^{-1}C^T\}$

となる. ここで定義から、すべての $\omega \in \mathbf{R}$ に対して $\Phi(j\omega) \geq 0$ だから

$$(\gamma^2 - 1)D^TD + (\gamma^2 + 1)(D^T + D) + (\gamma^2 - 1)I \ge 0$$

である. 一方、A は漸近安定かつ (C,A) 可観測なので、 $P_1A+A^TP_1=(\gamma^2-1)C^TC$ を満たす $P_1=P_1^T>0$ が存在する. よって

 $\Phi(s)$

$$= B^{T}(-sI - A^{T})^{-1}\{-(-sI - A^{T})P_{1} - (sI - A)P_{1}\}(sI - A)^{T}B$$

$$+ (\gamma^{2} - 1)B^{T}(-sI - A^{T})^{-1}C^{T}D + (\gamma^{2} - 1)D^{T}C(sI - A)^{-1}B$$

$$+ (\gamma^{2} + 1)\{C(sI - A)^{-1}B + B^{T}(-sI - A^{T})^{-1}C^{T}\}$$

$$+ (\gamma^{2} - 1)D^{T}D + (\gamma^{2} + 1)(D^{T} + D) + (\gamma^{2} - 1)I$$

$$= B^{T}(-sI - A^{T})^{-1}\{-P_{1}B + (\gamma - 1)C^{T}D + (\gamma^{2} + 1)C^{T}\}$$

$$+ \{-B^{T}P_{1} + (\gamma^{2} - 1)D^{T}C + (\gamma^{2} + 1)C\}(sI - A)^{-1}B$$

$$+ (\gamma^{2} - 1)D^{T}D + (\gamma^{2} + 1)(D^{T} + D) + (\gamma^{2} - 1)I$$

となる. したがって

$$W(s) := \{-B^T P_1 + (\gamma^2 - 1)D^T C + (\gamma^2 + 1)C\}(sI - A)^{-1}B$$
$$+ \frac{1}{2}\{(\gamma^2 - 1)D^T D + (\gamma^2 + 1)(D^T + D) + (\gamma^2 - 1)I\}$$

と置くと,W(s) は閉右半面で解析的であり $W^T(-j\omega)+W(j\omega)=\Phi(j\omega)\geq 0$ より W(s) は正実行列となる.対 $(-B^TP_1+(\gamma^2-1)D^TC+(\gamma^2+1)C,A,B)$ は可制御であるが可観測とは限らない.よって補題 4.9 の後半部分より

$$P_2A + A^T P_2 = -L^T L$$

$$P_2B = (\gamma^2 + 1)C^T + (\gamma^2 - 1)C^T D - P_1 B - L^T M$$

$$M^T M = (\gamma^2 - 1)I + (\gamma^2 - 1)D^T D + (\gamma^2 + 1)(D + D^T)$$

を満たす $P_2 = P_2^T \ge 0$, L, M が存在する. $P := P_1 + P_2 > 0$ と置くことにより定理の主張を得る.

(十分性) 容易であるので省略する.

1入力1出力システムにおいて γ -正実システムはつぎのような図形的解釈をもつ. すなわち定義 4.10 から γ -正実システム G(s) の Nyquist 線図は中心 $((1+\gamma^2)/(1-\gamma^2),0)$ 半径 $2\gamma/(1-\gamma^2)$ の円内にあることがわかる. したがってつぎの γ -正実システムの位相的性質に関する定理が成り立つ.

定理 4.13 1入出力システム G が γ -正実ならばつぎが成り立つ:

$$|\arg(G(s))| \le \arctan \frac{2\gamma}{1-\gamma^2}$$
 for all $s \in \operatorname{Re} s \ge 0$

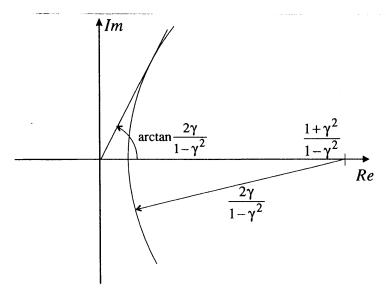
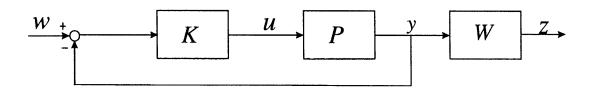


Figure 4.1: Phase property of γ -positive real systems

これより γ が小さくなるにつれ Nyquist 線図は点 (1,0) へ近づくことがわかる.

Example 4.2 H^{∞} 理論はゲイン曲線の整形法を与える一方, γ -正実システムに基づく設計は定理 4.7,4.13 により位相曲線の整形手法を与える.ここでは相補感度関数 $T(s) = P(s)K(s)(I + P(s)K(s))^{-1}$ の位相曲線を整形する問題を考えよう.



ここでP(s) はプラントK(s) はコントローラである。すなわち T(s) とある与えられた関数 W(s) の位相差を指定された範囲に抑えよう。このためには与えられた γ に対し $W^{-1}(s)T(s)$ を γ 正実関数とするコントローラを求めればよい。プラント P(s) と W(s) は

$$P(s) = \frac{s+2}{s^2 - 10s + 100}, \ W(s) = \frac{100}{0.88(s+100)}$$

とする. 定理 4.7 より $W^{-1}T_1$ を γ -正実 ($\gamma=0.085$) とするコントローラは

$$K(s) = \frac{113.6s^2 + 83730s + 1449697}{s^2 + 623.3s + 1242.7}$$

と求められる. 達成された T と W の最大位相差は9.5° となっている. H^∞ 理論は ゲイン線図を整形する手法を与えるが位相的性質は考慮されない. しかし γ -受動システムに基づく制御では位相差が小さくなるにつれゲインは 1 に近づくという性質をもつ. (Fig. 4.1, 4.2 参照)

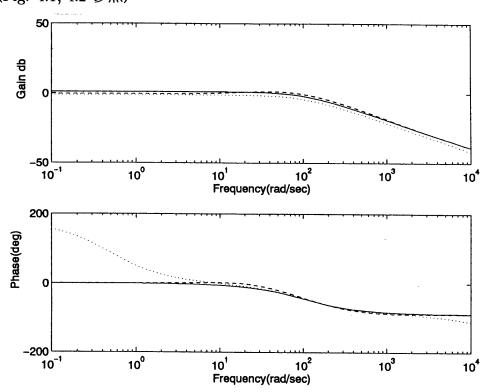
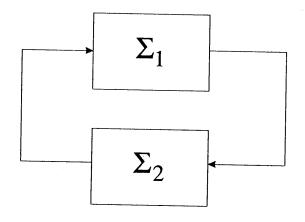


Figure 4.2: Bode plots of W(s)(solid), T(s)(dash), and a solution by H^{∞} method (dot-dash)

つぎに γ-正実性に関連して、二つのシステムのフィードバック結合系の安定性に対しつぎの定理を得た。これは正実なシステムに対し、摂動が加わったときのロバスト安定性を考えるとき重要な役割をする。



$$\Sigma_1: \left\{ egin{array}{l} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \ \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \ \end{array}
ight. \ \left. egin{array}{l} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \ \\ y_2 = C_2 x_2 \end{array}
ight.$$

の二つのシステムに対し、 $u_1 = -y_2$ 、 $u_2 = y_1$ なるネガティブフィードバック系を考える.

定理 4.14 Σ_1 , Σ_2 の伝達関数をそれぞれ G_1 , G_2 とし, (C_1,A_1,B_1) , (C_2,A_2,B_2) は 可制御可観測と仮定する. G_1 は γ_1 -正実, $(I+G_2(s))^{-1}$ は漸近安定かつ G_2 は $\gamma_2>0$ に対して (MI) を満たすとする. このとき $\gamma_1\gamma_2<1$ ならばフィードバック系は漸近安定である.

(証明) まずフィードバック系は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 - B_2D_1C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

と表わされる. 一方定理 4.12 より G_1 に対して $P_1 = P_1^T > 0$, L_1 , M_1 , が存在して

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -(1 - \gamma_1^2) C_1^T C_1 - L_1^T L_1$$
(4.4)

$$P_1 B_1 = (1 + \gamma_1^2) C_1^T - (1 - \gamma_1^2) C_1^T D_1 - L_1^T M_1$$
(4.5)

$$M_1^T M_1 = (\gamma_1^2 - 1)I + (\gamma_1^2 - 1)D_1^T D_1 + (\gamma_1^2 + 1)(D_1 + D_1^T)$$

$$(4.6)$$

また $(G_2(s)+I)^{-1}$ が漸近安定であることと(MI)を満たすことより

$$\gamma_2^2 I - \{(G_2(s) - I)(G_2(s) + I)^{-1}\}^* \{(G_2(s) - I)(G_2(s) + I)^{-1}\} \ge 0$$

となる. したがって $(G_2(s)-I)(G_2(s)+I)^{-1}=2C_2(sI-A_2+B_2C_2)^{-1}B_2-I$ は有 界実となり有界実定理[3] により $\tilde{P}(A_2-B_2C_2)+(A_2-B_2C_2)^T\tilde{P}=-4C_2^TC_2-\tilde{L}^T\tilde{L},$ $\tilde{P}B_2=2C_2^T-\tilde{L}^T\tilde{M},\ \tilde{M}^T\tilde{M}=(\gamma_2^2-1)I$ を満たす $\tilde{P}=\tilde{P}^T>0,\ \tilde{L},\ \tilde{M}$ が存在する. $P_2=\tilde{P},\ L_2=\tilde{L}+\tilde{M}C_2,\ M_2=\tilde{M}$ とおいてつぎを得る.

$$P_2 A_2 + A_2^T P_2 = -(1 - \gamma_2^2) C_2^T C_2 - L_2^T L_2$$
(4.7)

$$P_2 B_2 = (1 + \gamma_2^2) C_2^T - L_2^T M_2 \tag{4.8}$$

$$M_2^T M_2 = (\gamma_2^2 - 1)I \tag{4.9}$$

閉ループ系に対し実際にリヤプノフ関数を構成することによって定理の証明を行う. $V_1(x_1):=x_1^TP_1x_1,\ V_2(x_2):=x_2^TP_2x_2$ とおく.

$$\begin{split} \dot{V}_1 &= 2x_1^T P_1(A_1x_1 - B_1C_2x_2) \\ &= x_1^T (P_1A_1 + A_1^T P_1)x_1 - 2x_1^T P_1B_1C_2x_2 \\ &\stackrel{\text{(a)}}{=} - (1 - \gamma_1^2)x_1^T C_1^T C_1x_1 - x_1^T L_1^T L_1x_1 - 2(1 + \gamma_1^2)x_1^T C_1^T C_2x_2 \\ &\quad + 2(1 - \gamma_1^2)x_1^T C_1^T D_1C_2x_2 + 2x_1^T L_1^T M_1C_2x_2 \\ &\stackrel{\text{(b)}}{=} -x_1^T C_1^T C_1x_1 - 2x_1^T C_1^T (I - D_1)C_2x_2 - x_2^T C_2^T (D_1^T - I)(D_1 - I)C_2x_2 \\ &\quad + \gamma_1^2 \{x_1^T C_1^T C_1x_1 - 2x_1^T C_1^T (I + D_1)C_2x_2 + x_2^T C_2^T (D_1^T + I)(D_1 + I)C_2x_2\} \\ &\quad - x_1^T L_1^T L_1x_1 + 2x_1^T L_1^T M_1C_2x_2 - x_2^T C_2^T M_1^T M_1C_2x_2 \\ &= \gamma_1^2 \|C_1x_1 - (D_1 + I)C_2x_2\|^2 - \|C_1x_1 - (D_1 - I)C_2x_2\|^2 \\ &\quad - \|L_1x_1 - M_1C_2x_2\|^2 \\ \dot{V}_2 &= 2x_2^T P_2 \{B_2C_1x_1 + (A_2 - B_2D_1C_2)x_2\} \\ &= 2x_1^T C_1^T B_2^T P_2x_2 + x_2^T \{P_2(A_2 - B_2D_1C_2) + (A_2^T - C_2^T D_1^T B_2^T)P_2\}x_2 \\ &\stackrel{\text{(c)}}{=} 2(1 + \gamma_2^2)x_1^T C_1^T C_2x_2 - 2x_1^T C_1^T M_2^T L_2x_2 - (1 - \gamma_2^2)x_2^T C_2^T C_2x_2 - x_2^T L_2^T L_2x_2 \\ &\quad - x_2^T (P_2B_2D_1C_2 + C_2^T D_1^T B_2^T P_2)x_2 \end{split}$$

$$\begin{split} \overset{\text{(d)}}{=} & 2(1+\gamma_2^2)x_1^TC_1^TC_2x_2 - 2(\gamma_2^2-1)x_1^TC_1^TD_1C_2x_2 \\ & - 2x_1^TC_1^TM_2^T(L_2-M_2D_1C_2)x_2 \\ & + (\gamma_2^2-1)x_2^TC_2^TC_2x_2 - x_2^TL_2^TL_2x_2 - (1+\gamma_2^2)x_2^TC_2^TD_1C_2x_2 \\ & + x_2^TL_2^TM_2D_1C_2x_2 - (1+\gamma_2^2)x_2^TC_2^TD_1^TC_2x_2 + x_2^TC_2^TD_1^TM_2^TL_2x_2 \\ & \overset{\text{(e)}}{=} (\gamma_2^2-1)x_1^TC_1^TC_1x_1 - x_1^TC_1^TM_2^TM_2C_1x_1 + 2(1+\gamma_2^2)x_1^TC_1^TC_2x_2 \\ & - 2(\gamma_2^2-1)x_1^TC_1^TD_1C_2x_2 - 2x_1^TC_1^TM_2^T(L_2-M_2D_1C_2)x_2 \\ & + (\gamma_2^2-1)x_2^TC_2^TC_2x_2 - (1+\gamma_2^2)x_2^TC_2^T(D_1+D_1^T)C_2x_2 \\ & - x_2^T(L_2-M_2D_1C_2)^T(L_2-M_2D_1C_2)x_2 + x_2^TC_2^TD_1^TM_2^TM_2D_1C_2x_2 \\ & = (\gamma_2^2-1)x_1^TC_1^TC_1x_1 + 2(\gamma_2^2+1)x_1^TC_1^TC_2x_2 - 2(\gamma_2^2-1)x_1^TC_1^TD_1C_2x_2 \\ & + (\gamma_2^2-1)x_2^TC_2^TC_2x_2 - (\gamma_2^2+1)x_2^TC_2^T(D_1+D_1^T)C_2x_2 \\ & + (\gamma_2^2-1)x_2^TC_2^TD_1^TD_1C_2x_2 - x_1^TC_1^TM_2^TM_2C_1x_1 \\ & - 2x_1^TC_1^TM_2^T(L_2-M_2D_1C_2)x_2 - x_2^T(L_2-M_2D_1C_2)^T(L_2-M_2D_1C_2)x_2 \\ & = \gamma_2^2||C_1x_1 - (D_1-I)C_2x_2||^2 - ||C_1x_1 - (D_1+I)C_2x_2||^2 \\ & - ||M_2C_1x_1 + (L_2-M_2D_1C_2)x_2||^2 \end{aligned}$$

を得る. したがって $V(x)=(\gamma_2^2+1)V_1(x_1)+(\gamma_1^2+1)V_2(x_2)$ と置くと

$$\dot{V} \le (\gamma_1^2 \gamma_2^2 - 1) \|C_1 x_1 - (D_1 + I) C_2 x_2\|^2$$

$$+ (\gamma_1^2 \gamma_2^2 - 1) \|C_1 x_1 - (D_1 - I) C_2 x_2\|^2 \le 0$$

となり $\dot{V}\equiv 0 \Leftrightarrow C_1x_1-(D_1+I)C_2x_2=0$ かつ $C_1x_1-(D_1-I)C_2x_2=0 \Leftrightarrow C_1x_1=0$ かつ $C_2x_2=0$ となる. 故に (C_1,A_1) , (C_2,A_2) の可観測性より漸近安定性が従う. \square

Remark 4.2 i) (MI) とナイキストの定理より、 G_1 のナイキスト線図が円 $\{z \in A_1\}$

 $C \mid |z-(1+\gamma^2)/(1-\gamma^2)| = 2\gamma_1/(1-\gamma_1^2) \}$ 内にあり, G_2 のナイキスト線図が円 $\{z \in C \mid |z-(1+\gamma_2^2)/(1-\gamma_2^2)| = 2\gamma_2/(\gamma_2^2-1) \}$ の外で, G_2 が安定ならこの円の外側で円を回らず,不安定ならこの円を不安定極の数だけ回るならばフィードバック系は漸近安定となることを意味する(Fig. 4.3).

ii) 行列 $M^T(M^TM)^{-1}M$ は射影行列,従って $M^T(M^TM)^{-1}M \leq I$ が成り立つことを用いれば, G_2 に対する条件は

$$P_{2}A_{2} + A_{2}^{T}P_{2} + \frac{1}{\gamma_{2}^{2} - 1} \{ (1 + \gamma_{2}^{2})C_{2}^{T} - P_{2}B_{2} \}$$

$$\times \{ (1 + \gamma_{2}^{2})C_{2} - B_{2}^{T}P_{2} \} - (\gamma_{2}^{2} - 1)C_{2}^{T}C_{2} \le 0$$
(4.10)

が正定対称解 P_2 をもつこととなり、逆に (4.10) が正定対称解 P_2 をもてば (4.7), (4.8), (4.9) を満たす $P_2 = P_2^T > 0$, L_2 , M_2 が存在する.

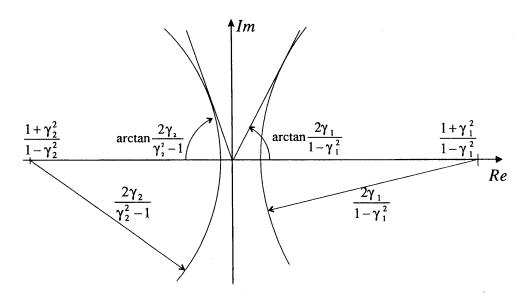


Figure 4.3: Graphical interpretation of theorem 4.14

iii) G_2 が正実システムのとき、定理 4.14 の条件は $\gamma_1 < 1$ となり、すなわち受動 定理となる。しかし定理 4.14 では、 $G_1(\infty) + G_1^T(\infty) = 0$ の場合は許されず、この意味でこれは受動定理の完全な拡張とはなっていない。

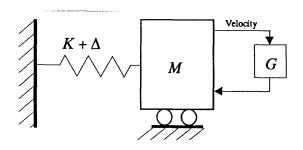


Figure 4.4: Spring-mass system with constant velocity feedback

iv) 定理 4.14 の証明において (a)~(f) では以下のことを用いた. (a): 式 (4.4), (4.5) を適用. (b): (4.6) より得られる $C_2^T M_1^T M_1 C_2 = \gamma_1^2 \{C_2^T C_2 + C_2^T D_1^T D_1 C_2 + C_2^T (D_1 + D_1^T) C_2 \} - \{C_2^T C_2 + C_2^T D_1^T D_1 C_2 - C_2^T (D_1 + D_1^T) C_2 \}$ を適用. (c): 式 (4.8), 式 (4.7) を適用. (d): 式 (4.9) より得られる $C_1^T M_2^T M_2 D_1 C_2 - (\gamma_2^2 - 1) C_1^T D_1 C_2 = 0$ を加え, (4.8) を適用. (e): (4.9) を適用.

Example 4.3 [11] において構造化された不確かさに対するロバスト安定性について Fig. 4.4 のようなバネ系を例にとりスモールゲイン定理と受動定理による解析の比較を行い(任意のシステムに対して成り立つ一般的な主張ではないことを断りながら),スモールゲイン定理の保守性,受動定理の非保守性を確認している.

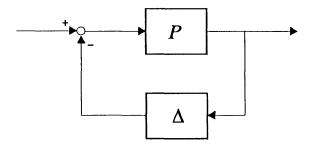


Figure 4.5: Nominal closed loop with feedback uncertainty

ここでは同様の例に対し定理 4.14 を用いてロバスト安定性を考察する. すなわち Fig. 4.4 のようなバネ定数にパラメータ誤差が含まれている系に対し, 定数ゲイン速度フィードバックを行ったときの閉ループ系のロバスト安定性を解析する. 閉ループ

系は

$$M\ddot{x}(t) + G\dot{x}(t) + (K + \Delta)x(t) = 0$$

で表わされこれは Fig. 4.5 のようなフィードバック系として表現される. ここで

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2 + Gs + K} = \frac{\omega_n^2}{K(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

である. $\omega_n = \sqrt{K/M}, \zeta = G/2\sqrt{MK}$ はそれぞれ非減衰固有角周波数,減衰係数である. これを

$$\bar{P}(s) = \frac{s^2 + 2\sigma\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$ar{\Delta}(s) = rac{\Delta \omega_n^2}{K(s^2 + 2\sigma \omega_n s + \omega_n^2)}$$

のように等価変換する. ただし $\sigma>\zeta$ ととる. $\bar{P}(s)$ は $\gamma_1=\frac{\sigma-\zeta}{\sigma+\zeta}$ に対し γ_1 -正実であることが計算される. つぎに $\bar{\Delta}(s)$ に対し定理の仮定を調べる. まず $\bar{\Delta}(s)$ は漸近安定なので Remark 4. 2 i) より $-K<\Delta$ ととる.

このとき,ある $\gamma_2 < \Gamma$ に対して $\bar{\Delta}(s)$ が不等式 (MI) を満たすことが確かめられる.ここで, Γ は σ に無関係な正定数である.図形的には, 2 次遅れ系の性質より常に Remark 4.2 i) の円(すなわち $\bar{\Delta}(s)$ のナイキスト線図がその円外にある)が描けることからわかる.よって $\frac{\sigma-\zeta}{\sigma+\zeta}$ は σ (> ζ) により任意に小さくできることを考えると,すべての $-K < \Delta$ に対して $\gamma_1\gamma_2 < 1$ とできる.したがって定理 4.14 よりすべての $\Delta \in (-K,\infty)$ に対してシステムは安定である.

[11] においてスモールゲイン定理,受動定理から保証されるロバスト安定範囲はそれぞれ $|\Delta| < 2K\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$, $\Delta \in [0,\infty)$ と求められているが,定理 4.14 による条件は実際必要十分条件であることがラウス・フルビッツの安定判別法などからわかる. \Box

上の例題は Fig.~4.4 のような非常に単純な例を用いたものであるが、その意味するところは重要である。 H^{∞} 制御ではロバスト安定化の際、スモールゲイン定理に基

づきコントローラの設計を行うが、このとき上の例のように本来安定であるにもかかわらず、スモールゲイン定理を満たすように不必要な制御を行ってしまう可能性がある。その結果、過剰な安定度を持つ保守的な制御系となり、制御性能が期待したほど向上しないことがある。 H^∞ 制御理論は非構造的不確かさに対するロバスト制御理論であり、例のような構造的不確かさを陽に扱うことはできないことはよく知られている。構造的不確かさと非構造的不確かさの違いはパラメトリックな不確かさと非パラメトリックな不確かさの違いとも、あるいは位相情報を含む不確かさと位相情報を含まない不確かさの違いとみることもできる [20]。したがって Example 4.3 は、構造的不確かさに対しては位相情報を反映しやすい正実システムに基づく制御の方が、さらに、より精密に位相情報を反映しやすい正実システムに基づく制御の方が、より非保守的な制御系となる可能性をもっていることを示している。

4.5 おわりに

エネルギー消散度の立場から受動システムの supply rate に指標を導入し、 γ -受動性を定義した。またこのクラスの supply rate に関して消散的な非線形システムについて安定化定理を得た。これはあるクラスの非線形系に対する漸近安定化の一般的方法を与えるものである。 γ -受動システムとゲイン γ をもつシステムは Cayley-変換によって双対的な関係にあり、これを用いて γ -受動システムの設計法を提案した。すなわち閉ループ系を γ -受動システムとするコントローラはある変換を受けたシステムに対して ゲイン γ の H^∞ 問題を解くことによって求められる。

線形システムの場合,導入した指標 γ は伝達関数の最大位相差を測るものとして利用できる.したがって定理 4.7,4.13 によって閉ループ伝達関数が指定された最大位相差を持つようなコントローラが設計できる(位相曲線整形).これは, H^{∞} 理論(有界実理論)では扱うことができないものであり, γ -正実性の導入により可能となった.最後に γ -正実システムに関するフィードバック系の安定定理を示し,そのロバスト安定解析における有効性を例によって示した.

Chapter 5

柔軟構造物の制御への応用

5.1 はじめに

線形制御系の設計において位相情報が重要な役割をすることは古くから知られている。しかし、 H^{∞} 理論に代表される現代制御理論ではゲインにのみ着目し、位相情報を無視することが多い。その結果保守的な条件となり、得られる制御性能の改善が満足のいくものでないことがある。 4 章 において、 γ 受動性を受動システムの消散度を決める指標をもつものとして定義した。そしてこれは、線形系では伝達関数の最大位相差に対する指標となることも明らかになった。即ち、 γ 正実システムの最大位相差は γ が 0 に近づくにつれ小さくなり、1 に近づくにつれ 90 度に近づくという性質を持つ。このように、 γ 正実システムは位相情報を強く反映するので Example 4.3 でみたように、スモールゲイン条件や正実条件によるロバスト制御よりも非保守的な結果を与える可能性がある。

位相情報の重要性が強く認識される例のひとつに柔軟構造物の振動制御がある. 速度センサとアクチュエータが同位置に配置された(コロケーション)構造物の入出力関係は正実関数で表されることが知られており、従って任意の強正実関数による負フィードバック系は受動定理により漸近安定となる [49]. この考えは位相安定化と呼ばれ、速度の直接フィードバック (Direct Velocity Feedback, DVFB)[8], 速度と変位の直接フィードバック (Direct Velocity and Displacement Feedback, DVDFB)[37] などもこの一種であると考えられる. また、フィードバックに用いる強正実関数に対し、LQG、 H^2/H^∞ の意味で最適性を持たせる研究も行われている [41, 23]. コロケーション系における伝達関数の正実性はモードの数に依存しない. 柔軟構造物の制御ではシ

ステムは高次元であり(ときには無限次元),そのうちの低次のモードを用いて制御系が設計されるため、この性質はコントローラが強正実なら無視されたモード(剰余モード)による不安定化(スピルオーバ)が発生しないことを保証する。スピルオーバ不安定化に対する補償は柔軟構造物の制御における主要な課題となっており、この位相安定化の考えは重要である。

本章では γ-受動(正実) 性を用いて位相安定の概念を拡張し、コントローラが(強) 正実とは限らなくても、剰余モードに対しても安定化する位相条件を提案する. 簡単な例によって、一般に用いられるゲイン安定条件(スモールゲイン条件)が成立しない場合でもこの条件が満たされることを示す. 即ち、本章の目的は柔軟構造物の制御の際、制御器の選択に正実条件でもスモールゲイン条件でもない、他のオプションを与えることである.

5.2 柔軟構造物の制御

本節では γ -受動性に基づき柔軟構造物の制御を行う。これは一般に力学系の運動 方程式である2階の微分方程式で記述され、センサ/アクチュエータ・コロケーショ ンの場合次式のように表される。

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = B_0 u \tag{5.1}$$

$$y = B_0^T \dot{q}, \tag{5.2}$$

ここで $x \in \mathbb{R}^n$ は変位ベクトル, $u \in \mathbb{R}^m$ は操作入力ベクトル, $y \in \mathbb{R}^m$ は観測出力ベクトルである. $M = M^T > 0$, $D = D^T$, $K = K^T$ はそれぞれ質量, 減衰, 剛性行列であり, 行列 B_0 はセンサ/アクチュエータの配置により決まる. さらに D > 0, K > 0 を仮定する. (剛体モードが存在する場合は速度と変位の直接フィードバック [37] によって漸近安定化されているものとする.) システム (5.1)-(5.2) は次のように状態方程式に変換される.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx, \end{cases} \tag{5.3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & B_0^T \end{bmatrix}$$

このとき A は漸近安定であり、システムは正実であることが知られている [10]. また、次の命題は後で必要になる.

命題 5.1 $m \times m$ 伝達関数 G(s) は漸近安定かつ正実と仮定する. このとき, ある k > 0 と $0 < \gamma < 1$ が存在して, G(s) + kI は γ -正実となる.

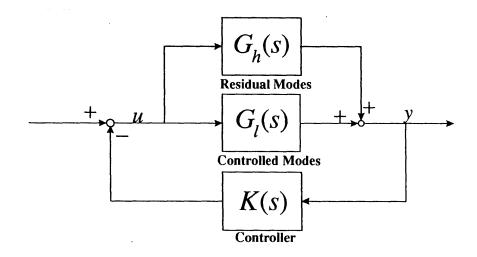


Figure 5.1: Block diagram of flexible structures

柔軟構造物のシステム (5.3) は一般に高次元になるが、制御系の設計の際には高 周波のモードを打ち切ることにより低次元化する. コントローラはこの低次の制御 モード

$$G_{l}: \begin{cases} \dot{x}_{l} = A_{l}x_{l} + B_{l}u \\ y_{l} = C_{l}x_{l}, \end{cases}$$

に基づいて設計されるが、実際には無視された剰余モード $G_h(s) = G(s) - G_l(s)$ とのカップリングが発生し、ときには制御系全体を不安定化してしまう(Fig. 5.1 参照). これはスピルオーバ現象と呼ばれ、この発生を抑えることが柔軟構造物の制御

における主要な課題のひとつとなっている。本節では γ -受動(正実)性に基づき,スピルオーバの発生を抑える条件を提案する。これは γ -正実システムのもつ位相特性によるものであり,位相安定化の拡張である。そして定理 4.14 の拡張として次のように述べられる。

定理 5.2 (5.3) で表される強正実システムに対し、D = kI, k > 0 を

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

が γ_1 -正実 $(0 < \gamma_1 < 1)$ となるようにとる. このとき,

$$G_c: \left\{ egin{array}{l} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \ \ u = C_c x_c \end{array}
ight.$$

 $((C_c, A_c, B_c)$ は可安定可検出とする) において

$$P_c A_c + A_c^T P_c + \frac{1}{\gamma_2^2 - 1} \{ (1 + \gamma_2^2) C_c^T - P_c B_c \}$$
$$\times \{ (1 + \gamma_2^2) C_c - B_c^T P_c \} - (\gamma_2^2 - 1) C_c^T C_c = 0$$

が $\gamma_1\gamma_2 < 1$ なる $\gamma_2 > 0$ に対し準正定解 P_c をもつなら、(5.3) と G_c の負フィード バック系は漸近安定である.

(証明)柔軟構造物のシステム (5.3) は一般に可制御可観測とは限らないので、直ちに定理 4.14 を適用することはできない.しかし、適当な状態空間の基底変換により (5.3) は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ 0 \\ B_4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

と表される. ここで、A は漸近安定であったので A_{11} , A_{22} , A_{33} , A_{44} は漸近安定である. 閉ループ系は

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix}
A_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
A_{21} & A_{22} & \ddots & B_1C_c \\
A_{31} & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\
A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & B_2C_c \\
B_cC_1 & B_cC_2 & 0 & 0 & A_c - B_cDC_c
\end{bmatrix} \bar{x},$$

$$\bar{x} := [x_1^T x_2^T x_3^T x_4^T x_2^T]^T$$

となるので,

$$\left\{ egin{aligned} \dot{x}_2 &= A_{22} x_2 + B_1 C_c x_c \ \dot{x}_c &= B_c C_2 x_2 + (A_c - B_c D C_c) x_c \end{aligned}
ight.$$

の漸近安定性が言えればよい、 x_2 のモードは可制御可観測であり $C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2+D$ は γ_1 -正実であるので, A_{22} , B_2 , C_2 , D に対して定理 4. 12 の 3 式を満たす $P=P^T>0$, L, M が存在する.また Remark 4. 2 の ii) を用いれば, G_c に対しても式 (4.7), (4.8), (4.9) を満たす $Pc=Pc^T\geq 0$, L_c , M_c が存在する.定理 4. 14 の証明と同様に, $V(x):=(\gamma_2^2+1)x_2^TPx_2+(\gamma_1^2+1)x_c^TP_cx_c$ とおくと

$$\dot{V} \le (\gamma_1^2 \gamma_2^2 - 1) \|C_2 x_2 - (D + I) C_c x_c\|^2$$
$$+ (\gamma_1^2 \gamma_2^2 - 1) \|C_2 x_2 - (D - I) C_c x_c\|^2 \le 0$$

が示される. (C_c, A_c) 可検出に注意して、 $\dot{V} \equiv 0 \Leftrightarrow C_2 x_2(t) \equiv 0$ 、 $C_c x_c(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) = A_{22} x_2(t)$ 、 $\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) = (A_c - HC_c) x_c(t)$ (H は $A_c - HC_c$ を漸近安定とする行列) $\Rightarrow x_2(t)$ 、 $x_c(t) \to 0$ 、 $t \to \infty$ となることと、 $V \equiv 0 \Rightarrow \dot{V} \equiv 0 \Rightarrow C_2 x_2(t) \equiv 0$ 、 $C_c x_c(t) \equiv 0$ から漸近安定性が従う.

本定理は、コントローラが剰余モードも含めた全体の系のもつ位相特性から決まる ある位相条件を満たせば(図 4.3 参照)、閉ループ系は漸近安定となること、即ち、 スピルオーバが発生しないことを保証する.

Remark 5.1 $(G_c(s)-I)(G_c(s)+I)^{-1}=2C_c(sI-A_c+B_cC_c)^{-1}B_c-I$ であり、 (C_c,A_c,B_c) 可安定可検出のとき、 $(2C_c,A_c-B_cC_c,B_c)$ 可安定可検出であることから、定理中の G_c に対する仮定は

$$||(G_c(s)-I)(G_c(s)+I)^{-1}||_{\infty} \leq \gamma_2$$

と等価である(例えば [42] 付録C参照). 従って、 G_c の Cayley-変換の H^∞ ノルムが $1/\gamma_1$ より小さければよい.

5.3 Example

最後に、数値例として柔軟ビームの振動制御を考えよう[23]. 考えるシステムはセンサ/アクチュエータがコロケートされ、そのシステム行列は

$$A = diag(A_1, \dots, A_5),$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta\omega_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 5$$

$$\omega_i = i^2, \zeta = 0.01$$

$$B = [0, 0.0988, 0, -0.309, 0, -0.891, 0, 0.588, 0, 0.707]$$

$$= C^T$$

で与えられているとする. $G(s) := C(sI - A)^{-1}B$ とおく. このとき,命題 5.1 にあるように k = 0.26 のとき G(s) + D,(D = kI) は $\gamma_1 = 0.65$ に対して γ_1 -正実となることがわかる. これは実際, γ -正実なシステムの Cayley-変換が γ 以下の H^∞ ノルムをもつ(定理 4.4 参照)ことから数値的に求められる.制御系の設計には,この

10 次のシステムの周波数の低い方から3個のモードを選び、6次のシステム

$$A_l = diag(A_1, \dots, A_3),$$

$$B_l = C_l^T = [0, 0.0988, 0, -0.309, 0, -0.891]$$

$$G_l(s) = C_l(sI - A_l)^{-1}B_l$$

を制御モードとして用いる.このようなシステムに対して H^2 制御による制振を行う. H^2 制御問題は次のように述べられる.

 H^2 制御問題: 次で与えられる n 次の一般化プラントを考える.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u. \end{cases}$$
(5.4)

ここで、 (A, B_2) 可安定、 (C_2, A) は可検出、 $D_{12}^T C_1 = 0$ 、 $B_1 D_{21}^T = 0$ 、 $D_{12}^T D_{12} =: R_1 > 0$ 、 $D_{21} D_{21}^T =: R_2 > 0$ を仮定する.このとき、次の i)、ii) を満たす n 次コントローラ

$$K: \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c u \\ y = C_c x_c \end{cases}$$
 (5.5)

を求めよ.

i) (5.4)-(5.5) の閉ループ系は漸近安定, 即ち,

$$A_{CL} = \left[egin{array}{cc} A & B_2C_c \ B_cC_2 & A_c + B_cD_{22}C_c \end{array}
ight]$$

は漸近安定.

ii) 閉ループ伝達関数

$$G_{CL}(s) = \begin{bmatrix} A & B_2C_c & B_1 \\ B_cC_2 & A_c + B_cD_{22}C_c & B_cD_{21} \\ \hline C_1 & D_{12}C_c & 0 \end{bmatrix}$$

の H2 ノルム

$$\|G_{CL}(s)\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G_{CL}(j\omega)\|_F^2 d\omega\right)^{1/2}$$

を最小にする.ここで $\left[\begin{array}{c|c}A&B\\\hline C&D\end{array}\right]=C(sI-A)^{-1}B+D$ であり, $\|\cdot\|_F$ は行列のフロベニウスノルムを表す.

プラント (5.4) に対する上の仮定の下で、 H^2 コントローラ K は常に存在し、次で与えられる.

$$A_{c} = A - B_{2}R_{1}^{-1}B_{2}^{T}P - QC_{2}^{T}R_{2}^{-1}C_{2}$$

$$+ QC_{2}^{T}R_{2}^{-1}D_{22}R_{1}^{-1}B_{2}^{T}P,$$

$$B_{c} = QC_{2}^{T}R_{2}^{-1}, \quad C_{c} = -R_{1}^{-1}B_{2}^{T}P$$

ここで, $P=P^T\geq 0,$ $Q=Q^T\geq 0$ はそれぞれつぎのリッカチ方程式の安定化解である.

$$PA + A^{T}P - PB_{2}R_{1}^{-1}B_{2}P + C_{1}^{T}C_{1} = 0$$
$$AQ + QA^{T} - QC_{2}^{T}R_{2}^{-1}C_{2}Q + B_{1}B_{1}^{T} = 0$$

さて、 B_1 、 C_1 、 D_{12} 、 D_{21} を

$$B_{1} = [B_{l} \ 0_{10 \times 1}],$$

$$C_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.809 & 0 & -0.951 & 0 & 0.309 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = [0, 0.005]^{T}, D_{21} = [0, 0.62]$$

ととる. このとき低次元モデルの一般化プラント

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{l}x + B_{1}w + B_{l}u \\ z = C_{1}x + D_{12}u \\ y = C_{l}x + D_{21}w + Du. \end{cases}$$

に対する H^2 コントローラ K(s) は $\|(-K(s)-I)(-K(s)+I)^{-1}\|_{\infty}=1.27$ より, $\gamma_2=1.27$ に対して定理 5.2 の条件を満たす.1.27<1/0.65=1.54 であり,また H^2 コントローラは常に可安定可検出であるので,定理より,全体のシステムに対しても閉ループ系は漸近安定である.即ち,スピルオーバが発生することはない.またこの場合 $1/\gamma_1=1.54$ と $\gamma_2=1.27$ の差から,パラメータ誤差等に対する一定のロバスト安定性も期待できよう.

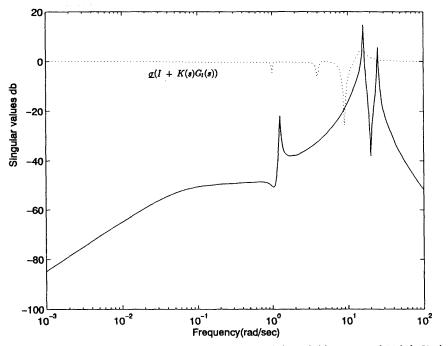


Figure 5.2: Singular values of $\underline{\sigma}(I + K(s)G_l(s))$ and $\bar{\sigma}(K(s)G_h(s))$

スモールゲイン定理に基づくスピルオーバ安定条件として

$$\underline{\sigma}(I + K(s)G_l(s)) > \overline{\sigma}(K(s)G_h(s));$$

$$G_h(s) := G(s) - G_l(s)$$

などが用いられるが、図 5.2 からわかるようにこの条件は満たされていない.

上の判定条件は剰余モード $G_h(s)$ を摂動とみなしてスモールゲイン定理から得られるものであるが、同じ D=0.26I、 $\gamma_1=0.65$ に対して $G_l(s)+D$ も γ_1 -正実となることから、剰余モード $G_h(s)$ は γ_1 -正実を保存する摂動である.これは次のように(数理的に証明するのは困難と思われるが)解釈されよう.剰余モードは制御モードに比べてゲインが小さく、またコロケーション系であることからこれは正実性を保存する摂動である.よって、図 4.3 における $G(j\omega)+D$ のナイキスト線図を囲む円は制御モード $G_l(j\omega)+D$ を囲む円と変わらない.即ち、高次のモードは γ_1 の評価に影響しない.言い換えれば、剰余モードは単に正実性を保存するだけでなく、もっと精密に、 γ -正実性を保存する摂動であるといえる.

5.4 おわりに

本章では、 γ -受動(正実)性の概念を応用して柔軟構造物の振動制御のスピルオーバ不安定化補償のための新しい十分条件を導いた。これは γ -正実システムのもつ位相特性を用いて位相安定化の概念を拡張したものである。即ち、コントローラがある位相条件を満たせば、ゲイン条件を満たさなくても、また正実でなくても剰余モードを安定化することが保証される。実際、正実条件の緩和によって相対次数が2以上のコントローラも可能であり、さらに不安定コントローラでさえも許される(Remark 4.2 i) 参照).

また、コロケーション系であるため、DVFB、DVDFB との併用も可能である.これによってシステムはより小さな γ_1 に対して γ_1 -正実となり、従って可能な γ_2 の範囲が広がり、結果としてコントローラの選択が広がることになる.実際、例において u=-0.5y なる直接速度フィードバックを施すと閉ループ系は $\gamma_1=0.32$ に対して γ_1 -正実となり、許容される γ_2 の範囲は $\gamma_2<1/0.32=3.13$ となる.即ち、DVFB、DVDFB のようなモードの数、パラメータ誤差によらない非常にロバストな(しかし大きな性能の向上は期待できない) Low Authority Control とより高級な制御仕様に対応する(例えばオブザーバに基づく LQG、 H^2 、 H^∞ 制御のような) High Authority Control の併用によって、より効果的となる.

今後の課題は、コントローラがここで得られた位相条件を満たすための設計手法を求めることである。その際、例のような H^2 制御だけでなく、 H^∞ 制御などとの組み合わせも考えられよう。

Chapter 6

結論

古典制御から現代制御にわたって制御理論の分野で非常に大きな役割を演じ、現在もなお新しい概念・理論を生み出し続けている受動性は、「物理的性質を反映する」、「エネルギー減衰系である」など際立った特徴を持つ、本研究では受動性の概念の解析と拡張を行った。

受動システムは最小位相性という重要な特徴を持つ. そして、最小位相性はハイゲインフィードバックと密接な関係を持つ. 例えば、非線形システムにおける最小位相性は Byrnes ら [12] と同時に Marino [45] によってハイゲイン出力フィードバックを考察することによって発見されたことはよく知られている. 第2章では非線形系におけるハイゲインフィードバックの設計問題としてレギュレータ問題、ロバスト安定化問題を考察した. 得られたレギュレータ問題に対する十分条件は、線形系で知られている条件の自然な拡張となっている. また、ロバスト安定化問題の考察を通して、Integrater Backstepping 法とマルチパラメータハイゲインフィードバックが同一構造を持つことを明らかにした.

受動システムはエネルギー減衰系である。特定の入出力間に対してそのような受動的性質を持たせようとする制御系設計問題を受動化問題と呼び、これを第3章で考察した。そのために、消散システム理論の枠組みの中で、非線形系における受動性と有限ゲイン性の双対的性質を非線形作用素の Cayley-変換を状態空間上で表現して証明した。そして、Caley-変換を一般化制御対象へ拡張することによって、受動化問題は H^∞ 問題と等価であることを証明した。

受動性は,受動的であるかないかの二者択一であり,「L2-ゲインが有限であること」 と「その値」のように二つの言葉を用いて表現される有限ゲインシステムと大きく 異なっている。第4章ではこの点について、まず有限ゲインシステムのゲインは消 散システム論における消散度の指標であることに着目し、γ-受動性を定義した. す なわち, γ は受動システムの消散の度合いを表し, 受動的システムであっても弱い 受動システムや強い受動システムが考えられるようになる.この γ-受動システムは $\gamma = 1$ のときは通常の受動システムと一致し、 $0 < \gamma < 1$ のときは γ が小さくな るにつれて消散度が大きくなるという性質を持つ.また,γ-受動性の定義に際して 導入された supply rate を考察することによって、あるクラスの非線形システムの漸 近安定化に対する十分条件を導いた. さらに、Cayley-変換はここにおいても重要な 働きをする. すなわち、 γ -受動システムと L^2 -ゲイン γ をもつシステムは Cayley-変 換を通して双対的であることがわかり、これを用いて γ-受動システムの設計法を提 案した. 線形系においては, γ は伝達関数の位相を計る役割をし, γ-正実システム はその位相的性質に特徴を持つ. この位相的性質と, γ-受動システムの設計法とか ら「位相曲線整形法」を提案した. さらに、受動定理を拡張した γ-受動定理とも言 うべきフィードバックシステムの安定性に関する結果を得、その構造的不確かさに対 するロバスト安定解析における有効性を例によって示した.この例はスモールゲイ ン定理, 受動定理, ~受動定理の保守性を比較する意味から興味深い結果を示している.

柔軟構造物のダイナミクスは、速度センサとアクチュエータを同位置に配置したコロケーション系では、正実関数となる。この性質を利用した制御に DVFB や DVDFB、強正実関数のフィードバックなどがある。これらは、位相安定化とも呼ばれ、モードの数やパラメータ誤差などによらないロバストな制御であることはよく知られている。第5章では、γ-正実性を用いてこの位相安定化の拡張を行った。特に、柔軟構造物の制御における主要な課題の一つであるスピルオーバ不安定化に対する新しい補償条件を提案した。

今後の研究課題としては、 $w(u,y)=y^TQy+2y^TSu+u^TRu$ のようなより一般的な supply rate に関して消散的なシステムの設計問題を考察中である。この問題は、

本研究において頻繁に取り上げられた非保守的な制御系の設計問題に対する一つのアプローチとなる可能性がある。さらに一般的な、時変な supply rate w=w(u,y,t) なども手がかりを与えるかもしれない。(以上の研究は始まったばかりであり、その可能性について現在のところ明確に述べることはできない。)第5章では、安定条件を提案したにとどまっており、これを設計問題にまで高める必要がある。また、オイラー・ラグランジュ方程式で表される機械系の非線形制御に対する γ -受動性の応用等も興味あるテーマであろう。

最後に、本研究はすべて、物理的性質を強く反映する受動性という基本的概念に立ち戻り、それを見つめ直すことによって生み出された結果であるが、今後も、受動性は制御工学における問題解決に新しいアイディアを提供するよりどころとなるであろうことを結言として本論を終える.

Bibliography

- [1] B. D. O. Anderson: Algebraic structure of generalized positive real matrices, SIAM J. Control, Vol. 6, 615-624, 1968.
- [2] —: The small gain theorem, the passivity theorem and their equivalence, J. Franklin Inst. 293(2), pp. 105-115, 1972.
- [3] B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd: *Network Analysis and Synthesis*, Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1973.
- [4] 有本卓: ロボットの力学と制御, 朝倉書店, 1990.
- [5] —: 機械システムの知能化 I-IV, 日本ロボット学会誌, Vol. 12, 1994.
- [6] —: Joint-space orthogonalization and passivity for physical interpretations of dextrous robot motions under geometric constraints, Int. J. Robust Nonlinear Contr., Vol. 5, 269-284, 1995.
- [7] —: Hyper-stable servo controllers without velocity measurement for a class of nonlinear mechanical systems, 計測自動制御学会論文集, Vol. 31, pp. 1666-1671, 1995.
- [8] M. J. Balas: Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures, AIAA J. Guid. Contr. Dyn., Vol. 2, 252-253, 1979.
- [9] B. R. Barmish, M. Corless, and G. Leitmann: A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems, SIAM J. Contr. Optimiz., Vol. 21, 246-255, 1983.
- [10] R. J. Benhabib, R. P. Iwens, and R. L. Jacson: Stability of Large Space Structure Control Systems Using Positivity Concepts, AIAA J. Guid. Contr. Dyn., Vol. 3, 444-451 1981.
- [11] D. S. Bernstein, W. M. Haddad and D. C. Hayland: Small gain versus positive real modeling of real parameter uncertainty, AIAA J. Guid. Contr. Dyn., Vol. 15, pp. 538-542, 1992.
- [12] C. I. Byrnes and A. Isidori: A frequency domain philosophy for nonlinear systems, with application to stabilization and adaptive control, Proc. of CDC, pp. 1569-1573, 1984.

- [13] —: Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems, IEEE Automat. Contr., Vol. AC-36, pp. 1122-1137, 1991.
- [14] —: New results and examples in nonlinear feedback stabilization, Syst. Contr. Lett., Vol. 12, pp. 437-442, 1989.
- [15] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems: Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-36, pp. 1228-1240, 1992.
- [16] Y. Chen and G. Leitmann: Robustness of uncertain systems in the absence of matching condition, Int. J. Contr., Vol. 45, 1527-1542, 1987.
- [17] C. A. Desoer and M. Vidyasagar: Feedback Systems: Input-Output Properties, New York: Academic, 1975.
- [18] J.C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonecker, and B. A. Francis: State space solutions to standard H_2 and H_{∞} control problems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-34, pp. 831-846, 1990.
- [19] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic: Design of 'softer' robust nonlinear control laws, Automatica, Vol. 29, 1425-1437, 1993.
- [20] J. S. Freudenberg and D. P. Looze: Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems, Springer-Verlag, 1988.
- [21] W. M. Haddad, D. S. Bernstein: Robust stabilization with positive real uncertainty: Beyond the small gain theorem, Syst. Contr. Lett., vol. 17, pp. 191-208, 1991.
- [22] —: Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and Popov theorems and their applications to robust stability. Part I: Continuous-time theory, Int. J. Robust and Nonlinear Contr., Vol. 3, pp. 313-339, 1993.
- [23] W. M. Haddad, D. S. Bernstein and Y. W. Wang: Dissipative H^2/H^{∞} controller synthesis, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-39, 827-831, 1994.
- [24] D. J. Hill and P. J. Moylan: The stability of nonlinear dissipative systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-21, pp. 708-711, 1976.
- [25] —: Stability results for nonlinear feedback systems, Automatica, Vol. 13, pp. 377-382, 1976.
- [26] —: Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties, J. Franklin Inst., Vol. AC-309, pp. 327-357, 1980.
- [27] —: Connections between finite gain and asymptotic stability, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-25, pp. 931-936, 1980.

- [28] R. M. Hirshorn: Invertibility of multivariable nonlinear control systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-24, 855-865, 1979.
- [29] F. Hoppensteadt: Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 24, 807-840, 1971.
- [30] —: Asymptotic stability in singular perturbation problems-II: problems having matched asymptotic expansion solutions, J. Diff. Eqn., Vol. 15, 510-521, 1974.
- [31] A.Isidori: Nonlinear Control Systems, second edition, Springer-Verlag.
- [32] A. Isidori, A. Astolfi: Disturbance attenuation and H_∞-control via measurement feedback in nonlinear systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-37, pp. 1283-1293, 1992.
- [33] A. Isidori: H_{∞} control via measurement feedback for affine nonlinear systems, Int. J. Robust Nonlinear Contr., Vol. 4, pp. 553-574, 1994.
- [34] S. M. Joshi: Control of large flexible space structures, Springer, 1989.
- [35] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic and A. S. Morse: Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-36, 1241-1253, 1991.
- [36] H.Kimura: Perfect and subperfect regulation in linear multivariable control systems, Automatica, Vol.18, 125-145, 1982.
- [37] 糀谷,池田,木田: Collocated Feedback による宇宙構造物の最適制御,計測自動制御学会論文集, Vol. 25, 882-888 1989.
- [38] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly: Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design, New York: Academic, 1986.
- [39] P. V. Kokotovic and H. J. Sussmann: A positive real condition for global nonlinear systems, Syst. Contr. Lett., Vol. 13, pp. 125-134, 1989.
- [40] J. LaSalle and S. Lefschetz: Stability by Lyapunov's direct method, New York: Academic, 1961.
- [41] R. Lozano-Leal and S. M. Joshi: On the design of dissipative LQG-type controllers, Proc. of CDC, 1645-1646, 1988.
- [42] 前田, 杉江: アドバンスト制御のためのシステム制御理論, 朝倉書店, 1990
- [43] 前田,森島,児玉: 誘導電動機のロバスト制御-タイムスケールによる階層化,システム/情報/制御, Vol.34, 37-43, 1990.
- [44] 前田: 正実性と回路網, 計測と制御, Vol.34, pp. 662-670, 1995.
- [45] R.Marino: High-gain feedback in nonlinear control systems, Int. J. Contr. Vol. 42, 1369-385, 1985.

- [46] R. Marino and P. Tomei: Robust stabilization of feedback lenearizable timevarying uncertain nonlear systems, Automatica, Vol. 29, 181-189, 1993.
- [47] 美多,千田,王: 強正実条件と疑似強正実条件,計測自動制御学会論文集,Vol. 25, pp. 751-757, 1989.
- [48] 美多: H∞ 制御, 昭晃堂, 1994.
- [49] M. D. McLaren and G. L. Slater: Robust multivariable control of large space structures using positivity, AIAA J. Guid. Contr. Dyn., Vol. 10, pp. 393-400, 1987.
- [50] 宮里: 適応制御理論の新しい展開-Backstepping, システム/制御/情報, Vol. 38, pp. 477-484, 1994.
- [51] —: 次数に依存しない非線形モデル規範形適応制御系の構成法, 計測自動制御学会論文集, Vol. 31, pp. 324-333, 1995.
- [52] P. J. Moylan: Implications of passivity in a certain class of nonlinear systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-19, pp. 373-381, 1974.
- [53] 村田,安藤,鈴木: マルチタイムスケール法によるハイゲインレギュレータの設計,計測自動制御学会論文集, Vol.23, 1158-1164, 1987.
- [54] S. Murata, Y. Ando, M. Suzuki: Design of high gain regulator by the multiple time scale approach, Automatica, Vol.26, 585-591, 1990.
- [55] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft: Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer, New York, 1990.
- [56] R. Ortega: Passivity properties for stabilization of cascaded nonlinear systems, Automatica, Vol. 27, pp. 423-424, 1991.
- [57] —: On passivity-based output feedback global stabilization of Euler-Lagrange systems, Int. J. Robust Nonlinear Contr., Vol. 5, pp. 313-323, 1995.
- [58] V. M. Popov: Hyper stability of control systems, Springer-Verlag, 1973.
- [59] A. Saberi, P. V. Kokotovic, and H. J. Sussmann: Global stabilization of partially linear composite systems, SIAM J. Contr. Optim., Vol. 28, pp.1491-1503, 1990.
- [60] M. G. Safonov, E. A. Jonkheere, M. Verma, and D. J. N. Limebeer: Synthesis of positive real multivariable feedback systems, Int. J. Control, Vol. 45, pp. 817-842, 1987.
- [61] 斉藤: 回路網理論入門,東京大学出版会,1967.
- [62] N. Sakamoto, Y. Ando, and M. Suzuki: High gain regulator problem in nonlinear control systems, Proc. of MTNS-93, (U. Helmke, R. Mennicken, and J. Saurer Eds.), Vol. II, 453-456 1993.

- [63] A. J. van der Schaft: L^2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H^{∞} control, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-37, pp. 770-784, 1992.
- [64] —: On a state space approach to nonlinear H_{∞} control, Syst. Contr. Lett., Vol. 16, pp. 1-8, 1991.
- [65] —: Nonlinear state space H_{∞} control theory, H.L. Trentelman and J.C. Willems, eds., Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications, PSCT14, Birkhauser, Basel, 1993.
- [66] W. Sun, P. P. Khargonekar, D. Shim: Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-39, pp. 2034-2046, 1994.
- [67] H. J. Sussmann: Limitations on the stabilization of globally minimum phase systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-35, pp. 117-119, 1990.
- [68] H. J. Sussmann and P. V. Kokotovic: The peaking phenomeon and the global stabilization of nonlinear systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-36, pp. 424-440, 1991.
- [69] 鈴木: 多変数制御系におけるハイゲインフィードバックの効用, 計測と制御, Vol. 19, 780-788, 1980.
- [70] G. Tao and P. A. Ioannou: Strictly positive real matrices and the Lefschetz-Kalman-Yakubovich lemma, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-33, pp. 1183-1185, 1988.
- [71] 上田, 島: 非線形 almost モデル追従制御, 第15回DSTシンポジウム, 249/252, 1992.
- [72] M. Vidyasagar: Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions: Stability and stabilizability, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-25, pp. 773-779, 1980.
- [73] J. C. Willems: *The Analysis of feedback systems*, Cambridge, MA: MIT Press, 1971.
- [74] —: Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equations, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-16, pp. 621-634, 1971.
- [75] —: Dissipative dynamical systems-Part I: General theory, Arch. Rational Mechanics and Analysis, vol. 45, pp. 321-351, 1972.
- [76] —: Dissipative dynamical systems-Part II: Linear systems with quadratic supply rates, Arch. Rational Mechanics and Analysis, vol. 45, pp. 352-393, 1972.

- [77] G. Zames: On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems -Part I, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-11, pp. 228-238, 1966.
- [78] —: On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems Part II, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-11, pp. 465-477, 1966.

謝辞

本研究を遂行するにあたり、終始温かい御指導と熱心な御討議を賜りました名古屋大学工学部鈴木正之教授に心から感謝の意を表します.

また、本論文の作成にあたり、有益な御助言、御教示を賜りました名古屋大学工学 部松崎雄嗣教授、杉本謙二助教授に深く感謝の意を表します.

また、本論文作成に際し、多大なる労を煩わせた伊藤満男技官に厚くお礼申し上げます.

最後に、著者に長年にわたる経済的援助と精神的支えを与えてくれた親愛なる妻 Christine に、この場をかりて深く感謝の意を表します。

発表論文

- 1) 坂本, 鈴木, "非線形 H[∞] 問題とシステムの受動化の関係", 計測自動制御学会 論文集, 第31巻, 第6号, 728-735, 1995.
- 2) 坂本, 鈴木, "γ-受動システムとその位相的性質", 計測自動制御学会論文集, 第 3 1 巻, 第 1 2 号, 1945-1953, 1995.
- Sakamoto, N., M.Suzuki, "γ-Passive System and Its Phase Property and Synthesis", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-41, No. 5, 1996.
 (掲載決定)
- 4) 坂本,安藤,鈴木,"非線形ハイゲインフィードバックシステムの設計",計測自動制御学会論文集(投稿中)
- 5) 坂本,鈴木, "γ-受動システムの柔軟構造物の制御への応用",計測自動制御学 会論文集(投稿中)
- 6) N. Sakamoto, Y. Ando, M. Suzuki, "High Gain Regulator Problem in Nonlinear Control Systems," Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications, edited by U. Hemke, R. Mennicken, and J.Saurer, Proceedings of the 10th International Symposium on the Mathematical Theory of Nerworks and Systems, 453-456, 1993.
- 7) N. Sakamoto, M. Suzuki, "Relation Between Nonlinear H^{∞} Problem and Passivity Problem," Proceedings of the Asian Control Conference, 185-188, 1994.
- 8) Sakamoto, N., M.Suzuki, "γ-Passive System and Its Phase Property," Proceedings of 1994 Hong Kong International Workshop on New Directions of Control and Manufacturing, 171-177, 1994.
- 9) Sakmoto,N., M.Suzuki, "γ-Passive System and Its Application to the Control of Large Flexible Space Structures," accepted for presentation at 1996 IFAC WORLD CONGRESS in San Francisco.

発表論文と各章の関係

2章-4), 6) 3章-1), 3), 8) 4章-2), 3), 7) 5章-5), 9)

口頭発表

- 坂本、安藤、鈴木、"非線形系におけるハイゲインフィードバック"、15回 Dynamical System Theory シンポジウム前刷集, 261-266, 1992.
- 坂本,鈴木,"非線形問題とシステムの受動化の関係",16回 Dynamical System
 Theory シンポジウム前刷集,69-72,1993.
- 坂本,鈴木, "γ-受動システムとその位相的性質", 1 7回 Dynamical System
 Theory シンポジウム前刷集, 31-36, 1994.
- ・坂本, " γ -受動システムとその柔軟構造物の制御への応用", 計測自動制御学会中部支部第3回制御理論ワーキングセミナー