報告番号	※甲 第 2666 号

主論文の要旨

題名

A construction of q-analogue of Dedekind sums

(Dedekind和の q-analogueの構成)

氏名 佐藤潤也

主 論 文 の 要 旨

報告番号	※ 第　　　号	氏 名	佐 藤 潤 也

初めに、我々が如何なる立場に立って q-analogue を論じているのかを説明しておかなければならない。 最近では、量子群の表現論との関わりから q-analogue が盛んに論じられているが、我々の議論との関連は不明ある。 一方、オーソドックスな立場として、「 $q \neq 1$ 」と言う特殊性を大いに利用しながら q の世界で議論を展開し、最後に変数 q を特殊化（ $q = 1$ ）することによって、新しい公式の発見、もしくは通常では証明困難な公式の簡易化された別証明等を得ようと言う立場もある。 しかしながら、数論に於いては q 的対象（ q-analogue ）が余りに少なすぎ、未だ q の世界で議論を展開する段階ではない。 更に、何が数論にとって意味のある q-analogue なのか、その示唆を与える例も見つかっていない。 以上の様な理由から、より多くの対象に対して体系的に q-analogue を構成することは意味の有る事であり、その中から真に意味の有るものを見い出す事が重要である。 そこで、我々は、数論に於ける q の世界の環境整備を目的とし、変数又は適当な複素数 q を付け加えことによって古典的な公式（ $q = 1$ の場合の公式）がどの様に保存されるかを論じ、古典的な公式からの帰結（像）として「 q の世界の核」を構成しようと試みた。 正に言葉どおり「 q-類似」の構成を目的としている。

主論文は大きく分けて2つ部分から成っており、前半では我々の理論の背景を説明する為に視覚的類似によって Dedekind 和の q-analogue を定義し、その相互法則を q-差分方程式の解の一意性によって証明した：

Theorem 1

$s_{n;q}(h,k)$ を Dedekind 和の q-analogue 及び $\alpha_n(q)$ を修正 q-Euler 数とした時、非負整数 n 、及び互いに素な正整数 h と k に対して

$$\begin{aligned}
[k]^n s_{n;q}(h,k) \quad &+ \quad [h]^n s_{n;q}(k,h) \\
&= \quad \left\{(q-1)\alpha\left(q^k\right)\alpha\left(q^h\right)[k][h] + \alpha\left(q^k\right)[k] + \alpha\left(q^h\right)[h]\right\}^n \\
&- \quad \frac{1}{kh}\left\{(q-1)\alpha^2(q) + \alpha(q) + \alpha(q)\right\}^n - \frac{1}{kh}\alpha_n(q)
\end{aligned}$$

が成立する。 但し、 $\alpha^i(q)$ は $i = 0$ の時も含めて $\alpha_i(q)$ を意味する。

この証明に於て、我々は古典的な世界からqの世界への「架け橋」となるある等式を発見した（後述)。

後半では前半で得た示唆をもとに、古典的な世界から q の世界への写像を構成しその像として前半で定義した q-Dedekind 和が捉えられる事を示し、更に、その写像が和及び積を保存する事を示した：

Theorem 2
複素係数 n 変数多項式

$$H(t_1,\ldots,t_n)=\sum a_{m_1,\ldots,m_n}t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n}$$

に対して、形式的に

$$H^*(t_1,\ldots,t_n)=\sum a_{m_1,\ldots,m_n}\underbrace{t_1*\ldots*t_1}_{m_1\text{ times}}*\ldots*\underbrace{t_n*\ldots*t_n}_{m_n\text{ times}}$$

と置いた時、複素係数べき級数（収束に関する条件付き） $f_1,\ldots,f_n$ に対して、

$$H(f_1,\ldots,f_n)=0$$

が成立すれば、それらの q-analogue $(f_1)_q,\ldots,(f_n)_q$ に対して

$$H^*\left((f_1)_q,\ldots,(f_n)_q\right)=0$$

が成立する。

その応用として先の相互法則は殆ど自明な等式からただちに得られる。
以下に、そのを要旨を述べる。

最も広い意味で q-analogue を述べるならば、それは「$q=1$ での特殊値が古典的対象となる q の関数である。」と言う事ができる。
しかしながら、 q-analogue を構成しようとした時、 $q-1$ を含む項、即ち、 $q=1$ と特殊化する事によって消える項を復活させる事は q-analogue を作りたい対象のみを見ていただけでは不可能である。

そこで、我々は Carlitz の q-Bernoulli 数及び q-Euler 数に基礎を置き、それらの構成方法を抽象化し、更に、それをより広い対象にまで拡張する事を試みた。 その過程に於て、次の 2 つの等式の不変性が非常に重要な示唆を我々に与えた：

$$\begin{aligned} F_{u;1}(t)F_{v;1}(t) &= \frac{1-v}{u-v}F_{u;1}(t)+\frac{1-u}{v-u}F_{v;1}(t) \\ F_{u;q}(t)*F_{v;q}(t) &= \frac{1-v}{u-v}F_{u;q}(t)+\frac{1-u}{v-u}F_{v;q}(t) \end{aligned}$$

但し、 $F_{u;q}(t)$ は $|u|>1$ に付随する q-Euler 数の母関数であり、 $*$ は主論文 Lemma 4 によって定まるべき級数間の積である。 即ち、この 2 つの等式は、古典的な世界から q の世界への準同形写像で、

$$F_{u;1}(t) \longmapsto F_{u;q}(t)$$

を満たすものが存在するのではないかと言う期待を抱かせる。 実際、その様な写像は存在し（主論文 Lemma 8 及び Theorem 2 ）、その準同形性によって新しい公式の発見、更に、非常に煩雑であった Carlitz の q-Bernoulli 数及び q-Euler 数に関する様々な公式の別証明等が、古典的な公式（それらは、通常、非常に容易に証明される事が多い）からの帰結として容易に得る事ができた。 以下に、その写像について解説する。 Carlitz は、[2] に於て q-Bernoulli 数を

$$\beta_0(q)=1, \quad q\left(q\beta(q)+1\right)^n-\beta_n(q)=\begin{cases} 1 & \text{for } n=1 \\ 0 & \text{for } n>1 \end{cases}$$

によって漸化的に定義した。 但し、$\beta^m(q)$ は $\beta_m(q)$ を意味する。 しかしながら、この様な定義をここで定義された q-Bernoulli 数と調和を保ちながら他の数列に対して拡張するのは不可能（見通しが悪い）と思われる。 従って、他の方法による q-Bernoulli 数の定義が必要となる。 そこで、次の様な q-差分方程式の一意解として q-Bernoulli 数の母関数を捉える方法 [6] をとる。 $G_q(t)$ を q-Bernoulli 数の母関数とする。 即ち、

$$G_q(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(q)\frac{t^n}{n!}$$

とすれば $G_q(t)$ は、次の q-差分方程式の一意解として定まる。

$$G_q(t) = qe^t G_q(qt) - t - q + 1$$

ここで、もし $|q| < 1$ ならば、上の q-差分方程式の解は

$$G_q(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{[q]t}(q^n t + q - 1)$$

によって与えられる。　但し、$[x] = [x; q]$ は複素数 x に対して $\frac{q^x-1}{q-1}$ を意味する。　さて、古典的な場合（即ち $q = 1$ ）の Bernoulli 数の母関数は、形式的に

$$G_1(t) = \frac{t}{e^t - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} t$$

と表わされる。　従って、

$$-\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{[n]t} t$$

を $G_1(t)$ の q-analogue として捉えようとする事は、視覚的に容易に想像がつく。　実際、次の作用素 φ_q:

$$\varphi_q = 1_{id} + (q-1)\frac{d}{dt}$$

を用いれば $G_q(t)$ は以下の様に表わされる：

$$G_q(t) = \varphi_q \left(-\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{[n]t} t \right)$$

我々は

$$G_1(t) \longmapsto G_q(t)$$

を一般のべき級数にまで拡張しその像を q-analogue と定義する。　更に、主論文 Lemma 8 によって φ_q が保存する事のできるべき級数間の積が、唯一つ存在する事がわかる。　その積が、先に出てきた $*$ である。　又、その写像が和及び積を保存する事も直ちに示され（主論文 Theorem 2 ）古典的な世界が、q の世界へと完全に移行されたことになる。　この様な方法で q-analogue を捉える事によって、前半の議論は、古典的な公式に我々の写像を施すという操作のみによって得る事ができる。

参考文献

[1] T. M. Apostol: *Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series*, Duke Math. J. (1950)

[2] L. Carlitz: *q-Brnoulli numbers and polynomials*, Duke Math. J. (1948)

[3] L. Carlitz: *Some theorems on generalized Dedekind sums*, Pacific J. Math. (1953)

[4] L. Carlitz: *The reciprocity theorem for Dedekind sums*, Pacific J. Math. (1953)

[5] L. Carlitz: *q-Bernoulli and Eulerian numbers*, Trans. Amer.Soc. (1954)

[6] J. Satoh: *q-Analogue of Riemann's ζ-function and q-Euler numbers*, J. Number Theory (1989)