

図・本館

線形システムの構造可制御性
に関する研究

早川 義一

名古屋大学図書	
和	869774

目 次

	ページ
第1章 序論	
1.1 本研究の目的	1
1.2 本研究の意義	10
1.3 本論文の概要	14
第2章 状態方程式とグラフ	
2.1 まえがき	17
2.2 Coates グラフ	18
2.3 拘束構造化システム	28
2.4 拘束構造化システムの 特性方程式と Coates グラフ	35
2.5 ちすび	54
第3章 拘束構造可制御条件	
3.1 まえがき	56
3.2 拘束構造可制御性の定義	57
3.3 非零モードの可制御条件	60
3.4 零モードの可制御条件	75
3.5 拘束構造可制御条件と 従来 of 構造可制御条件	80
3.6 ちすび	86

第4章	線形コンパートメント システムの構造可制御性	
4.1	まえがき	88
4.2	状態方程式とコンパートメントグラフ	90
4.3	構造可制御条件	96
4.4	むすび	113
第5章	回路網システムの構造可制御性	
5.1	まえがき	115
5.2	状態方程式と回路網グラフ	116
5.3	狭義の規準木が存在する 回路網システムの構造可制御性	129
5.4	狭義の規準木が存在しない 回路網システムの可制御性・可到達性	144
5.5	むすび	160
第6章	結言	162
謝辞		165
参考文献		166

第1章 序論

1.1 本研究の目的

1960年以降の“状態”の概念を用いた現代制御理論の根幹を成すものの一つに可制御性・可観測性の概念がある。図1.1に示すように、制御対象が希望の動作をするように、制御対象の出力 $y(t)$ を観測し、それに基づいて適当な制御 $u(t)$ を制御対象の入力として与える補償器 C を設計することを考えよう。

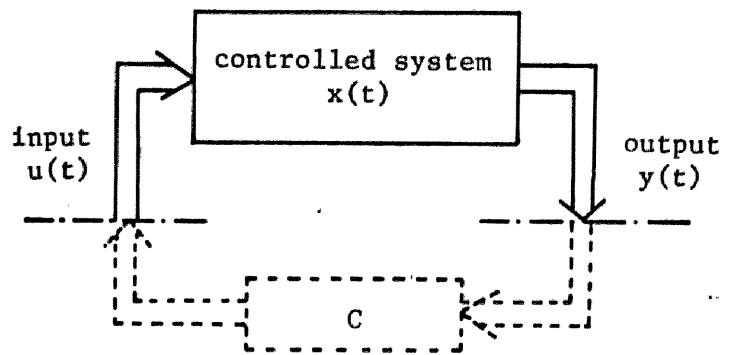


Fig. 1.1 Controlled system

このとき、

- (1) 適当な時間 t に $y(t)$ を観測し、同時刻間の $u(t)$ が既知の下で、制御対象の状態 $x(t)$ を知り得るか(可観測性)。
- (2) 制御対象の状態 $x(t)$ を知り得ても、果たして、適当な時間 $u(t)$ を入力して希望の状態に制御し得るか(可制御性)。

という問題は極めて自然に起こってこよう。R.E. Kalmanによって導入された⁽¹⁾この可制御性・可観測性という概念は、上述の二つの問題にとどまることなく、制御理論の多くの基本的な問題を明らかにしてきた。このことは

特に、線形制御理論に多くの例とみることが出来る。たとえば、伝達関数表現と状態方程式表現との関係（正準構造定理）⁽²⁾、最適レギュレータ問題の完全な解決⁽¹⁾、D.G. Luenberger による状態観測器^{(3)~(5)}、W.M. Wonham による極指定の方法⁽⁶⁾などを挙げる事が出来る。これらの例からわかるように、制御系の解析・設計において、制御系が可制御、可観測であるかどうかを判定することは必要不可欠な事である。

線形時不変系の可制御性を調べるには、可制御行列と呼ばれる行列のランクを計算すればよいことはよく知られている⁽⁷⁾。しかし、現実の問題では、制御系のパラメータの値が正確にわかっていることはまれにしかない。また、数値計算上の誤差も考えると、このランクの計算はそれほど容易ではない⁽⁸⁾。たとえば

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} u(t) \quad (1.1)$$

で記述される線形時不変系は、その可制御行列 $\begin{pmatrix} d & ae \\ e & bd+ce \end{pmatrix}$ の行列式 $bd^2+cde-ae^2$ が零でないならば、可制御である。しかし、仮に a, b, \dots, e がある測定結果から定まった値で、その有効桁数から行列式が零ではないけれども非常に小さな値をとった場合、この系が可制御（あるいは非可制御）であると断定するには相当問題があろう。

このようなとき、もっとパラメータの値の推定精度を上げ、さらに正確な計算を行なうことも一つの採るべき態度である。しかし一方、同時に行なわなければならないことは、考察している系の可制御性が系の構造に起因しているかどうか検討することである。

この後者の考え方にたって、構造可制御性という概念が C.T. Lin⁽⁹⁾によって提案された。Lin はまず線形時不変系の構造を次のようにとらえた。

- (1) 状態方程式の係数行列の各要素は零に固定された要素（これは零固定要素と呼ばれる）とそうでない要素（これは変動要素と呼ばれる）に類別される。
- (2) 変動要素はそれぞれの間特別な関係がない独立なパラメータとみなされる。

このように系の構造をとらえたとき、系の可制御性は当然独立なパラメータの値のとり方によって変化する。そこで、Lin は、もし独立なパラメータの値がほとんどどのように変化しても系が可制御となるとき、その系を構造可制御な系と呼んだ。たとえば、(1.1) 式の第一行が速度と位置の関係、すなわち $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ を表わすものとすれば、行列 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ の (1,1) 要素は零固定要素である。さらに、 a, b, \dots, e を独立なパラメータとみなすことによって、(1.1) 式で記述された系の構造をとらえたとしよう。このとき、この系が可制御でないのは $bd^2 + cde - ae^2 = 0$ が成り立つときであるが、独立なパラメ

ータの値を勝手に選んだとき、このような特別な関係式が満たされることはほとんどあり得ない。従って、この系は構造可制御である。Lin は構造可制御性の概念を提案したのに加え、一入力系が構造可制御であるための判定法をグラフ理論的に導出した⁽⁹⁾。この結果は、R. W. Shields と J. B. Pearson によって、代数学的に、多入力系に拡張され⁽¹⁰⁾、その後多くの研究者によって、Lin の系の構造のとらえ方の枠組みの中で、構造可制御性が調べられてきた^{(11)~(14)}。

しかし、同時に、Lin の系の構造のとらえ方に対する反省もある。前述したように、Lin は系の構造をその状態方程式に対する条件 (1), (2) によってとらえた。この条件の物理的意味を考えてみると、条件 (1) は、上例 (1.1) 式のように、また一般的には系内の結合関係の有無を反映するものとして、比較的受け入れやすい。一方、条件 (2) のように系の構造を特徴づけることは必ずしも現実を反映するものではない。力学系や電気回路網などを記述する状態方程式では係数行列の変動要素間に従属関係があるのが普通である。すなわち、変動要素は質量、ばね定数、電気容量などといった真に独立なパラメータとみなすことのできるものの関数になっているのが普通である。従って、ある系が構造可制御でないと判定された場合は、もはやその系の真に独立なパラメータがどのような値をとろうとも、可制御となり得ないわけ

であるが、逆に、構造可制御であると判定されても、実際には変動要素間に従属関係が存在するため、真に独立なパラメータの値をどのようにしても、可制御となり得ない可能性が残される。たとえば、図 1.2 のような電気回路網を考えよう。ここで、 C_1, C_2, C_3 は電気容量を、 r_1, r_2 は電気抵抗を、また j は独立電流源の電流を表わす。このとき、状態変数として各コンデンサの電圧 v_i ($i=1, 2, 3$) をとり、状態方程式を記述すると、

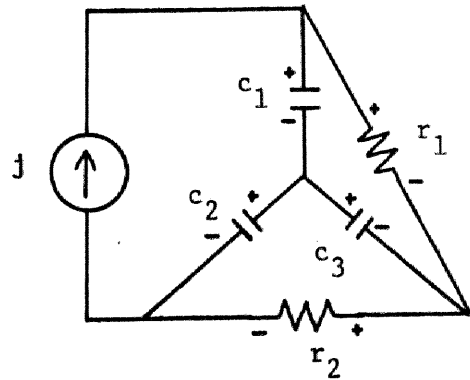


Fig. 1.2 Electrical network

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 r_1} & 0 & -\frac{1}{C_1 r_1} \\ 0 & -\frac{1}{C_2 r_2} & \frac{1}{C_2 r_2} \\ -\frac{1}{C_3 r_1} & \frac{1}{C_3 r_2} & -\frac{r_1+r_2}{C_3 r_1 r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \end{bmatrix} j(t) \quad (1.2)$$

を得る。さて、(1.2) 式を Lin の系の構造のとらえ方に従って、その係数行列の変動要素間の従属関係を無視し

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & e \\ 0 & c & f \\ b & d & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ i \\ 0 \end{bmatrix} j(t) \quad (1.3)$$

ととらえたとき (a, b, \dots, i は独立なパラメータ)、その可制御行列の行列式は恒等的に零とならず、図 1.2 の電気回路網は構造可制御であると判定される。しかし、(1.2) 式から得られる可制御行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1^2 R_1} & \frac{C_2 C_3 R_2 - C_1^2 R_1 + C_1 C_2 R_2}{C_1^3 C_2 C_3 R_1^2 R_2} \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2^2 R_2} & \frac{C_1 C_3 R_1 + C_1 C_2 R_1 - C_2^2 R_2}{C_1 C_2^3 C_3 R_1 R_2^2} \\ 0 & \frac{C_1 R_1 - C_2 R_2}{C_1 C_2 C_3 R_1 R_2} & \frac{C_2^2 C_3 R_2^2 - C_1^2 C_3 R_1^2 - C_1 C_2 (R_1 + R_2)(C_1 R_1 - C_2 R_2)}{C_1^2 C_2^2 C_3^2 R_1^2 R_2^2} \end{pmatrix}$$

となり、その行列式は恒等的に零であることが確かめられる。すなわち、図 1.2 の電気回路網は、 C_1, C_2, C_3, R_1, R_2 がどのような値をとろうとも、非可制御なのである。従って、構造可制御性の概念をより現実的なものとするためには、Lin による系の構造のとらえ方を、系の物理的な構造的特徴をより反映するように、改善することが要求される⁽¹⁵⁾。このような考え方にたって提案されたものの例として強構造可制御性⁽¹⁶⁾ や定性的構造可制御性⁽¹⁷⁾ の概念などが挙げられる。強構造可制御性とは、変動要素は決して零という値をとらないという考え方にたち、そのとき常に可制御性が成り立つ性質のことである。また定性的構造可制御性とは、個々の変動要素の符号(正または負)は予め知られているという考え方にたち、その符号制約の下に常に可制御性が成り立つ性質のことである。しかし、これらの概念も、変動要素は互いに独立な

パラメータであるとみなす点では、Linの系の構造のとらえ方と同じであり、図1.2のような電気回路網を取り扱うことはできない。

本研究の目的は、Linによる系の構造のとらえ方、特に条件つきのとらえ方の上述のような反省の上にたち、変動要素間の従属関係をも考慮した構造可制御性とその判定条件を確立することにある。考察される変動要素間の従属関係は、コンパートメントシステムや電気回路網など広範な系が持つ従属関係である。

コンパートメントシステムは、T. Teorell⁽¹⁸⁾が薬剤の生体内動態解析 (pharmacokinetics) のモデルとして使用して以来、医学・生物学^{(19), (20)}をはじめ、社会生態学^{(21), (22)}や化学工学^{(23), (24)}など広い分野で用いられているシステム解析用モデルである。その特徴は、対象とする系がいくつかのコンパートメントと呼ばれる機能相から成っていると、コンパートメント相互間や系外との物質の授受が流れの連続性 (あるいはそれと等価な保存則) を満たしつつなされているとする点にある⁽²⁰⁾。たとえば、図1.3

のような4個の大気圧に開放されたタンクから成る系を考えよう。

図中、 A_i, h_i はタンク i の断面積、水位を表わし ($i=1, 2, 3, 4$)、 $g_1, g_2,$

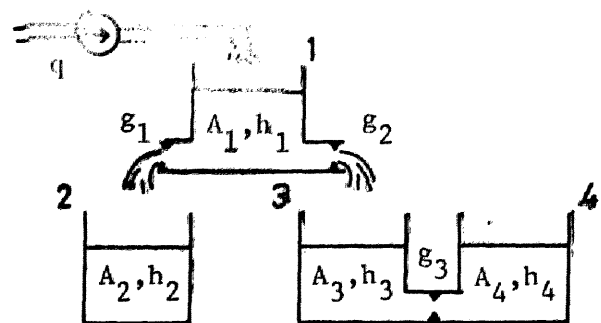


Fig. 1.3 Tank system

g_3 は管路の抵抗の逆数を表わす。タンク i への正味の流入量を q_i とすれば ($i=1, 2, 3, 4$)、水量の保存則に従って、

$$A_i \frac{dh_i}{dt} = q_i \quad ; \quad i=1, 2, 3, 4$$

$$q_1 = q - (g_1 + g_2) h_1$$

$$q_2 = g_1 h_1$$

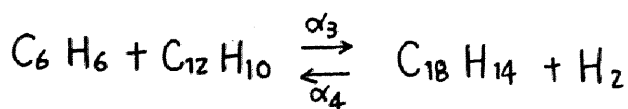
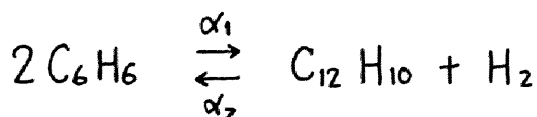
$$q_3 = g_2 h_1 - g_3 (h_3 - h_4)$$

$$q_4 = g_3 (h_3 - h_4)$$

を得る。そこで、状態変数を $x_i = A_i h_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) と選び状態方程式を求めれば、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{g_1 + g_2}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g_1}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g_2}{A_1} & 0 & -\frac{g_3}{A_3} & \frac{g_3}{A_4} \\ 0 & 0 & \frac{g_3}{A_3} & -\frac{g_3}{A_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q(t) \quad (1.4)$$

となる。また、ベンゼンの熱分解反応速度解析に ^{14}C をトレーサとして用いる例を考えよう。ベンゼンの熱分解反応は次のような反応式で記述される。



ここで $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ は反応の速度係数である。ベンゼン (C_6H_6)、デイツェール ($\text{C}_{12}\text{H}_{10}$)、トリフェニール ($\text{C}_{18}\text{H}_{14}$)、

水素 (H_2) がある平衡状態にあるとき、そこに微量の ^{14}C を付加したベンゼンを注入した直後のトレーサ方程式は、質量保存の法則の下に、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2\alpha_1 m_1 + \alpha_3 m_2) & \alpha_2 m_4 & \frac{1}{3} \alpha_4 m_4 & 0 \\ 2\alpha_1 m_1 & -(\alpha_2 m_4 + \alpha_3 m_1) & \frac{2}{3} \alpha_4 m_4 & 0 \\ \alpha_3 m_2 & \alpha_3 m_1 & -\alpha_4 m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t) \quad (1.5)$$

と得られる⁽²⁵⁾。ここで、 x_1, x_2, x_3, x_4 及び m_1, m_2, m_3, m_4 はベンゼン、デオフィニール、トリフェニール、水素の単位時間当たりの放射線量及び平衡状態におけるモル数であり、 $\delta(t)$ はインパルス関数である。(1.4), (1.5) 式の右辺第一項の係数行列は各列和が零であるという特徴を持つ。この性質は、流れの連続性(あるいはそれと等価な保存則)の下で状態方程式が導かれることに起因するものであり、コンパートメントシステムの持つ大きな特徴の一つである。

また、電気回路網では、(1.2) 式からわかるように、係数行列の同一行に位置する変動要素の間に線形従属の関係がある。

そこで、本研究ではコンパートメントシステムや電気回路網など広範な系が持つ状態方程式の構造を次のようにとらえた。

- (1) 状態方程式の係数行列の各要素は零固定要素と変動要素に類別される。(Linによる条件(1)と同じ)
- (2) 係数行列の同一列(あるいは行)に位置する変動要素間には線形従属の関係が存在してもよい。ただし、異なる列(あるいは行)に位置する変動要素の間には何らの従属関係も存在しない。

そして、この一般的な条件(1°), (2°)で特徴づけられる系の構造可制御性をグラフ理論的に考察し、それを基礎に、コンパートメントシステムや電気回路網の構造可制御性をコンパートメントグラフや回路網グラフを眺めるだけで判定できる諸条件を確立する。

1.2 本研究の意義

前節では、可制御行列のランク計算の数値計算上の問題点という観点から構造可制御性の意義を明らかにし、さらに変動要素間の従属関係を考慮する意義と本研究の目的を述べた。しかし、このような構造可制御性を考察する意義は、決して、可制御性の判定だけにとどまるものでない。このことは、可制御性の概念が現代制御理論

の一根幹を成していることから、容易に推測することができる。

例えば、図 1.4 で示された漸近安定な直結フィードバック系の定常特性を表現するシステムタイプ⁽²⁵⁾につ

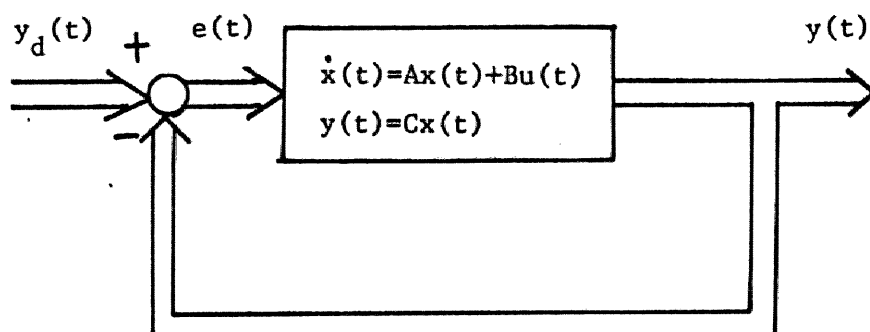


Fig. 1.4 Unity feedback system

いて考えてみよう。図 1.4 において、

$$C = (1, 1, 1), \quad A = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & -0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

であったとしよう。このとき、開ループ伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{s^2 + 0.7s + 0.3}{s^2(s + 0.7)} \quad (1.7)$$

となり、安定なフィードバック系は 2 型であることがわかる。つまり、目標値 $y_d(t)$ がランプ入力までは、出力 $y(t)$ が定常偏差なしで $y_d(t)$ に追従できる。しかし、このときは、(1.6) 式の数値がほんのわずかでも変化すれば、もはや正しくない。

ところが、もし開ループ系の構造に着目し、それが、

$$C = (1, 1, 1), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

なる行列で表現できたとしよう。ここで、行列 A の a_{ij} は変動要素を、「0」は零固定要素を表わす。このとき、開ループ伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{s^2 + (a_{21} - a_{22})s + a_{21}a_{32}}{s \{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{32} - a_{12}a_{21}\}} \quad (1.9)$$

となり、変動要素 a_{ij} がほとんどのどのような値をとろうとも、フィードバック系は 1 型であることがわかる。

さらに、本論文で考察されるような変動要素間の従属関係にまで着目すれば、例えば、(1.8) 式の変動要素 a_{ij} は真に独立なパラメータ α, β, γ を用いて、

$$a_{11} = -a_{21} = \alpha, \quad a_{22} = -a_{12} = \beta, \quad a_{32} = \gamma \quad (1.10)$$

であるならば、開ループ伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{s^2 - (\alpha + \beta)s - \alpha\gamma}{s^2 \{s - (\alpha + \beta)\}} \quad (1.11)$$

となり、フィードバック系は 2 型であると結論づけることができる。このような系の構造に着目した構造システムタイプの問題は、文献(26)で示されているように、可制御空間の generic な次元を求める問題に帰着され、本質

的に構造可制御性の問題である。また、構造可制御性の研究と基礎に、構造システムタイプとは別に、制御対象のパラメータ変動に強いサーボ補償器やレギュレータ補償器の設計など頑健な(robust)制御系の研究が始められている^{(27)~(29)}。これらの研究は、現在のところLimの系の構造のとらえ方の枠組の中で行なわれているが、今後(変動要素間に従属関係が存在するものが普通である)実システムに対する研究でよりシャープな結果が得られることが期待される。そこでは、電気回路網システムなどの構造可制御性をまず明らかにしておく必要がある。

また、系の物理的な構造とその入出力関係(例えば、伝達関数など)から、系内のパラメータを推定できるかどうかを問題とする構造可同定性も構造可制御性と関連する興味ある問題である。例えば、コンパートメントシステムは、前節でも述べたように、トレーサ解析用モデルとして広範な分野で用いられている(表1.1参照)が、

表1.1 コンパートメントシステムの応用分野⁽³⁰⁾

応用分野	コンパートメント	トレーサ
ラジオアイソトープ検査	生体 ; 化学物質	ラジオアイソトープ
色素排泄能検査	生体	色素
生体内動態解析	生体	薬剤
疫学	地域 ; 疫病状態	罹患者
社会生態学	地域 ; 生物種	動植物
経済学	地域 ; 産業種別	財

トシ - サ解析の目的の一つは、系内の物理パラメータを同定することであり、これは (1.4), (1.5) 式などにおける係数行列内の独立なパラメータを推定することに対応し、構造可同定の問題である。このとき、もし考察している系が構造可制御でなければ、その非構造可制御サブシステムに含まれる独立なパラメータは決して同定することは不可能である。ここにも、コンパートメントシステムなどの構造可制御性の判定条件を明確にしておく意義がある。

1.3 本論文の概要

本論文の概要は次のとおりである。

第2章では、まず最初に、線形時不変系の状態方程式とそのグラフ表現である Coates グラフとの関係を述べる。この Coates グラフは、Lim によって構造可制御性のグラフ理論的考察に用いられたものであるが、本研究でも極めて重要である。さらに、この章では、本研究で考察される線形時不変系状態方程式の構造を厳密に定義する。これは、第1.1節でも述べたように、状態方程式の係数行列の変動要素において、同一列(あるいは行)に位置する変動要素間に限って線形従属の関係が許されているものであり、拘束構造化システムと呼んでいる。これら

の準備のもとに、拘束構造化システムの特性方程式のある既約性と系のグラフ表現である Coates グラフの強連結性との関係を明らかにする。この結果は、それ自身極めて興味深い事実であるが、後の章でも重要となる。

第3章では、拘束構造化システムの拘束構造可制御条件を、系のモード（特性方程式の根）に関して、非零モードが可制御になる条件と零モードが可制御になる条件を個別に調べることにより、確立する。特に、非零モードの可制御条件は、第2章の結果を利用して、系のグラフ表現である Coates グラフで完全に特徴づけることができる。これは Lim の構造のとらえ方の枠組における文献(13)の1つの拡張と言える。一方、零モードの可制御条件は、変動要素間の従属関係を反映していると考えられる数値行列集合のランク条件で特徴づけることができることにとどまる。しかし、これらの結果から、拘束構造可制御性の特殊な場合とみることにできる Lim による構造可制御性のよく知られた条件を極めて容易に得ることができる。

第4章では、第3章の結果を用い、線形コンパートメントシステムの構造可制御性とコンパートメントグラフの構造との関係を明白にする。従来、線形コンパートメントシステムの構造可制御性に関しては、特殊な構造（ただ1つのシンク）を有する場合だけ、その必要十分条件が知られていたにすぎない。この章で得る結果は一般

的な構造(複数のシンク)を有する場合にも適用できるものである。

第5章では、電気回路網システムの構造可制御性について述べる。つまり、構造可制御性と回路網グラフの構造との関係である。従って、この章の結果は、電気回路網システムにとどまることなく、機械系、流体系(音響系、液体系)、熱伝導系、拡散系など、電気系とのアナロジーを有する広範な線形システムに適用することができる。この章では、まず最初に、状態方程式と回路網グラフの構造との関係を述べる。そして、回路網グラフに狭義の規準木が存在する場合には、構造可制御性と回路網グラフの構造との関係を確立する。このために、第3章で行なった議論とほぼ同様な議論を行なう。これは、電気回路網システムから得られる線形時不変系の状態方程式がそのままでは拘束構造化システムとみることができず、第3章の結果をそのまま用いることができないからである。一方、回路網グラフに狭義の規準木が存在しない場合には、線形時不変系の状態方程式の範囲内で考察することができず、従って、中間標準形方程式の中間変数に関する可制御性・可到達性と回路網グラフの構造との関係を考察することになる。

以上が本論文の概要である。

第2章 状態方程式とグラフ

2.1 まえがき

Lin は構造可制御性のグラフ理論的考察において、線形代数方程式の解法に用いられた Coates グラフ⁽³¹⁾を使って、線形時不変系の状態方程式を表現した。本研究においても、この線形時不変系の状態方程式のグラフ表現としての Coates グラフは極めて重要である。従って、この章では、最初に、線形時不変系の状態方程式とその Coates グラフとの関係を述べる。次に、本研究で考察される線形時不変系の状態方程式の“構造”を厳密に定義する。

これは前章でも述べたように、状態方程式の係数行列の変動要素において、同一列（あるいは行）に位置する変動要素間に限って線形従属の関係が許されるものである。従って、“変動要素”と“独立パラメータ”とは区別する必要がある。これらの準備のもとに、この章の主眼である線形時不変系の特性方程式のある既約性とその系のグラフ表現である Coates グラフの強連結性との関係を導出する。この結果は、それ自身、極めて興味深いものであるが、さらに後の章で、特に第3章で、本質的な役割を果たす。

2.2 Coates グラフ

n 次の正方行列 $L = (l_{ij})$ に対して、 n 個の節点を持ち、 $l_{ij} \neq 0$ のとき、節点 j を始点とし、節点 i を終点とする重みが l_{ij} である有向枝を持ち、 $l_{ij} = 0$ のとき、節点 j を始点とし、節点 i を終点とするいかなる有向枝も持たない重み付き有向グラフを対応づけ、そのグラフを行列 L の Coates グラフといい、 $G(L)$ で表わす⁽³¹⁾。

$G(L)$ の部分グラフ H が $G(L)$ のすべての節点を含むとき、 H は $G(L)$ を張る部分グラフという⁽³²⁾。特に、 $G(L)$ を張る部分グラフ H がいくつかの互いに共通節点を持たないサイクル⁽³²⁾ から成っているとき、 H は $G(L)$ 上の 1-因子と呼ばれる⁽³³⁾。

[例 2.1]

正方行列 L が

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & 0 \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

であるとき、その Coates グラフ $G(L)$ は図 2.1 のとおりである。また $G(L)$ 上の 1-因子をすべて示すと図 2.2 のようになる。

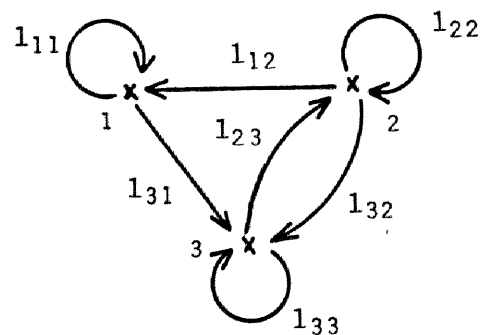
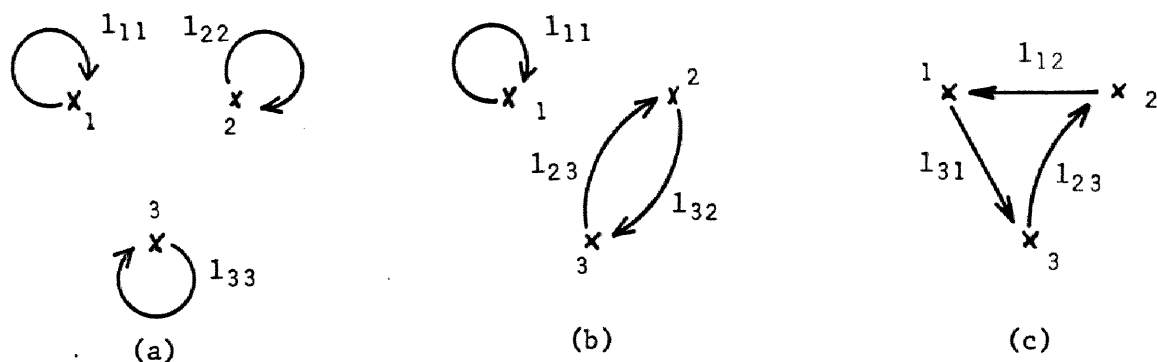


Fig. 2.1 Coates graph $G(L)$

Fig. 2.2 1-factors in $G(L)$

$G(L)$ 上の 1-因子全体の集合を \mathcal{F} と表わすことにする。
 \mathcal{F} の要素 H は、定義から、 $g(H)$ 個の互いに共通節点を持たないサイクル $H_1, H_2, \dots, H_{g(H)}$ から成る。

また、 $G(L)$ の任意の部分グラフ H に対して、 $f(H)$ を次式のように定義する。

$$f(H) = \{ H \text{ に含まれる有向枝の重みの積} \} \quad (2.2)$$

このとき、正方行列 L の行列式 $|L|$ はその Coates グラフ $G(L)$ 上の 1-因子によって次の補題のように与えられる。

[補題 2.1] ⁽³³⁾

n 次の正方行列 L の行列式 $|L|$ は

$$|L| = (-1)^n \sum_{H \in \mathcal{F}} (-1)^{g(H)} f(H) \quad (2.3.1)$$

$$= (-1)^n \sum_{H \in \mathcal{F}} (-1)^{g(H)} f(H_1) f(H_2) \cdots f(H_{g(H)}) \quad (2.3.2)$$

で与えられる。

[例 2.2]

(2.1) 式の行列 L の行列式は、補題 2.1 と図 2.2 を用いて、

$$|L| = l_{11} l_{22} l_{33} - l_{11} l_{23} l_{32} + l_{12} l_{23} l_{31} \quad (2.4)$$

と求めることができる。

線形時不変系の状態方程式は

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (2.5)$$

$$\text{ただし、 } x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m$$

と記述できる。この系 (A, B) に対して、次式で作られる $(n+m)$ 次の正方行列 L

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

の Coates グラフ $G(L)$ を、系 (A, B) のグラフと呼び、 $G(A, B)$ と表わす。従って、 $G(A, B)$ は $(n+m)$ 個の節点 $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m$ を持つ重み付き有向グラフである。ただし、 x_i は (2.6) 式の行列 L の第 i 列 (すなわち、行列 A の第 i 列) に対応する節点であり、 u_i は第 $(n+i)$ 列 (すなわち、行列 B の第 i 列) に対応する節点である。このとき、節点集合 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ の各節点は、 $G(A, B)$ において決して入枝⁽³²⁾を持たないこ

とから、origin と呼ばれ⁽⁹⁾、他の節点と区別される。

(2.5) 式の行列 A の Coates グラフ $G(A)$ は $G(A, B)$ の節点集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ に関するセクション部分グラフ⁽³²⁾ であることは明らかである。また、行列 A の第 i_1 列、第 i_2 列、 \dots 、第 i_t 列と第 i_1 行、第 i_2 行、 \dots 、第 i_t 行から成る主小行列 $A_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{i_1, i_2, \dots, i_t}$ の Coates グラフ $G(A_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{i_1, i_2, \dots, i_t})$ は $G(A, B)$ の節点集合 $X_t = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}\}$ に関するセクション部分グラフである。

[例 2.3]

(2.5) 式の行列 A, B が

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

であるとき、 $G(A, B)$ は 図 2.3 のようになる。また、 $G(A)$ 、 $G(A_{1,3}^{1,3})$ は 図 2.4 のとおりである。

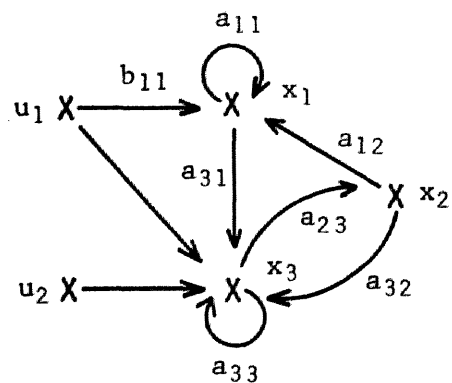
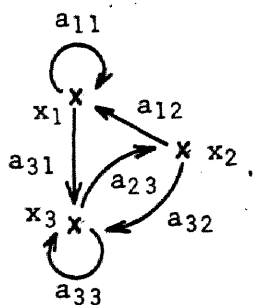
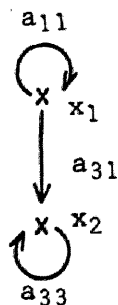


Fig. 2.3 Graph of system $(A, B): G(A, B)$



(a) $G(A)$



(b) $G(A_{1,3}^{1,3})$

Fig. 2.4 Subgraph of $G(A, B)$

(2.5) 式で記述される系 (A, B) の特性方程式 $|sI - A|$ を行列 A のグラフ $G(A)$ で評価することを考える。 $G(A)$ のある部分グラフの集合 Ω_i を次のように定義する。

$$\Omega_i = \left\{ H: G(A) \text{ の部分グラフ} \left\{ \begin{array}{l} H \text{ の節点集合の要素の数} = i \\ H \text{ はいくつかの互いに共通節点を持たないサイクルから成る} \end{array} \right. \right\} \quad (2.8)$$

このとき Ω_i の要素 H に含まれる $g(H)$ 個のサイクルを $H_1, H_2, \dots, H_{g(H)}$ と記すことにする。なお、 Ω_n は $G(A)$ の 1-因子全体の集合と一致することを注意しておく。

[補題 2.2]

(2.5) 式の行列 A に対して、その特性方程式を

$$|sI_n - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (2.9)$$

と置けば、各係数 a_i は

$$a_i = \sum_{H \in \Omega_i} (-1)^{g(H)} f(H) \quad (2.10.1)$$

$$= \sum_{H \in \Omega_i} (-1)^{g(H)} f(H_1) f(H_2) \dots f(H_{g(H)}) \quad (2.10.2)$$

で与えられる。

(証明)

特性方程式 $|sI_n - A|$ を (2.9) 式のように展開したときの係数 a_i は、よく知られているように、次式で与えら

れる⁽³⁴⁾。

$$a_i = (-1)^i \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} |A_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_i \\ j_1, j_2, \dots, j_i}}| \quad (2.11)$$

ここで $A_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_i \\ j_1, j_2, \dots, j_i}}$ は行列 A の第 j_1 列, 第 j_2 列, \dots , 第 j_i 列と第 j_1 行, 第 j_2 行, \dots , 第 j_i 行から成る主小行列である。いま $G(A_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_i \\ j_1, j_2, \dots, j_i}})$ の 1-因子全体の集合を $\mathcal{F}_{j_1, \dots, j_i}$ で表わせば補題 2.1 より $|A_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_i \\ j_1, j_2, \dots, j_i}}|$ は

$$|A_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_i \\ j_1, j_2, \dots, j_i}}| = (-1)^i \sum_{H \in \mathcal{F}_{j_1, \dots, j_i}} (-1)^{\mathcal{P}(H)} f(H) \quad (2.12)$$

で与えられ, 従って,

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} \sum_{H \in \mathcal{F}_{j_1, \dots, j_i}} (-1)^{\mathcal{P}(H)} f(H) \\ &= \sum_{H \in \Omega'_i} (-1)^{\mathcal{P}(H)} f(H) \end{aligned} \quad (2.13)$$

を得る。ここで $\Omega'_i = \{ H \in \mathcal{F}_{j_1, \dots, j_i} \mid j_1 < j_2 < \dots < j_i \}$ である。 $\Omega'_i \subset \Omega_i$ であることは定義より明らかである。逆に、 Ω_i の任意の要素 H は、 i 個の節点を持ち、それらが $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_i}$ ならば、 $G(A_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_i \\ j_1, j_2, \dots, j_i}})$ の 1-因子、つまり、 $\mathcal{F}_{j_1, j_2, \dots, j_i}$ の要素であり、従って、 $\Omega_i \subset \Omega'_i$ が成り立つ。結局、 $\Omega' = \Omega$ であり、(2.13) 式と (2.10) 式とは等しい。
(証明終)

[例 2.4]

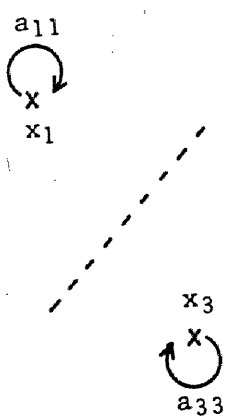
(2.7) 式の行列 A に対して、 $|sI - A|$ を

$$|sI - A| = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \quad (2.14)$$

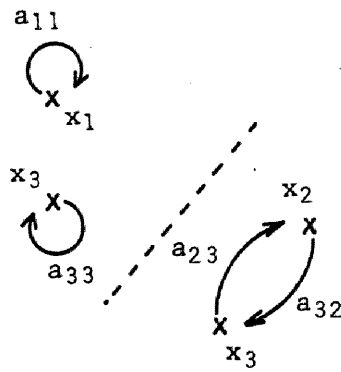
と置けば、各係数 a_i は図 2.5 に示された各 Ω_i と補題 2.2 を用いて、

$$a_1 = -a_{11} - a_{33}, \quad a_2 = a_{11} a_{33} - a_{23} a_{32}, \quad a_3 = a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{23} a_{31} \quad (2.15)$$

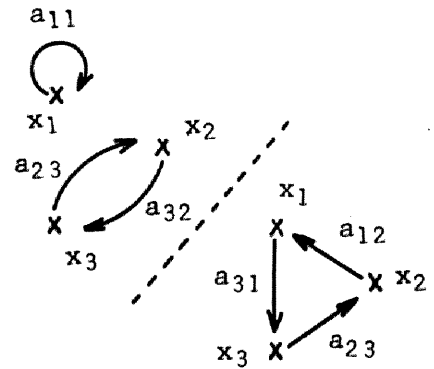
と求めることができる。



(a) Ω_1



(b) Ω_2



(c) Ω_3

Fig. 2.5 Ω_i s of $G(A)$

n 次の正方行列 A は、適当な置換行列 P を用いて、(1, 2) ブロックが零行列であるような分割

$$PAP^T = \begin{matrix} & \xleftrightarrow{t} & \xleftrightarrow{n-t} \\ \begin{matrix} \uparrow t \\ \downarrow n-t \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.16)$$

ただし、 $1 \leq t \leq n-1$

に変換することができるとき、可約であると呼ばれ、可約でない行列は既約であると呼ばれる⁽³⁵⁾。行列 A が可約である場合、適当な置換行列 \tilde{P} を用いて、

$$\tilde{P}A\tilde{P}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & A_{22} & \\ X & \dots & \\ & & A_{rr} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

に変換することができる。ただし、 A_{ii} は既約な m_i 次正方行列である。このことは、(2.16) 式の行列 A_{11} , A_{22} に (2.16) 式と同様の変換を繰り返すことにより容易に確かめることができる。

一方、行列 A の Coates グラフ $G(A)$ の節点集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ において、次のような 2 項関係 \leftrightarrow を考えれば、

$$x_i \leftrightarrow x_j : G(A) \text{ において、節点 } x_i \text{ から節点 } x_j \text{ への順枝列}^{(32)} \quad (2.18)$$

及び節点 x_j から節点 x_i への順枝列がともに存在する。

この 2 項関係は同値関係であり、従って節点集合 X はこの同値関係 \leftrightarrow によって、同値類 X_1, X_2, \dots, X_t に分割される。このとき、 $G(A)$ の各節点集合 X_i に関するセクション部分グラフは $G(A)$ の強連結成分と呼ばれる⁽³⁵⁾。また、 $G(A)$ は、その強連結成分の数が $t \geq 1$ であるとき、強連結であると呼ばれる⁽³⁵⁾。従って、 $G(A)$ が強連結であるということは、どのような 2 つの節点 x_i, x_j に対しても必ず x_i から x_j への順枝列及び x_j から x_i への順枝列がともに存在することを意味する。なお、 $G(A)$ の各強連結成分自身が強連結であることは明らかである。

このとき、行列 A の既約性とその Coates グラフ $G(A)$

の強連結性との間には、次の補題で示されるよく知られた関係が存在する。

[補題 2.3] ⁽³⁵⁾

(1) 行列 A が既約であることと Coates グラフ $G(A)$ が強連結であることは等価である。

(2) 行列 A は可約、従って $G(A)$ は $t (\geq 2)$ 個の強連結成分を持つとする。このとき、行列 A を (2.17) 式のように変換すれば、

(2-1) (2.17) 式の対角ブロック数 r は t に等しい。

(2-2) (2.17) 式の行列 A_{ii} の Coates グラフ $G(A_{ii})$ は $G(A)$ の強連結成分である。

が成り立つ。

[例 2.5]

行列 A が次式で与えられたとき、補題 2.3 の (2) が成り立つことを確かめる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & a_{36} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

実際、(2.17) 式のように行列 A を変換すれば、(2.20) 式を得る。ただし、そのときの置換行列 \tilde{P} は (2.21) 式で与えられる。

$$\tilde{P} A \tilde{P}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{14} & a_{11} & a_{15} & 0 & 0 \\ a_{52} & 0 & a_{51} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{34} & 0 & 0 & a_{33} & a_{36} \\ a_{62} & 0 & a_{61} & 0 & a_{63} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

一方、Coates グラフ $G(A)$ 及びその強連結成分は図 2.6 のとおりである。

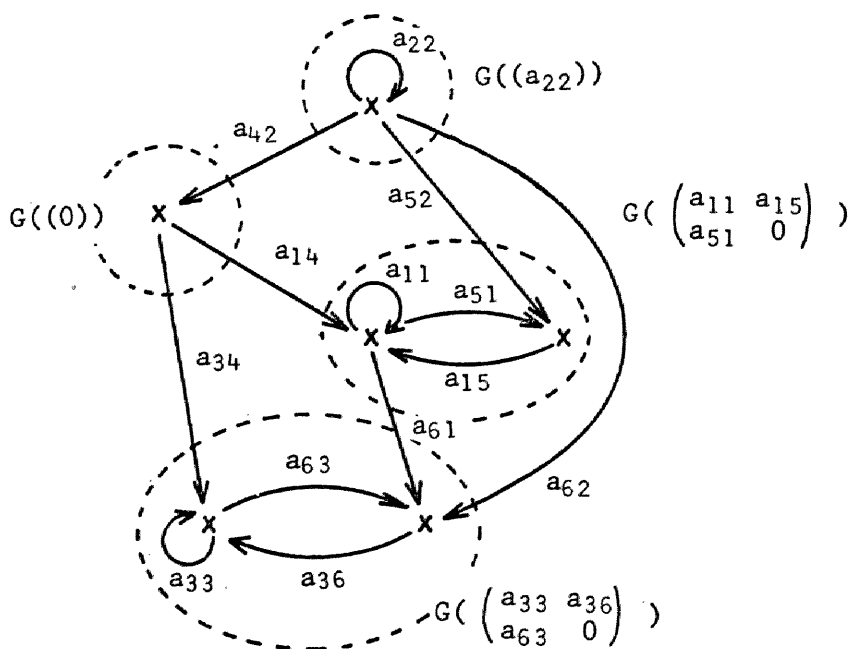


Fig. 2.6 Strongly connected components in $G(A)$

2.3 拘束構造化システム

Lin による線形時不変系の構造のとらえ方は、前章で述べたとおりであるが、それを構造化行列、構造化システムという言葉で再度述べておこう。

[定義 2.1]⁽¹⁰⁾

$k \times l$ 行列 M は、

- (1) 各要素が零固定要素と変動要素に類別される。
 - (2) 変動要素は互いに独立なパラメータである。
- とみなすとき、構造化行列と呼ばれる。

[定義 2.2]⁽¹⁰⁾

(2.5) 式で記述される線形時不変系 (A, B) は、 $n \times (n+m)$ 行列 $[A \ B]$ を構造化行列とみたとき、構造化システムと呼ばれる。

$k \times l$ 構造化行列 M の第 i 列には $n(i)$ 個の変動要素があって、それらは第 $j(i)_1$ 行, 第 $j(i)_2$ 行, \dots , 第 $j(i)_{n(i)}$ 行に位置するものとしよう。このとき、整数の集合 I_d を

$$\begin{aligned} I_d &= \{1, 2, \dots, l\} - \{i \in \{1, 2, \dots, l\} \mid n(i) = 0\} \\ &= \{i_1, i_2, \dots, i_d\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

と定義すれば、 M の第 i 列 m_i は次式で記述することができる。

$$M_i = \begin{cases} M_i & , i \notin I_d \\ M_i p^{(i)} & , i \in I_d \end{cases} \quad (2.23.1)$$

$$(2.23.2)$$

ただし、

$$M_i = \begin{cases} k \times l \text{ 零行列} & , i \notin I_d \\ [e_{j(i)1} e_{j(i)2} \cdots e_{j(i)n(i)}] & , i \in I_d \end{cases} \quad (2.24.1)$$

$$(2.24.2)$$

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } j \text{ 要素}}}{1}, 0, \dots, 0)^T : k \text{ 次元ベクトル} \quad (2.25)$$

$$p^{(i)} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in(i)})^T \quad (2.26)$$

であり、(2.26) 式の p_{ij} は独立パラメータ (= 変動要素) である。従って、 $k \times l$ 構造化行列 M は、 l 個の数値行列の集合 $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_l\}$ と整数の集合 I_d 及び独立パラメータベクトル $p = (p^{(i1)T}, p^{(i2)T}, \dots, p^{(i_d)T})^T$ によって、完全に特徴づけられる。なお、任意の $i \in I_d$ に対して、

(a) M_i は列フルランクである。

$$(b) \quad n(i) = \text{rank } M_i = \dim p^{(i)} \quad (2.27)$$

であることを注意しておく。ここで、(a) は独立パラメータベクトル p に冗長の無いことを、また (b) は定義 2.1 の条件 (2) を意味していると解釈できる。

さて、本研究では、前章で述べたように、線形時不変系の係数行列 A, B の変動要素間に同一列（あるいは行）に限って線形従属の関係が存在する場合を考察するため、次のような拘束構造化行列を定義する。

[定義 2.3]

$k \times l$ 行列 M は、その第 i 列 m_i が l 個の数値行列の集合 $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_l\}$ と整数の集合 $I_d = \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ 及び独立パラメータベクトル $\varphi = (\varphi^{(i_1)T}, \varphi^{(i_2)T}, \dots, \varphi^{(i_d)T})^T$ を用いて (2.23) 式のように特徴づけられるとき、列拘束構造化行列と呼ぶ。ただし、 \mathcal{M} の要素 M_i は

$$M_i = \begin{cases} k \times 1 \text{ 零行列} & , i \notin I_d & (2.28.1) \\ \text{列フルランク行列} & , i \in I_d & (2.28.2) \end{cases}$$

であり、(2.24.2) 式のような行列とは限らない。

$k \times l$ 行列 M は、 M^T が列拘束構造化行列であるとき行拘束構造化行列と呼ぶ。

$k \times l$ 行列 M は、列拘束構造化行列か行拘束構造化行列であるとき、拘束構造化行列と呼ぶ。

定義 2.1 の構造化行列が拘束構造化行列の特殊な場合であることは明らかである。拘束構造化行列の各要素は第 i 列（行）に位置する要素は独立パラメータベクトル $\varphi^{(i)}$ の要素の線形結合であるから、恒等的に零である要素を零固定要素、他の要素を変動要素ととらえれば、列（行）拘束構造化行列における変動要素間の従属関係は

同一列（行）に限られた線形従属関係である。ただし、列（行）拘束構造化行列での第 i 列（行）に位置する変動要素の数 $n(i)$ は、任意の $i \in I_d$ に対して、

$$n(i) \geq \dim p^{(i)} = \text{rank } M_i \quad (2.29)$$

であることを注意しておく。これは、(2.28.2) 式で M_i が列フルランク行列であるとしが定められておらず、従って、 $M_i p^{(i)}$ の要素で恒等的に零でないものの数は $\text{rank } M_i$ 以上となるからである。すなわち、拘束構造化行列の独立パラメータの数 $\dim p = \sum_{i \in I_d} \dim p^{(i)}$ は変動要素の総和以下である。以下では、拘束構造化行列 M の独立パラメータの数 $\dim p \in N(M)$ 、第 i 列（行） M_i における独立パラメータの数 $\dim p^{(i)} \in N_i(M)$ で表わすことにする。

[例 2.6]

(1) 行列 M が

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha & \gamma & 0 \\ 2\alpha + \beta & 0 & \delta + \theta \\ -\beta & 2\gamma & \delta + \theta \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

ただし、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$: 互いに独立なパラメータ

であるとき、 M は列拘束構造化行列とみなすことができる。実際、定義 2.3 の $M_i, p^{(i)}$ として

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.31.1)$$

$$p^{(1)} = (\alpha, \beta)^T, \quad p^{(2)} = (\gamma), \quad p^{(3)} = (\delta + \theta) \quad (2.31.2)$$

と定めればよい。

(2) 行列 M が

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & 0 & 0 & m_{24} \\ m_{31} & 0 & m_{33} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$\text{ただし, } m_{11} + m_{21} + m_{31} = 0, \quad m_{14} + m_{24} = 0$$

で与えられたとき、 M は列拘束構造化行列とみなすことができる。実際、定義 2.3 の M_i , $p^{(i)}$ として、

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.33.1)$$

$$p^{(1)} = (m_{21}, m_{31})^T, \quad p^{(2)} = (m_{13}, m_{33})^T, \quad p^{(4)} = (m_{14}) \quad (2.33.2)$$

と定めればよい。

拘束構造化行列を用いて、拘束構造化システムを次のように定義する。

[定義 2.4]

(2.5) 式で記述される線形時不変系 (A, B) は、 $n \times (n+m)$ 行列 $[A \ B]$ を列 (あるいは行) 拘束構造化行列とみなすことができるとき、列 (あるいは行) 拘束構造化システムと呼ぶ。

また、系 (A, B) は、列拘束構造化システムが行拘束構造化システムであるとき、拘束構造化システムと呼ぶことにする。

列拘束構造化システム (A, B) に対して、行列 $[AB]$ の列拘束性から定義 2.3 で定められる数値行列の集合 \mathcal{L} と整数の集合 I_c 及び独立パラメータベクトル p を、それぞれ \mathcal{L}_c, I_c, p で表わすこととし、

$$\mathcal{L}_c = \{ A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m \} \quad (2.34)$$

$$I_c = \{ i_1, i_2, \dots, i_f, n+1, n+2, \dots, n+m \} \quad (2.35)$$

$$\in \mathbb{E} \text{ し. } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_f \leq n$$

$$p = (p^{(i_1)T}, p^{(i_2)T}, \dots, p^{(i_f)T}, p^{(n+1)T}, p^{(n+2)T}, \dots, p^{(n+m)T})^T \quad (2.36)$$

$$\in \mathbb{E} \text{ し. } p^{(i)} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iN_i([AB])})^T$$

とする。(2.35) 式において、 $n+1$ から $n+m$ までのすべての整数が I_c に含まれているのは、行列 B のどの列も零固定要素だけから成る列ベクトルでないことを意味している。これは、もし行列 B のある列が零固定要素だけから成る列ベクトルであったならば、その列を除いて考えればよいからである。同様に、行拘束構造化システム (A, B) に対して、行列 $[AB]$ の行拘束性から定められる数値行列の集合 \mathcal{L} と整数の集合 I_r 及び独立パラメータ p をそれぞれ \mathcal{L}_r, I_r, p で表わすこととし、

$$\mathcal{I}_R = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \} \quad (2.37)$$

$$I_R = \{ i_1, i_2, \dots, i_f \} \quad (2.38)$$

$$I \in I, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_f \leq n$$

$$P = (p^{(i_1)T}, p^{(i_2)T}, \dots, p^{(i_f)T}) \quad (2.39)$$

とする。

従って、列拘束構造化システム (A, B) については、

$$A \text{ の第 } i \text{ 列} = \begin{cases} A_i : n \times 1 \text{ 零行列} & , i \notin I_c \\ A_i p^{(i)} & , i \in I_c \end{cases} \quad (2.40.1)$$

$$(2.40.2)$$

$$B \text{ の第 } i \text{ 列} = B_i p^{(n+i)} \quad (2.41)$$

であり、また、行拘束構造化システム (A, B) については、

$$[AB] \text{ の第 } i \text{ 行} = \begin{cases} C_i^T : 1 \times (n+m) \text{ 零行列} & , i \notin I_R \\ p^{(i)T} C_i^T & , i \in I_R \end{cases} \quad (2.42.1)$$

$$(2.42.2)$$

である。

定義 2.2 の構造化システムが拘束構造化システムの特
殊な場合であることは定義より明らかである。

また、前章、(1.2) 式で記述された系は、 $\frac{1}{2}C_{1R_1}$, $\frac{1}{2}C_1$,
 $\frac{1}{2}C_{2R_2}$, $\frac{1}{2}C_2$, $\frac{1}{2}C_{3R_1}$, $\frac{1}{2}C_{3R_2}$ を独立なパラメータとみなせば、
行拘束構造化システムであり、(1.5) 式で記述された
系は、 $\alpha_1 m_1$, $\alpha_3 m_2$, $\alpha_2 m_4$, $\alpha_3 m_1$, $\alpha_4 m_4$, η を独立なパラメー
タとみなせば、列拘束構造化システムである。

2.4 拘束構造化システムの

特性方程式と Coates グラフ⁽³⁶⁾

拘束構造化システム (A, B) の特性方程式 $|sI - A|$ を考える。行列 A の変動要素を a_{ij} と表わせば、(2.40.2) 式または (2.42.2) 式によつて、

系 (A, B) : 列拘束

$$a_{ij} = a_{ij}(p) = \sum_{k=1}^{N_j((AB))} a_{ik}^{(j)} p_{jk} \quad (2.43)$$

$$\in \mathcal{E} \text{ し. } \mathcal{S}_C \ni A_j = (a_{ik}^{(j)})$$

$$p^{(j)} = (p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{j N_j((AB))})^T$$

系 (A, B) : 行拘束

$$a_{ij} = a_{ij}(p) = \sum_{k=1}^{N_i((AB))} c_{jk}^{(i)} p_{ik} \quad (2.44)$$

$$\in \mathcal{E} \text{ し. } \mathcal{S}_R \ni C_i = (c_{jk}^{(i)})$$

$$p^{(i)} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{i N_i((AB))})^T$$

のように、 a_{ij} は独立パラメータ p の要素の線形結合で表わされていることになる。

最初に、特性方程式 $|sI - A|$ を行列 A の変動要素で評価する。これは、第 2.2 節、補題 2.2 を用いて、行列 A の Coates グラフ $G(A)$ から、次のように得られる。

$$|sI - A| = s^n + a_1(a_{ij})s^{n-1} + \dots + a_{n-1}(a_{ij})s + a_n(a_{ij}) \quad (2.45)$$

ただし、

$$a_i(a_{ij}) = \sum_{H \in \Omega_i} (-1)^{g(H)} f(H) \quad (2.46.1)$$

$$= \sum_{H \in \Omega_i} (-1)^{g(H)} f(H_1) f(H_2) \dots f(H_{g(H)}) \quad (2.46.2)$$

ここで、 Ω_i は (2.8) 式で定義された $G(A)$ の部分グラフの集合である。 $G(A)$ の有向枝の重みは行列 A の変動要素に対応しており、(2.46) 式の右辺は変動要素 a_{ij} の多項式となることから、 s^{n-1} の係数 a_i を $a_i(a_{ij})$ と表わした。

従って、特性方程式 $|sI - A|$ の独立パラメータでの評価は、(2.43) 式または (2.44) 式の $a_{ij}(p)$ を (2.46) 式の $a_i(a_{ij})$ に代入することにより、

$$|sI - A| = s^n + a_1(p)s^{n-1} + \dots + a_{n-1}(p)s + a_n(p) \quad (2.47)$$

ただし

$$a_i(p) = a_i(a_{ij}) \mid a_{ij} = a_{ij}(p)$$

と得られる。ここで $a_i(p)$ は p の要素の多項式である。 s と p の要素とを変数とする実数係数多変数多項式のすべての集合を $R[s, p]$ で表わせば、結局、 $|sI - A| \in R[s, p]$ である。ただし、(2.45) 式で恒等的に零でない $a_i(a_{ij})$ でも、変動要素間の従属関係のために、(2.47) 式においては恒等的に零、つまり $a_i(p) \equiv 0$ 、となり得ること

を注意しておく。

[例 2.7]

列拘束構造化システム (A, B) の行列 A が

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$p^{(1)} = (p_{11}), \quad p^{(2)} = (p_{21}), \quad p^{(3)} = (p_{31}) \quad (2.49)$$

で特徴づけられているとする。このとき、行列 A の変動要素を a_{ij} で表わせば、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

となり、(2.43) 式に対応する式は

$$\begin{cases} a_{11} = p_{11}, & a_{31} = -p_{11}, & a_{12} = p_{21}, & a_{32} = -p_{21} \\ a_{23} = p_{31}, & a_{33} = 2p_{31} \end{cases} \quad (2.51)$$

となる。このとき、(2.45) 式の $a_i(a_{ij})$ は

$$\begin{cases} a_1(a_{ij}) = -a_{11} - a_{33}, & a_2(a_{ij}) = a_{11}a_{33} - a_{23}a_{32} \\ a_3(a_{ij}) = a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} \end{cases} \quad (2.52)$$

となり (第 2.2 節, 例 2.4 参照)、(2.47) 式の $a_i(p)$ は

$$\begin{cases} a_1(p) = -p_{11} - 2p_{31}, & a_2(p) = 2p_{11}p_{31} + p_{21}p_{31} \\ a_3(p) = -p_{11}p_{31}p_{21} + p_{21}p_{31}p_{11} \equiv 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

と得られる。

ここで若干の言葉を準備しておこう。

任意の $g(s, p) \in R[s, p]$ は、 s に関して次数が 1 以上の適当な $g_1(s, p), g_2(s, p) \in R[s, p]$ の積、 $g(s, p) = g_1(s, p)g_2(s, p)$ 、で書けるとき、 s -可約であると呼び、 $g_1(s, p), g_2(s, p) \in s$ -因子と呼ぶことにする。そして、 s -可約でない $g(s, p) \in R[s, p]$ は s -既約であると呼ぶことにする。

次に、任意の $g(s, p) \in R[s, p]$ に対して、行列 A の Coates グラフ $G(A)$ の部分グラフを次のように対応づける。独立パラメータベクトル p は

$$p = \begin{cases} (p^{(i_1)T}, p^{(i_2)T}, \dots, p^{(i_f)T}, p^{(n+1)T}, \dots, p^{(n+m)T})^T & : \text{列拘束} & (2.54) \\ (p^{(i_1)T}, p^{(i_2)T}, \dots, p^{(i_f)T})^T & : \text{行拘束} & (2.55) \end{cases}$$

$$\text{ただし、 } p^{(i)} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iN_i([AB])})^T$$

であり、その要素 p_{ij} は、系 (A, B) が列拘束の場合は行列 $[AB]$ の第 i 列の変動要素だけに、系 (A, B) が行拘束の場合は行列 $[AB]$ の第 i 行の変動要素だけに現れるものであった。そこで、 $g(s, p) \in R[s, p]$ に対して $G(A)$ の節点集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ の部分集合 V_g を次のように定義する。

$$V_g = \{ x_i \in X \mid \exists i, \deg_{p_{ij}} g(s, p) \geq 1 \} \quad (2.56)$$

ここで、 $\deg_{p_{ij}} g(s, p)$ は、 $g(s, p)$ を変数 p_{ij} の多項式とみたときの次数を意味する。この V_g を用いて、 $G(A)$ の節点集合 V_g に関するセクション部分グラフを $G(g(s, p))$ と表

れし、 $g(s, p)$ のグラフと呼ぶことにする。

[例 2.8]

(1) $\mathcal{S}_C = \{A_1, A_2, A_3, B_1\}$, $p = (p^{(1)T}, p^{(2)T}, p^{(3)T}, p^{(4)T})^T$ で特徴づけられる列拘束構造化システム (A, B) を考える。

ただし、

$$\begin{cases} A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p^{(1)} = (p_{11}), & p^{(2)} = (p_{21}, p_{22})^T, & p^{(3)} = (p_{31}), & p^{(4)} = (p_{41}, p_{42})^T \end{cases} \quad (2.57)$$

とする。このとき、行列 A, B の変動要素を a_{ij}, b_{ij} で表わせば、

$$[A \ B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & b_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_{31} \end{array} \right) \quad (2.58)$$

ただし、

$$\begin{cases} a_{31} = p_{11}, & a_{12} = p_{21}, & a_{22} = -p_{21} - p_{22}, & a_{32} = p_{22} \\ a_{13} = p_{31}, & a_{33} = -p_{31}, & b_{21} = p_{41}, & b_{31} = p_{42} \end{cases} \quad (2.59)$$

となる。そして、 $G(A, B)$ 及び $G(A)$ は図 2.7 のとおりである。 $R[s, p] = R[s, p_{11}, p_{21}, p_{22}, p_{31}, p_{41}, p_{42}] \Rightarrow g(s, p) = s^2 + (p_{11} p_{42} + p_{21} p_{41}) s + (p_{21} p_{11} p_{41} + p_{22} p_{42})$ に対し、 $V_g = \{x_1, x_2\}$ であり、 $G(g(s, p))$ は図 2.7 (c) のとおりになる。

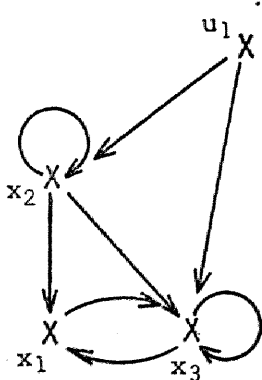
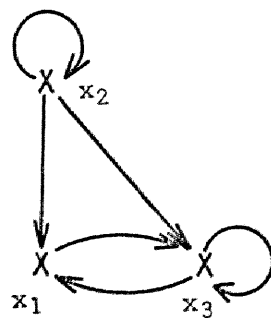
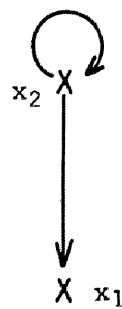
(2) $\mathcal{S}_R = \{C_1, C_2, C_3\}$, $p = (p^{(1)T}, p^{(2)T}, p^{(3)T})^T$ で特徴づけられる行拘束構造化システム (A, B) を考える。ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ P^{(1)} = (P_{11}), \quad P^{(2)} = (P_{21}, P_{22})^T, \quad P^{(3)} = (P_{31}, P_{32}, P_{33})^T \end{array} \right. \quad (2.60)$$

とする。このとき、行列 A, B の変動要素を a_{ij}, b_{ij} で表せば、行列 $[A \ B]$ は (2.58) 式と等しい。ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12} = P_{11}, \quad a_{13} = P_{11}, \quad a_{22} = P_{21}, \quad b_{21} = P_{22} \\ a_{31} = P_{31}, \quad a_{32} = P_{32}, \quad a_{33} = -P_{31} - P_{32}, \quad b_{31} = P_{33} \end{array} \right. \quad (2.61)$$

である。従って、 $G(A, B), G(A)$ は図 2.7 (a), (b) と同じであり、 $R[s, p] = R[s, P_{11}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}, P_{33}] \Rightarrow g(s, p) = P_{21}s^2 + P_{11}P_{22}$ に対して $G(g(s, p))$ は図 2.7 (c) と同じになる。

(a) $G(A, B)$ (b) $G(A)$ (c) $G(g(s, p))$ Fig. 2.7 Graph of $g(s, p) : G(g(s, p))$

さて、本論にもどろう。

拘束構造化システム (A, B) の特性方程式 $|sI - A|$ は (2.47) 式で求めることができた。その係数 $a_i(p)$ について、

$$\begin{cases} a_{n-\alpha}(p) \neq 0 \\ a_{n-\alpha+1}(p) = a_{n-\alpha+2}(p) = \cdots = a_n(p) \equiv 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

であったとする。このとき、

$$\begin{aligned} |sI - A| &= s^\alpha (s^{n-\alpha} + a_1(p)s^{n-\alpha-1} + \cdots + a_{n-\alpha-1}(p)s + a_{n-\alpha}(p)) \\ &= s^\alpha g(s, p) \end{aligned} \quad (2.63)$$

と書け、 $g(s, p) \in R[s, p]$ かつ $g(0, p) = a_{n-\alpha}(p) \neq 0$ である。

[定理 2.1]

拘束構造化システム (A, B) の行列 A の Coates グラフ $G(A)$ は自己ループ⁽³²⁾を持たない n の節点だけから成るグラフ (これを単節点グラフと呼ぶことにする) でないとする。そして、特性方程式 $|sI - A|$ は (2.63) 式で与えられているものとする。このとき、 $G(A)$ が強連結であるための必要十分条件は次の 2 つの条件を満たすことである。

- (1) (2.63) 式の $g(s, p)$ は s -既約である。
- (2) $G(g(s, p))$ は $G(A)$ を張る。

この定理を証明するために、2 つの補題が必要である。

最初の補題は、行列式の性質から容易に導出されるものである。

[補題 2.4]

(2.63) 式の $g(s, p)$ に関して、

$$\deg_z g(s, p) \Big|_{p_{i_1}=p_{i_2}=\dots=p_{i_{N_i}}(CAB)=z} \leq 1 \quad \text{for } \forall i \in \{i_1, i_2, \dots, i_f\} \quad (2.64)$$

が成り立つ。

(証明)

(2.64) 式を証明するためには、

$$\deg_z |sI - A| \Big|_{p_{i_1}=p_{i_2}=\dots=p_{i_{N_i}}(CAB)=z} \leq 1 \quad \text{for } \forall i \in \{i_1, i_2, \dots, i_f\} \quad (2.65)$$

を示せばよい。系 (A, B) が列拘束構造化システムの場合だけを示す。行拘束の場合も全く同様に示すことができる。

行列 A で、 $p_{i_1}=p_{i_2}=\dots=p_{i_{N_i}}(CAB)=z$ と置いたものを $\bar{A}^{(i)}$ と表わせば、 $\bar{A}^{(i)}$ の第 i 列以外に位置する要素は z に関して 0 次、第 i 列に位置する要素は z に関して高々 1 次の多項式である。従って、行列式の性質から、

$$\deg_z |\bar{A}^{(i)}| \leq 1 \quad \text{for } \forall i \in \{i_1, i_2, \dots, i_f\} \quad (2.66)$$

が成り立ち、(2.66) 式は (2.65) 式と同価である。

(証明終)

次の補題は、定理 2.1 の証明だけでなく、第 3 章でもよく用いられるものである。

[補題 2.5]

拘束構造化システム (A, B) の行列 A の Coates グラフ $G(A)$ は単節点グラフでないとする。そして、特性方程式 $|sI - A|$ は (2.63) 式で与えられているものとする。

このとき、 $G(A)$ が強連結であれば、(2.63) 式の $g(s, p)$ に関して、

$$\deg_s g(s, p) = m - \alpha \geq 1 \quad (2.67)$$

が成り立つ。

《注》 $g(s, p)$ の定義から、 $Q_{n-\alpha}(p) = 0$ を満たさないすべての独立パラメータの値に対して、 A の固有値のうち α 個は零であり、他の $(n - \alpha)$ 個は非零である。従って、

(2.67) 式は、ほとんどすべての独立パラメータの値に対して、少なくとも 1 つの非零固有値が存在することを意味している。

(補題 2.5 の証明)

補題を証明するためには、(2.47) 式において、ある l ($1 \leq l \leq n$) が存在して、 $Q_l(p) \neq 0$ であることを示せば十分である。

系 (A, B) が列拘束である場合を考える。

$G(A)$ は単節点グラフでなく、かつ、強連結であると仮定されているので、 $G(A)$ には少なくとも 1 つのサイクルがある。 $G(A)$ のすべてのサイクルの長さの最小をとしよう。明らかに、 $1 \leq l \leq n$ である。

一方、行列 A の変動要素を a_{ij} で表わせば、(2.45), (2.46) 式より、特性方程式 $|sI - A|$ の s^{m-i} の係数 $a_i(a_{ij})$ は、

$$a_i(a_{ij}) = \sum_{H \in \Omega_i} (-1)^{g(H)} f(H) \tag{2.68}$$

で与えられる。いま、 $G(A)$ のすべてのサイクルの長さの最小は l であるから、 $\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_{l-1} = \phi$ (:空集合) であり、 $\Omega_l (\neq \phi)$ の任意の要素 H に関して、 $g(H) = 1$ である。従って、 $a_1(a_{ij}) = a_2(a_{ij}) = \dots = a_{l-1}(a_{ij}) \equiv 0$, かつ、

$$a_l(a_{ij}) = - \sum_{H \in \Omega_l} f(H) \tag{2.69}$$

である。そこで Ω_l のある要素 H の節点集合 V_H を $V_H = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}\}$ であつたとしよう。すなわち、 H は図 2.8 に示すサイクルである。このとき定義から、

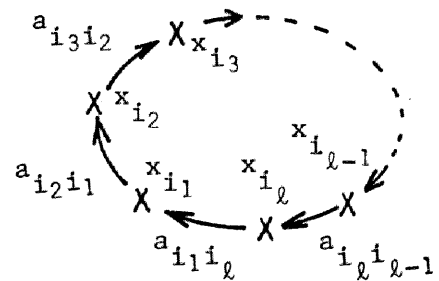


Fig. 2.8 Cycle

$$f(H) = a_{i_2 i_1} a_{i_3 i_2} \dots a_{i_l i_{l-1}} a_{i_1 i_l} \tag{2.70}$$

となり、(2.70) 式に (2.43) 式を代入すれば、

$$f(H) \Big|_{a_{ij} = a_{ij}(\phi)} = \left(\sum_{k_1=1}^{N_{i_1}(CAB)} a_{i_2 k_1}^{(i_1)} p_{i_1 k_1} \right) \left(\sum_{k_2=1}^{N_{i_2}(EAB)} a_{i_3 k_2}^{(i_2)} p_{i_2 k_2} \right) \dots \left(\sum_{k_l=1}^{N_{i_l}(CAB)} a_{i_1 k_l}^{(i_l)} p_{i_l k_l} \right)$$

$$\begin{aligned}
& (N_{i_1}(EAB), N_{i_2}(EAB), \dots, N_{i_l}(EAB)) \\
&= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_l) = (1, 1, \dots, 1)} a_{i_2 k_1}^{(i_1)} a_{i_3 k_2}^{(i_2)} \cdots a_{i_l k_l}^{(i_l)} p_{i_1 k_1} p_{i_2 k_2} \cdots p_{i_l k_l} \\
&= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_l)} \gamma_{k_1 k_2 \dots k_l} p_{i_1 k_1} p_{i_2 k_2} \cdots p_{i_l k_l} \quad (2.71)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\gamma_{k_1 k_2 \dots k_l} = a_{i_2 k_1}^{(i_1)} a_{i_3 k_2}^{(i_2)} \cdots a_{i_l k_l}^{(i_l)}$ と置いた。(2.43) 式の $a_{i_1}^{(j)}$, $a_{i_2}^{(j)}$, \dots , $a_{i_l}^{(j)}$ は実数であり、少なくとも一つは零でない (a_{ij} は変動要素) ので、(2.71) 式の $\gamma_{k_1 k_2 \dots k_l}$ も実数であり、少なくとも一つは零でない。また、 $\Omega_l \ni H_1, H_2$ に対して、 $H_1 \neq H_2$ ならば $V_{H_1} \neq V_{H_2}$ であり、(2.71) 式から $f(H_1)|_{a_{ij}=a_{ij}(\varphi)}$ と $f(H_2)|_{a_{ij}=a_{ij}(\varphi)}$ とは決して同じ項を持つことはない。従って、(2.47) 式において、

$$a_l(\varphi) = a_l(a_{ij})|_{a_{ij}=a_{ij}(\varphi)} = - \sum_{H \in \Omega_l} f(H)|_{a_{ij}=a_{ij}(\varphi)} \neq 0$$

を示すことができず。

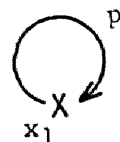
系 (A, B) が行拘束である場合も全く同様に示すことができる。 (証明終)

(定理 2.1 の証明)

系 (A, B) が列拘束構造化システムの場合だけを証明する。行拘束の場合も全く同様に証明することができる。

正方形行列 A の次数 n が 1 の場合を考える。G(A) は単節点グラフでないので、図 2.9 で示すグラフでしかあり得ない。すなわち、 $A = (a_{ii})$ である。従って、 $|S| - |A| =$

$s = p_{11}$ であり、定理の条件 (1), (2) は満たされる。一方 $G(A)$ が強連結であることは明らかである。従って、 $n=1$ の場合には定理は成り立っている。

Fig. 2.9 $G((P_{11}))$

以下では、 $n > 1$ と仮定する。

十分性: $G(A)$ が強連結でなければ、定理の条件 (1), (2) の少なくとも一方は満たされないことを示せばよい。

そこで、 $G(A)$ は強連結でないとする。このとき、補題 2.3 から、適当な置換行列 P が存在して、

$$PAP^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} \xrightarrow{k} & \xleftarrow{n-k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow k \\ \downarrow n-k \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.72)$$

と変換することができる。この変換で、行列 A の同一列に位置する変動要素は、行列 PAP^T においても同一列（ただし、必ずしも A で位置した列とは限らない）に位置することを注意しておく。また、 $|sI - A| = |sI - A_{11}| |sI - A_{22}|$ である。

(case 1): $|sI - A_{11}|$, $|sI - A_{22}|$ とともに $R[s, p]$ 上で s のべき乗でなければ、明らかに、定理の条件 (1) が満たされない。

(case 2): $|sI - A_{22}|$ が $R[s, p]$ 上で s のべき乗であれば、 $|sI - A| = s^{\alpha} g(s, p)$ に現われる独立パラメータは (2.72) 式の行列 A_{11} に含まれる独立パラメータに限られる。これは、

$V_g \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を意味し、従って、定理の条件 (2) が満たされない。 $|sI - A_{11}|$ が $R[s, p]$ 上で s のべき乗であるときも、同様にして、定理の条件 (2) が満たされないことを示すことができる。

必要性：定理の条件 (1), (2) の少なくとも一方が満たされなければ、 $G(A)$ は強連結でないことを示せばよい。

$\deg_s g(s, p) = 0$, すなわち、 $g(s, p) \equiv 1$ の場合は、補題 2.5 より、 $G(A)$ は強連結でない。従って、以下では、 $\deg_s g(s, p) \geq 1$ とする。

そこで、最初に、定理の条件 (1), (2) の少なくとも一方が満たされなければ、適当な置換行列 P が存在して、

$$PAP^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} \xleftrightarrow{k} & \xleftrightarrow{n-k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \updownarrow k \\ \updownarrow n-k \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.73)$$

と変換したとき、

$$|sI - A| = |sI - A_{11}| |sI - A_{22}| \quad (2.74)$$

が成り立つことを示す。

定理の条件 (1) が満たされないとしよう。このとき、 $g(s, p)$ は、 s -因子 $g_1(s, p), g_2(s, p) \in R[s, p]$ が存在して、

$$g(s, p) = g_1(s, p) g_2(s, p) \quad (2.75)$$

となる。定義より、 $g_1(0, p) \neq 0$, $g_2(0, p) \neq 0$ であり、従って、 $V_{g_1} \neq \emptyset$, $V_{g_2} \neq \emptyset$ である。また、補題 2.4 より、 $V_{g_1} \cap$

$V_{g_2} = \phi$ である。そこで、 $V_{g_1} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ と置けば、 $1 \leq k \leq m-1$ であり、 $G(A)$ の節点集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ における V_{g_1} の補集合を $V' = \{x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \dots, x_{i_n}\}$ と置く。さて、行列 A の列のうち、 V_{g_1} に含まれる節点に対応する列、すなわち、第 i_1 列、第 i_2 列、 \dots 、第 i_k 列を PAP^T の第 1 列から第 k 列に、 V' に含まれる節点に対応する列、すなわち、第 i_{k+1} 列、第 i_{k+2} 列、 \dots 、第 i_n 列を PAP^T の第 $(k+1)$ 列から第 n 列へ移す置換行列 P を考える。行列 PAP^T は (2.73) 式となっている。このとき、行列 PAP^T の第 j 列に位置する変動要素は独立パラメータのうち $p^{(ij)} = (p_{ij1}, p_{ij2}, \dots, p_{ijN_{ij}(LAB)})^T$ の要素だけの線形結合で与えられていることを注意しておく。そこで、 $\tilde{p}^{(1)} = (p^{(i_1)T}, p^{(i_2)T}, \dots, p^{(i_k)T})^T$ 、 $\tilde{p}^{(2)} = (p^{(i_{k+1})T}, p^{(i_{k+2})T}, \dots, p^{(i_n)T})^T$ と置く。ただし、 $p^{(ij)}$ が定義されていなければ (このとき、行列 A の第 ij 列、従って、行列 PAP^T の第 j 列は零固定ベクトルとなっている)、 $\tilde{p}^{(1)}$ 、 $\tilde{p}^{(2)}$ で $p^{(ij)}$ は除かれる。このとき、

$$\begin{cases}
 g_1(s, p) |_{\tilde{p}^{(1)}=0} = s^{\beta_1}, & \beta_1 = \deg_s g_1(s, p) \\
 g_1(s, p) |_{\tilde{p}^{(2)}=0} = g_1(s, p) \\
 g_2(s, p) |_{\tilde{p}^{(1)}=0} = g_2(s, p) \\
 g_2(s, p) |_{\tilde{p}^{(2)}=0} = s^{\beta_2}, & \beta_2 = \deg_s g_2(s, p)
 \end{cases} \quad (2.76)$$

が成り立つことは明らかである。従って、(2.63), (2.75) (2.76) 式より、

$$\left\{ \begin{array}{l} |sI-A| \Big|_{\tilde{p}=0} = s^\alpha g_1(s,p) g_2(s,p) \Big|_{\tilde{p}=0} = s^{\alpha+\beta_2} g_1(s,p) \quad (2.77.1) \\ |sI-A| \Big|_{\tilde{p}=0} = s^\alpha g_1(s,p) g_2(s,p) \Big|_{\tilde{p}=0} = s^{\alpha+\beta_1} g_2(s,p) \quad (2.77.2) \end{array} \right.$$

が成り立つ。 $\alpha + \beta_1 + \beta_2 = n$ であることを注意しておく。

一方、(2.73)式より、

$$\left\{ \begin{array}{l} |sI-A| \Big|_{\tilde{p}=0} = |sI-PAP^T| \Big|_{\tilde{p}=0} = \begin{vmatrix} sI-A_{11} & 0 \\ -A_{21} & sI \end{vmatrix} = s^{n-k} |sI-A_{11}| \quad (2.78.1) \\ |sI-A| \Big|_{\tilde{p}=0} = |sI-PAP^T| \Big|_{\tilde{p}=0} = \begin{vmatrix} sI & -A_{12} \\ 0 & sI-A_{22} \end{vmatrix} = s^k |sI-A_{22}| \quad (2.78.2) \end{array} \right.$$

が成り立つ。(2.77)式と(2.78)式とを比較することにより、

$$\left\{ \begin{array}{l} |sI-A_{11}| = s^{\alpha+\beta_2-n+k} g_1(s,p) \quad (2.79.1) \\ |sI-A_{22}| = s^{\alpha+\beta_1-k} g_2(s,p) \quad (2.79.2) \end{array} \right.$$

を得る。ここで、 $(\alpha + \beta_2 - n + k) + (\alpha + \beta_1 - k) = \alpha + (\alpha + \beta_1 + \beta_2) - n = \alpha$ に注意すれば、 $|sI-A_{11}| \cdot |sI-A_{22}| = s^\alpha g_1(s,p) g_2(s,p)$ となり、(2.74)式が成り立つことがわかる。

定理の条件(2)が満たされないときは、上述の議論の V_{g_1} を V_g で置き換えることにより、同様に、(2.73)、(2.74)式が成り立つことを示すことができる。

以上で、定理の条件(1),(2)の少なくとも一方が満たされ

なければ、適当な置換行列 P が存在して、(2.73) 式のように変換したとき、(2.74) 式が成り立つことを示すことができた。

次に、適当な置換行列 P が存在して、(2.73) 式のように変換したとき、(2.74) 式が成り立つならば、 $G(A)$ は強連結でないことを示す。

$$\text{Laplace の展開公式}^{(37)} \text{ を用いて、} |sI-A| = |sI-PAP^T| = \begin{vmatrix} sI-A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & sI-A_{22} \end{vmatrix}$$

を展開し、次のようになったとしよう。

$$|sI-A| = |sI-A_{11}| |sI-A_{22}| + \tilde{\alpha}_2(p) s^{n-2} + \tilde{\alpha}_3(p) s^{n-3} + \dots + \tilde{\alpha}_{n-1}(p) s + \tilde{\alpha}_n(p) \quad (2.80)$$

ここで、右辺第 2 項以降の $\tilde{\alpha}_i(p)$ は、

$$\tilde{\alpha}_i(p) = \sum_{H \in \tilde{\Omega}_i} (-1)^{g(H)} f(H) \quad \left| \begin{array}{l} a_{ij} = a_{ij}(p) \end{array} \right. \quad (2.81)$$

に注意し、

$$\tilde{\Omega}_i = \left\{ H \in \Omega_i \mid \begin{array}{l} H \text{ を構成するサイクル } H_1, H_2, \dots, H_{g(H)} \text{ のうち、少なくとも} \\ \text{1つは } G(A_{11}) \text{ と } G(A_{22}) \text{ にまたがる} \end{array} \right\} \quad (2.82)$$

で与えられる。従って、 $G(A)$ において、 $G(A_{11})$ と $G(A_{22})$ にまたがるサイクルが少なくとも 1 つ存在すれば、(2.80) 式において、少なくとも 1 つの $\tilde{\alpha}_i(p)$ は恒等的に零とならないことを示すことができる (補題 2.5 の証明で行なったと同様の議論を用いればよい)。一方、(2.74) 式は (2.80) 式のすべての $\tilde{\alpha}_i(p)$ が恒等的に零であることを意味

している。結局、 $G(A)$ には、 $G(A_{11})$ と $G(A_{22})$ にまたがるサイクルは1つも存在せず、 $G(A)$ は強連結でないことを示すことができた。 (証明終)

[例 2.9]

(1) 定理 2.1 を例 2.8 の拘束構造化システムで確かめてみる。例 2.8 の (1), (2) とともに、 $G(A)$ は図 2.7 で示されたものであったから強連結でない。一方、例 2.8 (1) の列拘束構造化システム (A, B) で具体的に特性方程式 $|sI - A|$ を計算すれば、

$$\begin{aligned} |sI - A| &= s^3 - (a_{22} + a_{33})s^2 + (a_{22}a_{33} - a_{13}a_{31})s + a_{22}a_{13}a_{31} \quad | a_{ij} = a_{ij}(p) \\ &= (s + p_{21} + p_{22})(s^2 + p_{31}s - p_{11}p_{31}) \end{aligned} \quad (2.83)$$

となり、定理 2.1 の条件 (1) を満たさない。同様に、例 2.8 (2) の行拘束構造化システム (A, B) で具体的に特性方程式を計算すれば、

$$|sI - A| = (s - p_{21})(s^2 + (p_{31} + p_{32})s - p_{11}p_{31}) \quad (2.84)$$

となり、やはり定理 2.1 の条件 (1) を満たさない。

(2) $\mathcal{S}_c = \{A_1, A_2, A_3, B_1\}$, $p = (p^{(1)T}, p^{(2)T}, p^{(3)T}, p^{(4)T})^T$ で特徴づけられる列拘束構造化システム (A, B) を考える。ただし、

$$\begin{cases} A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p^{(1)} = (p_{11}), & p^{(2)} = (p_{21}, p_{22})^T, & p^{(3)} = (p_{31}), & p^{(4)} = (p_{41}, p_{42})^T \end{cases} \quad (2.85)$$

とする。このとき、行列 A, B の変動要素を a_{ij}, b_{ij} で表せば、

$$[A \ B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_{31} \end{array} \right) \quad (2.86)$$

ただし、

$$\begin{cases} a_{31} = p_{11}, & a_{12} = p_{21}, & a_{32} = p_{22}, & a_{13} = p_{31} \\ a_{33} = -p_{31}, & b_{21} = p_{41}, & b_{31} = p_{42} \end{cases} \quad (2.87)$$

となる。従って、

$G(A)$ は図 2.10 (a)

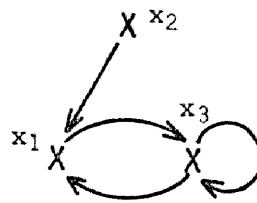
のとおりであり、

強連結でない。一

方、具体的に特性

方程式 $|sI - A|$ を

計算すれば、



(a) $G(A)$



(b) $G(g(s,p))$

Fig. 2.10 $G(A)$ and $G(g(s,p))$

$$|sI - A| = s(s^2 + p_{31}s - p_{11}p_{31}) \quad (2.88)$$

となり、 $g(s,p) = s^2 + p_{31}s - p_{11}p_{31}$ である。 $G(g(s,p))$ は図 2.10 (b) のとおりとなり、定理 2.1 の条件 (2) を満たしていないことがわかる。

(3) $\mathcal{S}_C = \{A_1, A_2, A_3, B_1\}$, $P = (p^{(1)T}, p^{(2)T}, p^{(3)T}, p^{(4)T})^T$ で特徴づけられる列拘束構造化システム (A, B) を考える。ただし、 $A_i, p^{(i)}$ は

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p^{(1)} = (p_{11}, p_{12})^T, \quad p^{(2)} = (p_{31}), \quad p^{(3)} = (p_{31}), \quad p^{(4)} = (p_{41}, p_{42})^T \end{array} \right. \quad (2.89)$$

とする。このとき、行列 A, B の変動要素を a_{ij}, b_{ij} で表わせば、

$$[A \ B] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & b_{21} \\ a_{31} & 0 & 0 & b_{31} \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = -p_{11} - p_{12}, \quad a_{21} = p_{11}, \quad a_{31} = p_{12}, \quad a_{12} = p_{21} \\ a_{13} = p_{31}, \quad b_{21} = p_{41}, \quad b_{31} = p_{42} \end{array} \right. \quad (2.91)$$

となる。従って、 $G(A)$ は、図 2.11 のとおりとなり、強連結である。一方具体的に特性方程式 $|sI - A|$ を計算すれば、次式のとおりとなる。

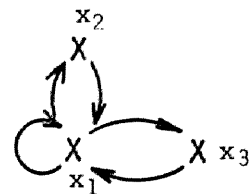


Fig. 2.11 $G(A)$

$$|sI - A| = s \{ s^2 + (p_{11} + p_{12})s - (p_{11} p_{21} + p_{12} p_{31}) \} \quad (2.92)$$

$g(s, p) = s^2 + (p_{11} + p_{12})s - (p_{11} p_{21} + p_{12} p_{31})$ なので、定理の条件 (1), (2) ともに満たされていることがわかる。

定理 2.1 から、拘束構造化システム (A, B) において、 $G(A)$ が単節点グラフでない強連結なグラフであれば、特性方程式 $|sI - A| \in R[s, p]$ は " s " と異なる s -既約因子を必ず $t+1$ だけ持つことがわかる。

$G(A)$ が強連結でない場合は、次の系のとおり述べることができる。

[系 2.1]

拘束構造化システム (A, B) の行列 A の Coates グラフ $G(A)$ は t 個の強連結成分を持つとする。ただし、 t 個の強連結成分のうち、 t_1 個は単節点グラフであるとする。このとき、特性方程式 $|sI - A| \in R[s, p]$ は " s " と異なる s -既約因子を必ず $(t - t_1)$ 個だけ持つ。

(証明)

補題 2.3 と定理 2.1 より明らかである。

(証明終)

2.5 屯すび

線形時不変系の状態方程式は、Coates グラフによってグラフ表現でき(これを系のグラフと呼んだ)、その特性方程式が系のグラフで評価できる(補題 2.2 参照)。本章では、最初に、拘束構造化システムと呼ぶ線形時不変系の状態方程式の構造を厳密に定義し(定義 2.4 参照)

本研究で考察される系を明らかにした。拘束構造化システムは、Linによって定義された構造化システムを特殊な場合として包含しており、一般に、係数行列の変動要素は独立パラメータの線形結合で表わされることになる。拘束構造化システムの特性方程式は、系のグラフによる特性方程式の評価に変動要素と独立パラメータの関係を代入することによって得ることができ、 s と独立パラメータとを変数とする実数係数多変数多項式である。そして、特性方程式の“ s ”と異なる s -既約因子の個数は、系のグラフの部分グラフ $G(A)$ の強連結成分の個数と密接な関係を有する(定理2.1, 系2.1参照)。

第3章 拘束構造可制御条件⁽³⁶⁾

3.1 まえがき

拘束構造化システム (A, B) は、前章で定義したように、状態方程式の係数行列 A, B が数値行列の集合 \mathcal{S} または \mathcal{S}_R と独立パラメータベクトル ρ で特徴づけられる線形時不変系である。行列 A, B の要素は零固定要素と変動要素（これは独立パラメータベクトル ρ の要素の線形結合である）である。従って、系 (A, B) の可制御性は、独立パラメータベクトル ρ が $N(LABJ)$ ($= \dim \rho$) 次元の実数空間 $R^{N(LABJ)}$ 内のどんな値をとるかに依存することになる。

本章では、最初に、拘束構造化システム (A, B) においては、独立パラメータベクトル ρ が $R^{N(LABJ)}$ のどんな値をとろうとも可制御にならないか、あるいは、独立パラメータベクトル ρ が $R^{N(LABJ)}$ のほとんどどのような値をとっても可制御になるかのどちらかであることを明らかにする。そして、この後者の性質を持つための条件が、系のグラフと数値行列の集合 \mathcal{S} または \mathcal{S}_R で、どのように特徴づけられるかを明らかにする。これは、系のモード（特性方程式の根）に関して、非零モードが可制御になるための条件と零モードが可制御になるための条件を個別に調べることによって、行なう。

3.2 拘束構造可制御性の定義

この節では、拘束構造化システム (A, B) の可制御性が独立パラメータベクトル ρ の $R^{N(LAB)}$ 内でとる値にどのように依存するかを調べ、拘束構造可制御性を定義する。

拘束構造化システム (A, B) の係数行列 A, B から、独立パラメータベクトル ρ を $R^{N(LAB)}$ 内の 1 点に固定して得られる数値行列を \bar{A}, \bar{B} で表わすことにする。 $\bar{A} \in R^{n \times n}$, $\bar{B} \in R^{n \times m}$ である。よく知られているように⁽⁷⁾、線形時不変系 (\bar{A}, \bar{B}) が可制御であるための必要十分条件は、次式で定義される可制御行列 \bar{C} がフルランクであることである。

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} \in R^{n \times (n+m)} \quad (3.1)$$

そこで、係数行列 A, B に関して、(3.1) 式と同様の行列 C を考える。

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in R^{n \times (n+m)} \quad [p] \quad (3.2)$$

係数行列 A, B の変動要素は独立パラメータベクトル ρ の要素の線形結合であるから、行列 C の要素は ρ の要素を変数とする多変数多項式である。従って、行列 C のすべての n 次小行列式も ρ の要素を変数とする多変数多項式である。そのうち、恒等的に零でないものを $\psi_1(\rho), \psi_2(\rho), \dots, \psi_k(\rho)$ とする。

$t=0$ 、すなわち、行列 \bar{c} のすべての m 次小行列式が恒等的に零である場合、独立パラメータベクトル p が $R^{N([AB])}$ 内のどのような値をとろうとも、可制御行列 \bar{c} はフルランクになり得ない。従って、可制御になり得ない。

$t \geq 1$ の場合、次式の V を考える。

$$V = \left\{ p \in R^{N([AB])} \mid \sum_{i=1}^t \varphi_i^2(p) = 0 \right\} \quad (3.3)$$

V は $R^{N([AB])}$ 内の proper variety である (図 3.1 参照)。このとき、独立パラメータベクトル p が $R^{N([AB])} - V$ 内のどのような値をとっても、可制御行列 \bar{c} の少なくとも一つの m 次小行列式は零でなく、行列 \bar{c} はフルランクである。つまり、独立パラメータベクトル p が $R^{N([AB])}$ 内のほとんどどのような値をとっても可制御となる。

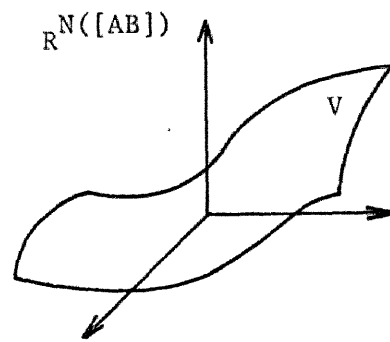


Fig. 3.1 Proper variety V in $R^{N([AB])}$

以上の考察から、次の定義は意味のあるものである。

[定義 3.1]

拘束構造化システム (A, B) が拘束構造化可制御であるとは、独立パラメータベクトル p が $R^{N([AB])}$ 内のほとんどどのような値をとっても、系 (\bar{A}, \bar{B}) が可制御となることである。すなわち、ある proper variety $V \subset R^{N([AB])}$ が存在

して、任意の $\varphi \in \mathbb{R}^{N([AB])} - V$ に対して、

$$\text{rank} [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{m-1}\bar{B}] = m \quad (3.4)$$

が成り立つことである。

さて、(3.4)式と次式とが等価であることはよく知られている⁽³⁸⁾。

$$\text{rank} [sI - \bar{A} \quad \bar{B}] = m \quad \text{for } \forall s \in \mathbb{C} \quad (3.5)$$

このことから、拘束構造化システム (A, B) が拘束構造可制御であることと次の2つの条件とが等価である。

(1) ある proper variety $V_1 \subset \mathbb{R}^{N([AB])}$ が存在して、任意の $\varphi \in \mathbb{R}^{N([AB])} - V_1$ に対して

$$\text{rank} [sI - \bar{A}, \bar{B}] = m \quad \text{for } \forall s (\neq 0) \in \mathbb{C} \quad (3.6)$$

が成り立つ。

(2) ある proper variety $V_2 \subset \mathbb{R}^{N([AB])}$ が存在して、任意の $\varphi \in \mathbb{R}^{N([AB])} - V_2$ に対して

$$\text{rank} [\bar{A} \quad \bar{B}] = m \quad (3.7)$$

が成り立つ。

(3.6)式は系 (\bar{A}, \bar{B}) の非零モードが可制御であることを意味しており、(3.7)式は系 (\bar{A}, \bar{B}) の零モードが可制御であることを意味している。そこで、条件(1)が成り立

つ場合を、拘束構造化システム (A, B) の非零モードは generic に可制御であるといい、条件(2)が成り立つ場合を、零モードは generic に可制御であるということにする。

3.3 非零モードの可制御条件

この節では、拘束構造化システム (A, B) の非零モードが generic に可制御であるための必要十分条件を明らかにする。

系のグラフ $G(A, B)$ の部分グラフ $G(A)$ の節点のうち自己ループを持たずそれ自身で $G(A)$ の強連結成分(単節点グラフ)となっている節点を零節点と呼ぶことにする。

[定理 3.1]

拘束構造化システム (A, B) の非零モードが generic に可制御であるための必要十分条件は、系のグラフ $G(A, B)$ において、零節点以外のすべての節点が少なくとも一つの origin とある順枝列で結ばれていることである。

この定理は、変動要素がすべて独立パラメータであるとする構造化システムに関する結果⁽¹³⁾の一種の拡張である。拘束構造化システムは変動要素間に従属関係を有し、一方、系のグラフ $G(A, B)$ はその変動要素間の従属関係

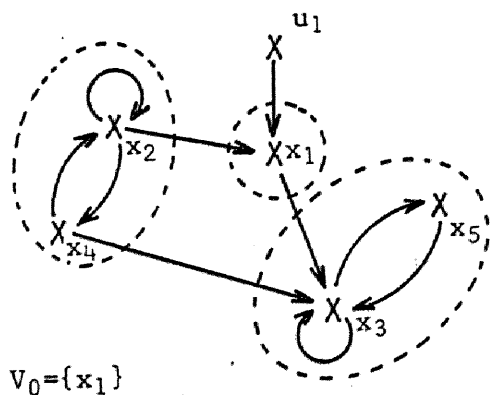
に関する情報を全く含まない。にもかかわらず、非零モードの generic な可制御性が $G(A, B)$ の性質だけで完全に特徴づけられるということは極めて興味深いことである。

[例 3.1]

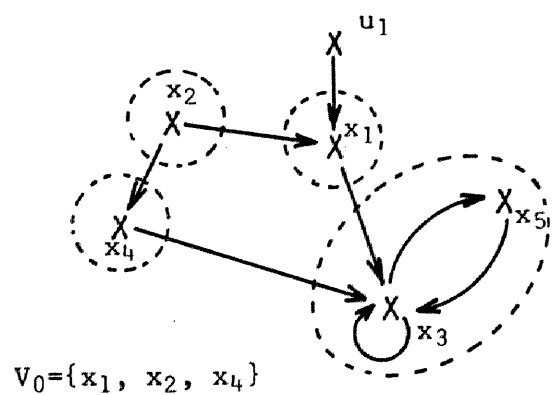
拘束構造化システム (A, B) を考える。ここで、系 (A, B) は列拘束であっても行拘束であってもよい。また、変動要素間にどのような拘束があってもよい。すなわち、 \mathcal{S}_C または \mathcal{S}_R の要素である数値行列が何であらうとがまわらない。ただし、行列 A, B の変動要素を a_{ij}, b_{ij} で表わしたとき、

$$[A \ B] = \left(\begin{array}{cccc|c} \circ & a_{12} & \circ & \circ & \circ & b_{11} \\ \circ & a_{22} & \circ & a_{24} & \circ & \circ \\ a_{31} & \circ & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \circ \\ \circ & a_{42} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & a_{53} & \circ & \circ & \circ \end{array} \right) \quad (3.8)$$

であったとする。このとき、系のグラフ $G(A, B)$ は図 3.



(a) $G(A, B)$ to eq. (3.8)



(b) $G(A, B)$ to eq. (3.9)

Fig. 3.2 Condition of Theorem 3.1

2 (a) となり、定理 3.1 から、非零モードは generic に可制御でない。

一方、(3.8) 式で a_{22}, a_{24} が零固定要素であるとき、すなわち、

$$[A \ B] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (3.9)$$

のとき、系のグラフ $G(A, B)$ は図 3.2 (b) となり、定理 3.1 から、非零モードは generic に可制御となる。

定理 3.1 を証明するために、前章の定理 2.1, 系 2.1 などを用いるが、さらに代数学のよく知られている事実から容易に導出することのできる次の補題が必要である。

[補題 3.1]

$g_1(s, p), g_2(s, p), \dots, g_t(s, p) \in R[s, p]$ とする。

$g_1(s, p), g_2(s, p), \dots, g_t(s, p)$ が共通 s -因子を持たないための必要十分条件は、ある proper variety $V \subset R^{N(LAB)}$ が存在して、任意の $p_0 \in R^{N(LAB)} - V$ に対して、 $g_1(s, p_0), g_2(s, p_0), \dots, g_t(s, p_0) (\in R[s])$ が共通根を持たないことである。

(証明)

十分性は対偶をとることによって自明であるので、必要性だけを示す。

一般性を失うことなく、 $g_i(s, p)$ を次式であるとして

よって

$$g_i(s, p) = g_{i0}(p) s^{m_{g_i}} + g_{i1}(p) s^{m_{g_i}-1} + \cdots + g_{i, m_{g_i}-1}(p) s + g_{i, m_{g_i}}(p) \quad (3.10)$$

$\therefore \exists z''$, $g_{ij}(p) \in R[p]$, $g_{i0}(p) \neq 0$, $m_{g_i} \geq 1$ z'' がある。

さして

$$\begin{cases} f(s, p) = f_0(p) s^{m_f} + f_1(p) s^{m_f-1} + \cdots + f_{m_f-1}(p) s + f_{m_f}(p) & (3.11.1) \\ h(s, p) = h_0(p) s^{m_h} + h_1(p) s^{m_h-1} + \cdots + h_{m_h-1}(p) s + h_{m_h}(p) & (3.11.2) \end{cases}$$

なる $f(s, p), h(s, p) \in R[s, p]$ に対し z , $B\{(f(p))_i, (h(p))_j\} \in R[p]$ と $B\{(f(p))_i, (h(p))_j, s\} \in R[s, p]$ を次式で定義しておく。

$$B\{(f(p))_i, (h(p))_j\} = \begin{vmatrix} f_0(p) & f_1(p) & \cdots & \cdots & \cdots & f_{i+j-1}(p) \\ 0 & f_0(p) & f_1(p) & \cdots & \cdots & f_{i+j-2}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_0(p) & f_1(p) & \cdots & f_j(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_0(p) & h_1(p) & \cdots & \cdots & h_i(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & h_0(p) & h_1(p) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{i+j-2}(p) \\ h_0(p) & h_1(p) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{i+j-1}(p) \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

$$B\{(f(p))_i, (h(p))_j, s\} = \begin{vmatrix} f_0(p) & f_1(p) & \cdots & \cdots & \cdots & f_{i+j-2}(p) & s^{i-1} f(s, p) \\ 0 & f_0(p) & f_1(p) & \cdots & \cdots & f_{i+j-3}(p) & s^{i-2} f(s, p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_0(p) & f_1(p) & \cdots & f_{j-1}(p) & f(s, p) \\ 0 & \cdots & 0 & h_0(p) & h_1(p) & \cdots & \cdots & h_{i-1}(p) & h(s, p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & h_0(p) & h_1(p) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{i+j-3}(p) & s^{j-2} h(s, p) \\ h_0(p) & h_1(p) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{i+j-2}(p) & s^{i-1} h(s, p) \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

ただし、(3.12), (3.13) 式において、

$$\begin{cases} f_k(p) \equiv 0 & \text{for } \forall k > m_f \\ h_l(p) \equiv 0 & \text{for } \forall l > m_h \end{cases}$$

である。

以上の準備のもとで、 $g_1(s, p), g_2(s, p), \dots, g_t(s, p)$ に対して、次のアルゴリズムに従った操作を行なう。

(i) $i=1$ とおき、 $f(s, p) = g_i(s, p)$ とする。

(ii) $i=i+1$ とし、 $h(s, p) = g_i(s, p)$ とする。

(iii) $B\{(f(p))_{m_h-j}, (h(p))_{m_f-j}\}$ が恒等的に零とならない最小の非負整数 j を j_0 とする。また、

$$v_i(p) = B\{(f(p))_{m_h-j_0}, (h(p))_{m_f-j_0}\} \quad (3.14)$$

とおく。 $j_0=0$ ならば“終る”。さもなければ“(iv) \wedge ”。

(iv) $i=t$ ならば“終る”。 $i < t$ ならば、

$$f(s, p) = B\{(f(p))_{m_h-j_0}, (h(p))_{m_f-j_0}, s\} \quad (3.15)$$

とおき、(ii) \wedge 。

このアルゴリズムに従った操作の終る時における i の値と j_0 の値をそれぞれ \bar{i} , \bar{j}_0 とする。 $\bar{j}_0=0$ かさもなければ“ $\bar{i}=t$ ”である。

$\bar{j}_0=0$ のとき：次式で定義される proper variety $V \subset \mathbb{R}^{N(\text{CABJ})}$ を考える。

$$V = \left\{ p \in R^{N(\text{LBJ})} \mid \sum_{i=1}^t p_{i0}^2(p) + \sum_{j=2}^{\bar{i}-1} v_j^2(p) = 0 \right\} \quad (3.16)$$

任意の $p_0 \in R^{N(\text{LBJ})} - V$ に対して、 $g_1(s, p_0), g_2(s, p_0), \dots, g_t(s, p_0)$ が共通根を持つことはない⁽³⁹⁾。

$\bar{i} = t$ のとき：終了時における $f(s, p), h(s, p)$ を用いて、

$$g(s, p) = B \left\{ (f(p))_{n_f - j_0}, (h(p))_{n_h - j_0}, s \right\} \quad (3.17)$$

とおき、次式で定義される proper variety $\tilde{V} \subset R^{N(\text{LBJ})}$ を考え

$$\tilde{V} = \left\{ p \in R^{N(\text{LBJ})} \mid \sum_{i=1}^t p_{i0}^2(p) + \sum_{j=2}^t v_j^2(p) = 0 \right\} \quad (3.18)$$

れば、任意の $p_0 \in R^{N(\text{LBJ})} - \tilde{V}$ に対して、 $g_1(s, p_0), g_2(s, p_0), \dots, g_t(s, p_0)$ は最大公約式 $g(s, p_0)$ を持つ (≥ 2 、 $\deg_s g(s, p_0) \geq 1$)⁽³⁹⁾。このことは、

$$g_i(s, p) = \beta_i(s, p) g(s, p) + \gamma_i(s, p) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \text{F.F.L. } \beta_i(s, p), \gamma_i(s, p) &\in R(p)[s] \\ \deg_s g(s, p) &> \deg \gamma_i(s, p) \end{aligned}$$

とし F とき、任意の $p_0 \in R^{N(\text{LBJ})} - \tilde{V}$ に対して、 $\gamma_i(s, p_0) = 0$ を意味しており、結局、

$$\gamma_i(s, p) \equiv 0 \quad (3.20)$$

$$g_i(s, p) = \frac{\beta_i(s, p)}{\alpha_i(p)} g(s, p) \quad (3.21)$$

が成り立つ。ここで、 $g_i(s, p) = \beta_i(s, p) / \alpha_i(p)$ (F.F.L. $\alpha_i(p) \in R[s], \beta_i(s, p) \in R[s, p]$, かつ、 $\alpha_i(p)$ と $\beta_i(s, p)$ は

共通因子を持たない)とした。 $R[s, p]$ は素元分解環⁽⁴⁰⁾であることから、(3.21)式は、ある $w_i(s, p) \in R[s, p]$ が存在して、

$$\begin{cases} g(s, p) = \alpha_i(p) w_i(s, p) & (3.22.1) \\ g_i(s, p) = \beta_i(s, p) w_i(s, p) & (3.22.2) \end{cases}$$

となることを意味している。ここで、 $\deg_s w_i(s, p) = \deg_s g(s, p) \geq 1$ であることを注意しておく。(3.22.1)式は $i=1, 2, \dots, t$ に対して成り立つことから、

$$\alpha_1(p) w_1(s, p) = \alpha_2(p) w_2(s, p) = \dots = \alpha_t(p) w_t(s, p) \quad (3.23)$$

となり、 $R[s, p]$ が素元分解環であることから、 $w_1(s, p), w_2(s, p), \dots, w_t(s, p)$ が共通 s -因子を持つことがわかる。従って、(3.22.2)式より、 $g_1(s, p), g_2(s, p), \dots, g_t(s, p)$ は共通 s -因子を持つことになる。

以上の考察から、この補題の必要性の仮定は、先のアルゴリズムに従った操作の終了が $\bar{f}_0 \neq 0$ (従って、 $\bar{i} = t$) で起こり得ないことを意味し、従って、“ $\bar{f}_0 = 0$ ”でみたしており、この補題の必要性の結論を導出することになる。

(証明終)

(定理 3.1 の証明)

拘束構造化システム (A, B) が列拘束である場合だけを証明する。行拘束である場合も全く同様に証明することができる。

次の3つの自明な事柄は証明を容易にする。

- (1) 系 (A, B) が列拘束構造化システムならば、系 (\tilde{A}, \tilde{B}) も列拘束構造化システムである。ただし、

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & 0 \\ 0 & \dots & \tilde{b}_{mm} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

である。

- (2) 系 (A, B) の非零モードが generic に可制御であることと系 (\tilde{A}, \tilde{B}) の非零モードが generic に可制御であることとは等価である。
- (3) $G(A, B)$ において、零節点以外のすべての節点が少なくとも1つの origin とある順枝列で結ばれていることと、 $G(\tilde{A}, \tilde{B})$ において、零節点以外のすべての節点が少なくとも1つの origin とある順枝列で結ばれていることとは等価である。

これらのことから、列拘束構造化システム (A, B) の係数行列 B の各行は高々1つの変動要素を持ち、各列は必ず1つの変動要素を持つ(3.24)式の \tilde{B} 参照)と仮定して一般性を失わない。

さらに、前章補題 2.3 から、係数行列 A, B は、

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ X & A_{t_1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ X & A_{t_1+t_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

と仮定してよい。ただし、各 A_i は n_i 次の正方行列であり、 $G(A_i)$ は $G(A)$ の強連結成分である。また、 $G(A_{t_1+1})$, $G(A_{t_1+2})$, \dots , $G(A_{t_1+t_2})$ の節点はすべて、少なくとも1つの origin と順枝列で結ばれているとしている。

必要性: $G(A, B)$ の零節点でない節点で、origin と順枝列で結ばれていないものが存在したとする。これは (3.25) 式においてある A_i ($1 \leq i \leq t_1$) の Coates グラフ $G(A_i)$ が単節点グラフでないことを意味する。従って、

$$|sI - A_i| = s^{\alpha_i} g_i(s, p) \quad (3.26.1)$$

$$g_i(s, p) = s^{n_i - \alpha_i} + g_{i1}(p) s^{n_i - \alpha_i - 1} + \dots + g_{i, n_i - \alpha_i - 1}(p) s + g_{i, n_i - \alpha_i}(p) \quad (3.26.2)$$

$$\text{E.E.L. } g_{ij}(p) \in R[p], \quad g_{i, n_i - \alpha_i}(p) \neq 0$$

としたとき、前章補題 2.5 から、 $n_i - \alpha_i (= \deg_s g_i(s, p)) \geq 1$ である。このことは、 $R^{N(CAB)}$ 内のどのような proper variety V を考えても、ある $p_0 \in R^{N(CAB)} - V$ が存在して、 $g_{i, n_i - \alpha_i}(p_0) \neq 0$ 、つまり、 $g_i(s, p_0)$ はある $s_0 (\neq 0) \in C$ を根として持つことを意味する。結局、どのような proper variety $V \subset R^{N(CAB)}$ に対しても、ある $p_0 \in R^{N(CAB)} - V$ が存在して、

$$\text{rank } [s_0 I - \bar{A} \quad \bar{B}] < m \quad \text{for } \exists s_0 (\neq 0) \in C \quad (3.27)$$

となり、系 (A, B) の非零モードは generic に可制御でないことを示すことができた。

十分性: $[sI - A \quad B]$ の恒等的に零でないすべての m 次小行列式 ($\in R[s, p]$) が s のべき乗以外に共通 s -因子を持

ち得ないことを示すことができれば、補題 3.1 より、ある proper variety $V \subset \mathbb{R}^{N(A,B)}$ が存在して、任意の $\rho \in \mathbb{R}^{N(A,B)} - V$ に対して、 $[sI - \bar{A} \ \bar{B}]$ のすべての m 次小行列式 ($\in \mathbb{R}[s]$) は $s=0$ 以外に共通根を持たないことになる。すなわち、任意の $\rho \in \mathbb{R}^{N(A,B)} - V$ に対して、(3.6) 式が成り立つことになり、系 (A, B) の非零モードは generic に可制御であることを示すことができる。

従って、以下では、 $[sI - A \ B]$ の恒等的に零でないすべての m 次小行列式 ($\in \mathbb{R}[s, \rho]$) が s のべき乗以外に共通 s -因子を持ち得ないことを示す。

$[sI - A \ B]$ の恒等的に零でない m 次小行列式の 1 つである $|sI - A|$ は、(3.25) 式から、

$$|sI - A| = \prod_{i=1}^{t_1+t_2} |sI - A_i| \quad (3.28)$$

である。そして、前章補題 2.5, 定理 2.1 から、

$$|sI - A_i| = \begin{cases} s & , G(A_i): \text{単節点グラフ} & (3.29.1) \\ s^{\alpha_i} g_i(s, \rho) & , G(A_i): \text{単節点グラフでない} & (3.29.2) \end{cases}$$

である。ここで、 $g_i(s, \rho)$ は、 $\deg_s g_i(s, \rho) \geq 1$ なる s -既約であることを注意しておく。さて、十分性の仮定は $G(A_1), G(A_2), \dots, G(A_{t_1})$ がすべて単節点グラフであることを意味する。また、 $G(A_{t_1+1}), G(A_{t_1+2}), \dots, G(A_{t_1+t_2})$ のうち、 $G(t_{1+i_1}), G(t_{1+i_2}), \dots, G(t_{1+i_r})$ が単節点グラフであったとしよう。ただし、 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq t_2$ である。このとき、(3.28) 式の $|sI - A|$ は

$$|sI - A| = s^\alpha \prod_{j \in \Lambda} g_{t_1+j}(s, p) \quad (3.30)$$

となる。ここで、 $\Lambda = \{1, 2, \dots, t_2\} - \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, $\alpha = t_1 + r + \sum_{j \in \Lambda} \alpha_{t_1+j}$ である。

従って、 $[sI - A \ B]$ の恒等的に零でないすべての n 次小行列式が s のべき乗以外に共通 s -因子を持ち得ないことを示す代わりに、(3.30) 式の各 $g_{t_1+j}(s, p)$ に対して、 $g_{t_1+j}(s, p)$ を s -因子として持たない恒等的に零でない $[sI - A \ B]$ の n 次小行列式の存在を示せばよい。

(3.30) 式のある $g_{t_1+j}(s, p)$ を考える。 $G(A_{t_1+j})$ は単節点グラフでない ($j \in \Lambda$) ので、 $G(A_{t_1+j})$ は少なくとも一つのサイクルを持つ。 $G(A_{t_1+j})$ のサイクルのうち、その長さが最小 (これを L とする) であるサイクルの一つを L とする。一方、十分性の仮定は $G(A_{t_1+j})$ のすべての節点が、 $G(A, B)$ において、少なくとも一つの origin と順枝列で結ばれていることを意味する。従って、一般性を失

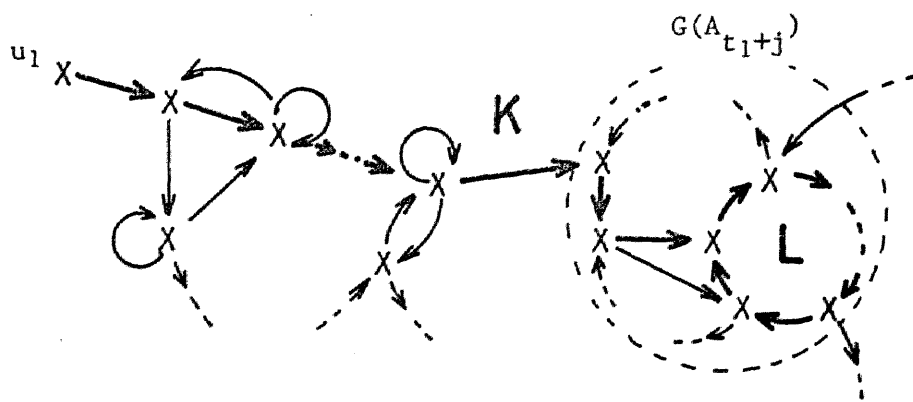


Fig. 3.3 Cycle L and forward edge sequence K

うことなく、第1 origin u_1 からサイクル L 上の節点に至る順枝列が存在するとしてよい。その順枝列のうち、長さが最小(これを k とする)である順枝列の1つを K とする(図3.3参照)。このとき、適当な置換行列 \tilde{P} が存在して、

$$\tilde{P}(sI-A)\tilde{P}^T =$$

(3.31.1)

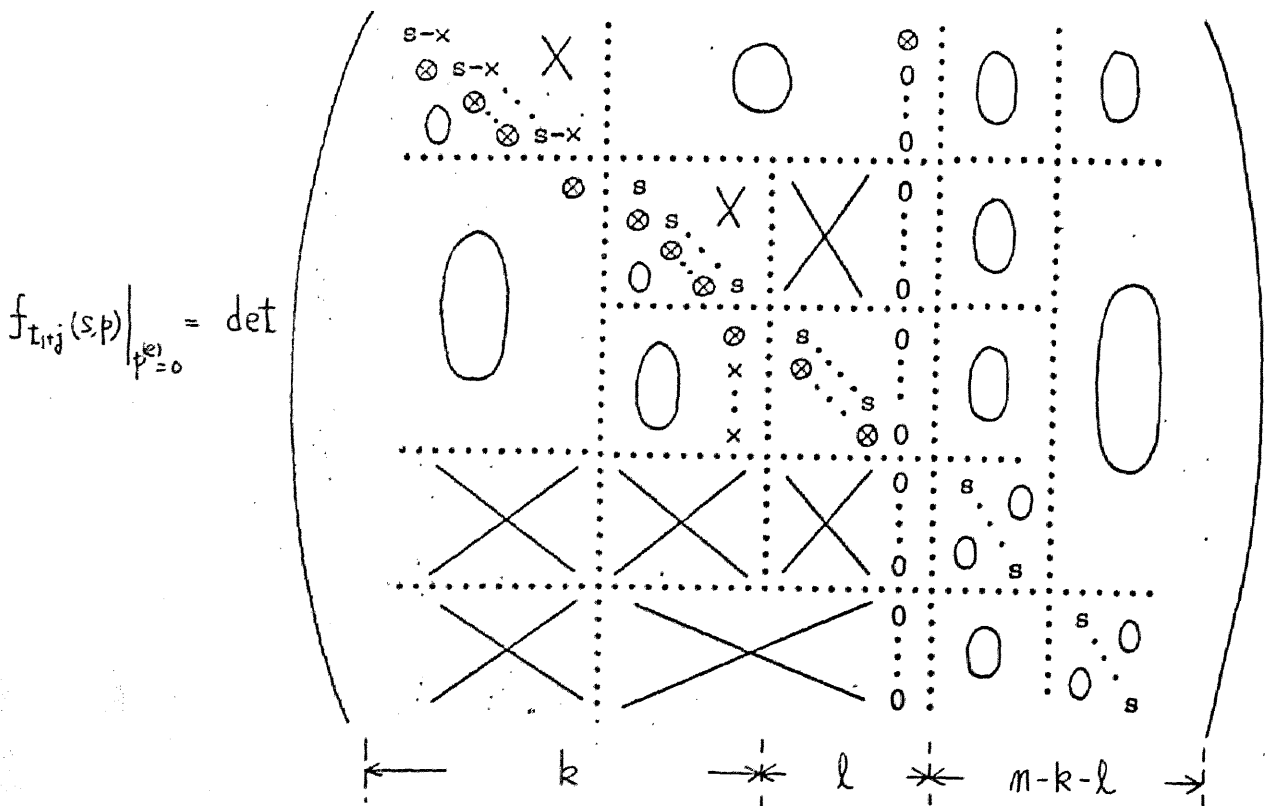
$$\tilde{P} B =$$

(3.31.2)

変換することができる。(3.31)式において、 \otimes は変動要素を、 \circ は零固定要素を、 \times は変動要素か零固定要素のどちらかを示している。また、 $\tilde{P}(sI-A)\tilde{P}^T$ の第1ブロックと第2.1ブロック及び $\tilde{P}B$ に位置する \otimes は順枝列 K の有向枝に対応する変動要素であり、 $\tilde{P}(sI-A)\tilde{P}^T$ の第2.2ブロックに位置する \otimes はサイクル L の有向枝に対応する変動要素である。さらに、 $\tilde{P}(sI-A)\tilde{P}^T$ の第2ブロックの列は $G(A_{t+i,j})$ の節点集合に対応する列である。

ここで、 $\tilde{P}(sI-A)\tilde{P}^T$ の m 本の列のうち第2.2ブロックの最終列を除く $(m-1)$ 本の列と $\tilde{P}B$ の第1列から得られる $[sI-A \ B]$ の m 次小行列式を $f_{t+i,j}(s,p)$ としよう。このとき、 $f_{t+i,j}(s,p)$ は恒等的に零でなく、かつ、 $g_{t+i,j}(s,p)$ を s -因子として持たないことを示すことができる。

実際、(3.31.1)式の $\tilde{P}(sI-A)\tilde{P}^T$ の第2.3ブロックと第3ブロックに位置する変動要素に含まれる独立パラメータだけから成るベクトルを $p^{(e)}$ とすれば、



$$\begin{aligned}
& s^{n-k-l} (\tilde{f}_0(p) + \tilde{f}_1(p)s + \cdots + \tilde{f}_g(p)s^g) \\
&= h(s,p) \Big|_{p=0} s^{\delta_{t,i,j} - \alpha_{t,i,j}} (s^{\theta_{t,i,j}} + \tilde{g}_l(p)s^{\theta_{t,i,j}-l} + \cdots + \tilde{g}_{\theta_{t,i,j}}(p))
\end{aligned} \tag{3.36}$$

を得る。しかし、ここで、 $\tilde{f}_0(p) \neq 0$, $\tilde{g}_{\theta_{t,i,j}}(p) \neq 0$, $\theta_{t,i,j} > l > g$ であることに注意すれば、(3.36) 式は決して成り立たないことがわかる。結局、 $f_{t,i,j}(p)$ は $g_{t,i,j}(s,p)$ を s -因子として持たないことを示すことができた。

このことは任意の $j \in \Lambda$ について成り立つから、(3.30) 式の各 $g_{t,i,j}(s,p)$ に対して、 $g_{t,i,j}(s,p)$ を s -因子として持たない恒等的に零でない $[sI - A \ B]$ の n 次小行列式の存在を示すことができた。 (証明終)

次の系は、定理 3.1 より直ちに導出できる。

[系 3.1]

拘束構造化システム (A, B) において、 $G(A)$ が強連結であるとする。このとき、入力が存在しさえすれば ($B \neq 0$)、系 (A, B) の非零モードは generic に可制御である。

(証明)

$G(A)$ が強連結であるので、 $B \neq 0$ ならば、 $G(A, B)$ のすべての節点は少なくとも 1 つの origin とある順枝列で結ばれている。 (証明終)

3.4 零モードの可制御条件

この節では、拘束構造化システム (A, B) の零モードが generic に可制御であるための必要十分条件を明らかにする。

列拘束構造化システム (A, B) は数値行列の集合 \mathcal{S}_C と整数の集合 I_C 及び独立パラメータベクトル φ で、また行拘束構造化システム (A, B) は $\mathcal{S}_R, I_R, \varphi$ で特徴づけられた (第2章、第2.3節)。ただし、 $\mathcal{S}_C = \{A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m\}$ であり、 $\mathcal{S}_R = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ であった。

そこで、 \mathcal{S}_C の要素 A_i, B_i の第 j 列をそれぞれ $a_j^{(i)}, b_j^{(i)}$ で表わし、次式で示された $n \times (n+m)$ 数値行列の集合 \mathcal{T}_C を考える。

$$\mathcal{T}_C = \left\{ T_{k_1, \dots, k_n, k_{n+1}, \dots, k_{n+m}} = \begin{bmatrix} a_{k_1}^{(1)} & \dots & a_{k_n}^{(n)} & b_{k_{n+1}}^{(1)} & \dots & b_{k_{n+m}}^{(m)} \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} 1 \leq k_j \leq N_j((A, B)) \text{ for } \forall j \in I_C \\ k_j = 1 \text{ for } \forall j \notin I_C \end{array} \right\} \quad (3.37)$$

また、 \mathcal{S}_R の要素 C_i の第 j 列を $c_j^{(i)}$ で表わし、次式で示された $(n+m) \times m$ 数値行列の集合 \mathcal{T}_R を考える。

$$\mathcal{T}_R = \left\{ T_{k_1, \dots, k_m} = \begin{bmatrix} c_{k_1}^{(1)} & c_{k_2}^{(2)} & \dots & c_{k_m}^{(m)} \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} 1 \leq k_j \leq N_j((A, B)) \text{ for } \forall j \in I_R \\ k_j = 1 \text{ for } \forall j \notin I_R \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

このとき、拘束構造化システム (A, B) の零モードの generic な可制御性に関して、次に示す定理が成り立つ。

[定理 3.2]

拘束構造化システム (A, B) の零モードが generic に可制御であるための必要十分条件は、 \mathcal{J}_C (: 列拘束のとき) が \mathcal{J}_R (: 行拘束のとき) の要素のなかに少なくとも一つのフルランクな行列が存在することである。

[例 3.2]

(1) 第 2 章、第 2.4 節、例 2.9 の (2) で考えた列拘束構造化システム (A, B) の \mathcal{J}_C ((2.85) 式参照) に対して、 \mathcal{J}_C のすべての要素は次のとおりである。

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1,1,1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{1,1,1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ T_{1,2,1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{1,2,1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

$T_{1,1,1,1}$, $T_{1,2,1,1}$ がフルランクであるから、定理 3.2 より、零モードは generic に可制御である。

(2) $\mathcal{J}_R = \{C_1, C_2, C_3\}$, $\varphi = (p^{(1)T}, p^{(2)T}, p^{(3)T})^T$ で特徴づけられる行拘束構造化システム (A, B) を考える。ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ p^{(1)} = (p_{11}) \quad , \quad p^{(2)} = (p_{21}) \quad , \quad p^{(3)} = (p_{31}, p_{32})^T \end{array} \right. \quad (3.40)$$

とする。このとき \mathcal{J}_R のすべての要素は次のとおりである。

$$T_{1,1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$T_{1,1,1}$, $T_{1,1,2}$ とともにフルランクでない。従って、定理 3.2 より、零モードは generic に可制御でない。

しかし、(3.40) 式の数値行列 C_3 が

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

であれば、 $T_{1,1,1}$ はフルランクとなり、零モードは generic に可制御となる。

次の補題は極めて明らかなることであるが、それを述べておくことで定理 3.2 を簡潔に証明することができる。

[補題 3.2]

拘束構造化システム (A, B) の零モードが generic に可制御であるための必要十分条件は、ある $\alpha_0 \in \mathbb{R}^{N(CAB)}$ に対して、 $\text{rank}[A \bar{B}] = m$ が成り立つことである。

(証明)

零モードが generic に可制御であることの定義 (第 3.2 節、条件 (2), (3.7) 式参照) より、必要性は明らかである。従って十分性を示す。

十分性の仮定から、行列 $[A \bar{B}]$ の m 次小行列式 ($\in \mathbb{R}[p]$)

のうち少なくとも1つは恒等的に零でない。そこで、行列 $[A \ B]$ の恒等的に零でない M 次小行列式 $\varphi_1(\varphi), \dots, \varphi_t(\varphi)$ を用いて、

$$V = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^{N([A \ B])} \mid \sum_{i=1}^t \varphi_i^2(\varphi) = 0 \right\} \quad (3.43)$$

とすれば、 V は $\mathbb{R}^{N([A \ B])}$ 内の proper variety であり、かつ任意の $\varphi \in \mathbb{R}^{N([A \ B])} - V$ に対して $\text{rank}[A \ B] = M$ が成り立つ。従って、零モードが generic に可制御であることを示すことができた。 (証明終)

(定理 3.2 の証明)

拘束構造化システム (A, B) が列拘束である場合だけを証明する。行拘束である場合も全く同様に証明することができる。

十分性: $\mathcal{J}_C \ni T_{k_1, \dots, k_m; k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ がフルランクであったとする。このとき、ある $\varphi_0 \in \mathbb{R}^{N([A \ B])}$ が存在して、

$$[A \ B] = T_{k_1, \dots, k_m; k_{m+1}, \dots, k_{m+m}} \quad (3.44)$$

となる。実際、 φ_0 として

$$\varphi_0 = \left(\varphi_0^{(i_1)T}, \varphi_0^{(i_2)T}, \dots, \varphi_0^{(i_f)T}, \varphi_0^{(n+1)T}, \dots, \varphi_0^{(n+m)T} \right)^T \quad (3.45)$$

$$\text{ただし、} \varphi_0^{(j)} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } k_j \text{ 要素}}}{1}, 0, \dots, 0)^T$$

とすればよい。従って補題 3.2 より、零モードが generic

に可制御であることを示すことができた。

必要性：すべての $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}} \in \mathcal{J}_C$ がフルランクでないとする。すなわち、 $n \times (m+m)$ 数値行列 $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ の第 j_1 列, 第 j_2 列, \dots , 第 j_m 列からできる m 次正方行列を $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}^{j_1, \dots, j_m}$ で表わせば,

$$\left| T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}^{j_1, \dots, j_m} \right| = 0 \quad \text{for} \quad \begin{array}{l} 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq m+m \\ 1 \leq k_i \leq N_i([AB]) \quad \text{for } \forall i \in I_C \\ k_i = 1 \quad \quad \quad \text{for } \forall i \notin I_C \end{array} \quad (3.46)$$

である。一方、第2章、第2.3節、(2.40), (2.41) 式より、

$$\left| [A \ B]^{j_1, \dots, j_m} \right| = \begin{cases} 0 & \text{for } \{j_1, \dots, j_m\} \notin I_C \\ \sum_{k_{j_1}, \dots, k_{j_m}} p_{j_1 k_{j_1}} \dots p_{j_m k_{j_m}} \left| T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}^{j_1, \dots, j_m} \right| & \text{for } \{j_1, \dots, j_m\} \subset I_C \end{cases} \quad (3.47.1)$$

$$(3.47.2)$$

となり、(3.47.2) 式も (3.46) 式から恒等的に零となる。結局、行列 $[A \ B]$ のすべての m 次小行列式が恒等的に零となり、任意の $\rho_0 \in \mathbb{R}^{N([AB])}$ に対して $\text{rank}[A \ B] < m$ となるので、補題3.2より、零モードが generic に可制御でないことを示すことができた。 (証明終)

3.5 拘束構造可制御条件と

従来 of 構造可制御条件

第3.3節、定理3.1と第3.4節、定理3.2をまとめることにより、拘束構造化システムの拘束構造可制御条件を得ることができる。

系のグラフ $G(A, B)$ においてすべての節点が少なくとも1つの origin と順枝列で結ばれているとき、 $G(A, B)$ は accessible であると呼ばれる⁽⁹⁾。

一般に、行列 $[A \ B]$ の変動要素間の従属関係がどのようであろうとも（非線形の従属関係であろうとも、またその従属関係が同一列や行に限られなくとも）、系 (A, B) が構造可制御であるためには、 $G(A, B)$ が accessible でなければならぬ。実際、 $G(A, B)$ が accessible でなければ、適当な置換行列 P が存在して、

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

と変換することができる⁽⁹⁾からである。

[定理3.3]

拘束構造化システム (A, B) が拘束構造可制御であるための必要十分条件は、次の2つの条件が成り立つことである。

- (1) 系のグラフ $G(A, B)$ は accessible である。
- (2) J_C (:列拘束のとき) が J_R (:行拘束のとき) の要素の

ながに少なくとも1つのフルランクな行列が存在する。

(証明)

必要性：定理の直前の考察と定理3.2より明らかである。

十分性： $G(A, B)$ が accessible であれば、 $G(A, B)$ の零節
点以外の節点ももちろん origin と順枝列で結ばれている
ことになる。従って、定理3.1及び3.2より明らかであ
る。(証明終)

拘束構造可制御性の判定は、定理3.3で示したとおり
系のグラフ $G(A, B)$ の性質だけで行なうことはできない。
これは $G(A, B)$ が行列 A, B の変動要素の位置だけの情報
しか与えていないからである。しかし、あらかじめ系 (A, B) の零モードに関して何らかの情報が得られてい
れば、 $G(A, B)$ の性質だけで拘束構造可制御性を判定する
ことができる可能性がある。次の系はそのような場合の
極めて特殊な場合である。

[系3.2]

拘束構造化システム (A, B) において、 $|A| \in R[p]$ は
恒等的に零でないとする。このとき、系 (A, B) が拘束構
造可制御であるための必要十分条件は、 $G(A, B)$ が acces-
sible であることである。

(証明)

$|A| \in R[p]$ が恒等的に零でないので、ある $\rho_0 \in R^{N(LAB)}$
が存在して $|\bar{A}| \neq 0$ 、すなわち、 $\text{rank}[\bar{A} \bar{B}] = M$ である。従

って、第3.4節、補題3.2、定理3.2より、定理3.3の条件(2)が成り立つ(実際、ほとんどすべての $\mu \in R^{N(A,B)}$ に対して系 (A,B) は零モードを持たない)。従って、定理3.3より、系の主張は明らかである。(証明終)

さらに、拘束構造化システムの特種な場合である構造化システム(第2.3節参照)では、変動要素はすべて独立パラメータであった。変動要素間に従属関係がないのであるから、系のグラフ $G(A,B)$ は変動要素間の従属関係をも表現しているとみることができ。従って、構造化システムの構造可制御性の判定条件は、すでに知られているとおり、 $G(A,B)$ の性質だけで与えることができたわけである。

$G(A,B)$ の部分グラフ H は、次の条件を満たすとき、 U -rooted factorial connection と呼ばれる⁽¹⁴⁾(図3.4参照)。

(1) H は互いに共通節点を持たない m 本の順路⁽³²⁾といくつかのサイクルから成る。ただし、 m 本の順路の始点

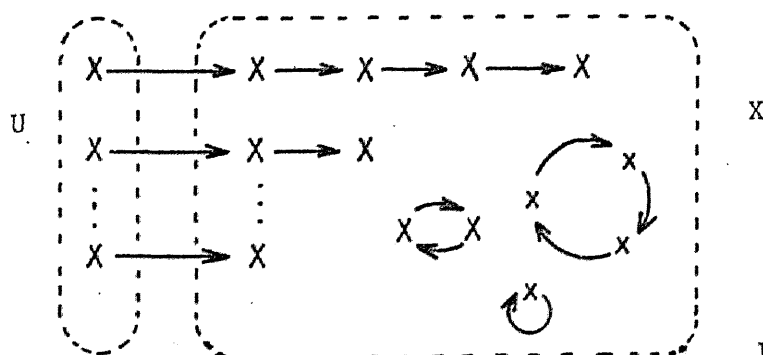


Fig. 3.4 U -rooted factorial connection

は origin である。

(2) H は $G(A, B)$ を張る。

[補題 3.3]

構造化システム (A, B) において、(構造化システムは列拘束構造化システムの特種なものであるから) \mathcal{J}_c の要素のなかに少なくとも一つのフルランクな行列が存在するための必要十分条件は、系のグラフ $G(A, B)$ が U -rooted factorial connection を持つことである。

(証明)

最初に、 $\mathcal{S}_c = \{A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m\}$ の要素 A_i, B_i と $G(A, B)$ との関係を見る。 $G(A, B)$ の節点 x_i の後続隣接節点集合⁽³²⁾を $\Gamma^+(x_i)$ で、節点 u_i の後続隣接節点集合を $\Gamma^+(u_i)$ で表わす。このとき、 $x_j \in \Gamma^+(x_i)$ ならば係数行列 A の (j, i) 要素は変動要素 (=独立パラメータ) であり、 $x_j \notin \Gamma^+(x_i)$ ならば A の (j, i) 要素は零固定要素である。同様に、 $x_j \in \Gamma^+(u_i)$ ならば係数行列 B の (j, i) 要素は変動要素 (=独立パラメータ) であり、 $x_j \notin \Gamma^+(u_i)$ ならば B の (j, i) 要素は零固定要素である。従って、 $A_i, B_i \in \mathcal{S}_c$ は

$$A_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & , \text{ if } \Gamma^+(x_i) = \emptyset \\ \left[e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{N_i(A, B)}} \right] & , \text{ if } \Gamma^+(x_i) = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{N_i(A, B)}}\} \end{cases} \quad (3.49.1)$$

(3.49.2)

$$B_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & , \text{ if } \Gamma^+(U_i) = \phi \\ \left[e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{N_{\text{ini}}(A,B)}} \right] & , \text{ if } \Gamma^+(U_i) = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{N_{\text{ini}}(A,B)}}\} \end{cases} \quad (3.50.1)$$

$$(3.50.2)$$

第j要素

である。ここで、 $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ である。(3.49.2) 式の A_i の第 k 列は $G(A, B)$ の節点 x_i から節点 x_{jk} への有向枝に対応し、(3.50.2) 式の B_i の第 k 列は節点 U_i から節点 x_{jk} への有向枝に対応することを注意しておく。

以上のことから、 $\mathcal{J}_C \ni T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ の第 i 列 ($1 \leq i \leq n$) は節点 x_i を始点とする有向枝に、第 $(m+i)$ 列 ($1 \leq i \leq m$) は節点 U_i を始点とする有向枝に対応していることになる。そこで、 $\mathcal{J}_C \ni T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ の各列に対応する有向枝以外をすべて取り除くことにより得られる $G(A, B)$ の部分グラフを $G_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ で表わす。 $G_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ は節点集合として $\{x_1, \dots, x_m, U_1, \dots, U_m\}$ を持ち、各節点からの出枝⁽³²⁾ は高々一つであることを注意しておく。また、 $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ の第 j_1 列, 第 j_2 列, \dots , 第 j_m 列からできる m 次正方行列 $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}^{j_1, \dots, j_m}$ に対応し、 $G_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ の有向枝のうち $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ の第 j_1 列, 第 j_2 列, \dots , 第 j_m 列に対応する有向枝以外を取り除いて得られる部分グラフを $G_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}^{j_1, \dots, j_m}$ で表わす。 $G_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}^{j_1, \dots, j_m}$ も節点集合として $\{x_1, \dots, x_m, U_1, \dots, U_m\}$ を持ち、各節点からの出枝は高々一つであることは $G_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}$ と同じであるが、さらに $G_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+m}}^{j_1, \dots, j_m}$ の有向枝は高

々本であることを注意しておく。

必要性: $\exists C \ni T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{2m}}$ がフルランクであったとする。 $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{2m}}$ は各列高々一つの「1」を持ち、他の要素はすべて「0」である $m \times (m+m)$ 行列であるから、 $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{2m}}$ がフルランクであることは、適当な m 次正交行列 $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{2m}}^{j_1, \dots, j_n}$ が次の性質を持つことを意味する。 $T_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{2m}}^{j_1, \dots, j_n}$ の各行各列とも必ず一つだけの「1」を持つ。従って、 $G_{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}, \dots, k_{2m}}^{j_1, \dots, j_n}$ は U-rooted factorial connection となっている。

十分性: 必要性の証明の逆をたどればよい。

(証明終)

定理 3.3 と補題 3.3 から、構造化システムの構造可制御性に関して、次の定理を得る。

[定理 3.4] ^{(9), (14)}

構造化システム (A, B) が構造可制御であるための必要十分条件は、系のグラフ $G(A, B)$ が cacti で張られることである。ただし、図 3.5 (a) の origin を始点とする順路は、bud と呼ばれる (b) の形を持つグラフをつぎつぎに付加して得られる (c) のようなグラフを cactas と呼び、共通節点を持たない複数個の cactas の集合から成るグラフを cacti と呼ぶ。

(証明)

$G(A, B)$ が accessible かつ U-rooted factorial connection を持つことと $G(A, B)$ が cacti で張られることは等価であ

る。従って、定理の主張は定理 3.3 と補題 3.3 から明らかである。
(証明終)

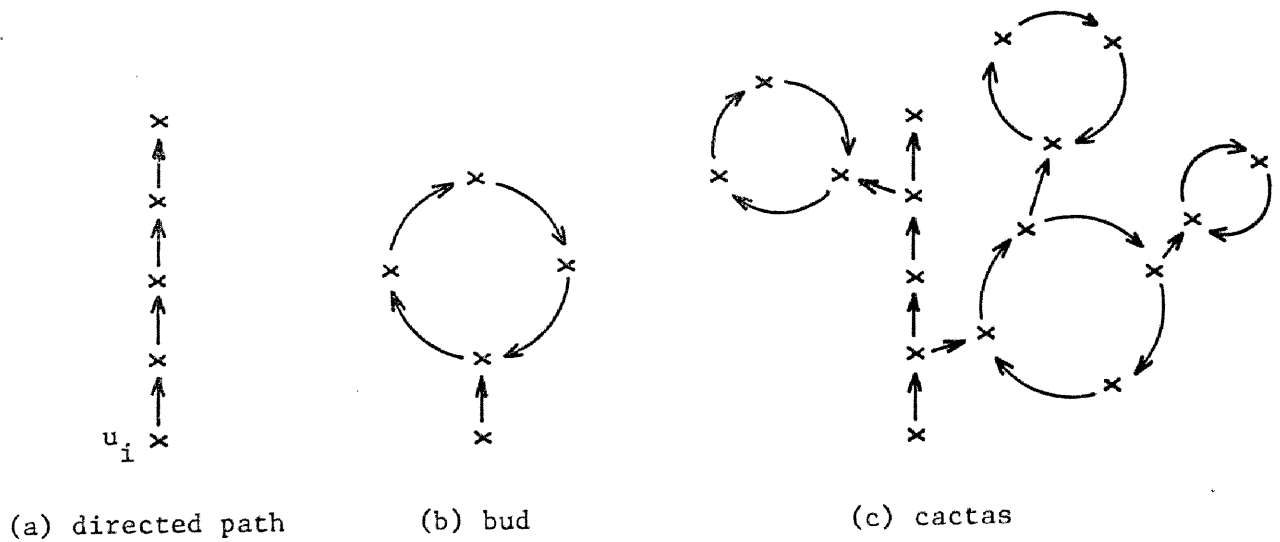


Fig. 3.5

3.6 むすび

本章では、非零モードの generic な可制御性と零モードの generic な可制御性 (第 3.2 節条件 (1), (2)) とを個別に考察し、拘束構造化システムの拘束構造可制御性について論じた。本章で明らかにしたことは、

- (1) 非零モードが generic に可制御であることと系のグラフとの関係 (定理 3.1)
- (2) 零モードが generic に可制御であることと変動要素間の従属関係との関係 (定理 3.2)

(3) 拘束構造可制御性の一判定条件 (定理 3.3)

(4) 特殊な拘束構造化システム (ほとんどすべての独立パラメータの値に対して零モードが存在しないシステムと従来の構造化システム) の拘束構造可制御性の判定条件 (系 3.2, 定理 3.4)

である。

(1) によって、非零モードの generic な可制御性は、係数行列の変動要素の位置だけに依存され、その線形従属関係には全く無関係であるという極めて興味深い事実を得ることができた。しかし、変動要素間の従属関係が拘束構造可制御性に全く影響を与えないというわけではなく、その従属関係は、(2) で、零モードの generic な可制御性に反映されることがわかった。

さらに、(3) を基礎に、従来知られていた構造化システムの構造可制御定理を極めて容易に導出することができた。

なお、本章で得た拘束構造可制御性の判定条件は、後の章の基礎ともなる。

第4章 線形コンパートメント

システムの構造可制御性^{(36), (41)}

4.1 まえがき

序論でも述べたように、コンパートメントシステムは種々の物質の生体内動態モデルをはじめ、生物・生態学、医学・疫学、化学工学、経済学など広範な分野で用いられているシステム解析用モデルである。その特徴は、対象とするシステムがいくつかのコンパートメントと呼ばれる機能相から成っているとして、コンパートメント相互間や系外との物質の授受が流れの連続性（あるいはそれと等価な保存則）を満たしつつなされているとする点にある。従って、コンパートメントシステムは、システム理論的立場から、

(1) 物質の授受関係に注目すれば、コンパートメントをサブシステムとみなし、コンパートメント間の物質の授受の有無をサブシステム間の結合構造にとらえれば、一種の複合系である。

(2) 物質量という非負値しかとり得ない変数を対象とするという立場からは、システム入力やシステムパラメータに符号制限のついたシステムである。

とみることができるといえる。このような観点から、従来、コンパートメントシステムのダイナミックスの特性として、

解の非負性⁽⁴²⁾、定常解の存在性^{(43),(44)}、可制御・可観測性、実現問題^{(45),(46)}、可同定性^{(47)~(51)}などの問題が研究されてきている。

本章で考察する線形コンパートメントシステムの構造可制御性はコンパートメント間の結合構造に注目（結合の量的性質は無視）した可制御性であり、入力の非負性は無視される。線形コンパートメントシステムの構造可制御性の研究は、内部パラメータ推定の理論的基盤を与える構造可同定性の問題^{(47)~(51)}など、コンパートメントシステムの代数的構造を知るうえで極めて重要であるにもかかわらず、これまでに得られている結果は極めて特殊な構造（ただ一つのシンク）を持つ線形コンパートメントシステムに対するものだけである⁽⁵²⁾。本章では、一般的な構造（複数のシンク）を持つ線形コンパートメントシステムの構造可制御性がある特殊な拘束構造可制御性であり、その判定条件がコンパートメントグラフの性質で完全に特徴づけられることを示す。

なお、線形コンパートメントシステムの非負入力だけを許容入力としたときの可到達性は、コンパートメントシステムの実現問題と深い関係があり、文献^{(45),(53),(54)}に詳しい。

4.2 状態方程式とコンパートメントグラフ

n 個のコンパートメントから構成されているコンパートメントシステムを考える。

x_i : コンパートメント i における物質質量

f_{i0} : 系外からコンパートメント i への単位時間当たりの物質流入量

f_{ij} : コンパートメント j からコンパートメント i への単位時間当たりの物質流入量 ($i \neq j$)

f_{oi} : コンパートメント i から系外への単位時間当たりの物質流出量

として、コンパートメント i における流れの連続(あるいはそれと等価な保存)式を立てれば、

$$\dot{x}_i = f_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij} - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ji} + f_{oi} \right) \quad (4.1)$$

を得る(図4.1参照)。

ここで、 f_{ij} , f_{oi} は一般に時刻 t とその時点での x_j ($j=1, 2, \dots, n$) に依存するが、 f_{i0} は、系外からの流入であるから、時刻 t だけに依存する“入力”と考えることができる。

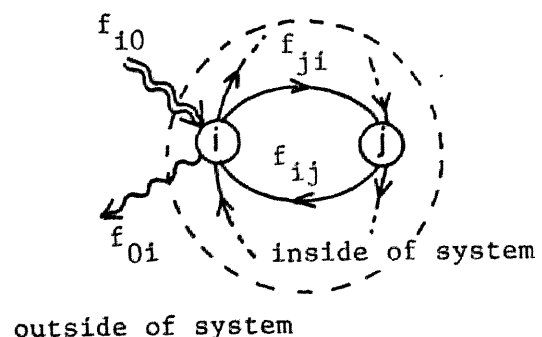


Fig. 4.1 Compartmental system

ただし、系外から m 個のコンパートメントすべてに、かつ独立に、物質を印加できるとは限らないので、 $f_{10}, f_{20}, \dots, f_{n0}$ は m ($\leq n$) 個の独立な入力変数 u_1, u_2, \dots, u_m の関数と考える。従って、(4.1) 式は、

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (4.2.1)$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \quad (4.2.2)$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \text{ 且し } f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m f_{ij} - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m f_{ji} + f_{oi} \right) \quad (4.2.3)$$

$$G = (f_{10}, f_{20}, \dots, f_{n0})^T \quad (4.2.4)$$

なるベクトルを導入して、

$$\dot{x} = F(x, t) + G(u) \quad (4.3)$$

と簡潔に書き表される。

特に、フロー $f_{ij}(x, t)$ が時刻 t に関係なくコンパートメント j の物質質量 x_j にのみ比例し、フロー $f_{i0}(u)$ が u の線形関数であるとき、つまり、

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ij}(x, t) = k_{ij} x_j \quad (j=1, 2, \dots, n; i=0, 1, 2, \dots, n, i \neq j) \end{array} \right. \quad (4.4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i0}(u) = \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{array} \right. \quad (4.4.2)$$

であるとき、(4.3) 式は (4.5) 式に示す線形時不変系の状態方程式になり、そのときのコンパートメントシステムは線形コンパートメントシステムと呼ばれる。なお、(4.4.1) 式の比例定数 k_{ij} は非負の実数であり、

移行係数と呼ばれる。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.5)$$

(4.5)式の係数行列Aの(i,j)要素を a_{ij} で表わせば、

$$\begin{cases} a_{ij} = k_{ij} & (i \neq j) \end{cases} \quad (4.6.1)$$

$$\begin{cases} a_{ii} = -k_{oi} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m k_{ji} \end{cases} \quad (4.6.2)$$

である。また、(4.5)式の係数行列Bの(i,j)要素は(4.4.2)式の b_{ij} 自身であるが、一般に、異なるコンパートメントへの入力は互いに独立とみなせる⁽⁵²⁾ので、係数行列Bの要素は各行高々一つ、各列必ず一つ、一つの要素を除いて、すべて零であると考えてよい。

線形コンパートメントシステムの構造、すなわち、コンパートメント間の結合構造やコンパートメントと系外との関係は、移行係数 k_{ij} ($i=0,1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n, i \neq j$) や b_{ij} が零か非零かに反映される。つまり、

$$k_{ij} \begin{cases} = 0 \Leftrightarrow \text{コンパートメント } j \text{ からコンパートメント } i \text{ への物質の流れなし} \\ \quad \quad \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j) \\ \neq 0 \Leftrightarrow \text{コンパートメント } j \text{ からコンパートメント } i \text{ への物質の流れあり} \end{cases}$$

$$k_{oj} \begin{cases} = 0 \Leftrightarrow \text{コンパートメント } j \text{ から系外への物質の流れなし} \\ \quad \quad \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \neq 0 \Leftrightarrow \text{コンパートメント } j \text{ から系外への物質の流れあり} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{ij} = 0 \text{ for } j=1,2,\dots,m \Leftrightarrow \text{コンパートメント } i \text{ に系外からの物質の流れ(入力)なし} \\ \quad \quad \quad (i=1,2,\dots,n) \\ b_{ij} \neq 0 \text{ for } 1 \leq j \leq m \Leftrightarrow \text{コンパートメント } i \text{ に系外からの物質の流れ(入力)あり} \end{cases}$$

係数行列 A, B が (4.7) 式である線形コンパートメントシステムのコンパートメントグラフ $G_c(A, B)$ は図 4.2 のとおりである。コンパートメント 1, 7, 9 は漏れありコンパートメント、他のコンパートメントは漏れなしコンパートメントである。また、コンパートメント 1, 8 は入力コンパートメントである。

一方、系のグラフ $G(A, B)$ は図 4.3 のとおりである。 $G_c(A, B)$ と $G(A, B)$ とを比較することによって、

- (1) $G(A, B)$ では、漏れありコンパートメントであるかどうかを陽に表現していない。有向枝の重みを見る必要がある。
 - (2) $G(A, B)$ では、冗長な自己ループ（漏れなしコンパートメントにおいて）が存在する。
- ということがわかる。

図 4.2, 4.3 から、コンパートメントグラフは系のグラフと全く同様に強連結成分に分割されることがわかる（図中、点線枠 I ~ VI で示した）。このとき、コンパートメントグラフの各強連結成分は次の (a), (b), (c) のいずれかである。

- (a) 他の強連結成分からの流入枝を全く持たない。
- (b) 他の強連結成分への流出枝を全く持たない。
- (c) 他の強連結成分からの流入枝と他の強連結成分への流出枝をそれぞれ少なくとも一つづつ持つ。

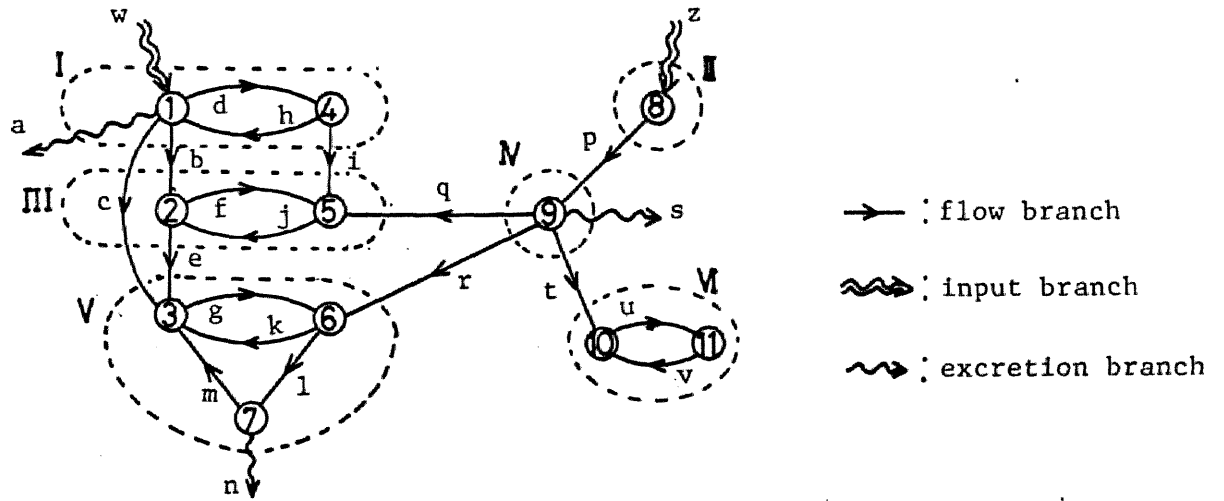


Fig. 4.2 Compartmental graph $G_c(A,B)$

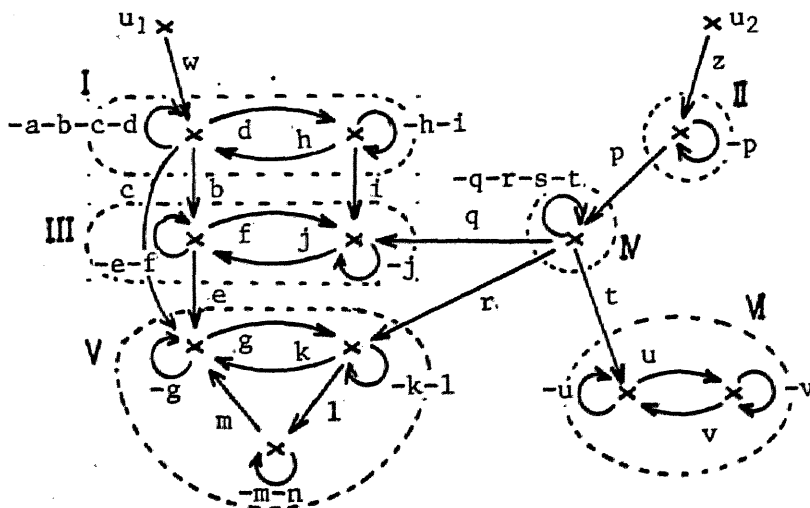


Fig. 4.3 Graph of system $G(A,B)$

(a) に属する強連結成分はソース、(b) はシンク、(c) はトランジットと呼ばれる⁽⁵²⁾。ただし、孤立した強連結成分はソースともシンクとも考えられることを注意しておく。

1つのシンクを構成しているコンパートメントがすべて漏れなしコンパートメントであるとき、そのシンクを漏れなしシンクと呼ぶことにする。そして、少なくとも1つのコンパートメントが漏れありコンパートメントであれば、そのシンクを漏れありシンクと呼ぶことにする。

[例 4.2]

図 4.2 で示されたコンパートメントグラフの各強連結成分について、I, II はソース、III, IV はトランジット、V は漏れありシンク、VI は漏れなしシンクである。

4.3 構造可制御条件

前節でみたように、線形コンパートメントシステムにおけるコンパートメント間の物質の授受の有無や系外への物質の流出の有無は、移行係数 k_{ij} ($i=0,1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n$, $i \neq j$) の零, 非零 (正の実数値) に反映される。また、系外からの物質の流入 (入力) は係数行列 B の非零要素に反映される。従って、(4.5) 式の線形コンパートメン

トシステム (A, B) の構造を

(1) 移行係数 k_{ij} ($i=0, 1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n, i \neq j$) 及び係数行列 B の要素 b_{ij} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$) はそれぞれ零に固定されているかそうでないかに類別できる。ただし、 b_{ij} に関しては、零に固定されていない要素は各行高々1つ、各列必ず1つである。

(2) 零に固定されていない k_{ij} や b_{ij} は互いに独立なパラメータである。

ととらえ、線形コンパートメント構造化システムと呼ぶことにする。

このとき、線形コンパートメント構造化システム (A, B) は構造化システム (第2章, 第2.3節, 定義2.2参照) ではない。係数行列 A の変動要素 (零に固定されていない要素) 間に (4.6.2) 式に示す従属関係 ($k_{oi} \equiv 0$ のとき) が存在するからである。しかし、係数行列 A, B から成る $m \times (m+m)$ 行列 $[AB]$ は列拘束構造化行列 (第2章, 第2.3節, 定義2.3参照) である。実際、 $\{k_{oi}, k_{1i}, \dots, k_{ni}\}$ のうち零に固定されていない移行係数の集合を $K_i = \{k_{s(i)i}, k_{s(i)+1, i}, \dots, k_{s(i)(i), i}\}$ 、ただし、 $0 \leq s(i) < s(i)+1 < \dots < s(i)(i) \leq m$ 、とすれば、係数行列 A の第 i 列 a_i は

$$a_i = \begin{cases} A_i & , K_i = \phi \\ A_i p^{(i)} & , K_i \neq \phi \end{cases} \quad (4.8.1)$$

$$(4.8.2)$$

$\mathbb{F} \in \mathbb{F}$ し.

$$A_i = \begin{cases} n \times 1 \text{ 零行列} & , k_i = \phi & (4.9.1) \\ \left[-e_i + e_{s_1(i)}, -e_i + e_{s_2(i)}, \dots, -e_i + e_{s_{l(i)}(i)} \right] & , k_i \neq \phi & (4.9.2) \end{cases}$$

$$e_j = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0)^T & : n \times 1 & , j = 0 & (4.10.1) \\ (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } j \text{ 要素}}}{1}, 0, \dots, 0)^T & : m \times 1 & , j \neq 0 & (4.10.2) \end{cases}$$

$$p^{(i)} = (k_{s_1(i)}, k_{s_2(i)}, \dots, k_{s_{l(i)}(i)})^T \quad (4.11)$$

で表わされる。また、係数行列 B の零に固定されていない要素の集合を $\{b_{j(i)1}, b_{j(i)2}, \dots, b_{j(i)m}\}$ 、 $\mathbb{F} \in \mathbb{F}$ し、 $1 \leq j(i) < j(i) < \dots < j(m) \leq m$ とすれば、係数行列 B の第 i 列 b_i は

$$b_i = B_i p^{(n+i)} \quad (4.12)$$

$\mathbb{F} \in \mathbb{F}$ し

$$B_i = e_{j(i)} \quad , \quad p^{(n+i)} = (b_{j(i)1}, \dots, b_{j(i)m})^T \quad (4.13)$$

で表わされる。従って、線形コンパートメント構造化システム (A, B) は列拘束構造化システムの特殊な場合であり、(4.9), (4.11), (4.13) 式の数値行列 A_i, B_i と独立パラメータベクトル $p^{(i)}$ を用いて、

$$\mathcal{S}_c = \{ A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m \} \quad (4.14.1)$$

$$I_c = \{ i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid k_i \neq \phi \} \cup \{n+1, \dots, n+m\} = \{i_1, i_2, \dots, i_f, n+1, n+2, \dots, n+m\} \quad (4.14.2)$$

$$p = (p^{(1)T}, p^{(2)T}, \dots, p^{(i)T}, p^{(n+1)}, p^{(n+2)}, \dots, p^{(n+m)})^T \quad (4.14.3)$$

で特徴づけられる。ここで

$$\dim p^{(i)} = \begin{cases} l_i & , i = i_1, i_2, \dots, i_f \\ 1 & , i = n+1, n+2, \dots, n+m \end{cases} \quad (4.15)$$

であり、

$$\sum_{i=1}^f \dim p^{(i)} = \sum_{i=1}^f l_i = M[A] \quad (4.16)$$

と書くことにすれば、

$$N(CAB) (= \dim p) = M[A] + M \quad (4.17)$$

である。

[定義 4.1]

線形コンパートメント構造化システム (A, B) が構造可制御であるとは、ある proper variety $\tilde{V} \subset R_+^{M[A]} \times R^m$ が存在して、任意の $p \in R_+^{M[A]} \times R^m - \tilde{V}$ に対して、

$$\text{rank} [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{m-1}\bar{B}] = M \quad (4.18)$$

が成り立つことである。ただし、

$$R_+ = \{r \in R \mid r \geq 0\} \quad (4.19)$$

であり、行列 \bar{A}, \bar{B} は行列 A, B の独立パラメータに数値を代入して得られる数値行列である。

すなわち、線形コンパートメント構造化システムが構造可制御であるとは、それと同じ構造（コンパートメント間の結合関係やコンパートメントと系外との関係）を持つ線形コンパートメントシステムが、非零の移行係数の値（正の実数）などにはほとんど依存せず、可制御であることを意味する。

線形コンパートメント構造化システムは列拘束構造化システムの特珠な場合であるが、移行係数が非負であるという符号制約のために、独立パラメータ空間は $R^{N(LAB)}$ でなく $R_+^{N(LAB)} \times R^m$ である (定義 3-1, 定義 4-1 参照)。しかし、この独立パラメータ空間の違いは、構造可制御性に関する限り、何ら本質的なものでない。

[補題 4-1]

線形コンパートメント構造化システム (A, B) が構造可制御であることと、ある proper variety $V \subset R^{N(LAB)}$ が存在して、任意の $\mu \in R^{N(LAB)} - V$ に対して、

$$\text{rank} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{m-1}B] = m \quad (4.20)$$

が成り立つこととは等価である。

(証明)

行列 $[B \quad AB \quad \dots \quad A^{m-1}B]$ が独立パラメータベクトル μ の要素の多項式であること、従って、その m 次小行列式も μ の要素の多項式であることから、補題の主張は明らかである。 (証明終)

この補題から、線形コンパートメント構造化システム (A, B) が構造可制御であるための必要十分条件は、第 3 章、第 3.5 節、定理 3.3 で与えられるが、線形コンパートメント構造化システムという特殊性から、定理 3.3 の条件 (1), (2) はコンパートメントグラフで完全に特徴づ

けられる。

[補題 4.2]

線形コンパートメント構造化システム (A, B) に対して系のグラフ $G(A, B)$ が accessible であることとコンパートメントグラフ $G_c(A, B)$ の各ソースが少なくとも一つの入力コンパートメントを持つこととは等価である。

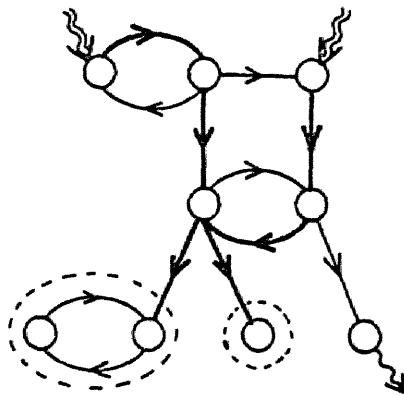
(証明)

系のグラフ $G(A, B)$ から各節点の自己ループを取り除いたグラフは、コンパートメントグラフ $G_c(A, B)$ から漏れ枝を取り除きかつ入力枝に始点を付加したグラフと全く同じである (例えば、図 4.2, 4.3 参照)。従って、補題の主張は明らかである。 (証明終)

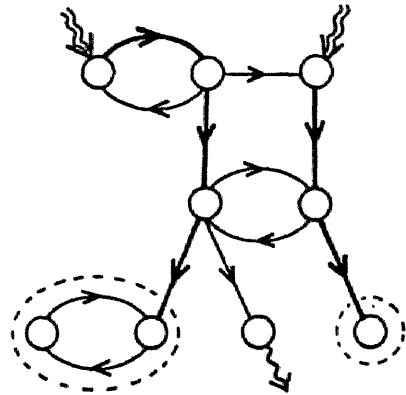
[補題 4.3]

線形コンパートメント構造化システム (A, B) に対して \mathcal{J}_c (第3章、第3.4節、(3.37)式参照) の要素のなかに少なくとも一つのフルランクな行列が存在することと、コンパートメントグラフ $G_c(A, B)$ の各漏れなしリンクが互いに共通節点を持たない順路で入力コンパートメントと結ばれている (図 4.4 参照) こととは等価である。

補題 4.3 を証明するために、 \mathcal{J}_c の要素 $T_{k_1, k_2, \dots, k_m, 1, \dots, 1}$ (4.13), (4.15) 式から、 $k_{m1} = k_{m2} = \dots = k_{mm} = 1$) にコンパートメントグラフ $G_c(A, B)$ の部分グラフを対応づけることを考える。



(a) node-disjoint directed paths do not exist



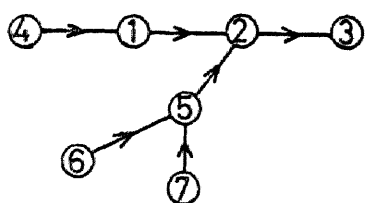
(b) node-disjoint directed paths exist

Fig. 4.4 Condition of Lemma 4.3

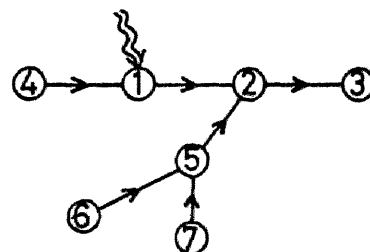
線形コンパートメント構造化システム (A, B) において \mathcal{L}_c の要素 A_i, B_i は (4.9), (4.13) 式で与えられた。この行列 A_i の第 k_i 列 $a_{k_i}^{(i)} = -e_i + e_{S_i(k_i)}$ はコンパートメントグラフ $G_c(A, B)$ の第 i 節点から第 $S_i(k_i)$ 節点への有向枝に対応している。ただし、 $S_i(k_i) = 0$ の場合は第 i 節点からの漏れ枝に対応することになる。

従って、 $\mathcal{L}_c \ni T_{k_1, k_2, \dots, k_m, 1, 1, \dots, 1} = [a_{k_1}^{(1)} a_{k_2}^{(2)} \dots a_{k_m}^{(m)} e_{j(1)} \dots e_{j(m)}]$ に、第 i 節点を始点とする有向枝（漏れ枝を含む）のうち $a_{k_i}^{(i)}$ に対応する枝以外をすべて除去してできるコンパートメントグラフ $G_c(A, B)$ の部分グラフと対応づけることができる。その部分グラフを $G_c^{k_1, k_2, \dots, k_m}$ と書くことにする。このとき、 $G_c^{k_1, k_2, \dots, k_m}$ の各節点はそれを始点とする有向枝（漏れ枝を含む）を高々1つしか持たないという特徴を有することから、 $G_c^{k_1, k_2, \dots, k_m}$ は、一般に、互いに共通節点を持たない6種類の部分グラフ（図4.5参照）から構成さ

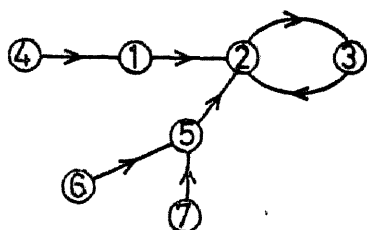
れていることになる。



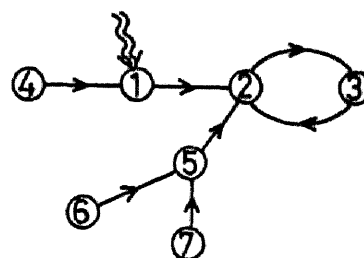
(a) type 1.1
(in-tree)



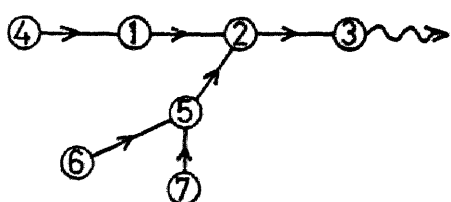
(d) type 2.1
(type 1.1 with input branches)



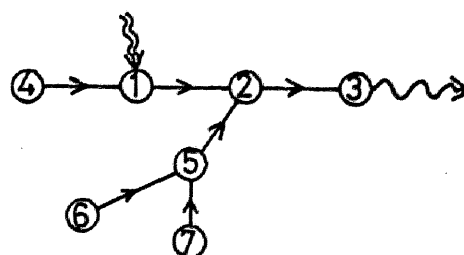
(b) type 1.2
(cycle with in-trees)



(e) type 2.2
(type 1.2 with input branches)



(c) type 1.3
(in-tree whose terminal root
has an excretion branch)

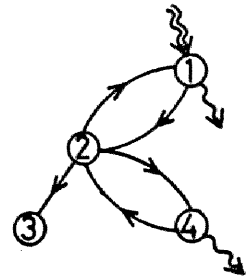


(f) type 2.3
(type 1.3 with input branches)

Fig. 4.5 Six kinds of subgraphs which compose $G_c^{k_1, k_2, \dots, k_n}$

[例 4.2]

図 4.6 に示す コンパートメントグラフを持つ線形コンパートメント構造化システムの係数行列 A , B は

Fig. 4.6 $G_C(A, B)$

$$A = \begin{pmatrix} -k_{01}-k_{21} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & -k_{21}-k_{32}-k_{42} & 0 & k_{24} \\ 0 & k_{32} & 0 & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & -k_{04}-k_{24} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

であり、 $\mathcal{S}_C = \{A_1, A_2, A_3, A_4, B_1\}$ の各要素は

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.22)$$

である。ここで、 A_1 の第 1 列はコンパートメントグラフの第 1 節点からの漏水枝に、第 2 列は第 1 節点から第 2 節点への有向枝に、それぞれ対応している。

\mathcal{S}_C の各要素は

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11111} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{11121} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{12111} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{12121} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ T_{13111} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{13121} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{21111} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{21121} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_{22111} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & T_{22121} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & T_{23111} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & T_{23121} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

となり、各 $G_c^{k_1 k_2 k_3 k_4}$ は図4.7のとおりである。

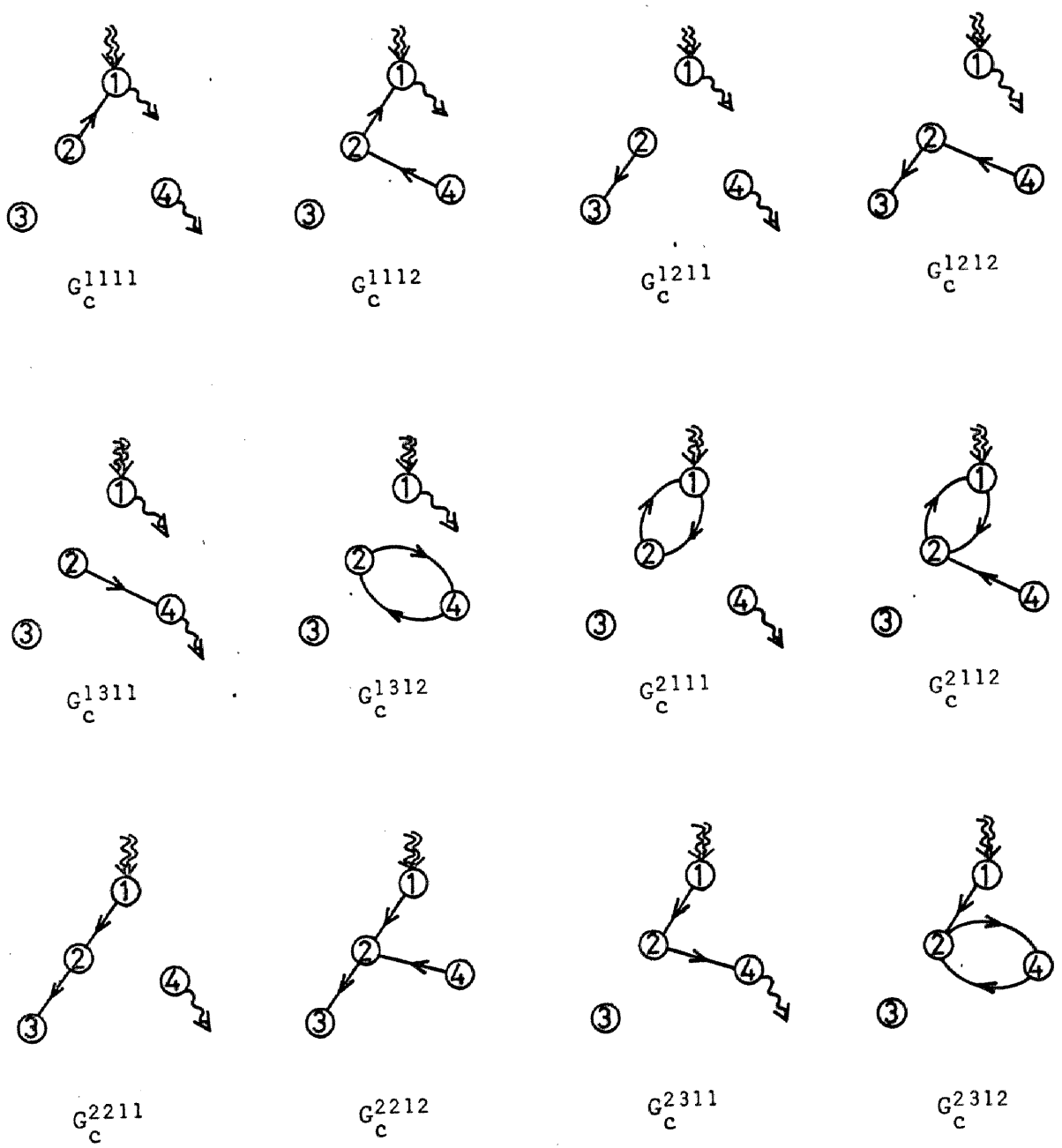


Fig. 4.7 $G_c^{k_1 k_2 k_3 k_4}$

図4.6で示された $G_c^{k_1, k_2, k_3, k_4}$ がどのような部分グラフから成っているかを示すと、表4.1のとおりである。

表4.1 $G_c^{k_1, k_2, k_3, k_4}$ を構成する部分グラフの型

	1.1型	1.2型	1.3型	2.1型	2.2型	2.3型
G_c^{1111}	○		○			○
G_c^{1112}	○					○
G_c^{1211}	○		○			○
G_c^{1212}	○					○
G_c^{1311}	○		○			○
G_c^{1312}	○	○				○
G_c^{2111}	○		○		○	
G_c^{2112}	○				○	
G_c^{2211}			○	○		
G_c^{2212}				○		
G_c^{2311}	○					○
G_c^{2312}	○				○	

(○印で示した部分グラフから成る)

次に、 \mathcal{J}_c の要素 $T_{k_1, k_2, \dots, k_m, 1, \dots, 1}$ のランクと $G_c^{k_1, k_2, \dots, k_m}$ に含まれる部分グラフの型との関係を考える。

いま、 $G_c^{k_1, k_2, \dots, k_m}$ に含まれる $i \cdot j$ 型の部分グラフの個数

という形をしている。ただし、 $T_k^{(2j)}$ の部分行列 U は入力枝に対応する行列であり、

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} \quad (4.27)$$

という形をしている。

(4.26), (4.27) 式から、 $T_k^{(11)}$, $T_k^{(12)}$ はフルランクでないが $T_k^{(33)}$, $T_k^{(21)}$, $T_k^{(22)}$, $T_k^{(32)}$ はフルランクであることがわかる。

従って、 $\mathcal{J}_C \ni T_{k_1, k_2, \dots, k_m, 1, \dots, 1}$ がフルランクであることと、 $G_C^{k_1, k_2, \dots, k_m}$ が 1-1 型及び 1-2 型部分グラフを含まないこととは等価となる。

[例 4.3]

(1) i - j 型部分グラフに対応する行列 $T_k^{(ij)}$ が (4.26) 式のようになることを、図 4.5 に示した部分グラフで確かめてみる。

$$\left. \begin{aligned} T_k^{(11)} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & T_k^{(12)} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ T_k^{(33)} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & T_k^{(21)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} T_k^{(11)} \\ \\ T_k^{(22)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} T_k^{(12)} \\ \\ T_k^{(23)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} T_k^{(13)} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

(2) (4.23) 式の $T_{k_1, k_2, k_3, k_4, 1}$ を用いて, (4.24), (4.25) 式の変換を確かめてみる。実際,

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_{13|21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 \\ 0 & T^{(23)} \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{21|21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 \\ 0 & T^{(23)} \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} T_{22|11} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(3)} & 0 \\ 0 & T^{(21)} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.29)$$

などとなる。ただし、各 $T^{(ij)}$ のブロック数 α_{ij} はすべて 1 である。

(補題 4.3 の証明)

コンパートメントグラフ $G_c(A, B)$ の漏れなしシンのうち、E だけ一つのコンパートメントから成るものを漏れなしシンブルシンクと呼び、複数のコンパートメントから成るものを漏れなしノンシンブルシンクと呼ぶことにする。このとき、どのような $G_c^{k_1, \dots, k_m}$ に対しても、漏れなしシンブルシンクに対応する節点は $G_c^{k_1, \dots, k_m}$ に含まれる 1-1 型もしくは 2-1 型部分グラフの終点 (図 4.5 (a), (d) における第 3 節点) となる。また、漏れなしノンシンブルシンクに対応する節点は $G_c^{k_1, \dots, k_m}$ に含まれる 1-2 型もし

くは 2.2 型部分グラフのサイクル上の節点 (図 4.5 (b), (c) における第 2, 第 3 節点) となる。

従って、1.1 型及び 1.2 型部分グラフを含まない $G_c^{k_1, \dots, k_m}$ が存在するため必要十分条件は、コンパートメントグラフ $G_c(A, B)$ の各漏れなしリンクが互いに共通節点を持たない順路で入力コンパートメントと結ばれていることとなる。

一方、 $\mathcal{J}_c \Rightarrow T_{k_1, \dots, k_m, 1, \dots, 1}$ がフルランクであることと $G_c^{k_1, \dots, k_m}$ が 1.1 型及び 1.2 型部分グラフを含まないこととが等価であった。

従って、補題を証明することができた。

(証明終)

補題 4.2, 補題 4.3 及び第 3 章, 第 3.5 節, 定理 3.3 から、線形コンパートメント構造化システムの構造可制御性に関するグラフ的特徴づけは、次の定理のとおりまとめることができる。

[定理 4.1]

線形コンパートメント構造化システム (A, B) が構造可制御であるための必要十分条件は、次の 2 つの条件が成り立つことである。

- (1) $G_c(A, B)$ において、各ソースは少なくとも 1 つの入力コンパートメントを持つ。
- (2) $G_c(A, B)$ において、各漏れなしリンクは互いに共

通節点を持たない順路で入力コンパートメントと結びつけている。

この定理の条件(2)は、その導出方法から、零モードが generic に可制御であることと等価な条件である。ここでは、 $\mathcal{J}_c \rightarrow T_{k_1, k_2, \dots, k_n, 1, \dots, 1}$ と $G_c^{k_1, k_2, \dots, k_n}$ などを用いて、条件(2)を導出したが、線形コンパートメント構造化システム(A, B)に対して第3章、第3.2節の零モードの generic な可制御条件(2)、(3.7)式を直接考察することによっても定理の条件(2)を導出することができる(文献(41)参照)。また、定理の条件(1)は、その導出方法から、非零モードの generic な可制御性の十分条件であるが、線形コンパートメント構造化システムの特異性から、必要十分条件になっていることを注意しておく(文献(41)参照)。

この定理4.1を用いれば、(4.6)式のような複雑な係数行列 A, B を持つ線形コンパートメントシステムでも図4.2のコンパートメントグラフから、直ちに、パラメータ a, b, \dots, z がほとんどどのような値をとろうとも可制御であることがわかる。また、図4.8(a)は定理4.1の条件(1)が成り立っていないため、(b)は条件(2)が成り立っていないため、パラメータがどのような値であろうとも、可制御になり得ない。Eビシ、図4.8(c)は構造可制御である。

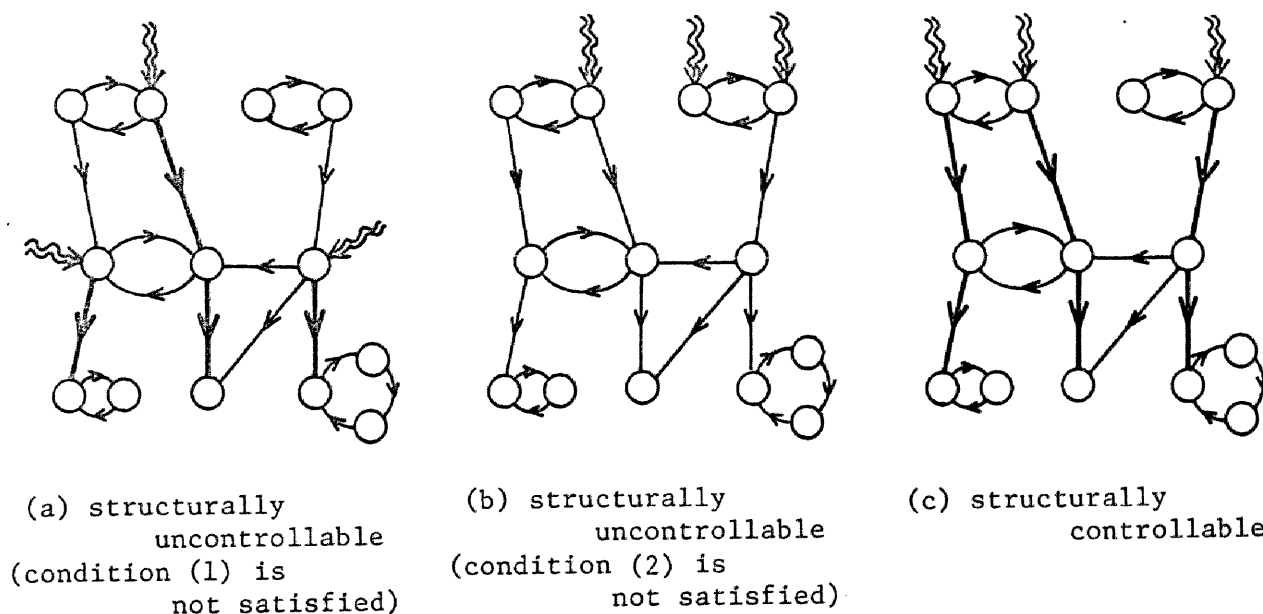


Fig. 4.8 Examples of structurally uncontrollable and controllable compartmental systems

従来、線形コンパートメント構造化システムの構造可制御性に関しては、極めて特殊な構造（ E に一つのシンク）を持つ線形コンパートメントシステムに対してだけその必要十分条件が知られていた⁽⁵²⁾。それは、次の系のとおりであるが、この系は定理4.1から直ちに導かれる。
[系4.1]⁽⁵²⁾

E に一つのシンクを持たない線形コンパートメント構造化システム (A, B) が構造可制御であるための必要十分条件は、 $G_c(A, B)$ において各ソースが少なくとも一つの入力コンパートメントを持つことである。

(証明)

$G_c(A, B)$ が E に一つのシンクを持つとき、 $G_c(A, B)$ のすべての節点からそのシンクへの順路が必ず存在する。

従って、定理 4.1 の条件 (2) は、条件 (1) が成り立つとき、常に成り立つことになる。 (証明終)

また、次の系も定理 4.1 から直ちに導かれる。

[系 4.1]

シンクがすべて漏水ありシンクである線形コンパートメント構造化システム (A, B) が構造可制御であるための必要十分条件は、 $G_c(A, B)$ において各ソースが少なくとも一つの入力コンパートメントを持つことである。

4.4 屯すび

本章では、第 3 章の結果をもとに、線形コンパートメント構造化システムの構造可制御性とコンパートメントグラフとの関係を明らかにした (定理 4.1)。

コンパートメント間の結合構造がわかっている線形コンパートメントシステムにおいて、その入出力関係 (例えば、伝達関数など) から、各移行係数を一意に決定できるかどうかという構造可固定性の問題は、医療分野におけるトレーサ解析診断や大規模システムの故障検出などの問題と深くかかわった興味深い問題である。一方、線形時不変系において、可制御性や可観測性が犯されて

いると、その伝達関数の分母、分子に共通因子が現れ、従って、伝達関数から、系全体の情報を得ることができない。

このようなことから、本章で得られた結果は、線形コンパクトメントシステムの構造可同定性の問題を解決するために、重要な役割を果たすことが期待できる。

第5章 回路網システムの

構造可制御性^{(36),(56),(57)}

5.1 まえがき

本章では、電気抵抗、コンデンサー、コイル及び独立電圧源、独立電流源という理想化された2端子集中定数素子だけから構成された電気回路網システムを取り扱う。このような電気回路網システムでは、各素子の電圧、電流は各素子の特性則及びキルヒホッフの電圧則、電流則(K.V.L., K.C.L.)から容易に得られる線形定係数常微分代数方程式に従う。このとき、この線形定係数常微分代数方程式から、コンデンサーの電圧とコイルの電流を状態変数の候補とし、独立電圧源の電圧と独立電流源の電流を入力として、線形時不変系の状態方程式を得ようとしても、一般に、得られる保証はない。従って、電気回路網システムの可制御性を論ずる場合、最初に考察しなければならないことは、どのようなクラスの電気回路網システムが、コンデンサーの電圧とコイルの電流を状態変数に選んだとき、線形時不変系の状態方程式で記述できるかを明らかにすることである。本章では、まず最初にこの問題を考察し、線形時不変系の状態方程式で記述できる(状態変数はコンデンサーの電圧とコイルの電流)電気回路網システムの構造可制御性(電気抵抗、電

気容量、インダクタンスの値にほとんど無関係に成り立つ可制御性)と回路網グラフの構造との関係を明らかにする。そして、(コンデンサの電圧とコイルの電流を状態変数の候補として)線形時不変系の状態方程式で記述できない電気回路網システムに関して、その可制御性をどのように考え、その判定条件として回路網グラフがどのような構造を持っていなければならないかなどの問題を考察する。

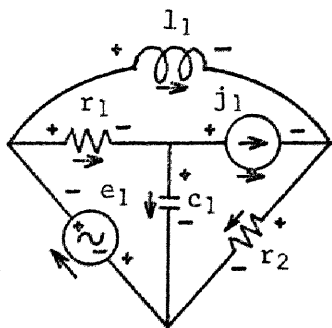
なお、よく知られているように、機械系、流体系(音響系、液体系)、熱伝導系、拡散系などの線形システムは電気系とのアナロジーを有する⁽⁵⁸⁾ので、本章の結果は電気回路網システムにとどまることなく、広範な物理系の分野で利用することができる。

5.2 状態方程式と回路網グラフ

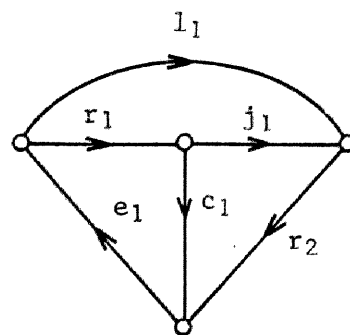
本節では、どのような回路網グラフを持つ電気回路網システムにおいて、線形定係数常微分・代数方程式(各素子の特性則 + K.V.L. + K.C.L.)から線形時不変系の状態方程式(状態変数: コンデンサの電圧とコイルの電流, 入力: 独立電圧源の電圧と独立電流源の電流)を得ることができるかを明らかにする。

n_c 個のコンデンサ(各コンデンサの電気容量は C_i

C_2, \dots, C_{m_c}), N_l 個のコイル (各コイルのインダクタンスは l_1, l_2, \dots, l_{N_l}), N_r 個の電気抵抗 (各電気抵抗の抵抗は r_1, r_2, \dots, r_{N_r}) 及び N_e 個の独立電圧源 (各独立電圧源の電圧は $e_1(t), e_2(t), \dots, e_{N_e}(t)$ で表わす), N_j 個の独立電流源 (各独立電流源の電流は $j_1(t), j_2(t), \dots, j_{N_j}(t)$ で表わす) から成る電気回路網システムを考える。これらの素子の結合構造は、図5.1に示すように、重み付き有向多色枝グラフである回路網グラフ $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ で表現される⁽⁵⁹⁾。ここで、 $\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j$ はそれぞれコンデンサーに対応する有向枝 (C枝と呼ぶ) の集合、電気抵抗に対応する有向枝 (r枝と呼ぶ) の集合、コイルに対応する有向枝 (l枝と呼ぶ) の集合、独立電圧源に対応する有向枝 (e枝と呼ぶ) の集合、独立電流源に対応する有向枝 (j枝と呼ぶ) の集合である。ただし、回路網グラフの枝の方向は各素子の電流の基準方向と一致するようにとる。また



(a) electrical network



(b) network graph

Fig. 5.1 Electrical network and its network graph

各素子の電圧の基準極性は、電流の基準方向に対して標準的に定められているものとする（図5.1 (a)の“→”と“+”、“-”の関係参照）。

電気回路網システムを構成している各素子の電圧、電流が従う線形定係数常微分・代数方程式の導出は、回路網グラフの規準木に着目すると、極めて容易である。

回路網グラフ $\mathcal{G}(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ のある木 \mathcal{T} が規準木であるとは、次の2つの条件を満たすことである⁽⁶⁰⁾。

$$(1) \mathcal{T} \cap \beta_e = \beta_e, \quad \mathcal{T}^c \cap \beta_j = \beta_j \quad (5.1)$$

(2) (1) を満たす任意の木 \mathcal{T}' に対して

$$|\mathcal{T} \cap \beta_c| \geq |\mathcal{T}' \cap \beta_c|, \quad |\mathcal{T} \cap \beta_l| \geq |\mathcal{T}' \cap \beta_l| \quad (5.2)$$

ここで、 \mathcal{T}^c は、回路網グラフの全枝集合 β 。

$$\beta = \beta_c \cup \beta_r \cup \beta_l \cup \beta_e \cup \beta_j \quad (5.3)$$

における \mathcal{T} の補集合を表わし、 $| \cdot |$ は集合の要素の総数を表わす。特に、規準木 \mathcal{T} が

$$(3) \mathcal{T} \cap \beta_c = \beta_c, \quad \mathcal{T}^c \cap \beta_l = \beta_l \quad (5.4)$$

を満たすとき、 \mathcal{T} は狭義の規準木と呼ばれる⁽⁶⁰⁾。

そこで、最初に、規準木や狭義の規準木を持つ回路網グラフの構造を明らかにしておく。

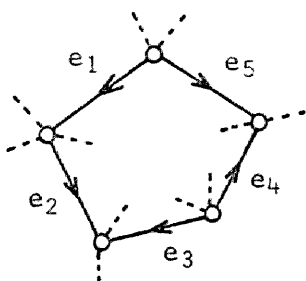
[補題5.1]

回路網グラフ $\mathcal{G}(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ が

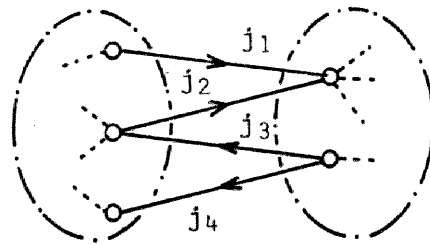
(1) 規準木を持つための必要十分条件は、 e 枝だけから成るループ (e ループと呼ぶ) も j 枝だけから成るカッ

トセット (j カットセットと呼ぶ) も存在しないことである (図 5.2 参照)。

(2) 狭義の規準木を持つための必要十分条件は, C 枝や e 枝だけから成るループ (C - e ループと呼ぶ) も l 枝や j 枝だけから成るカットセット (l - j カットセットと呼ぶ) も存在しないことである (図 5.3 参照)。

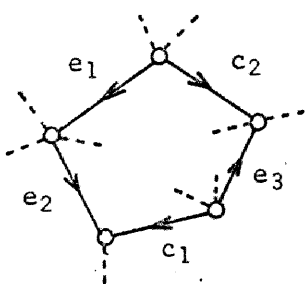


(a) e loop

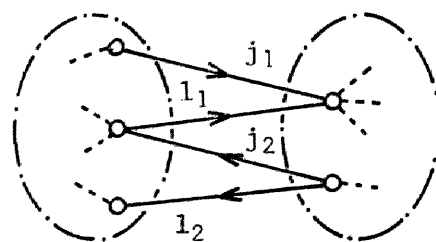


(b) j cutset

Fig. 5.2 Examples of e loop and j cutset



(a) c-e loop



(b) l-j cutset

Fig. 5.3 Examples of c-e loop and l-j cutset

(補題 5.1 の証明)

(1), (2) とも同様に証明できるので, (2) だけを証明する。

必要性：狭義の規準木の性質 (5.1), (5.4) 式より、回路網グラフ $\mathcal{G}(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ のすべての c 枝と e 枝は一つの木に属することになる。従って、 c - e ループは存在しない。 l - j カットセットが存在しないことも明らかである。

十分性：回路網グラフ $\mathcal{G}(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ のある木 \mathcal{T}_0 を考える。 $\mathcal{T}_0^c \cap (\beta_c \cup \beta_e) \neq \emptyset$ ならば、 c - e ループが存在しないので、 $\mathcal{T}_0^c \cap (\beta_c \cup \beta_e) \ni b_0$ で定められる基本ループ \mathcal{L}_{b_0} において、 $\mathcal{L}_{b_0} \cap (\beta_r \cap \beta_l \cap \beta_j) \neq \emptyset$ である。そこで、 $\mathcal{L}_{b_0} \cap (\beta_r \cap \beta_l \cap \beta_j) \ni b'_0$ と b_0 を入れ換えることにより、 $\mathcal{T}_1^c = (\mathcal{T}_0^c - \{b_0\}) \cup \{b'_0\}$ なる新しい補木を得ることができ、かつ、 $|\mathcal{T}_0^c \cap (\beta_c \cup \beta_e)| \neq |\mathcal{T}_1^c \cap (\beta_c \cup \beta_e)|$ が成り立つ。従ってこのような補木の初等変換⁽¹⁾を有限回 (k 回) くり返すことにより、 $|\mathcal{T}_k^c \cap (\beta_c \cup \beta_e)| = 0$ なる補木 \mathcal{T}_k^c を得る。すなわち、木 \mathcal{T}_k は $\mathcal{T}_k \supset (\beta_c \cup \beta_e)$ なる性質を持つ。

さらに、 $\mathcal{T}_k \cap (\beta_l \cup \beta_j) \neq \emptyset$ ならば、 l - j カットセットが存在しないので、 $\mathcal{T}_k \cap (\beta_l \cup \beta_j) \ni b_k$ で定められる基本カットセット \mathcal{L}_{b_k} において、 $\mathcal{L}_{b_k} \cap \beta_r \neq \emptyset$ である。そこで、 $\mathcal{L}_{b_k} \cap \beta_r \ni b'_k$ と b_k を入れ換えることにより、 $\mathcal{T}_{k+1} = (\mathcal{T}_k - \{b_k\}) \cup \{b'_k\}$ なる新しい木を得ることができ、かつ、 $|\mathcal{T}_k \cap (\beta_l \cup \beta_j)| \neq |\mathcal{T}_{k+1} \cap (\beta_l \cup \beta_j)|$ が成り立つ。このとき、 $\mathcal{T}_{k+1} \supset (\beta_c \cup \beta_e)$ なる性質は保存されることを注意しておく。従って、このような木の初等変換⁽¹⁾を有限回 (m 回) くり返すことにより、 $|\mathcal{T}_{k+m} \cap (\beta_l \cup \beta_j)| = 0$ なる木 \mathcal{T}_{k+m} を得る。すなわち、 $\mathcal{T}_{k+m}^c \cap (\beta_l \cup \beta_j) = \emptyset$ 。かつ、

$\mathcal{T}_{k+m} \cap (\beta_c \cup \beta_e) = \beta_c \cup \beta_e$ 、従って、(5.1)、(5.2)、(5.4) 式を満たす木 \mathcal{T}_{k+m} をみつけることができた。

(証明終)

独立電圧源と独立電流源を考えているので、回路網グラフ $\mathcal{G}(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ にエループやカットセットが存在しないとしてよい。すなわち、補題5.1から、 $\mathcal{G}(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ には常に規準木が存在するとしてよい。ただし、常に狭義の規準木が存在するとは限らない。

さて、回路網グラフ $\mathcal{G}(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ のある規準木 \mathcal{T}^* に着目し、電気回路網システムを構成する各素子の電圧と電流が従う線形定係数常微分・代数方程式を求めてみる。いま、規準木 \mathcal{T}^* とその補木 \mathcal{T}^{*c} が

$$\mathcal{T}^* = \beta_c^* \cup \beta_r^* \cup \beta_e \cup \beta_l^* \quad (5.5.1)$$

$$\mathcal{T}^{*c} = \beta - \mathcal{T}^* = \beta_{\tilde{c}} \cup \beta_{\tilde{r}} \cup \beta_j \cup \beta_{\tilde{e}} \quad (5.5.2)$$

であり、

$$|\beta_c^*| = m_c^* \quad , \quad |\beta_r^*| = m_r^* \quad , \quad |\beta_l^*| = m_l^* \quad (5.6.1)$$

$$|\beta_{\tilde{c}}| = m_{\tilde{c}} \quad , \quad |\beta_{\tilde{r}}| = m_{\tilde{r}} \quad , \quad |\beta_{\tilde{e}}| = m_{\tilde{e}} \quad (5.6.2)$$

とする。ここで、

$$m_c^* + m_{\tilde{c}} = m_c (= |\beta_c|) \quad (5.7.1)$$

$$m_r^* + m_{\tilde{r}} = m_r (= |\beta_r|) \quad (5.7.2)$$

$$m_l^* + m_{\tilde{e}} = m_l (= |\beta_l|) \quad (5.7.3)$$

である。さらに、

v_c^*, i_c^*	: β_c^* に属する枝の枝電圧ベクトル, 枝電流ベクトル		
v_r^*, i_r^*	: β_r^*	"	"
v_l^*, i_l^*	: β_l^*	"	"
$v_{\tilde{c}}, i_{\tilde{c}}$: $\beta_{\tilde{c}}$	"	"
$v_{\tilde{r}}, i_{\tilde{r}}$: $\beta_{\tilde{r}}$	"	"
$v_{\tilde{l}}, i_{\tilde{l}}$: $\beta_{\tilde{l}}$	"	"
v_e, i_e	: β_e	"	"
v_j, i_j	: β_j	"	"

とし、

$$v = (v_{\tilde{l}}^T, v_{\tilde{r}}^T, v_j^T, v_{\tilde{c}}^T, v_c^T, v_r^T, v_e^T, v_l^T)^T \quad (5.8.1)$$

$$i = (i_{\tilde{l}}^T, i_{\tilde{r}}^T, i_j^T, i_{\tilde{c}}^T, i_c^T, i_r^T, i_e^T, i_l^T)^T \quad (5.8.2)$$

とする。このとき、各素子の特性則と K.V.L., K.C.L. を書けば、

< 特性則 >

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} C^* & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c^* \\ v_{\tilde{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_c^* \\ i_{\tilde{c}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{L} & 0 \\ 0 & L^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{\tilde{l}} \\ i_l^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\tilde{l}} \\ v_l^* \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & I_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r^* \\ v_{\tilde{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{nr} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_r^* \\ i_{\tilde{r}} \end{pmatrix} \\ v_e = - \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{ne} \end{pmatrix} \triangleq -e, \quad i_j = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_{nj} \end{pmatrix} \triangleq j \end{array} \right. \quad (5.9)$$

< K.V.L. >

$$Bv = 0 \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} v_{\tilde{l}} \\ v_{\tilde{r}} \\ v_j \\ v_{\tilde{c}} \end{pmatrix} = -B_p \begin{pmatrix} v_c^* \\ v_r^* \\ v_e \\ v_l^* \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

< K.C.L. >

$$Q i = 0 \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} i_c^* \\ i_r^* \\ i_e \\ i_d^* \end{pmatrix} = B_p^T \begin{pmatrix} i_{\tilde{d}} \\ i_r \\ i_j \\ i_{\tilde{e}} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

となる。ただし、

$$C^* = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_{n_c^*}), \quad \tilde{C} = \text{diag}(C_{n_c^*+1}, C_{n_c^*+2}, \dots, C_{n_c})$$

$$\tilde{L} = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_{n_{\tilde{d}}}), \quad L^* = \text{diag}(L_{n_{\tilde{d}}+1}, L_{n_{\tilde{d}}+2}, \dots, L_{n_L})$$

$$G = \text{diag}(Y_{n_g^*}, Y_{n_g^*+1}, \dots, Y_{n_g}), \quad R = \text{diag}(Y_{n_r^*+1}, Y_{n_r^*+2}, \dots, Y_{n_r})$$

 I_k : $k \times k$ 単位行列

であり、行列 B は規準木 J^* に関する基本閉路行列、行列 Q は J^* に関する基本カットセット行列であり、

$$B = \begin{bmatrix} I_{(n_{\tilde{d}}+n_r+n_j+n_e)} & B_p \end{bmatrix} \quad (5.12.1)$$

$$B_p = \begin{matrix} & p_c^* & p_r^* & p_e & p_d^* \\ p_c^* & \begin{pmatrix} B_{p_c^*} & B_{p_r^*} & B_{p_e} & B_{p_d^*} \\ B_{r_c^*} & B_{r_r^*} & B_{r_e} & 0 \\ B_{j_c^*} & B_{j_r^*} & B_{j_e} & B_{j_d^*} \\ B_{e_c^*} & 0 & B_{e_e} & 0 \end{pmatrix} & & & \\ p_r^* & & & & \\ p_j & & & & \\ p_e & & & & \end{matrix} : B \text{ の主要部分} \quad (5.12.2)$$

$$Q = \begin{bmatrix} -B_p^T & I_{(n_c^*+n_r^*+n_e+n_d^*)} \end{bmatrix} \quad (5.12.3)$$

で与えられる。(60)

次に、(5.9)、(5.10)、(5.11) 式の線形定係数常微分・代数方程式から、コンデンサの電圧 $v_c^*, v_{\tilde{c}}$ 、コイルの電流 $i_r^*, i_{\tilde{r}}$ 状態変数の候補とし、独立電圧源の電圧 e 、

独立電流源の電流 j を入力として、線形時不変系の状態方程式を導出することを考える。(5.9), (5.10), (5.11) 式から、 $i_c^*, i_{\tilde{c}}, v_{\tilde{c}}^*, v_{\tilde{r}}, i_r^*, v_r, v_e, i_j$ を消去すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} C^* & 0 & -B_{\tilde{c}c}^T \tilde{C} & 0 \\ 0 & \tilde{L} & 0 & B_{\tilde{r}r} L^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c^* \\ i_{\tilde{r}} \\ v_{\tilde{c}} \\ i_{\tilde{r}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_{\tilde{r}c}^T & 0 & 0 \\ -B_{\tilde{c}c}^* & 0 & 0 & 0 \\ -B_{\tilde{c}c}^* & 0 & -I_{nc} & 0 \\ 0 & B_{\tilde{r}r}^* & 0 & -I_{nr}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c^* \\ i_{\tilde{r}} \\ v_{\tilde{c}} \\ i_{\tilde{r}}^* \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & B_{rc}^* \\ -B_{\tilde{r}r}^* & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r^* \\ i_r^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{jc}^T \\ B_{re} & 0 \\ B_{re} & 0 \\ 0 & B_{jr}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ j \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (5.13.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} G & -B_{rr}^T \\ B_{rr}^* & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r^* \\ i_r^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_{\tilde{r}r}^T \\ -B_{rc}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c^* \\ i_{\tilde{r}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{jr}^T \\ B_{re} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ j \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (5.13.2)$$

を得る。さらに、(5.13.2) 式から v_r^*, i_r^* を解き、(5.13.1) 式に代入することにより、

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} C^* & 0 & -B_{\tilde{c}c}^T \tilde{C} & 0 \\ 0 & \tilde{L} & 0 & B_{\tilde{r}r} L^* \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_c^* \\ i_{\tilde{r}} \\ v_{\tilde{c}} \\ i_{\tilde{r}}^* \end{pmatrix} \\ & = \left(\begin{array}{cc|cc} \left(\begin{array}{cc} 0 & B_{\tilde{r}c}^T \\ -B_{\tilde{c}c}^* & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & B_{rc}^* \\ -B_{\tilde{r}r}^* & 0 \end{array} \right) (G - B_{rr}^T)^{-1} \left(\begin{array}{cc} 0 & B_{\tilde{r}r}^T \\ -B_{rc}^* & 0 \end{array} \right) & & 0 & \\ \hline & \left(\begin{array}{cc} -B_{\tilde{c}c}^* & 0 \\ 0 & B_{\tilde{r}r}^* \end{array} \right) & & -I_{(nc+nr)} \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_c^* \\ i_{\tilde{r}} \\ v_{\tilde{c}} \\ i_{\tilde{r}}^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_{jc}^T \\ B_{je} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{rc}^T \\ -B_{rr} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -B_{rr}^T \\ B_{rr} & R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_{jr}^T \\ B_{re} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} B_{ce} & 0 \\ 0 & B_{jr}^T \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ j \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

を得る。この(5.14)式のように左辺の係数行列が正則でない方程式、つまり、正則でない行列 K を用いて、

$$K \dot{z} = Az + Bu \quad (5.15)$$

$$K, A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{m \times m}$$

と書ける方程式は中間標準形方程式と呼ばれ、変数 z は中間変数と呼ばれている⁽⁶¹⁾。そして、この中間標準形方程式から、線形時不変系の状態方程式への変換方法がいろいろ提案されている^{(62)~(64)}が、中間変数 z の一部 x をそのまま状態変数とする方法では、一般に、

$$\dot{x} = Ax + Bu + \sum_{i=1}^k B_i u^{(i)} \quad (5.16)$$

$$A \in R^{n \times n}, \quad B, B_1, \dots, B_k \in R^{m \times m}$$

$u^{(i)}$: u の i 階微分

という、入力 u の微分項を右辺に含む方程式に変換できるにすぎず、線形時不変系の状態方程式を得ることはできない。(5.14)式の中間標準形方程式も例外ではない。つまり、電気回路網システムでは、すべてのコンデンサの電圧とすべてのコイルの電流(あるいはその一部)を状態変数に選んだとき、その動的挙動は一般に線形時

不変系の状態方程式で記述することはできない。

しかし、もし回路網グラフに狭義の規準木が存在するならば、すべてのコンデンサの電圧とすべてのコイルの電流を状態変数として、その動的挙動を常に線形時不変系の状態方程式で記述することができる。

実際、回路網グラフ $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ に狭義の規準木が存在すれば、そのある狭義の規準木 T^* に着目することによって、

$$T^* = \beta_c \cup \beta_r^* \cup \beta_e, \quad T^{*c} = \beta_l \cup \beta_r^* \cup \beta_j \quad (5.17)$$

及び、 T^* に関する基本閉路行列の主要部分 B_p

$$B_p = \begin{pmatrix} B_{lc} & B_{lr}^* & B_{le} \\ B_{rc} & B_{rr}^* & B_{re} \\ B_{jc} & B_{jr}^* & B_{je} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

から、(5.13)式は、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_{lc}^T \\ -B_{lc} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{rc}^T \\ -B_{rr}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r^* \\ i_r^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{jc}^T \\ B_{le} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ j \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.19.1)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} G & -B_{rr}^* \\ B_{rr}^* & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r^* \\ i_r^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_{rr}^* \\ -B_{rc} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{jr}^* \\ B_{re} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ j \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.19.2)$$

となる。EはE'し、

$$C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_{m_c}), \quad L = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_{n_l})$$

であり、 v_c, i_l は β_c に属する枝の枝電圧ベクトル、 β_l に属する枝の枝電流ベクトルである。従って、(5.14)式は

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_c \\ i_l \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B_{lc}^T \\ -B_{lc} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{fc}^T \\ -B_{lr}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -B_{fr}^T \\ B_{rr}^* & R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_{lr}^T \\ -B_{fc} & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_c \\ i_l \end{pmatrix} \\ + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B_{jc}^T \\ B_{le} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{fc}^T \\ -B_{lr}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -B_{fr}^T \\ B_{rr}^* & R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_{jc}^T \\ B_{le} & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} e \\ j \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

となり、左辺の係数行列が正則なので、

$$x = (u_c^T \ i_l^T)^T, \quad u = (e^T \ j^T)^T \quad (5.21)$$

$$A = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B_{lc}^T \\ -B_{lc} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{fc}^T \\ -B_{lr}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -B_{fr}^T \\ B_{rr}^* & R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_{lr}^T \\ -B_{fc} & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (5.22.1)$$

$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B_{jc}^T \\ B_{le} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{fc}^T \\ -B_{lr}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -B_{fr}^T \\ B_{rr}^* & R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_{jc}^T \\ B_{le} & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (5.22.2)$$

を導入すれば、線形時不変系の状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.23)$$

を得る。

以上のことから、電気回路網システムの動的挙動の記述に関して、次のとおりまとめることができる。

[性質 5.1]

コンデンサの電圧やコイルの電流を状態変数として状態方程式を求めようとするとき、

(1) 回路網グラフに狭義の規準木が存在する場合

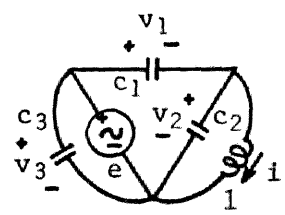
(5.21), (5.22), (5.23) 式の線形時不変系の状態方程式が得られる。状態変数は、すべてのコンデンサの電圧とすべてのコイルの電流である。

(2) 回路網グラフに狭義の規準木が存在しない場合

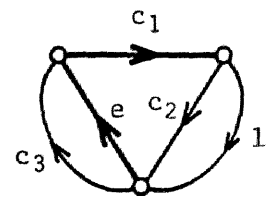
(5.14) 式の中間標準形方程式を得る。状態変数としてコンデンサーの電圧やコイルの電流そのものを選ぶ限り(それらの線形結合は考えない)、一般に、線形時不変系の状態方程式を得ることはできない。

[例 5.1]

図 5.4 (a) に示す電気回路網システムの回路網グラフは (b) のとおりである。C-e ループが存在するので、狭義の規準木は存在しない。そこで、まず、中間標準方程式を、回路網グラフの太線で示した規準木に着目して、求めてみると、



(a) electrical network



(b) network graph

Fig. 5.4 Electrical network with no proper normal tree

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ i \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e \quad (5.24)$$

を得る。さらに、この中間標準形方程式に Fetzweis のアルゴリズム⁽⁶³⁾を適用すると、

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_1+c_2} \\ -\frac{1}{l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{l} \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} \frac{c_2}{c_1+c_2} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{e} \quad (5.25)$$

となり、線形時不変系の状態方程式は得られない。

5.3 狭義の規準木が存在する

回路網システムの構造可制御性⁽³⁶⁾⁽⁵⁶⁾

この節では狭義の規準木が存在する回路網グラフを有する電気回路網システムだけを考える。その動的挙動は前節で示したとおり、線形時不変系の状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.26)$$

に従う。ここで、状態変数 x はすべてのコンデンサの電圧とすべてのコイルの電流から成る $(n_c + n_l)$ 次元ベクトルであり、入力 u はすべての独立電圧源の電圧とすべての独立電流源の電流から成る $(m_e + n_j)$ 次元ベクトルである（(5.21) 式参照）。また、係数行列 A, B は、コンデンサの電気容量 $\{C_1, C_2, \dots, C_{m_c}\}$ 、コイルのインダクタンス $\{L_1, L_2, \dots, L_{n_l}\}$ 、電気抵抗の抵抗 $\{R_1, R_2, \dots, R_{m_r}\}$ の関数である（(5.22) 式参照）。そこで、これら各素子の特性定数をすべて独立パラメータと考えたとき、(5.26) 式を電気回路網構造化システム (A, B) と呼ぶことにし、その独立パラメータ空間 R^N ($E \in R, N = n_c + n_r + n_l$) のほとんど到るところで可制御であるとき、電気回路網構造化システム (A, B) は構造可制御であると呼ぶことにする。

[定義 5.1]

電気回路網構造化システム (A, B) が構造可制御であるとは、ある proper variety $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^N$ が存在して、任意の $\bar{p} = (c_1, c_2, \dots, c_{m_c}, l_1, l_2, \dots, l_{m_l}, r_1, r_2, \dots, r_{m_r}) \in \mathbb{R}^N - \tilde{V}$ に対して、

$$\text{rank} [\bar{B} \quad \bar{A} \bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{M_c + M_l - 1} \bar{B}] = M_c + M_l \quad (5.27)$$

が成り立つことである。ただし、行列 \bar{A}, \bar{B} は行列 A, B の独立パラメータに数値を代入して得られる数値行列である。

本節の目的は、電気回路網構造化システムの構造可制御性と回路網グラフとの関係を明らかにすることである。

電気回路網構造化システム (A, B) は、一般に、第2章第2.3節で定義した拘束構造化システムの1つとみることとはできない。独立パラメータ r_1, r_2, \dots, r_{m_r} が係数行列 A, B に、かなり複雑に、関与しているからである（(5.22)式参照）。従って、第3章の結果を直接適用することとはできない。しかし、次の補題によって、第3章で行った議論と平行した議論が可能となる。

[補題 5.2]

電気回路網構造化システム (A, B) が構造可制御であるための必要十分条件は、ある proper variety $V \subset \mathbb{R}^N$ が存在して、任意の $\bar{p} = (c_1, c_2, \dots, c_{m_c}, l_1, l_2, \dots, l_{m_l}, r_1, r_2, \dots, r_{m_r}) \in \mathbb{R}^N - V$ に対して、

$$\text{rank} \left[\begin{pmatrix} sI_{n_c+n_e} & 0 \\ 0 & I_{n_r} \end{pmatrix} - \bar{A} \quad \bar{B} \right] = N(n_c+n_e+n_r) \quad \text{for } \forall s \in \mathbb{C} \quad (5.28)$$

が成り立つことである。ただし、行列 \hat{A} , \hat{B} は

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1}B_{jc}^T & 0 & C^{-1}B_{rc}^T \\ -L^{-1}B_{lc} & 0 & -L^{-1}B_{lr}^* & 0 \\ 0 & G^{-1}B_{lr}^T & 0 & G^{-1}B_{rr}^T \\ -R^{-1}B_{rc} & 0 & -R^{-1}B_{rr}^* & 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix} \quad (5.29.1)$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1}B_{jc}^T \\ L^{-1}B_{lc} & 0 \\ 0 & G^{-1}B_{lr}^T \\ R^{-1}B_{rc} & 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix} \quad (5.29.2)$$

であり、行列 \bar{A} , \bar{B} は行列 \hat{A} , \hat{B} の独立パラメータに数値を代入して得られる数値行列である。

(証明)

$$\left[\begin{pmatrix} sI_{n_c+n_e} & 0 \\ 0 & I_{n_r} \end{pmatrix} - \hat{A} \quad \hat{B} \right] = \begin{pmatrix} sI_{n_c+n_e} - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & \hat{B}_1 \\ -\hat{A}_{21} & I_{n_r} - \hat{A}_{22} & \hat{B}_2 \end{pmatrix} \quad \text{に対して、}$$

$$\begin{pmatrix} I_{n_c+n_e} & \hat{A}_{12}(I_{n_r} - \hat{A}_{22})^{-1} \\ 0 & I_{n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_{n_c+n_e} - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & \hat{B}_1 \\ -\hat{A}_{21} & I_{n_r} - \hat{A}_{22} & \hat{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_c+n_e} & 0 & 0 \\ 0 & (I_{n_r} - \hat{A}_{22})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_c+n_e} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sI_{n_c+n_e} - A & 0 & B \\ 0 & I_{n_r} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

であることが、(5.22), (5.29) 式より、容易に確かめられる。

一方、電気回路網構造化システム (A, B) が構造可制御であることと、ある proper variety $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^N$ が存在して、任意の $p \in \mathbb{R}^N - \tilde{V}$ に対して、

$$\text{rank} [sI - \bar{A} \quad \bar{B}] = m + n_L \quad \text{for } \forall s \in \mathbb{C} \quad (5.31)$$

が成り立つこととは等価である。

従って、補題の主張は明らかである。 (証明終)

補題 5.2 から、電気回路網構造化システム (A, B) が構造可制御であることと、

(1) ある proper variety $V_1 \subset \mathbb{R}^N$ が存在して、任意の $p \in \mathbb{R}^N - V_1$ に対して、

$$\text{rank} \left[\begin{pmatrix} sI_{n_c+n_L} & 0 \\ 0 & I_{n_r} \end{pmatrix} - \bar{\hat{A}} \quad \bar{\hat{B}} \right] = N \quad \text{for } \forall s (\neq 0) \in \mathbb{C} \quad (5.32)$$

が成り立つ。

(2) ある proper variety $V_2 \subset \mathbb{R}^N$ が存在して、任意の $p \in \mathbb{R}^N - V_2$ に対して

$$\text{rank} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_r} \end{pmatrix} - \bar{\hat{A}} \quad \bar{\hat{B}} \right] = N \quad (5.33)$$

が成り立つ。

という 2 条件が満たされることとが等価になる。ここで、行列 \hat{A}, \hat{B} は (5.29) 式で与えられる行列である。

従って、第3章、第3.2節のときと同様に、ここでも条件(1)が満たされるとき、電気回路網構造化システム(A, B)の非零モードは generic に可制御であると呼び、条件(2)が満たされるとき、零モードは generic に可制御であると呼ぶことにする。

最初に、非零モードの generic な可制御性について考える。

Coates グラフ $G(\hat{A}, \hat{B})$ は $(m_c + n_l + n_r + n_e + n_j)$ 個の節点を持つ重み付き有向グラフである。行列 \hat{B} の列に対応する $(m_e + n_j)$ 個の節点は origin と呼ばれたが、ここでは、行列 \hat{B} の第1列から第 m_e 列に対応する節点を e 節点、第 $(m_e + 1)$ 列から第 $(m_e + n_j)$ 列に対応する節点を j 節点と呼ぶことにする。さらに、行列 \hat{A} の第1列から第 m_c 列に対応する節点を c 節点、第 $(m_c + 1)$ 列から第 $(m_c + n_l)$ 列に対応する節点を l 節点、第 $(m_c + n_l + 1)$ 列から第 $(m_c + n_l + n_r^*)$ 列に対応する節点を r^* 節点、第 $(m_c + n_l + n_r^* + 1)$ 列から第 $(m_c + n_l + n_r)$ 列に対応する節点を r 節点と呼ぶことにする。

[補題 5.3]

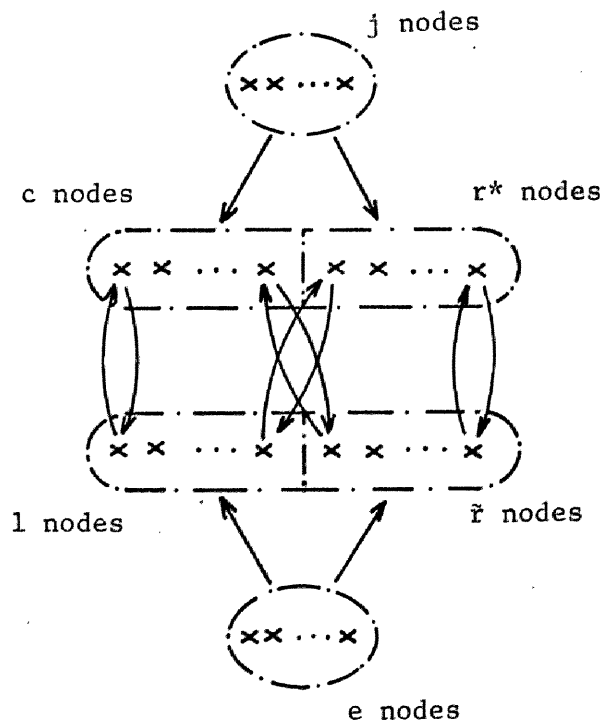
電気回路網構造化システム(A, B)の非零モードが generic に可制御であるための必要十分条件は、 $G(\hat{A}, \hat{B})$ において零節点以外のすべての c 節点と l 節点が少なくとも一つの e 節点か j 節点とある順極列で結ばれていることである。

(証明)

(5.32) 式の $\begin{pmatrix} sI_{nc+nq} & 0 \\ 0 & I_{mr} \end{pmatrix}$ が $sI_{nc+nq+mr}$ でないので、若干の注意を要するが、行列 $[\hat{A} \hat{B}]$ が行拘束構造化行列である（(5.29)式参照）ので、第3章、第3.3節、定理3.1の証明とほぼ同様に証明することができる。従って、ここで詳細な証明をくり返すことは省く。 (証明終)

一方、行列 \hat{A}, \hat{B} の形（(5.29)式参照）より、 $G(\hat{A}, \hat{B})$ は次の性質を有する（図5.5参照）。

(1) C 節点や r^* 節点の間に有向枝は存在しない。l 節点や \tilde{r} 節点の間にも有向枝は存在しない。また e 節点から C 節点や r^* 節点への有向枝は存在しない。さらに j 節点から l 節点や \tilde{r} 節点への有向枝も存在しない。（もちろん、e 節点や j 節点は origin なので、e 節点や j 節点の間の有向枝や C 節点、l 節点、 r^* 節点、 \tilde{r} 節点から e 節点、j 節点への有向枝は存在しない。）



(2) C 節点か r^* 節点である節点 x_i から l 節

Fig. 5.5 $G(\hat{A}, \hat{B})$

点 γ 節点である節点 x_j への有向枝が存在すれば、節点 x_j から節点 x_i への有向枝が存在する。また、逆も成り立つ。

従って、 $G(\hat{A}, \hat{B})$ の随伴無向グラフ⁽³²⁾ を $G^\#(\hat{A}, \hat{B})$ で表せば、この $G(\hat{A}, \hat{B})$ の性質(1), (2) より、次の補題が成り立つ。

[補題 5.4]

$G^\#(\hat{A}, \hat{B})$ の連結成分⁽³²⁾のうち、少なくとも1つの C 節点か γ 節点を含む連結成分が少なくとも1つの e 節点か γ 節点を含めば、 $G(\hat{A}, \hat{B})$ においてすべての C 節点と γ 節点は少なくとも1つの e 節点か γ 節点とある順枝列で結ばれる。

(証明)

$G(\hat{A}, \hat{B})$ において、 e 節点か γ 節点から順枝列で結ばれない C 節点か γ 節点である節点 x_i が存在したとする。このとき、節点 x_i を含む $G(\hat{A}, \hat{B})$ における強連結成分を H とすれば、 $G(\hat{A}, \hat{B})$ の性質(1), (2) より、 H に含まれない節点から H の中への有向枝も、 H の中から H に含まれない節点への有向枝も存在しない。すなわち、 H は $G(\hat{A}, \hat{B})$ における孤立した強連結成分である。(もちろん、 H は e 節点も γ 節点も含まない。) 従って、 $H^\#$ は $G^\#(\hat{A}, \hat{B})$ の連結成分となる。つまり、 $G^\#(\hat{A}, \hat{B})$ の連結成分のうち e 節点や γ 節点を全く含まず、かつ、 C 節点か γ 節点を

少なくとも一つ含むものが存在することになる。

(証明終)

そこで、(5.18)式の基本閉路行列の主要部分である $(n_c + n_{r^*} + n_e) \times (n_l + n_{\tilde{r}} + n_j)$ 行列 B_p に対して、次のような無向グラフ $G^+(B_p)$ を考えることにする。

$G^+(B_p)$ は行列 B_p の第1列から第 n_c 列に対応する n_c 個の c 節点、第 (n_c+1) 列から第 $(n_c+n_{r^*})$ 列に対応する n_{r^*} 個の r^* 節点、第 $(n_c+n_{r^*}+1)$ 列から第 $(n_c+n_{r^*}+n_e)$ 列に対応する n_e 個の e 節点と行列 B_p の第1行から第 n_l 行に対応する n_l 個の l 節点、第 (n_l+1) 行から第 $(n_l+n_{\tilde{r}})$ 行に対応する $n_{\tilde{r}}$ 個の \tilde{r} 節点、第 $(n_l+n_{\tilde{r}}+1)$ 行から第 $(n_l+n_{\tilde{r}}+n_j)$ 行に対応する n_j 個の j 節点の合計 $(n_c + n_{r^*} + n_l + n_e + n_j)$ 個の節点を持ち、行列 B_p の部分行列 $B_{\alpha\beta}$ ($\alpha = l, \tilde{r}, j; \beta = c, r^*, e$) の (α, β) 要素が“ ± 1 ”のとき α 節点の第 α 番目の節点と β 節点の第 β 番目の節点をつなぐ枝を持つ。

[補題 5.5]

$G^+(B_p)$ の連結成分のうち、少なくとも一つの c 節点か l 節点を含む連結成分が少なくとも一つの e 節点か j 節点を含むことと、 $G^\#(\hat{A}, \hat{B})$ の連結成分のうち、少なくとも一つの c 節点か l 節点を含む連結成分が少なくとも一つの e 節点か j 節点を含むこととは等価である。

(証明)

$G^+(B_p)$ は、その定義より、

$$\hat{B}_p = \begin{pmatrix} 0 & B_{rc}^T & 0 & B_{rc}^T & 0 & B_{jc}^T \\ B_{rc} & 0 & B_{lr}^* & 0 & B_{le} & 0 \\ 0 & B_{lr}^* & 0 & B_{rr}^T & 0 & B_{jr}^T \\ B_{rc} & 0 & B_{lr}^* & 0 & B_{re} & 0 \\ 0 & B_{le} & 0 & B_{re} & 0 & B_{je} \\ B_{jc} & 0 & B_{jr}^* & 0 & B_{je} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{B}_{p11} & \hat{B}_{p12} \\ \hat{B}_{p21} & \hat{B}_{p22} \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

の Coates グラフ $G(\hat{B}_p)$ の随伴無向グラフ $G^\#(\hat{B}_p)$ の並列枝を同一視（一本化）したグラフ $\overline{G^\#(\hat{B}_p)}$ と同型である。

一方、 $G^\#(\hat{A}, \hat{B})$ は $G^\#(\hat{B}_{p11}, \hat{B}_{p12})$ と同型であり、 $\overline{G^\#(\hat{B}_{p11}, \hat{B}_{p12})}$ は $G^\#(\begin{pmatrix} \hat{B}_{p11} & \hat{B}_{p12} \\ \hat{B}_{p21} & 0 \end{pmatrix})$ と同型であるので、 $\overline{G^\#(\hat{A}, \hat{B})}$ と $G^\#(\begin{pmatrix} \hat{B}_{p11} & \hat{B}_{p12} \\ \hat{B}_{p21} & 0 \end{pmatrix})$ とは同型となる。

つまり、 $G^\#(\hat{A}, \hat{B})$ の並列枝を同一視したグラフと $G^\#(\hat{B}_p)$ から e 節点と j 節点をつなぐすべての枝を取り除いたグラフとが同型となる。

このことから、補題の主張は直ちに導き出される。

(証明終)

[補題 5.6]

回路網グラフ $\mathcal{G}(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ を持つ電気回路網構造化システム (A, B) において、 $\mathcal{G}(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ の非可分成分⁽⁶⁰⁾のうち、少なくとも1つの C 枝が l 枝を含む非可分成分が少なくとも1つの e 枝が j 枝を含むことと、 $G^\#(\hat{B}_p)$ の連結成分のうち、少なくとも1つの C 節点が l 節点を含む連結成分が少なくとも1つの e 節点が j 節点を含むこととは等価である。

(証明)

回路網グラフ $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ の非可分成分を $G_k(\beta_c^{(k)}, \beta_r^{(k)}, \beta_l^{(k)}, \beta_e^{(k)}, \beta_j^{(k)})$ ($k=1, 2, \dots, \mu$) とする。 $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ の狭義の規準木 J^* に対し、

$$\begin{aligned} J^{*(k)} &= J^* \cap (\beta_c^{(k)} \cup \beta_r^{(k)} \cup \beta_l^{(k)} \cup \beta_e^{(k)} \cup \beta_j^{(k)}) \\ &= \beta_c^{(k)} \cup \beta_{r^*}^{(k)} \cup \beta_e^{(k)} \end{aligned} \quad (5.35)$$

は $G_k(\beta_c^{(k)}, \beta_r^{(k)}, \beta_l^{(k)}, \beta_e^{(k)}, \beta_j^{(k)})$ の狭義の規準木である。そこで、 $(\beta_c, \beta_r^*, \beta_e)$ を $(\beta_c^{(1)}, \beta_r^{*(1)}, \beta_e^{(1)}, \dots, \beta_c^{(\mu)}, \beta_r^{*(\mu)}, \beta_e^{(\mu)})$ に並べ換える置換行列を Q 、 $(\beta_l, \beta_r, \beta_j)$ を $(\beta_l^{(1)}, \beta_r^{(1)}, \beta_j^{(1)}, \dots, \beta_l^{(\mu)}, \beta_r^{(\mu)}, \beta_j^{(\mu)})$ に並べ換える置換行列を P とすれば、 J^* に関する基本閉路行列の主要部分 B_p は

$$PB_pQ = \begin{pmatrix} B_p^{(1)} & & 0 \\ & B_p^{(2)} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & B_p^{(\mu)} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

と変換される。そこで、 $B_p^{(k)}$ は $G_k(\beta_c^{(k)}, \beta_r^{(k)}, \beta_l^{(k)}, \beta_e^{(k)}, \beta_j^{(k)})$ における $J^{*(k)}$ に関する基本閉路行列の主要部分であり、 $G^+(B_p^{(k)})$ は $G^+(B_p)$ の連結成分となる。

以上のことから、補題の主張は明らかである。

(証明終)

補題 5.3 から補題 5.6 をまとめることにより次の定理を得る。

[定理 5.1]

回路網グラフ $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ を持つ電気回路網構造化

システム (A, B) において、 $g(p_c, p_r, p_l, p_e, p_j)$ の非可分成分のうち、少なくとも1つの C 枝か L 枝を含む非可分成分が少なくとも1つの e 枝か j 枝を含むならば、非零モードは generic に可制御である。

次に、零モードの generic な可制御性について考える。

[補題 5.7]

電気回路網構造化システム (A, B) の零モードが generic に可制御であるための必要十分条件は、 $(B_{lc}^T \ B_{rc}^T \ B_{jc}^T)^T$ が列フルランクであり、かつ、 $(B_{lc} \ B_{lr}^* \ B_{le})$ が行フルランクであることである。

(証明)

(5.29) 式の \hat{A} , \hat{B} に対して、

$$\left[\hat{A} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{nr} \end{pmatrix} \hat{B} \right] = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ -L^{-1} & G^{-1} \\ 0 & -R^{-1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & B_{lc}^T & 0 & B_{rc}^T & 0 & B_{jc}^T \\ B_{lc} & 0 & B_{lr}^* & 0 & B_{le} & 0 \\ 0 & B_{lr}^* & -G & B_{pr}^T & 0 & B_{jr}^T \\ B_{rc} & 0 & B_{pr}^* & R & B_{re} & 0 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} I_{nc} & & & & & 0 \\ & I_{nr} & & & & \\ & & I_{nr} & & & \\ & & & I_{nr} & & \\ & & & & -I_e & \\ 0 & & & & & I_j \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

が成り立つ。

必要性：零モードの generic な可制御性の定義 (5.33) 式参照) と行列 M の形から明らかである。

十分性： $(B_{lc}^T \ B_{rc}^T \ B_{jc}^T)^T$ が列フルランクで、 $(B_{lc} \ B_{lr}^* \ B_{le})$ が行フルランクであるとき、ある $p \in \mathbb{R}^N$ が存在して、

(a) $\bar{C}, \bar{L}, \bar{G}, \bar{R}$: 正則

(b) \bar{M} : 行フルランク

であることを示せば十分である。ただし、 $\bar{C}, \bar{L}, \bar{G}, \bar{R}, \bar{M}$ は、行列 C, L, G, R, M の独立パラメータに数値を代入して得られる数値行列である。

そこで、 $\rho = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_c+n_g}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n_r}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_f})$ としよう。

明らかに (a) は成り立つ。また、行列 \bar{M} は

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & B_{lc}^T & 0 & B_{rc}^T & 0 & B_{jc}^T \\ B_{lc} & 0 & B_{lr} & 0 & B_{le} & 0 \\ 0 & B_{lr}^T & I_{n_r} & B_{rr}^T & 0 & B_{jr}^T \\ B_{rc} & 0 & B_{rr} & I_{n_f} & B_{re} & 0 \end{pmatrix} \triangleq (\bar{M}_1 \quad \bar{M}_2) \quad (5.38)$$

となる。ここで、 \bar{M}_1 は実対称行列である。従って、(b) を示すためには、任意の $v \in R^N$ に対して、 $v^T \bar{M} = 0$ ならば $v = 0$ を示せばよい。

$v = (\underbrace{v_1^T}_{n_c} \quad \underbrace{v_2^T}_{n_g} \quad \underbrace{v_3^T}_{n_r} \quad \underbrace{v_4^T}_{n_f})^T$ に対して、 $v^T \bar{M} = 0$ とする。このとき、 $v^T \bar{M}_1 = 0$ から、

$$0 = (v_1^T \quad v_2^T \quad v_3^T \quad v_4^T) \bar{M}_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \\ v_3 \\ -v_4 \end{pmatrix} = v_3^T v_3 + v_4^T v_4 \quad (5.39)$$

を得、従って、 $v_3 = 0, v_4 = 0$ を得る。このことから、

$$(v_1^T \quad v_2^T) \begin{pmatrix} 0 & B_{lc}^T & 0 & B_{rc}^T & 0 & B_{jc}^T \\ B_{lc} & 0 & B_{lr} & 0 & B_{le} & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.40)$$

を得、仮定から、 $v_1 = 0, v_2 = 0$ を得る。結局、 $v = 0$ を示すことができた。(証明終)

補題 5.7 の条件である行列のフルランク性と回路網グラフの構造との関係は次の補題による。

[補題 5.8]

回路網グラフ $G(\beta_c, \beta_r, \beta_j, \beta_e, \beta_j)$ のある狭義の規準木に関する基本閉路行列の主要部分 B_p (5.18 式参照) において、

(1) $(B_{lc}^T B_{rc}^T B_{jc}^T)^T$ が列フルランクであるための必要十分条件は、 $G(\beta_c, \beta_r, \beta_j, \beta_e, \beta_j)$ において C 枝だけから成るカットセット (C カットセットと呼ぶ) が存在しないことである。

(2) $(B_{lc} B_{lr}^* B_{le})$ が行フルランクであるための必要十分条件は、 $G(\beta_c, \beta_r, \beta_j, \beta_e, \beta_j)$ において l 枝だけから成るループ (l ループと呼ぶ) が存在しないことである。

(証明)

(1) も (2) も同様に証明できるので、(2) だけを証明する。

必要性: l ループが存在したとすれば、それに対応するループベクトル $v^T = (\underbrace{x^T}_{n_l}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_c + n_r + n_e + n_j})$ 、 $\exists \exists \exists x \neq 0$ 、が存在し

$$\left[-B_p^T, I_{n_c + n_r + n_e} \right] v = 0 \quad (5.41)$$

が成り立つ⁽⁶⁰⁾。従って、 $x^T (B_{lc} B_{lr}^* B_{le}) = 0$ となり、

$(B_{lc} B_{lr}^* B_{le})$ は行フルランクでないことになる。

十分性: B_p は完全ユニモジュラー行列⁽⁵⁹⁾であることから、必要性の証明の逆をたどることが出来る。

(証明終)

補題 5.7 と補題 5.8 をまとめることにより、零モードの generic な可制御性に関する次の定理を得る。

[定理 5.2]

回路網グラフ $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ を持つ電気回路網構造化システム (A, B) において、零モードが generic に可制御であるための必要十分条件は、 $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ に C カットセットも ℓ ループも存在しないことである。

さらに、定理 5.1 と定理 5.2 から、電気回路網構造化システムの構造可制御性に関する次の定理を得ることができる。

[定理 5.3]

回路網グラフ $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ を持つ電気回路網構造化システム (A, B) が構造可制御であるための必要十分条件は、次の 2 つの条件が成り立つことである。

(1) $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ の非可分成分のうち、少なくとも 1 つの C 枝か ℓ 枝を含む非可分成分は少なくとも 1 つの e 枝か j 枝を含む。

(2) $G(\beta_c, \beta_r, \beta_l, \beta_e, \beta_j)$ に C カットセットも ℓ ループも存在しない。

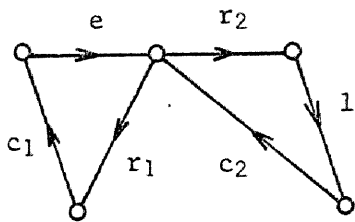
(証明)

条件 (1) が成り立たなければ、独立電 (圧 or 流) 源に全く影響されないコンデンサーかコイルが存在することになり、それらの電圧や電流を状態変数の一部として持つ

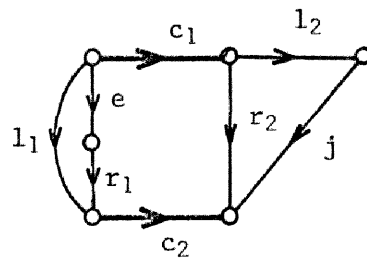
系 (A, B) は構造可制御になり得ない。すなわち条件 (1) が必要条件であることがわかる。

一方、条件 (2) が必要条件であることは定理 5.2 から、また、条件 (1) と (2) が十分条件であることは定理 5.1, 5.2 から、明らかである。 (証明終)

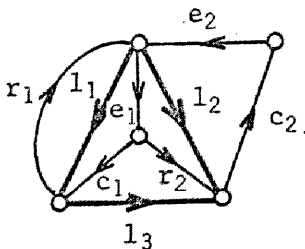
定理 5.3 をもとに、いろいろな回路網グラフの例を図 5.6 に示しておいた。



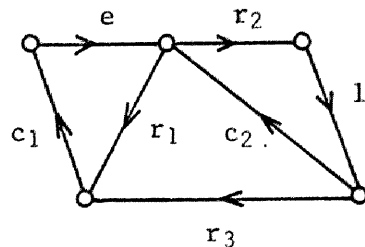
(a) structurally uncontrollable
(condition (1) is not satisfied)



(b) structurally uncontrollable
(c cutset exists)



(c) structurally uncontrollable
(1 loop exists)



(d) structurally controllable

Fig. 5.6 Examples of structurally uncontrollable and controllable network graphs

定理5.3の条件(1)や条件(2)が構造可制御であるための必要条件であることだけは、文献(65)などで指摘されているように、この節の議論を待つまでもなく、極めて容易に知ることができると言える。

例えば、回路網グラフ $G(p_e, p_r, p_l, p_o, p_j)$ に C カットセットが存在し、それが C_1, C_2, \dots, C_n を電気容量を持つ n 個のコンデンサーから成っているものとしよう。 n 個のコンデンサーの電圧を v_1, v_2, \dots, v_n とすれば、K.C.L. より、

$$\sum_{k=1}^n C_k \dot{v}_k = 0 \quad (5.42)$$

なる関係が存在し、 v_1, v_2, \dots, v_n の間には

$$\sum_{k=1}^n C_k v_k = \text{const.} \quad (5.43)$$

なる関係が常に存在することになる。すなわち、構造可制御となり得ない。

とループが存在する場合も同様のことが言える。

しかし、定理5.3の条件(1)と(2)が構造可制御であるための十分条件であることも示すためには、この節での議論のように、多少複雑な議論が必要となるわけである。

5.4 狭義の規準木が存在しない

回路網システムの可制御性・可到達性⁽⁵⁷⁾

第5.2節で示したように、回路網グラフに狭義の規準木が存在しなければ、すなわち、回路網グラフにC-ループが ℓ - j カットセットが存在したならば(補題5.1参照)、コンデンサの電圧とコイルの電流を状態変数の候補として、電気回路網システムの動的挙動を記述する状態方程式を導出しようとしても、一般に、線形時不変系の状態方程式を得ることができない。このとき得られる方程式は次式の間接標準形方程式である(性質5.1参照)。

$$K \dot{z}(t) = A z(t) + B u(t) ; \quad z(0) = z_0 \quad (5.44)$$

$$|K| = 0 \quad (5.45)$$

ここで、 $z(t) \in R^n$ 、 $u(t) \in R^m$ である。この中間標準形方程式 (K, A, B) の解法については、レギュラペンシルの正準形を用いる方法⁽⁶⁶⁾や Drazin Inverse を用いる方法⁽⁶⁷⁾などが知られている。前者の方法は正準形への変換行列を求めることが多少やっかいであるが、中間変数 z を線形時不変系の状態方程式に従うものと入力及びその高階微分に代数的に従うものと完全に分離できるという利点を持つ。後者の方法は方程式の係数行列およびその Drazin Inverse だけを用いて解を表現することができるという利点を持ち、最近、この方法を用いて中間標準形方程式の中間変数に関する種々の可制御性・可到達性が論じられた⁽⁶⁸⁾。

この節では、レギュラペンシルの正準形を用いて、中

間標準形方程式の中間変数に関する可制御性・可到達性を論じる。そして、その結果を電気回路網システムに適用し、狭義の規準木が存在しない場合の構造可制御性・可到達性と回路網グラフの構造との関係をもある程度明らかにする。

中間標準形方程式 (5.44) 式では、初期条件 z_0 に対して、解 $z(t)$ ($t > 0$) が存在しなかったり、存在してもこのときの初期条件は許容初期条件と呼ばれる⁽⁶¹⁾)一意に定まらないことがある。許容初期条件 z_0 に対して解 $z(t)$ ($t > 0$) が一意に定まるとき、中間標準方程式 (K, A, B) は consistent であると呼ばれる⁽⁶⁸⁾、その必要十分条件が次の補題のように知られている。

[補題 5.9]⁽⁶⁷⁾

中間標準形方程式 (K, A, B) が consistent であるための必要十分条件は、

$$|sK - A| \neq 0 \quad (5.46)$$

が成り立つことである。

以下では、consistent な中間標準形方程式 (K, A, B) だけを考察する。

consistent な中間標準形方程式 (K, A, B) の $sK - A$ は、補題 5.9 から、常にレギュラペンシルである。

一方、レギュラペンシルの正準形に関する次の補題は中間標準形方程式 (K, A, B) の解析を容易にする。

[補題 5.10] ⁽⁶⁶⁾

レギュラペンシル $sK-A$ は、strictly equivalence によつて、canonical quasi-diagonal form にすることができる。すなわち、適当な正則行列 P, Q が存在して、

$$PKQ = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \cong \hat{K}, \quad PAQ = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \cong \hat{A} \quad (5.47)$$

ただし、

$$N = \text{diag} (N^{(\mu_1)}, N^{(\mu_2)}, \dots, N^{(\mu_s)}) \quad (5.48.1)$$

$$N^{(\mu_i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} : \mu_i \times \mu_i \quad (5.48.2)$$

と変換することができる。ここで、 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ は $sK-A$ の infinite elementary divisors の次数であり、 $n_1 + n_2 = M$ 、 $n_2 = \sum_{i=1}^s \mu_i$ である。

従つて、中間変数 Z の正則変換が許されれば（このとき、性質 5.1 で考えた置換行列による変換の枠を越えることになる）、中間標準形方程式 (K, A, B) の行列 K, A は常に (5.47) 式の行列 \hat{K}, \hat{A} と考えることができる。実際、(5.44) 式に左から補題 5.10 で定まる正則行列 P を掛け、中間変数 Z を補題 5.10 で定まる正則行列 Q を用いて次式のように正則変換し、

$$Z = Q \hat{Z} \quad (5.49)$$

新しい中間変数 \hat{Z} を導入すれば、(5.44) 式は、

$$\hat{K} \dot{\hat{z}}(t) = \hat{A} \hat{z}(t) + \hat{B} u(t) \quad ; \quad \hat{z}(0) = \hat{z}_0 \quad (5.50)$$

と変換される。そこで、

$$\hat{B} = PB \cong \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n_1 \\ \uparrow n_2 \end{matrix} \quad (5.51)$$

$$\hat{z}_0 = Q^{-1} z_0 \quad (5.52)$$

である。

(5.50) 式の中間標準形方程式 $(\hat{K}, \hat{A}, \hat{B})$ は、滑らかな入力 u を仮定することによって、さらに、

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1(t) = \hat{A}_1 \hat{z}_1(t) + \hat{B}_1 u(t) & ; \quad \hat{z}_1(0) = \hat{z}_{10} \end{cases} \quad (5.53.1)$$

$$\begin{cases} \hat{z}_2(t) = - \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i \hat{B}_2 u^{(i)}(t) & ; \quad \hat{z}_2(0) = \hat{z}_{20} \end{cases} \quad (5.53.2)$$

と書き下すことができる。そこで、 $\hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1^T & \hat{z}_2^T \end{pmatrix}^T$ 、 $u^{(i)}$ は u の i 階微分、 $\mu = \max(\mu_i)$ である。つまり、中間変数 \hat{z}_1 は、過去の履歴の影響を受ける（線形時不変系の状態方程式に従う）中間変数 \hat{z}_1 と、現時点の入力値及びその高階微分値だけに依存する中間変数 \hat{z}_2 から成っているわけである。そして、中間変数 \hat{z} の許容初期条件の集合 $\hat{\mathcal{Z}}_0$ は

$$\hat{\mathcal{Z}}_0 = \left\{ \hat{z}_0 = \begin{pmatrix} \hat{z}_{10} \\ \hat{z}_{20} \end{pmatrix} \in R^n \mid \hat{z}_{10} \in R^{n_1}, \hat{z}_{20} \in \mathcal{I}_\mu \{ \hat{B}_2, N\hat{B}_2, \dots, N^{\mu-1}\hat{B}_2 \} \right\} \quad (5.54)$$

であることがわかる。さらに、中間変数 \hat{z} の次元 n_1 は、変換行列 P, Q に無関係に定まる定数であり、

$$\dim \hat{\xi}_1 = m_1 = \deg |sK - A| \quad (5.55)$$

であることが容易に確かめられる。ここでは、この $\deg |sK - A|$ を中間標準形方程式 (K, A, B) の動的次数と呼ぶことにし、 $d.d.(K, A)$ と記すことにする。

この動的次数と行列 K, A とを直接結びつける関係式は次の定理で与えることができる。

[定理 5.4]

中間標準形方程式 (K, A, B) において、

$$d.d.(K, A) = \text{rank } \tilde{K}^{\text{Ind}(\tilde{K})} \quad (5.56)$$

である。ただし、行列 \tilde{K} は、 $|rK - A| \neq 0$ なる $r \in R$ を用いて、

$$\tilde{K} = (rK - A)^{-1} K \quad (5.57)$$

で与えられ、 $\text{Ind}(\tilde{K})$ は、

$$\text{Ind}(\tilde{K}) = \min \{ k \mid \text{rank } \tilde{K}^k = \text{rank } \tilde{K}^{k+1} \} \quad (5.58)$$

で与えられる。

特に、行列 K と A が可換 ($KA = AK$) の場合は、

$$d.d.(K, A) = \text{rank } K^{\text{Ind}(K)} \quad (5.59)$$

となり、行列 A と無関係となる。

(証明)

動的次数の定義より、行列 A が単位行列、すなわち、

$A = I_m$ の場合、

$$\text{d.d.}(K, I_m) = \text{rank } K^{\text{Ind}(K)} \quad (5.60)$$

であることは明らかである。一方、一般に、 $|rK - A| \neq 0$ なる $r \in \mathbb{R}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \text{d.d.}(K, A) &= \deg |sI - A| = \deg |(s-r)K - (A-rK)| \\ &= \deg (|A-rK| \cdot |-(s-r)\tilde{K} - I_n|) = \deg |s\tilde{K} - I_n| \\ &= \text{d.d.}(-\tilde{K}, I_m) = \text{d.d.}(\tilde{K}, I_n) \end{aligned} \quad (5.61)$$

が成り立つ。従って、(5.56)式が得られる。

$KA = AK$ の場合、 $(rK - A)^{-1}$ と K とが可換となることから、任意の k に対して、

$$\text{rank } \tilde{K}^k = \text{rank } (rK - A)^{-k} K^k = \text{rank } K^k \quad (5.62)$$

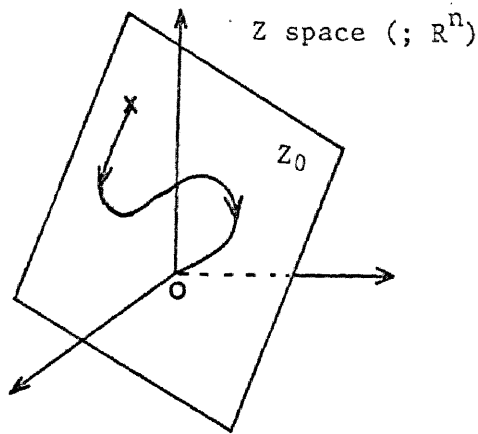
が成り立つ。従って、(5.59)式は(5.56)式から直ちに導出できる。(証明終)

以上の準備のもとに、中間標準形方程式 (K, A, B) の中間変数 z に関する可制御性・可到達性について考察する。

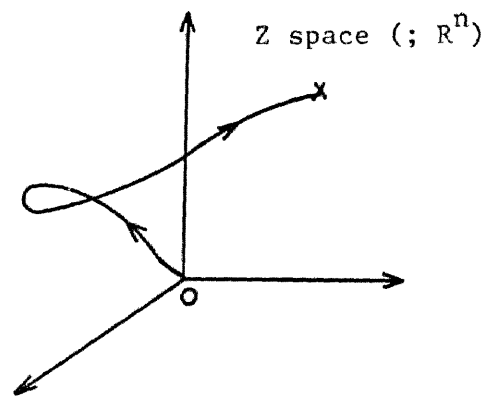
[定義 5.2]

(1) 中間標準形方程式 (K, A, B) が可制御であるとは、任意の許容初期条件 z_0 に対し、ある滑らかな入力によって、有限時間で、中間変数 z を零にすることができることである (図 5.7 (a) 参照)。

(2) 中間標準形方程式 (K, A, B) が可到達であるとは、任意の $z_f \in \mathbb{R}^n$ に対し、ある滑らかな入力によって、有限時間で、(許容)初期条件 $z_0 = 0$ にある中間変数 z を z_f にもってゆくことができることである(図5.7(b)参照)。



(a) controllability



(b) reachability

Fig. 5.7 Controllability and reachability
for intermediate standard form equations

この中間標準形方程式 (K, A, B) の可制御性・可到達性を行列 K, A, B で直接判定する方法は、現在のところ知られていない。しかし、中間標準方程式 (K, A, B) を $(\hat{K}, \hat{A}, \hat{B})$ ((5.50)式参照)に変換すれば、次の定理を得る。

[定理5.5]

(1) 中間標準形方程式 $(\hat{K}, \hat{A}, \hat{B})$ が可制御であるための必要十分条件は、 (\hat{A}_1, \hat{B}_1) ((5.47), (5.51)式参照) が可制御対となることである。

(2) 中間標準形方程式 $(\hat{K}, \hat{A}, \hat{B})$ が可到達であるための必

要十分条件は、 (\hat{A}_1, \hat{B}_1) , (N, \hat{B}_2) ((5.47), (5.51)式参照) が共に可制御対となることである。

ただし、 $n \times m$ 行列 F と $n \times m$ 行列 G に対し、 (F, G) が可制御対であるとは、 $[G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$ が行フルランクとなることを意味する。

(証明)

許容初期条件 $\hat{z}_0 = (\hat{z}_{10}^T, \hat{z}_{20}^T)^T \in \hat{Z}_0$ と滑らかな入力 u に対して、(5.53)式より、

$$\hat{z}_{20} = - \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i \hat{B}_2 u^{(i)}(0) \quad (5.63.1)$$

$$\hat{z}_1(t) = e^{\hat{A}_1 t} \hat{z}_{10} + \int_0^t e^{\hat{A}_1(t-\tau)} \hat{B}_1 u(\tau) d\tau \quad (5.63.2)$$

$$\hat{z}_2(t) = - \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i \hat{B}_2 u^{(i)}(t) \quad (5.63.3)$$

なる \hat{z}_0 , $\hat{z}(t)$ と u の関係数を得る。

(1) の必要性: (5.63.2)式より明らかである。

(1) の十分性: (5.63)式より、任意の $\hat{z}_1 \in R^m$ と任意の $u_0^{(i)}, u_f^{(i)} \in R^m$ ($i=0,1,\dots,\mu-1$) に対して、ある $T (>0)$ と

$$\hat{z}_1 = \int_0^T e^{\hat{A}_1(t-\tau)} \hat{B}_1 u(\tau) d\tau \quad (5.64.1)$$

$$u^{(i)}(0) = u_0^{(i)}, \quad u^{(i)}(T) = u_f^{(i)} \quad ; \quad i=0,1,\dots,\mu-1 \quad (5.64.2)$$

を満たす C^∞ 関数 u が存在することを示せば十分である。

これは、 (\hat{A}_1, \hat{B}_1) が可制御対であることと、両端 ($t=0, T$) で微係数を固定された C^∞ 関数は $L^2(0, T)$ で稠密であることより明らかである。

(2) についても (1) と同様に証明することができる。

(証明終)

特に、行列 A が単位行列である中間標準形方程式 (K, I_m, B) に対しては、行列 K, B で直接判定することができる。

[系 5.1]

(1) 中間標準形方程式 (K, I_n, B) が可制御であるための必要十分条件は、 (K, B) が零モードを除いて可制御対であることである。すなわち、

$$\text{rank } K^n [B \quad KB \quad \cdots \quad K^{n-1}B] = \text{rank } K^n \quad (5.65)$$

が成り立つことである。

(2) 中間標準形方程式 (K, I_m, B) が可到達であるための必要十分条件は、 (K, B) が可制御対であることである。

(証明)

中間標準形方程式 (K, I_m, B) から (5.50) 式の中間標準形方程式 $(\hat{K}, \hat{A}, \hat{B})$ への変換は、

$$PKP^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{K}_1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

∈ ∈ し、 \hat{K}_1 : 正則行列, N : nilpotent 行列を用いることによつて、

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{K}_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{K}_1^{-1} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

と得られる。

(1) について：定理 5.5 と (5.67) 式から、中間標準形方程式 (K, I_n, B) が可制御であることと $(\hat{K}_1^{-1}, \hat{K}_1^{-1}B_1)$ が可制御対であることとは等価である。一方、 $(\hat{K}_1^{-1}, \hat{K}_1^{-1}B_1)$ が可制御対であることと (\hat{K}_1, \hat{B}_1) が可制御対であることとは等価である。さらに、 \hat{K}_1 が正則行列であり、 N が nilpotent 行列であることから、 (\hat{K}_1, \hat{B}_1) が可制御対であることと

$$\begin{aligned} & \text{rank } (PKP^{-1})^m [PB, (PKP^{-1})PB, \dots, (PKP^{-1})^{m-1}PB] \\ &= \text{rank } \left(\hat{K}_1^m [\hat{B}_1, \hat{K}_1\hat{B}_1, \dots, \hat{K}_1^{m-1}\hat{B}_1] \right) = \text{rank } [\hat{B}_1, \hat{K}_1\hat{B}_1, \dots, \hat{K}_1^{m-1}\hat{B}_1] \\ &= m_1 = \text{rank } \hat{K}_1^m = \text{rank } (PKP^{-1})^m \end{aligned} \quad (5.68)$$

が成り立つこととは等価である。従って、(5.65) 式を導出することができ。

(2) について：定理 5.5 と (5.67) 式から、中間標準形方程式 (K, I_n, B) が可到達であることと、 $(\hat{K}_1^{-1}, \hat{K}_1^{-1}B_1), (N, \hat{B}_2)$ がともに可制御対であることとは等価である。前者は (\hat{K}_1, \hat{B}_1) が可制御対であることと等価であるので、(5.66) 式から、結局 (K, B) が可制御対であることと等価になる。

(証明終)

定義 5.2 で与えた中間標準形方程式の可制御性・可到達性は、文献(68)で \mathbb{D} -可制御性・ R_3 -可到達性と呼ばれている。そこでは、他に、初期条件を中間変数空間のある部

分空間に限定することによって、 D_1, D_2 -可制御性, R_1, R_2 -可到達性が定義され、中間標準形方程式 (K, In, B) について、それらの関係が調べられている。同様の考察は、中間標準方程式 $(\hat{K}, \hat{A}, \hat{B})$ について、極めて容易に行なうことができる。

以下では、ここまでの一般的な中間標準形方程式に関する結果を、狭義の規準木の存在しない回路網グラフを有する電気回路網システムに適用し、その可制御性, 可到達性を考察する。

第5.2節で示したように、狭義の規準木が存在しない場合の電気回路網システムの中間標準形方程式

$$K \dot{z}(t) = A z(t) + B u(t) \quad (5.69)$$

$$F \in \mathbb{R}, \quad z(t) \in \mathbb{R}^{n_c + n_d}, \quad u(t) \in \mathbb{R}^{m_c + n_j}$$

の係数行列 K, A, B は、適当なブロック分割によって、次の形をしていた((5.14)式参照)。

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{n_c + n_d} & \xleftrightarrow{n_c + n_d} \\ \uparrow n_c + n_j & \downarrow n_c + n_j \\ \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}, \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{n_c + n_d} & \xleftrightarrow{n_c + n_d} \\ \uparrow n_c + n_j & \downarrow n_c + n_j \\ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & -I_{(n_c + n_d)^*} \end{pmatrix} \end{array} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{n_c + n_j} \\ \uparrow n_c + n_j \\ \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \quad (5.70)$$

最初に、中間標準形方程式 (5.69) 式から中間標準形方程式 $(\hat{K}, \hat{A}, \hat{B})$ ((5.50) 式参照) への変換を考える。一般の中間標準形方程式に対して、補題5.10の変換行列 P, Q を係数行列 K, A で陽に与えることは困難であるが、(5.70) 式の形の K, A の場合には次式で与えることができる。

$$P = \begin{pmatrix} K_{11}^{-1} & -K_{11}^{-1} A_{11} (K_{11} + K_{12} A_{21})^{-1} K_{12} \\ 0 & -(I_{(n_2+n_3)} + A_{21} K_{11}^{-1} K_{12})^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.71.1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} (K_{11} + K_{12} A_{21})^{-1} K_{11} & -K_{11}^{-1} K_{12} \\ (I_{(n_2+n_3)} + A_{21} K_{11}^{-1} K_{12})^{-1} A_{21} & I_{(n_2+n_3)} \end{pmatrix} \quad (5.71.2)$$

そして、この変換行列 P, Q で得られる中間標準形方程式 $(\hat{K}, \hat{A}, \hat{B})$ は、

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} I_{n_2+n_3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2+n_3} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

ただし、

$$\hat{A}_1 = K_{11}^{-1} A_{11} (K_{11} + K_{12} A_{21})^{-1} K_{11} \quad (5.73.1)$$

$$\hat{B}_1 = K_{11}^{-1} \{ B_1 - A_{11} (K_{11} + K_{12} A_{21})^{-1} K_{12} B_2 \} \quad (5.73.2)$$

$$\hat{B}_2 = -(I_{(n_2+n_3)} + A_{21} K_{11}^{-1} K_{12})^{-1} B_2 \quad (5.73.3)$$

となる。結局、(5.53)式に対応する方程式は

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1(t) = \hat{A}_1 \hat{z}_1(t) + \hat{B}_1 u(t) \end{cases} \quad (5.74.1)$$

$$\begin{cases} \hat{z}_2(t) = -\hat{B}_2 u(t) \end{cases} \quad (5.74.2)$$

となり、 $\hat{z}_2(t)$ の右辺には決して u の高階微分が現れない。
 また、動的次数に関しては、(5.72)式から直ちに、 $n_2 + n_3$
 つまり、狭義でない規準木に含まれる C 枝の数とその補木に含まれる L 枝の数の和になっていることがわかる。
 さらに、狭義の規準木が存在しない回路網グラフを有す

る電気回路網システムに対する可制御性, 可到達性の判定は, (\hat{A}_1, \hat{B}_1) や $(0, \hat{B}_2)$ が可制御対であるかどうかを調べればよい(定理 5.5 参照)。このうち、特に、 $(0, \hat{B}_2)$ が可制御対であることは行列 \hat{B}_2 が行フルランクであることと等価であり、これは基本閉路行列の主要部分 B_p の部分行列 B_{ce} が行フルランクでかつ B_{je}^* が列フルランクであることと等価である((5.14), (5.70), (5.73.3) 式参照)。

[補題 5.11]

狭義の規準木が存在しない回路網グラフの基本閉路行列の主要部分 B_p ((5.12.2) 参照) の部分行列 B_{ce} , B_{je}^* に関して次のことが成り立つ。

(1) B_{ce} が行フルランクであるための必要十分条件は、回路網グラフに C 枝だけから成るループ (C ループと呼ぶ) が存在しないことである。

(2) B_{je}^* が列フルランクであるための必要十分条件は、回路網グラフに l 枝だけから成るカットセット (l カットセットと呼ぶ) が存在しないことである。

(証明)

補題 5.8 と全く同様に証明できるので省略する。

(証明終)

この補題によって、 $(0, \hat{B}_2)$ が可制御対であるかどうかは回路網グラフの構造で完全に特徴づけることができた。

一方、 (\hat{A}_1, \hat{B}_1) が可制御対であるかどうかを回路網グラフの構造で特徴づけることは、行列 \hat{A}_1, \hat{B}_1 が (5.73) 式のどとく極めて複雑な形をしているので、現段階では成功していない。しかし、前節の定理 5.3 の後で述べたことと同じ考察から、回路網グラフに C カットセットや l ループが存在したならば、可制御（従って、もちろん、可到達）になり得ない。 C 枝や l 枝を含む非可分成分が e 枝や y 枝を含まないときも可制御になり得ない。

以上のことを性質としてまとめておく。

[性質 5.2]

狭義の規準木が存在しない回路網グラフを有する電気回路網システムの間接標準形方程式 (5.69), (5.70) 式に対して、次のことが成り立つ。

(1) 動的次数は (規準木に含まれる C 枝の数) + (規準木に対する補木に含まれる l 枝の数) である。

(2) 回路網グラフに C ループや l カットセットが存在すれば、可到達になり得ない。逆に、 C ループや l カットセットが存在しなければ、可制御性と可到達性が等価となる。

(3) 回路網グラフに C カットセットや l ループが存在すれば、可制御になり得ない。また、 C 枝や l 枝を含む非可分成分が e 枝や y 枝を含まなければ、やはり、可制御になり得ない。

性質 5.2 の (1) は、電気回路網理論でよく知られている動的自由度（または複雑度）⁽⁵⁹⁾ とこの節で考えた中間標準形方程式の動的次数が全く同一のものであることを示している。

[例 5.2]

例 5.1 で示した電気回路網システムは、図 5.4 (b) の回路網グラフから、動的次数 2 を持つ。また、C ループが存在するので、可到達でない。しかし可制御である。実際、中間標準形方程式 (5.24) 式を、(5.71) 式で定まる

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{C_2}{L(C_1+C_2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_2}{C_1+C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{C_1}{C_1+C_2} & 0 & \frac{C_2}{C_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{C_1}{C_1+C_2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

で変換すれば、

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L(C_1+C_2)} & 0 \end{pmatrix} \hat{z}_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L(C_1+C_2)} \end{pmatrix} u(t) \end{cases} \quad (5.76.1)$$

$$\begin{cases} \hat{z}_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{C_1}{C_1+C_2} \\ -1 \end{pmatrix} u(t) \end{cases} \quad (5.76.2)$$

を得る。(5.76.1) 式が可制御であることを確かめることができる。

もし、例 5.1 の電気回路網システムで、コンデンサー C_3 がなければ、そのときは可到達になることを確かめることができる。

5.5 ちすび

本章では、電気回路網システムの構造可制御性と回路網グラフの構造との関係を明らかにした。ただし、コンデンサーの電圧とコイルの電流を状態変数に選んで状態方程式を導出するとき、回路網グラフに狭義の規準木が存在しなければ、一般に、線形時不変系の状態方程式を得ることができない。従って、狭義の規準木が存在しない場合は中間標準形方程式の中間変数に関する可制御性と可到達性を新たに定義し、それらと回路網グラフの構造との関係をある程度明らかにした。得られた結果をまとめると表5.1のようになる。

表5.1 (構造)可制御性・可到達性と回路網グラフの構造

		eル-7° 無						
		R-jカセット		C-eル-7° 無				
				Cル-7° 無		Cル-7° 有		
		無	有	無	有	無	有	
jカセット	R-jカセット 無	Rル-7° 無	◎	※	○	×	△	×
		Rル-7° 有	※	※	×	×	×	×
	R-jカセット 有	Rル-7° 無	○	×	○	×	△	×
		Rル-7° 有	×	×	×	×	×	×
		Rル-7° 無	△	×	△	×	△	×
		Rル-7° 有	×	×	×	×	×	×

表中、斜線領域は必ず線形時不変系の状態方程式が得られる場合を示す。また、各印は

◎：構造可制御である。

*：構造可制御でない。

○：可制御性と可到達性が等価。ただし、構造的に可制御であるかどうかわからない。

△：構造的に可到達であり得ない。ただし、構造的に可制御であるかどうかわからない。

×：構造的に可到達でも可制御でもあり得ない。

を意味する。なお、この表において、回路網グラフの各非可分成分は、それが少なくとも1つのC枝かI枝を含むならば、少なくとも1つのe枝かj枝を含むことが仮定されている。

表中、○や△における構造的な可制御性に関しては今後の問題である。

第6章 結 言

本論文において、新たに得られた結果は次のことである。

1. 拘束構造化システムにおいて、特性方程式の s -既約性と系のグラフ表現である Coates グラフの強連結成分との関係を明らかにした。
2. 拘束構造化システムの拘束構造可制御条件を確立した。この拘束構造可制御条件を系のグラフ表現である Coates グラフの構造だけで特徴づけることは、元来、Coates グラフが変動要素間の従属関係に関する情報を全く持たないことから、不可能である。しかし、Coates グラフの *accessible* という構造的特徴が非零モードの *generic* な可制御性を意味することを示すことができた。このことから、系のグラフで特徴づけられないのは零モードの *generic* な可制御性だけであることを知る事ができ、これについては、変動要素間の従属関係を表わす数値行列集合のランク条件に甘んじなければならない。
3. 線形コンパートメントシステムの構造可制御性の条件をコンパートメントグラフの構造で完全に特徴づけることができた。この線形コンパートメントシステムの構造可制御条件は、従来、特殊な構造（たとえば一つのシンク）を持つコンパートメントグラフについて知ら

れていたにすぎないものである。

4. 電気回路網システムの構造可制御性と回路網グラフの構造との関係について、特に、回路網グラフに狭義の規準木が存在する場合のそれらの関係について明らかにした。回路網グラフに狭義の規準木が存在しない場合には、線形時不変系の状態方程式の範囲外であり、中間標準形方程式の中間変数に関する可制御性・可到達性と回路網グラフの構造との関係を、ある程度、明らかにした。ただし、この場合、構造的な可制御条件を回路網グラフで特徴づけることは今後の問題である。

このように、本論文は主として、線形時不変系の状態方程式の係数行列の変動要素間に従属関係（ただし、同一列（あるいは行）に限られた線形従属関係）が存在する場合の構造可制御条件を考察したものであるが、もちろん究極の目的は、多種多様な構造を有する個々の実システムに即した構造可制御条件を確立し、それらの結果を制御の問題や可同定性の問題に適用し、構造に着目することによって見通しの如く解析・設計法を確立することである。これまでに、このようなことを意図した優れた文献がある^{(16), (17), (26)~(29)}が、Linの構造のとらえ方の枠組を越えるものでなく、変動要素間の従属関係を取り扱ったものは、ほとんど皆無であったと言っても過言でない。

その故、本論文では、変動要素間の従属関係を考慮した構造可制御性を考察したのである。

構造を有する実システムの変動要素間には、本論文で考察した従属関係以外の多種多様な従属関係が存在するので、今後、それらと分類、考察してゆく努力が必要である。

さらに、非線形系の構造可制御性、例えば、ツリリンク系の構造可制御性なども、興味深い今後の課題の一つである。

謝 辞

名古屋大学工学部自動制御研究施設 伊藤正美教授には、著者が大学院在学中は指導教官として、また、その後も終始変わらず御指導・御鞭撻を賜り、ここに心から感謝の意を表します。

さらに、本論文の作製に当たり、熱心で綿密な御討論と御援助を賜った名古屋大学工学部化学工学科 松原正一教授、電気工学科 稲垣康善教授、自動制御研究施設 細江繁幸助教授に深く感謝いたします。特に、細江助教授には、常日頃から、有益かつ熱心な御討論・御助言を頂き、重ねて厚く御礼申し上げます。

また、本論文の作製に当たり、熱心な御討論を頂いた名古屋大学工学部情報工学科の諸先生方、さらに、常日頃熱心に御討論・御助言を頂いている名古屋大学工学部自動制御研究施設の諸氏に厚く感謝いたします。

最後に、本論文の作製に当たり、多大の御協力を頂いた大学院生 林睦氏をはじめ、名古屋大学工学部自動制御研究施設伊藤研究室の学生諸氏、並びに稲垣恵子さんに厚く感謝いたします。

参考文献

- (1) R. E. Kalman: On the General Theory of Control Systems, Proc. 1st International Congress on Automatic Control, Moscow (1960) : Butterworths, Vol. 1 481/492 (1961)
- (2) R. E. Kalman: Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, SIAM J. Control, Vol. 1, 152/192 (1963)
- (3) D. G. Luenberger: Observing the State of a Linear System, IEEE trans. Mil. Electron., Vol. MIL-8, 74/80 (1964)
- (4) D. G. Luenberger: Observes for Multivariable Systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-11, 190/197 (1966)
- (5) D. G. Luenberger: An Introduction to Observers, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-16, 596/602 (1971)
- (6) W. M. Wonham: On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-12, 660/665 (1967)
- (7) C. T. Chen: Introduction to Linear System theory, Holt, Rinehart and Winston (1970)
- (8) 伊理正夫: 制御工学と制御数理, 計測と制御, Vol. 19, 1119/1123 (1980)
- (9) C. T. Lin: Structural Controllability, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-19, 201/208 (1974)
- (10) R. W. Shields and J. B. Pearson: Structural Controllability of Multiinput Linear Systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-21, 203/212 (1976)
- (11) K. Glover and L. M. Silverman: Characterization of Structural Controllability, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-21, 534/537 (1976)
- (12) E. J. Davison: Connectability and Structural Controllability of Composite Systems, Automatica, Vol. 13, 109/123 (1977)

- (13) S. Hosoe and K. Matsumoto: On the Irreducibility Condition in the Structural Controllability Theorem, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-24, 963/966 (1979)
- (14) H. Mayeda: On the Structural Controllability Theorem, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-26, 795/798 (1981)
- (15) 須田信英: 構造に着目したシステム・制御理論 -序論-, SICE 学術講演会予稿集, 351/352 (1980)
- (16) H. Mayeda and T. Yamada: Strong Structural Controllability, SIAM J. Cont. and Optim., Vol. 17, 123/138 (1979)
- (17) Y. Ishida, N. Adachi, and H. Tokumaru: Some Results on the Qualitative Theory of Matrix, 計測自動制御学会論文集, Vol. 17, 49/55 (1981)
- (18) T. Teorell: Kinetics of Distribution of Substances Administered to the Body, Arch. Int. Pharmacodynamic Therapie, Vol. 57, 205/225 (1937)
- (19) G. L. Atkins: Multicompartment Models for Biological Systems, London, Methuen (1969)
- (20) J. A. Jacquez: Compartmental Analysis in Biology and Medicine, New York, Elsevier (1972).
- (21) B. C. Patten: System Analysis and Simulation in Ecology (B. C. Patten, Ed.), Vol. 1, New York, Academic Press (1971)
- (22) K. E. F. Watt: System Analysis in Ecology, New York, Academic Press (1973)
- (23) C. W. Sheppard: The Theory of the Study of Transfers within a Multi-Compartment System Using Isotopic Tracers, J. Appl. Phys., Vol. 19, 70/76 (1948)
- (24) S. M. Walas: Reaction Kinetics for Chemical Engineers, New York, McGraw-Hill (1959)
- (25) S. Hosoe and M. Ito: On Steady-State Characteristics of Linear Multivariable Systems, Proc. 11th Ann. Allerton Conf. Circuit System Theory, 477/486 (1973)

- (26) S. Hosoe: Determination of Generic Dimensions of Controllable Subspaces and Its Application, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-25, 1192/1196 (1980)
- (27) S. Hosoe, H. Hayato, and Y. Ito: Robust Synthesis of Linear Servomechanisms, Preprints of 8th IFAC (Kyoto), VII-103/VII-108 (1981)
- (28) H. Mayeda and S. Miyoshi: Robust Control of Tracking Problem with Internal Stability for Linear Structured System, Preprints of 8th IFAC (Kyoto), VII-97/VII-102 (1981)
- (29) 前田浩一, 三吉貞行: 構造をもつシステムにおける入力外乱に対する Robust Regulator の存在性, SICE 第10回制御理論シンポジウム資料, 123/128 (1981)
- (30) 楠岡英雄, 児玉慎三: 薬剤の生体内動態の解析 - コンパートメントシステムによるモデル化 -, 計測と制御, vol. 19, 695/699 (1980)
- (31) C.T.Coates: Flow Graph Solutions of Linear Algebraic Equations, IRE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-6, 170/187 (1959)
- (32) 尾崎弘, 白川功, 翁長健治: グラフ理論, コロナ社 (1975)
- (33) 篠田庄司: 線形代数系におけるグラフ理論的諸技法 - II, システムと制御, vol. 23, 103/110 (1979)
- (34) F. R. Gantmacher: The Theory of Matrices, Vol. 1, Chelsea (1959)
- (35) 伊理正夫, 韓太舜: 線形代数, 教育出版 (1977)
- (36) H. Hayakawa, S. Hosoe, M. Hayashi, and M. Ito: On the Controllability of Structured Systems with Dependent Entries, IEEE Trans. Autom. Control 投稿中
- (37) H. H. Rosenbrock and C. Storey: Mathematics of Dynamical Systems, Nelson (1970)
- (38) H. H. Rosenbrock: State Space and Multivariable Theory, Nelson (1970)
- (39) S. Barnett: Matrices in Control Theory, van Nostrand Reinhold (1970)
- (40) 藤崎源一郎: 体と Galois 理論 I, 基礎数学9, 岩波書店 (1977)
- (41) 早川義一, 細江繁幸, 林睦, 伊藤正美: 線形時不変コンパートメントシステムの構造可制御性, 信学論(A) 掲載予定 (1982.3)

- (42) I. W. Sandberg: A Characterization of the Invariance of Positivity for Functional Differential Equations, B.S.T.J., Vol. 58, 1885/1894 (1979)
- (43) H. Maeda and S. Kodama: Some Results on Nonlinear Compartmental System, IEEE Trans. Circuits and Syst., Vol. CAS-26, 203/204 (1979)
- (44) 太田有三, 前田 肇, 児玉慎三: 非線形コンパートメントシステムにおける周期解の存在と安定性について, 信学論(A), Vol. 62-A, 73/80 (1979)
- (45) 前田 肇, 児玉慎三: 符号制限をもつ線形システムの可到達性, 可観測性および実現問題, 信学論(A), Vol. 63-A, 688/694 (1980)
- (46) 前田 肇: コンパートメントシステムの特性, 第19回 SICE 学術講演会予稿集, 357/358 (1980)
- (47) C. Cobelli, A. Lepschy, and G. Roma-Jacur: Identifiability of Compartmental Systems, Math. Bioscience, Vol. 44, 1/18 (1979)
- (48) J. Delforge: New Results on the Problem of Identifiability of a Linear System, Math. Bioscience, Vol. 52, 73/96 (1980)
- (49) 岡野成利, 前田 肇, 楠岡英雄, 児玉慎三: コンパートメントシステムの構造可同定性に関する一考察, 信学論(A), Vol. 64-A, 203/210 (1981)
- (50) 前田 肇, 岡野成利, 児玉慎三, 楠岡英雄: コンパートメントシステムの構造可同定性とグラフ構造, 計測自動制御学会論文集, Vol. 17, 455/460 (1981)
- (51) S. Vajda: Structural Equivalence of Linear Systems and Compartmental Models, Math. Bioscience, Vol. 55, 39/64 (1981)
- (52) R. Zazworsky and H. K. Knudsen: Controllability and Observability of Linear Time-Invariant Compartmental Models, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-23, 872/877 (1978)
- (53) 太田有三, 他: 非負入力による可到達集合の性質, 第24回システムと制御研究発表講演会 (1980)

- (54) 楠岡英雄, 前田肇, 児玉慎三: 非負入力制限をもつ離散時間コンパートメントシステムの可到達性について, 信学論(A), Vol. 63-A, 67/73 (1980)
- (55) 前田肇: コンパートメントシステムの構造と特性, 計測と制御, Vol. 20, 713/719 (1981)
- (56) 早川義一, 細江繁幸, 伊藤正美: 線形回路網の構造可制御性について, SICE 第10回制御理論シンポジウム資料, 213/216 (1981)
- (57) 早川義一, 細江繁幸, 伊藤正美: 中間標準形方程式系の動的次数と可制御性, 信学論(A), Vol. 64-A, 752/759 (1981)
- (58) 近野正, 他: ダイナミカル・アトロジー入門 - 回路と類推 -, コロナ社 (1980)
- (59) 服部嘉雄, 小沢孝夫: グラフ理論解説, 昭晃堂 (1974)
- (60) 梶谷洋司, 篠田庄司: 回路解析, 日本理工出版会 (1979)
- (61) 児玉慎三, 池田雅夫: 線形ダイナミカルシステムの表現式について, 信学論(D), Vol. 56-D, 553/560 (1973)
- (62) E. Polak: An Algorithm for Reducing a Linear Time-Invariant Differential System to State Form, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-11, 577/579 (1966)
- (63) A. Fettweis: On the Algebraic Derivation of the State Equation, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-16, 171/175 (1969)
- (64) 児玉慎三, 前田肇: 線形システムの入出力微分方程式と状態方程式の関係について, 電学誌, Vol. 90, 146/154 (1970)
- (65) 須田信英, 児玉慎三: システムグラフと状態方程式 III, 計測と制御, Vol. 16, 348/355 (1977)
- (66) F. R. Gantmacher: The Theory of Matrices, Vol. 2, Chelsea (1960)
- (67) S. L. Campbell, C. D. Jr. Meyer, and N. J. Rose: Applications of the Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients, SIAM J. Appl. Math., Vol. 31, 411/425 (1976)

- (68) L. Pandolfi: Controllability and Stabilization for Linear Systems of Algebraic and Differential Equations, J. Optimiz. and Appl., Vol. 30, 601/620 (1980)