

報告番号 ※ 甲第 1529号

主論文の要旨

題名

Nonstandard arithmetic of function fields
over H-convex subfields of $*\mathbb{Q}$

(代数関数体の超準整数論)

氏名 安本 雅洋

主論文の要旨

報告番号

※甲第

号

氏名

安本雅洋

Nonstandard method の整数論への応用は、A. Robinson 及び P. Roquette の手によって始められ、極めて有効な方法であることが知られている。この論文においては、 H -convex という概念を導入することによって、この方法を更に発展させる。

\mathbb{Q} を有理数体、 $f(X, Y)$ を \mathbb{Q} 係数の既約多項式、 C を

$$f(X, Y) = 0$$

で定義された代数曲線とする。 \mathbb{Q} の prime とは、素数又は archimedean prime のこととする。 S を \mathbb{Q} の prime からなる有限集合、 $s = |S|$ とする。 C_S を C 上の有理点 (a, b) で、 a, b の分母に現れる prime はすべて S に属するもの集合とする。

$F = \mathbb{Q}(x, y)$ を C の一変数代数関数体、可能な x を \mathbb{Q} 上超越的、 y を $f(x, y) = 0$ を満たす元とする。 C の functional prime とは、 F の valuation ring で \mathbb{Q} を含むものとする。 C の infinite prime とは

C の functional prime で x または y の pole になるもの。可能な x または y を含まないような valuation ring のこととする。 $r = r(C)$ で C の infinite prime の個数とする。
次の結果は Robinson の補題より容易に導くことができる。

命題 1. $r > S$ ならば C_S は高々有限個である。

上の命題の C_S は effective に求めることができる。更に H -convex という概念を導入することによって、 C_S の height の bound を f の係数の height の多項式で表現可能である。(定理 1)。

$f(X, Y, T_1, \dots, T_k) \in \mathbb{Q}[X, Y, T_1, \dots, T_k]$ を既約多項式, $m = (n_1, \dots, n_k)$ を k 個の整数の列, C_m を

$$f(X, Y, n_1, \dots, n_k) = 0$$

で定義される代数曲線とする。

定理 1. 次のことを満たす定数 $N \in \mathbb{N}$ が存在する。

C_m が既約で $r(C_m) > S$ ならば

$C_{m,S}$ の元 (x, y) は

$\max(H(x), H(y)) < \max(2, |n_1|, \dots, |n_k|)^N$
を満たす。

定理1は次のRungeの定理の拡張
になっている

Rungeの定理: $f(x, y)$ を \mathbb{Z} 係数の多
項式, $f_d(x, y)$ を f の最高次数の部分
のformとする。 $f(x, y) = 0$ が整数解
を無限個持てば f_d はある既約多項
式の中になる。

例えば $f(x, y) = X^d - Y^d - g(x, y)$
で g の次数は高々 $d-1$ とする。 $f_d = X^d - Y^d$
は既約多項式の中には入る。から $f(x, y) = 0$
の整数解は有限個である。定理1を用い
ば: $f(x, y) = 0$ の整数解のboundは g の
係数で表現できる。

V を既約代数曲面, $V_{\mathbb{Q}}$ を V 上の有
理点の集合, G を V の二変数代数関
数体とする。

定理2. $t \in G$ を \mathbb{Q} 上超越的,
 $u, v \in G$ を $\mathbb{Q}(t)$ 上超越的有元とする。
任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が
存在して, すべての $P \in V_{\mathbb{Q}}$ に対して

$\min(H(u(p)), H(v(p))) > H(x(p))^N > N^N$
 ならば

$$\left| \frac{\log H(u(p))}{\log H(v(p))} - \frac{[G : \mathbb{Q}(x, u)]}{[G : \mathbb{Q}(x, v)]} \right| < \varepsilon$$

が成立する。

この結果は次の Siegel の結果を代数曲面の±場合は拡張したものになっている。

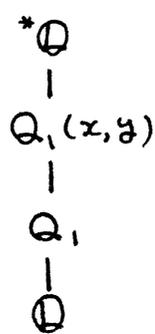
Siegel's first fundamental inequality;
 \mathbb{C} を \mathbb{Q} 上定義された既約代数曲線 F をその一変数代数関数体とする。

任意の $u, v \in F - \mathbb{Q}$ に対して

$$\frac{\log H(u(p))}{\log H(v(p))} \rightarrow \frac{[F : \mathbb{Q}(u)]}{[F : \mathbb{Q}(v)]}$$

ただし P は \mathbb{Q} 上の有理点を動くものとする。

* \mathbb{Q} を \mathbb{Q} の nonstandard model とする。



* \mathbb{Q} の部分体 \mathbb{Q}_1 が H -convex であるとは、 $H(x) < H(y)$ かつ $y \in \mathbb{Q}_1$ ならば $x \in \mathbb{Q}_1$ が成立することとする。一般に代数体と代数関数体とには。

類似の理論が展開できることがよく知られている。 \mathbb{Q} 上の一変数代数関数体と $^*\mathbb{Q}$ の divisor theory の類似性を明らかにするることにより、定理 1 Bv. 2 を得ることが可能になる。