報告番号 ※甲第1529号

主論文の要旨

題名

Nonstandard arithmetic of function fields over H-convex subfields of *Q

(代数関数体の超準整数論)

氏名 安本雅洋

主論文の要旨

報告番号	※甲第　　　　号	氏名	安本雅洋

Nonstandard method の整数論への応用は A. Robinson 及び P. Roquette らの手によって始められ、極めて有効な方法であることが知られている。この論文においては H-convex という概念を導入することによって、この方法を更に発展させる。

$\mathbb{Q}$ を有理数体、$f(X, Y)$ を $\mathbb{Q}$ 係数の既約多項式、C を

$$f(X, Y) = 0$$

で定義された代数曲線とする。$\mathbb{Q}$ の prime とは、素数又は archimedean prime のこととする。S を $\mathbb{Q}$ の prime からなる有限集合、$s = |S|$ とする。C_S を C 上の有理点 (a, b) で、a, b の分母に現われる prime はすべて S に属するようなものの集合とする。

$F = \mathbb{Q}(x, y)$ を C の一変数代数関数体、すなわち x を $\mathbb{Q}$ 上超越的、y を $f(x, y) = 0$ を満たす元とする。C の functional prime とは、F の valuation ring で $\mathbb{Q}$ を含むものとする。C の infinite prime とは

C の functional prime で x 又は y の pole になるもの。すなわち x 又は y を含まないような valuation ring のこととする。$r = r(C)$ で C の infinite prime の個数とする。
次の結果は Robinson の補題より容易に導くことができる。

命題 1. $r > s$ ならば、C_s は高々有限個である。

上の命題の C_s は effective に求めることができる。更に H-convex という概念を導入することによって、C_s の height の bound を f の係数の height の多項式で表現可能である。(定理 1)。

$f(X, Y, T_1, \cdots, T_k) \in \mathbb{Q}[X, Y, T_1, \cdots, T_k]$ を既約多項式、$\mathfrak{n} = (n_1, \cdots, n_k)$ を k 個の整数の列、$C_{\mathfrak{n}}$ を

$$f(X, Y, n_1, \cdots, n_k) = 0$$

で定義される代数曲線とする。

定理 1. 次のことを満たす定数 $N \in \mathbb{N}$ が存在する。

$C_{\mathfrak{n}}$ が既約で $r(C_{\mathfrak{n}}) > s$ ならば $C_{\mathfrak{n}s}$ の元 (x, y) は

$$\max(H(x), H(y)) < \max(2, |n_1|, \cdots, |n_k|)^N$$

を満たす。

定理1は次のRungeの定理の拡張になっている

Rungeの定理： $f(X,Y)$ を $\mathbb{Z}$ 係数の多項式，$f_d(X,Y)$ を f の最高次数の部分の form とする。$f(X,Y)=0$ が整数解を無限個持てば f_d はある既約多項式の巾になる。

例えば $f(X,Y) = X^d - Y^d - g(X,Y)$ で g の次数は高々 $d-1$ とする。$f_d = X^d - Y^d$ は既約多項式の巾にはならないから $f(X,Y)=0$ の整数解は有限個である。定理1を用いれば，$f(X,Y)=0$ の整数解の bound は g の係数で表現できる。

V を既約代数曲面，$V_{\mathbb{Q}}$ を V 上の有理点の集合，G を V の二変数代数関数体とする。

定理2. $t \in G$ を $\mathbb{Q}$ 上超越的，$u, v \in G$ を $\mathbb{Q}(t)$ 上超越的な元とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $P \in V_{\mathbb{Q}}$ に対して

$$\min(H(u(p)), H(v(p))) > H(t(p))^N > N^N$$

ならば

$$\left| \frac{\log H(u(p))}{\log H(v(p))} - \frac{[G : \mathbb{Q}(t,u)]}{[G : \mathbb{Q}(t,v)]} \right| < \varepsilon$$

が成立する。

この結果は次のSiegelの結果を代数曲面の場合は拡張したものになっている。

Siegel's first fundamental inequality;

Cを$\mathbb{Q}$上定義された既約代数曲線

Fをその一変数代数関数体とする。

任意の$u, v \in F - \mathbb{Q}$に対して

$$\frac{\log H(u(p))}{\log H(v(p))} \longrightarrow \frac{[F : \mathbb{Q}(u)]}{[F : \mathbb{Q}(v)]}$$

ただしPは$\mathbb{Q}$上の有理点を動くものとする。

${}^*\mathbb{Q}$を$\mathbb{Q}$のnonstandard modelとする。

$$\begin{array}{c} {}^*\mathbb{Q} \\ | \\ Q_1(x,y) \\ | \\ Q_1 \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

${}^*\mathbb{Q}$の部分体Q_1がH-convexであるとは、$H(x)<H(y)$かつ$y \in Q_1$ならば$x \in Q_1$が成立することとする。一般に、代数体と代数関数体とには、

類似の理論が展開できることがよく知られている。Q_p 上の一変数代数関数体と $^*Q$ の divisor theory の類似性を明らかにすることにより、定理1及び2を得ることが可能になる。