

097

題・本 籍

I



非線形ばね特性をもつ 回転軸の振動

目 次

記 号	(1)
序 論	(4)
第1章 玉軸受に起因する主危険速度付近の特異な振動現象	1
1.1 まえがき	1
1.2 運動方程式	1
1.3 調和振動解とその安定性の判別	3
1.4 実験装置と実験結果	5
1.5 結論	8
第2章 対称非線形ばね特性をもつ回転軸の振動	18
2.1 まえがき	18
2.2 実験装置と発生可能な非線形強制振動	19
2.3 実験結果	20
(I) ばね特性	20
(II) 対称非線形特性の影響をうける強制ふれ回り振動	21
(II-a) 共振曲線の形に影響をうける振動	21
(II-b) 発生の有無に影響をうける振動	23
(III) 非対称非線形特性の影響をうける強制ふれ回り振動	23
(III-a) 発生の有無に影響をうける振動	23
2.4 結論	24
第3章 非線形ばね特性をもつ回転軸の振動の解析的考察	38
3.1 まえがき	38
3.2 ばね特性と運動方程式	38
3.3 発生可能な各種非線形強制振動の分類	45
3.4 非線形ばね特性により発生する各種の非線形強制振動	45
(I) 対称非線形ばね特性に起因する強制ふれ回り振動	47
(II) 非対称非線形ばね特性に起因する強制ふれ回り振動	52
3.5 主危険速度における強制振動と後向き同期歳差運動様式の強制振動	55

3.6	実験結果との比較	56
3.7	結論	57
参 考 文 献		62
謝 辞		66

この論文で使用する記号は次のとおりである。

$O - x y$: 静止座標系

$O - x' y'$: 回転座標系

$x, y, x' = x/\sqrt{I/m}, y' = y/\sqrt{I/m}$: 回転体のたわみ

θ_x, θ_y : 回転体の傾き

$t, t' = t\sqrt{\delta/I}, t' = t\sqrt{\alpha/m}$: 時間

$\omega, \omega' = \omega\sqrt{I/\delta}, \omega' = \omega\sqrt{\alpha/m}$: 軸の回転速度

ω_c : 主危険速度

ω_i : 発生する振動の振動数

$M(x', y')$: 回転体の形心

$G(x'_G, y'_G)$: 回転体の重心

$e, e' = e/\sqrt{I/m}$: 回転体の偏心

τ : 回転体の動不つりあい

β : 回転体の偏心 e と動不つりあい τ の間の角度, x' 方向から軸の回転方向に測った偏心 e の角位置を示す角度

m : 回転体の質量

I_p : 回転体の極慣性モーメント

I : 回転体の直径に関する慣性モーメント

$i_p = I_p/I$: 回転体の極慣性モーメント

l : 上下軸受中心間の軸の長さ

a : 下側軸受中心から円板までの距離, 調和振動解の振幅

b : 上側軸受中心から円板までの距離, 調和振動解の振幅

S : 軸

R : 円板 (回転体)

V : ポテンシャルエネルギー

k : 平均のばね定数

α : ばね定数, x' 方向の角位置, 位相角

$\gamma, \gamma' = \gamma / (\alpha \sqrt{I/m})$: ばね定数

δ : ばね定数, 振動波形の頂点と回転マーク P との間の角度, 位相角

$\delta' = \delta m / (\alpha I)$: ばね定数

$\Delta k, \Delta, \Delta\gamma, \Delta\delta$: 軸剛性の方向差

\bar{k} : 円板の回転角 Θ に関する k の平均

$\overline{\Delta k}$: 円板の回転角 Θ に関する Δk の平均

$\rho = \sqrt{k/m}, \rho_f, \rho_b, \rho_i$: 系の固有振動数

ρ_{01}, ρ_{02} : $\omega = 0$ のときのそれぞれ x', y' 方向の固有振動数

$\rho_m = (\rho_{01} + \rho_{02}) / 2$: $\omega = 0$ における平均の固有振動数

$\rho_d = (\rho_{01} - \rho_{02}) / 2$: $\omega = 0$ における固有振動数の差

$\bar{\rho}_m, \bar{\rho}_d$: 円板の回転角 Θ に関する ρ_m あるいは ρ_d の平均

Θ : x 方向から測った紙片 P までの角度

$\beta_i, \varepsilon'_x = 3\beta_1, \varepsilon'_y = 3\beta_4$: 非線形項の係数

$\varepsilon_{ab} (a+b=3), \varepsilon_{abcd} (a+b+c+d=3), \varepsilon'_{ab} = \varepsilon_{ab} / \delta$: 非対称非線形項の係数

$\beta_{ab} (a+b=4), \beta_{abcd} (a+b+c+d=4), \beta'_{ab} = \beta_{ab} / \delta$: 対称非線形項の係数

$\varepsilon_c^{(n)}, \varepsilon_s^{(n)}, \varepsilon^{(n)} = \sqrt{\varepsilon_c^{(n)2} + \varepsilon_s^{(n)2}}, \varepsilon_{ijc}^{(n)}, \varepsilon_{ijs}^{(n)}, \varepsilon'_{ijc}^{(n)}, \varepsilon'_{ijs}^{(n)}$: 極座標表示の非対称非線形項の係数

$\beta^{(0)}, \beta_c^{(n)}, \beta_s^{(n)}, \beta^{(n)} = \sqrt{\beta_c^{(n)2} + \beta_s^{(n)2}}, \beta_{ijc}^{(n)}, \beta_{ijs}^{(n)}, \beta'_{ijc}^{(n)}, \beta'_{ijs}^{(n)}$: 極座標表示の対称非線形項の係数

φ_n : 非線形特性の方向を示す位相角

$\psi_x, \psi_y, \psi_{\theta_x}, \psi_{\theta_y}$: x, y, θ_x, θ_y 方向の非対称非線形項

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{\theta_x}, \varphi_{\theta_y}$: x, y, θ_x, θ_y 方向の対称非線形項

$\Psi_y, \Phi_y, \Psi_{\theta_y}, \Phi_{\theta_y}$: $\psi_y, \varphi_y, \psi_{\theta_y}, \varphi_{\theta_y}$ の時間 t に関する不定積分

$\theta, \varphi, r, \varphi_r, \varphi_\theta$: 極座標

X_i : 基準座標

A, R_s, A_s, B_s, F_i : 振幅

$A_{0i}, A_{0i}; a_0, a_{0i}; b_0, b_{0i}$: 定常解の振幅

ξ, η : 定常解 a_0, b_0 からの小さなずれ

$c, c' = c / \sqrt{\delta I}, c_{ab}, c'_{11} = c_{11} / \sqrt{\alpha m}, c'_{12} = c'_{21} = c_{12} / \sqrt{\alpha I} = c_{21} / \sqrt{\alpha I}, c'_{22} = c_{22} / (I \sqrt{\alpha / m})$:

減衰係数

$c_s = c_{11} / K_s + 2c_{12} + K_s c_{22}$

$$\kappa_s = (\rho_s^2 - 1) / \gamma$$

$$n_s = \gamma \rho_s / (\rho_s - \rho_i)(\rho_s - \rho_j)(\rho_s - \rho_k)$$

D_x, D_y, D'_x, D'_y : x, y, x', y' 方向の粘性減衰力

D : 散逸関数

$F'_x, F'_y, F_x, F_y, F_{\theta x}, F_{\theta y}$: $x', y', x, y, \theta_x, \theta_y$ に関するばね力

$N_{(n)}$: 方向角が 2π 変わる間に n 回増減する非線形成分

$$(\beta^{(n)}F)_{ij}, (\beta^{(n)}F)'_{ij}, (\beta^{(n)}F)_{ijk}, (\beta^{(n)}F)'_{ijk}, (\varepsilon^{(n)}F)_{ij}, (\varepsilon^{(n)}F)'_{ij}, (\varepsilon^{(n)}F)''_{ij}, (\varepsilon^{(n)}F)'''_{ij} :$$

$N_{(n)}$ の非線形成分を係数とする調和振動の振幅 $F_{1,2,3,4}$ の一次項よりなる式

$(\beta^{(0)}F^2)_s$: $N_{(0)}$ の非線形成分を係数とする調和振動の振幅 $F_{1,2,3,4}$ の二次項よりなる式

$\xi_{ij}^{(n)}, \eta_{ij}^{(n)}, \zeta_{ij}^{(n)}, \mu_{ij}^{(n)}, \xi_{ijk}^{(n)}, \eta_{ijk}^{(n)}, \zeta_{ijk}^{(n)}, \mu_{ijk}^{(n)}$: 対称非線形項の係数をまとめたもの

$\lambda_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(n)}, \tau_{ij}^{(n)}, \nu_{ij}^{(n)}, \lambda'_{ij}{}^{(n)}, \sigma'_{ij}{}^{(n)}, \tau'_{ij}{}^{(n)}, \nu'_{ij}{}^{(n)}$: 非対称非線形項の係数をまとめたもの

回転機械を運転しているとき、各種の原因により、ある特定の回転数で振幅が増加してはげしく振動することがある。このような回転数は回転軸の危険速度とよばれる。特に、軸の回転数が回転軸系の固有振動数と一致したとき共振して激しいふれ回りを起すが、このときの回転数を主危険速度とよんでいる。現在用いられているターボ機械類はますます高速化され、主危険速度を越えて運転されることも多く、この場合回転軸はいわゆる弾性軸となる。このような回転機械類の運転性能改善のため、解決しなくてはならぬ動力学的問題は数多く存在するが、なかでも回転軸に発生する振動現象の解明はもっとも重要であるといえよう。

19世紀末以来、A. Stodola⁽¹⁾をはじめとして多くの研究者によって回転軸の振動に関する数多くの理論的、実験的研究がなされてきたが、20世紀の初めまでの研究の大部分は軸の固有振動数と主危険速度の決定に関するものであった。このころの技術の中心課題はいかに共振を避けるかという問題であり、それを解決する必要性からこの方面の研究が発達したのである。しかしそれ以後、回転機械の高速化に伴い、上記の主危険速度における振動以外に各種の振動現象が見出され研究されてきた。多岐にわたるそれらの研究も、概略次のように分類される。

(1) 強制振動

各種の原因によって生ずる周期的強制外力の振動数(多くの場合、軸回転速度 ω に比例した振動数 $\lambda\omega$ をもつ)が、回転軸の固有振動数 ρ_i と一致したとき生ずる振動である。回転体の偏心 e と動不つりあい τ の存在のため生ずる強制外力は軸回転数と同じ振動数 ω をもち、これにより $\rho_i = \omega$ となる主危険速度付近で激しい振動を生ずる。前述のようにこれが実際の振動問題の主要な部分をしめ、これに関する研究はA. Stodola⁽¹⁾、S. Dunkerleyなどに代表される主危険速度の位置の算出⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾、軸系の高速つりあわせ⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾、危険速度通過の問題⁽⁵⁾など多くある。主危険速度以外の危険速度に関しては、回転体の支持に方向差のあるときに生ずる後向き同期歳差運動様式の振動⁽⁶⁾⁽⁷⁾、扁平軸の重力による2次的危険速度の振動⁽⁸⁾、玉軸受の鋼球の不ぞろいにより生ずる強制振動⁽⁹⁾、玉軸受の玉通過による振動⁽¹⁰⁾、回転速度 ω の周期的変動により生ずる振動⁽¹¹⁾などの研究が行われた。

(2) 非線形ばね特性が存在する場合にのみ発生する強制振動

回転軸を単列深みぞ形玉軸受で支えた場合、固定支持的に支えるのであるが、玉軸受の内輪は外輪に対しわずかながら自由に傾くことができ、いわゆる角度のがた⁽¹²⁾が存在するため、軸のたわみの小さいあいだは自由支持的となる。もし両軸受台中心線がわずかにずれていたりすると、

軸中心線が角度のがたの中央からはずれ、軸の復元力に非対称非線形ばね特性があらわれる。このような系には前向き、後向きの $\frac{1}{2}$ 次分数調波振動とか、 $[\rho_i \pm \rho_j]$ 様式の和差調波振動などが発生する。和差調波振動は多自由度非線形系に特有な振動で、固有振動数 ρ_i, ρ_j の和または差の絶対値が軸回転速度 ω に等しいとき、 $|\rho_i \pm \rho_j| = \omega$ の関係を満たす回転速度付近で振動数 $\omega_i (\neq \rho_i)$ 、 $\omega_j (\neq \rho_j)$ をもった二つの振動が同時に発生するものである。以上のほか、軸受部の半径方向にがたのある場合の主危険速度における履歴現象⁽¹³⁾とか、角度のがたと軸のまがり⁽¹⁴⁾が組み合わさり、回転中に軸の静たわみ量が複雑に変化するため生ずる $[\pm 2\omega]$ 、 $[\pm 3\omega]$ 、 $[\pm 4\omega]$ の振動⁽¹⁴⁾とかに関する研究もある。

(3) 自励振動

回転軸に発生する自励振動としては、オイルウィップ、内部摩擦による自励振動、乾性摩擦による自励振動の三種類があげられる。オイルウィップはすべり軸受で支えられた回転軸が油膜の作用によって自励的に激しくふれ回りする現象であり、主危険速度の2倍以上の速度で広範囲におきる。B. L. Newkirk と H. D. Taylor によつてはじめて報告されて以来、現在までにその発生形態、理論的説明、防止法に関して多くの研究がなされている⁽¹⁵⁾。材料に内部摩擦があると応力-ひずみ曲線は履歴曲線をえがき、ひずみが零の位置と応力が零の位置とが多少ずれるため、軸の復元力の方向が求心方向からわずかにはずれる。このため主危険速度以上の回転数で自励振動が発生する。これは A. L. Kimball⁽¹⁶⁾、B. L. Newkirk⁽¹⁷⁾によりその発生が見出された。乾性摩擦による自励振動は振れ止めの案内面に軸が接触したとき生ずる後向き歳差運動の自励的ふれ回りで、樫木らの研究がある⁽¹⁸⁾。

(4) 不安定振動

何らかの原因で回転軸の剛性に方向差を生じたり、あるいは回転体の中心を通り、回転軸に直角な二つの慣性主軸に関する主慣性モーメントに差があると、主危険速度付近で自励的に振幅を増すふれ回り振動が発生する。いわゆる扁平軸の振動⁽⁸⁾とか非対称回転体の振動⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾に関する研究がこの問題を扱っている。

回転軸の横振動に関しては以上のような各種の振動現象が存在し、またそれらに対し多くの研究がなされているが、回転軸の非線形振動に関する研究は比較的新しく、未解決の問題も多い。そこで著者は弾性回転軸に発生する非線形振動を実験的、理論的に研究し、従来不明確であつたいくつかの点を明らかにした。

非線形振動に関する研究は進んでいるが、そのほとんどは一自由度往復振動系についてである⁽²¹⁾⁽²²⁾。回転軸における非線形振動問題はかなり複雑であり、その研究もあまりみあたらない。

山本は単列深みぞ形玉軸受で支えられた回転軸系に発生する振動の一連の実験的⁽¹²⁾⁽²³⁾⁽²⁴⁾、解析的⁽²³⁾⁽²⁴⁾研究を行った。その研究では回転軸の復元力に（静止している）非対称非線形特性が現われた場合を扱っており、その系に発生する $\frac{1}{2}$ 次分数調波振動⁽¹²⁾⁽²⁴⁾、 $[\rho_i + \rho_j]$ 様式の和差調波振動⁽²³⁾⁽²⁴⁾について報告している。対称性の非線形振動に関しては、一般の往復振動系に発生する各種の非線形強制振動については山本をはじめとして多くの報告がある^{(27)~(31)}が、回転軸系の旋回運動様式のこの種の振動に関する報告はない。

本論文の内容の概略は以下のようなものである。

第一章では、軸回転速度 ω で回転する、軸剛性の方向差と非対称非線形ばね特性が存在する場合の、主危険速度付近の振動現象を実験と理論の両面から取扱っている。系の回転する部分の製作組立誤差と軸受の角度のがたが結びついてこのようなばね特性が現われることがある。そのとき主危険速度付近で、不つりあいの角位置いかんにより共振曲線の形に著しい変化を生じ、不安定領域が現われたり消失したり、またその領域の幅が増減したりする特異な振動現象が生ずることを明らかにしている。本章で扱っているような回転する非線形ばね特性に関する研究は従来よりなされておらず、主危険速度付近のこの種の特異な現象も新たに見出されたものである。

第二章では、（静止した）対称非線形ばね特性をもつ回転軸系に発生する振動現象を実験的に解明している。単列深みぞ形玉軸受で支えられた鉛直軸において、上下軸受台の中心線が一致するように注意して組立てると、静止状態での回転軸中心線が角度のがたのほぼ中央に位置するようになり、軸の復元力に対称非線形ばね特性が強く現われる。このような回転軸系には、 $\frac{1}{2}$ 次分数調波振動、 $[2\rho_i \pm \rho_j]$ 、 $[\rho_i \pm \rho_j \pm \rho_k]$ 様式の和差調波振動など、対称非線形系に特有な振動が新たに発生することを見出している。

第三章では、回転軸に発生する非線形強制振動を理論的に解析している。ジャイロ作用をともなう一般の回転軸系の軸の横振動は振れ回り振動であるので、その非線形ばね特性を極座標で表わすのが妥当である。この表示法により、非線形ばね特性は平衡位置を一周する間に変化しない成分と、1, 2, 3, 4, …… 回大きさが周期的に変化する成分とから成り立っていることを明らかにする。続いて各種の非線形強制振動の共振曲線の式を求め、それらを上記の諸成分との関連において論ずることにより、各種の振動の諸特性や発生難易などがより明確に説明されることを示す。また第二章の実験結果と、山本らによる非対称非線形ばね特性をもつ回転軸に発生する振動に関する実験結果⁽¹²⁾⁽²³⁾⁽²⁴⁾を、この章の解析結果にもとづいて合理的に説明している。

第1章 玉軸受に起因する主危険速度 度付近の特異な振動現象⁽³²⁾

1.1 ま え が き

広く用いられている単列深みぞ形玉軸受には、その構造上いわゆる「角度のがた」があり、回転軸中心線が、この小さな角度のがた内にあれば、軸端は自由支持になるが、なんらかの原因で角度のがたの外へ出ようとする、支持条件は固定支持的になる⁽¹²⁾。両端支持の弾性回転軸で、両方か一方の軸受に単列深みぞ形玉軸受を用いた場合、(A)玉軸受の外輪がはまる軸箱円筒内面の中心線と、軸受中心線の間になんらかの不一致があるとき、(B)玉軸受の外輪がわずかでも傾いて軸箱内にそう入されているとき、(C)外輪の玉みぞの横ぶれがあるとき、(D)軸箱円筒内面が厳密には真円でなく、外輪と軸箱内面との間のはめあいがゆるいときなどは、既述のように、回転軸中心線の平衡位置が、玉軸受の角度のがたの中央からはずれるため、軸剛性に方向差を生じ、かつ方向性のある非対称非線形ばね特性が現われ^{(7),(12)}、その結果 $\frac{1}{2}$ 次分数調波振動、和差調波振動、後向き同期歳差運動様式の強制振動が発生する^{(7),(12),(14),(23),(24)}。回転軸中心線が角度のがたの中央からはずれる方向は、上記(A)~(D)のいずれの原因からわかるようにある一定の方向であり、したがって軸剛性の方向差、非線形特性の方向性も、軸が回転するしないに関係なく、いわばその方向が固定した方向差、方向性である。

一方(a)回転軸にわずかなあらかじめの曲りのあるとき、(b)内輪がわずかでも軸けい(頸)に傾いてそう入されているとき、(c)内輪の玉みぞの横ぶれがあるとき、(d)軸けいが厳密には真円でなく、内輪と軸けいの間のはめあいがゆるいときなどでも、回転軸中心線が角度のがたの中央からずれて、軸剛性の方向差、方向性のある非対称非線形ばね特性が現われるが、この方向差、方向性は、ずれの原因(a)~(d)の内容からわかるように、軸の回転速度 ω で、軸とともにその方向が回転する方向差、方向性である。

回転軸系にこのような軸回転速度 ω で回転するばね特性が存在する場合、主危険速度 ω_c 付近で、不つりあいの角位置いかんにより、不安定振動が発生する不安定領域⁽⁸⁾が現われたり消失したり、不安定領域の幅が増減したり、振動数 ω の不つりあいによる強制振動の共振曲線の形に著しい変化を生じたりする。本章はこのような特異な振動現象を、解析的、実験的に明らかにしたものである。

1.2 運動方程式

回転体のたわみ α と傾きとが連成しない、比較的簡単な回転軸系におけるたわみ運動に関して、まず運動方程式を求めてみる。

前節で述べた軸とともに回転速度 ω で回転する方向差，方向性のある回転軸のばね特性は図 1.1 に示すような，回転体中心の平衡位置 O を原点とし， ω で回る回転座標系 $O-x'y'$ により，これを表示するのが便利である。軸剛性に方向差のある場合，剛性の最大，最小の方向はたがいに直角であり，前者を x' 方向，後者を y' 方向とする。非対称性の非線形項は，一般に座標 x' ， y' の偶次乗項の和で表わされるが，ここでは最も簡単な二乗項の非線形性を考える。この場合の弾性軸のもつポテンシャルエネルギー V の一般的な表示は

$$V = \frac{1}{2} (k + \Delta k) x'^2 + \frac{1}{2} (k - \Delta k) y'^2 + \beta_1 x'^3 + \beta_2 x'^2 y' + \beta_3 x' y'^2 + \beta_4 y'^3 \dots\dots\dots (1.1)$$

である。ここに k は軸の平均のばね定数， Δk は軸剛性の方向差， $\beta_1 \sim \beta_4$ は非線形項の係数である。 x' ， y' 方向のばね力 F'_x ， F'_y は

$$\left. \begin{aligned} F'_x &= -\partial V / \partial x' \\ &= -\{ (k + \Delta k) x' + 3\beta_1 x'^2 + 2\beta_2 x' y' + \beta_3 y'^2 \} \\ F'_y &= -\partial V / \partial y' \\ &= -\{ (k - \Delta k) y' + 3\beta_4 y'^2 + 2\beta_3 x' y' + \beta_2 x'^2 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.2)$$

であり，下線をほどこした項は x' ， y' 方向間の連成項である。非線形項による連成はあっても小さいと考えられるし，後述の実験結果は，連成項を無視しても，これをほぼ完全に説明しうるので，ここでは式 (1.2) 中の連成項を無視し， $\beta_2 = \beta_3 = 0$ とする。さらに $3\beta_1 = \epsilon'_x$ ， $3\beta_4 = \epsilon'_y$ とおけば，式 (1.2) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F'_x &= -\{ (k + \Delta k) x' + \epsilon'_x x'^2 \} \\ F'_y &= -\{ (k - \Delta k) y' + \epsilon'_y y'^2 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.3)$$

図 1.1 で， $O-x'y'$ は静止座標系， $M(x', y')$ は回転体の形心， $G(x'_G, y'_G)$ は重心， $MG = e$ は回転体の偏心率であり

$$x'_G = x' + e \cdot \cos \beta, \quad y'_G = y' + e \cdot \sin \beta \dots\dots\dots (1.4)$$

の関係がある。ここに β は x' 方向から軸の回転方向に測った偏心 e の角位置を示す角度である。静止座標系で表わした粘性減衰力 $D_x = -c \dot{x}$ ， $D_y = -c \dot{y}$ (c : 減衰係数) が系に作用するとき， x' ， y' 方向の減衰力 D'_x ， D'_y は

$$D'_x = -c \dot{x}' + c \omega y', \quad D'_y = -c \dot{y}' - c \omega x' \dots\dots\dots (1.5)$$

となる。回転体の質量を m とすれば，回転座標系 $O-x'y'$ で表わされる x' ， y' 方向の慣性力は，それぞれ $(-m \ddot{x}'_G + 2m \omega \dot{y}'_G + m x'_G \omega^2)$ ， $(-m \ddot{y}'_G - 2m \omega \dot{x}'_G + m y'_G \omega^2)$ であり，ばね力は式 (1.3) 減衰力は式 (1.5) でそれぞれ与えられているから，この場合の運動方程式は，ダランベルの原理か

ら次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (-m\ddot{x}'_G + 2m\omega\dot{y}'_G + m x'_G \omega^2) + (-c\dot{x}' + c\omega y') \\ - \{ (\kappa + \Delta\kappa) x' + \varepsilon'_x x'^2 \} = 0 \\ (-m\ddot{y}'_G - 2m\omega\dot{x}'_G + m y'_G \omega^2) + (-c\dot{y}' - c\omega x') \\ - \{ (\kappa - \Delta\kappa) y' + \varepsilon'_y y'^2 \} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.6)$$

ここに $\Delta\kappa$, ε'_x , ε'_y , c は微小量である。偏心 e による強制振動，すなわち振動数 ω の調和振動解を

$$\left. \begin{aligned} x = A \cdot \cos(\omega t + \alpha) = b \cdot \cos \omega t - a \cdot \sin \omega t \\ y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) = b \cdot \sin \omega t + a \cdot \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.7)$$

とおくと，ここに

$$a = A \sin \alpha, \quad b = A \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (1.8)$$

は時間 t の関数であり， $\Delta\kappa$, c , ε'_x , ε'_y が微小量であるので， \dot{a} と \dot{b} ， \ddot{a} と \ddot{b} はそれぞれ微小量の一，二乗の大きさである。また $x = x' \cdot \cos \omega t - y' \sin \omega t$ ， $y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t$ の関係と式(1.7)との比較から

$$x' = b, \quad y' = a \quad \dots\dots\dots (1.9)$$

であることを知る。式(1.6)に式(1.4)，(1.9)を代入し，微小量の二乗以上を無視すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 2m\omega\dot{a} = - \{ m\omega^2 - (\kappa + \Delta\kappa) \} b + \varepsilon'_x b^2 - c\omega a - me\omega^2 \cos \beta \\ 2m\omega\dot{b} = \{ m\omega^2 - (\kappa - \Delta\kappa) \} a - \varepsilon'_y a^2 - c\omega b + me\omega^2 \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.10)$$

1.3 調和振動解とその安定性の判別

調和振動の定常解を a_0 , b_0 とすれば，式(1.10)において， $\dot{a} = 0$ ， $\dot{b} = 0$ ， $a = a_0$ ， $b = b_0$ とおくことにより次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_x b_0^2 - m\sigma_1 b_0 - me\omega^2 \cos \beta = c\omega a_0 \\ -\varepsilon'_y a_0^2 + m\sigma_2 a_0 + me\omega^2 \sin \beta = c\omega b_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.11)$$

ここに

$$\sigma_1 = \omega^2 - \rho^2 (1 + \Delta\kappa/\kappa), \quad \sigma_2 = \omega^2 - \rho^2 (1 - \Delta\kappa/\kappa) \quad \dots\dots\dots (1.12)$$

は共振点からのずれであり， $\rho = \sqrt{k/m}$ は系の固有振動数である。式(1.11)から a_0 , b_0 が求まり，したがって調和振動の定常振幅 $A_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$ も求まる。

つぎに強制振動解の安定性を調べるため，式(1.10)を次のように変形する。

$$\frac{db}{da} = \frac{m\sigma_2 a - \varepsilon'_y a^2 - c\omega b + me\omega^2 \sin \beta}{-m\sigma_1 b + \varepsilon'_x b^2 - c\omega a - me\omega^2 \cos \beta} \quad \dots\dots\dots (1.13)$$

定常解 a_0, b_0 からの小さなずれを ξ, η とし

$$a = a_0 + \xi, \quad b = b_0 + \eta \quad \dots\dots\dots (1.14)$$

を式 (1.13) に代入して、 ξ, η の二次以上の高次項を省略すれば

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{(m\sigma_2 - 2\varepsilon'_y a_0)\xi - c\omega\eta}{-c\omega\xi - (m\sigma_1 - 2\varepsilon'_x b_0)\eta} = \frac{a^*\xi + b^*\eta}{c^*\xi + d^*\eta} \quad \dots\dots\dots (1.15)$$

となる。 $b^* + c^* = -2c\omega < 0$, $a^*d^* - b^*c^* < 0$ の安定条件のうち、前者は常に満たされるから、結局安定条件は後者より次式となる。

$$(m\sigma_1 - 2\varepsilon'_x b_0)(m\sigma_2 - 2\varepsilon'_y a_0) + c^2\omega^2 > 0 \quad \dots\dots\dots (1.16)$$

不つりあい e が、図 1.1 の x', y' 軸で区分される I, II, III, IV の象限の中央に位置する $\beta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ の四つの場合における共振点 $\omega = \rho$ 付近の式 (1.11) から計算した共振曲線を図 1.2 ~ 1.5 に示す。 a_0, b_0 は同一の軸回転速度 ω に対し一般に 4 個あるので、これらを a_{0i}, b_{0i} ($i = 1 \sim 4$) の記号で区別している。また $A_{0i} = \sqrt{a_{0i}^2 + b_{0i}^2}$ である。図 1.2 ~ 1.5 は $\Delta k/k = 0.15$, $\varepsilon'_x/k = 0.40 \text{ mm}^{-1}$, $\varepsilon'_y/k = -0.40 \text{ mm}^{-1}$, $c/\sqrt{mk} = 0.02$, $e = 0.02 \text{ mm}$ の場合の共振曲線である。非線形項の係数 $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y$ の正負は、振動の性質に本質的な影響を与えない。ここでは後述の実験結果 (図 1.14 ~ 1.17) に対応させ、 $\varepsilon'_x > 0, \varepsilon'_y < 0$ の場合を図示しておいた。また $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y$ の正負は、図 1.13 のようなばね特性の実測から、容易にこれを判定しうる。図中の実線、破線はそれぞれ式 (1.16) により判別した安定、不安定な振動の区別を示している。

図 1.2 ~ 1.5 において、実線の A_{0i} 曲線が存在しない軸回転速度範囲が不安定領域であり、ここでは指数関数的に振幅が増大する振動数 ω の不安定振動が発生する。不つりあい e が、第 I, II, III 象限にある図 1.2, 1.3, 1.4 では不安定領域が存在するが、第 IV 象限内にあるときは、図 1.5 に示すように不安定領域は消失する。 e が第 II 象限にある図 1.3 の場合が不安定領域は最も広く、図 1.2 (e が第 I 象限) では高速側から、図 1.4 (e が第 III 象限) では低速側から不安定領域がせばまっている。図 1.5 では実線の A_{01} と A_{02} は交差している。交差点では振幅は同じであるが位相は異なっている。

図 1.2 ~ 1.5 のように、共振点付近の強制振動の諸性質、すなわち共振曲線の形、不安定領域の幅、位置などが、不つりあいの角位置 β に大きく影響される理由を、図 1.6 により説明する。後述するように、実験では低速側の A_{01} 曲線、高速側の A_{02} 曲線のみ現われるから、これらの曲線について述べる。簡単のため無減衰 ($c = 0$) の場合を考えると、式 (1.11) よりわかるように、 e が第 I, II 象限にあれば、 $\sin \beta > 0$ であるので、低速側の $a_0 (> 0)$ は、図の a'_{01} 曲線のように、

$a_0 = 0$ の水平線にそい、A 点で反転して $m\sigma_2 - \varepsilon'_y a_0 = 0$ の直線に漸近する。 e が第 III, IV 象限にあれば、 $\sin\beta < 0$ であるので、 $a_0 (< 0)$ は図の a_{01} 曲線のように、なだらかに $m\sigma_2 - \varepsilon'_y a_0 = 0$ の曲線に漸近する。高速側の b_0 曲線も、第 I と第 IV, 第 II と第 III 象限に e があるとき $\cos\beta$ の正負により、それぞれ $m\sigma_1 - \varepsilon'_x b_0 = 0$ の直線に漸近する b_{02} , b'_{02} 曲線となる。ここで反転する a'_{01} , b'_{02} 曲線を記号 U, そうでない a_{01} , b_{02} 曲線を S で表示する。拡大率の関係で振幅 $A_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$ は、低速側では a_0 に、高速側では b_0 にほぼ等しい。したがって A_0 曲線は、 e が第 I 象限にあれば低速側ではほぼ a'_{01} (U) に、高速側では b_{02} (S) になり、その結果図 1.2 の U S 形の共振曲線になる。また第 II 象限なら a'_{01} (U) と b'_{02} (U), すなわち図 1.3 の U U 形の共振曲線になる。同様にして第 III, IV 象限に e があれば、それぞれ図 1.4, 1.5 の S U, S S 形になる。U U 形が最も不安定領域が広く、S U, U S 形ではそれぞれ低速、高速側から不安定領域がせまくなることは自ら明らかであろう。

非線形項の係数 $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y$ の正負により、不つりあいの存在する象限と共振曲線の形との間の関係は表 1.1 のように異ってくる。

組立条件により、 $\varepsilon'_x \doteq 0, \varepsilon'_y > 0$ となる場合もある。このときは軸剛性の大きい x' 方向をほぼ境として、不つりあい e が第 I, II 象限にある $\beta \doteq 0^\circ \sim 180^\circ$ のときと、第 III, IV 象限にある $\beta \doteq 180^\circ \sim 360^\circ$ のときとで振動の性質を異にする。前者では図 1.7 ($\beta = 90^\circ$) のような共振曲線になり、後者では図 1.8 ($\beta = 270^\circ$) のように広い不安定領域が存在する。図 1.7, 1.8 は $\Delta k/k = 0.15, \varepsilon'_x/k = 0, \varepsilon'_y/k = 0.56 \text{ mm}^{-1}, c/\sqrt{mk} = 0.02, e = 0.02 \text{ mm}$ の場合の共振曲線である。この場合の不つりあいの角位置 β と不安定領域の関係を、さらに明らかにさせたのが図 1.9 である。図で $\beta = 225^\circ$ のときは $a \sim b, c \sim d$ の間が不安定領域で、 $\beta \doteq 180^\circ \sim 360^\circ$ の範囲では広い不安定領域があることがわかる。また $\omega/p \doteq 1.06 \sim 1.08$ の範囲にもせまい不安定領域が存在する。

1.4 実験装置と実験結果

図 1.10 に示すように、直径 1.98ϕ , 長さ $l = 700 \text{ mm}$ の円形断面の回転軸 S の $a : b = 1 : 4$ ($a = 140 \text{ mm}, b = 560 \text{ mm}$) の位置に、直径 48.13ϕ , 厚さ 5.55 mm , 重量 7.87 kg , 極慣性モーメント $I_p = 2.325 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^2$, 直径まわりの慣性モーメント $I = 1.163 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^2$ の円板 R が取付けられており、上下の軸端は複列自動調心形玉軸受 (# 1200), 単列深みぞ形玉軸受 (# 6204) によりそれぞれささえられている。図の x, y 方向の円板縁の出入りを光学的に記録し、小紙片 P により回転マークが記録される。

図 1.10 の回転軸系は、回転体の取付位置 $a : b$ が軸中央でないため、前節で取扱った簡単な系

ではなくたわみと傾きが連成する系であるが、主危険速度付近での振動数 ω の強制振動すなわち調和振動解に関する限り、定性的には前節での結論がそのまま適用される。

軸剛性の方向差 Δk があれば、扁平軸と同様に、回転していない軸をたたいたとき、軸剛性 $k + \Delta k$ 、 $k - \Delta k$ に対応した振動数 ρ_{01} 、 ρ_{02} の2個の自由振動が同時に発生し、うなりの現象が現われるが、 x' 方向か y' 方向にたたけば、 ρ_{01} か ρ_{02} の振動数の1個の自由振動のみが発生する。この実験により、 x' 、 y' 方向の角位置と ρ_{01} 、 ρ_{02} の値が定まる。図1.10の x 方向から測った小紙片Pまでの角度 Θ を変えて、回転体の種々の角位置で上記の実験を行った結果を図1.11、1.12に示す。図1.11は x' 方向の角位置 α の角位置 Θ に対する変化を示したもので、 x' 方向は常に小紙片Pより約 130° すんだ位置にあり、このことから軸剛性が $(k + \Delta k)$ である x' 方向と、これと直角な剛性が $(k - \Delta k)$ である y' 方向は、扁平軸の場合と同様、軸とともに回転していることを知る。軸回転速度 ω が零のときの x' 、 y' 方向の固有振動数 ρ_{01} 、 ρ_{02} を、円板の角位置 Θ に対して測定したのが図1.12であり、 ρ_{01} 、 ρ_{02} も、平均の固有振動数 $\rho_m = (\rho_{01} + \rho_{02}) / 2$ も、固有振動数の差 $\rho_d = (\rho_{01} - \rho_{02}) / 2$ も Θ に対して変化している。これは軸とともに回転する方向差の外、まえがきで述べた(A)~(D)の原因による方向の固定した方向差が共存し、両者の組合せの結果として生じたものである。 Θ に関する ρ_m 、 ρ_d の平均値を $\bar{\rho}_m$ 、 $\bar{\rho}_d$ とすると、図1.12から $\bar{\rho}_m \doteq 872 \text{ rpm}$ 、 $\bar{\rho}_d \doteq 57.5 \text{ rpm}$ を得る。

前節では、ばね定数 k 、ばね定数の方向差 Δk は一定であり、 x' 、 y' 軸も一定角速度 ω で回っているとして解析した。実際は図1.12のように、平均の固有振動数 ρ_m したがって k も、差 ρ_d したがって Δk も回転体の角位置 Θ により変化しているから、(1)軸が回転すれば、 k 、 Δk は平均値 \bar{k} 、 $\bar{\Delta k}$ を中心に ω 、 2ω 、 \dots の振動数で周期的に変動する。また図1.11に示すように α は点線を中心に約 $15^\circ \sim 20^\circ$ の幅で上下しているので、(2) x' 、 y' 方向は、軸が ω で回転すれば、周期的角加速度をもちつつ平均角速度 ω で回転している。さらに空間に固定した方向差と回転する方向差の共存は、軸の静たわみの Θ に対する変化をもたらし、その結果、(3) ω の外、 2ω 、 3ω 、 \dots の振動数の強制力を軸に及ぼすことになる⁽¹⁴⁾。上記(1)、(2)から、運動方程式中には、係数励振項(Mathieu形の振動項)、一定方向をとる剛性の方向差を表わす項、 $\pm n\omega$ (n は正整数)で回転する剛性の方向差を表わす項が派生してくる。しかし対象を振動数 ω の強制振動に限り、かつ小さい量の二乗以上の項を省略するなら、これらすべての派生項、上記(3)の高次の強制項は議論に無関係となり、 ρ_m 、 ρ_d の平均値 $\bar{\rho}_m$ 、 $\bar{\rho}_d$ に対応する k 、 Δk の平均値 \bar{k} 、 $\bar{\Delta k}$ をふくむ項のみが関与することを計算から結論しうる。

おもりによりモーメントを円板に与え、モーメントと円板の傾き角との間のばね特性を実測したのが図1.13である。円板の角位置 Θ により、また同じ角位置でも方向により多少の差はあるが、

軸は図 1.13 のような非線形ばね特性をもつ。図から座標の三乗で表示される非線形項をも含んでいることがわかるが、実験は傾き角でいえば図 1.13 の $-0.4^\circ \sim +0.4^\circ$ の範囲内で行っており、この範囲内では座標の二乗の非対称非線形項のみで近似しうる。

図 1.11, 1.12, 1.13 の実測結果から、 \bar{k} を k , \overline{Jk} を Jk におきかえれば、実験装置のばね特性は、 ω で回転する方向差と非対称非線形性をもつ前節の式(3)で表示されるばね特性であり、したがって前節の計算結果は、この実験装置に、少なくとも振動数 ω の調和振動に関しては適用される。

図 1.11 ~ 1.13 のばね特性をもつ回転軸系で、図 1.1, 1.10 の第 I, II, III, IV 象限内に回転体の不つりあいがあるとき、共振曲線の実測結果は図 1.14 ~ 1.17 のようになる。この場合も $\varepsilon'_x > 0$, $\varepsilon'_y < 0$ であるので、図 1.14, 1.15, 1.16, 1.17 は、それぞれ前節の式(1.11)からの計算結果である図 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 に対応している。図 1.14, 1.15, 1.16 では図 1.2, 1.3, 1.4 と同様不安定領域があり、図 1.17 では図 1.5 と同様不安定領域はない。また図 1.17 の場合は矢印で示す跳躍現象をとまなう。図 1.3 と同様、図 1.15 で不安定領域は約 $1120 \sim 1500 \text{ rpm}$ と最も広い。この装置の主危険速度 ω_c の計算値は、上下とも自由支持の場合で 1121.3 rpm , 上が自由支持で下が固定支持なら 2420.8 rpm であるので、最大限 $2420.8 - 1121.3 = 1300 \text{ rpm}$ の幅の不安定領域となりうるが、図 1.15 ではそれのほぼ 29% の 380 rpm である。図 1.14 では図 1.2 同様高速側から、図 1.16 では図 1.4 同様低速側から不安定領域がせばまっている。図 1.14 ~ 1.17 からわかるように、低速側の A_{02} , 高速側の A_{01} は実験からは得られなかった。図 1.14, 1.15 の低速側の大振幅の共振曲線 A'_{01} は、図 1.2, 1.3 の低速側の A_{02} に対応するものではなく、ばね特性中の対称非線形特性の影響によるものである³³⁾。図 1.14 ~ 1.17 は前節の計算結果とよく一致した実験結果であるといえよう。

図 1.11 ~ 1.17 のときと同じばね特性の場合の実験で、主危険速度 ω_c の低速側での振動波形から、振幅 A_0 と、波形の頂点と回転マーク P との間の角度 δ を測定して、極座標 (A_0, δ) で示した結果が図 1.18 (a) である。図 1.14, 1.15 のように低速側の共振曲線 A_{01} が高速側へ伸びていない U 形の場合は \triangle 印、図 1.16, 1.17 のように A_{01} が高速側へ伸びている S 形なら \circ 印で示した。多くの実験結果をこのように整理すると、図 1.18 (a) のように、すべての実験を通じ \triangle 印 (U 形) は第 I, II 象限に、 \circ 印 (S 形) は第 III, IV 象限に集まる。同様に ω_c の高速側での波形から、図 1.15, 1.16 のように A_{02} 曲線が低速側に伸びていない U 形の場合 \triangle 印、図 1.14, 1.17 のように低速側へ伸びている S 形の場合 \circ 印とすると、図 1.18 (b) のように第 II, III 象限と第 I, IV 象限とにそれぞれ同じ印が集まる。波形の頂点の角位置は前節の a_0, b_0 の拡大率が同じなら、 $\omega < \omega_c$ では不つりあいの方向と一致し、 $\omega > \omega_c$ では 180° 異なる。この場合 a_0, b_0 の拡大率は同じではな

く、波形の頂点の角位置は不つりあい方向と一致しないが、不つりあいの存在する象限内に必ずあることがいえる。したがって多くの実験結果を整理して得られた図 1.18(a), (b)は、不つりあいが I, II, III, IV の象限内にあると、共振曲線がそれぞれ図 1.2 (図 1.14), 図 1.3 (図 1.15), 図 1.4 (図 1.16), 図 1.5 (図 1.17)となることを実験的に証明している。

装置の組立条件のわずかな相違により、ばね剛性の方向差 Δk , 非線形項の係数 $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y$ の値が変化する。図 1.19 は、図 1.11 ~ 1.18 の場合より $\Delta k, \varepsilon'_x, \varepsilon'_y$ の値が小さくなったときの第 IV 象限に不つりあいのある場合の共振曲線であり、曲線の立上がりは急であるが定性的には図 1.5, 1.17 と同じである。

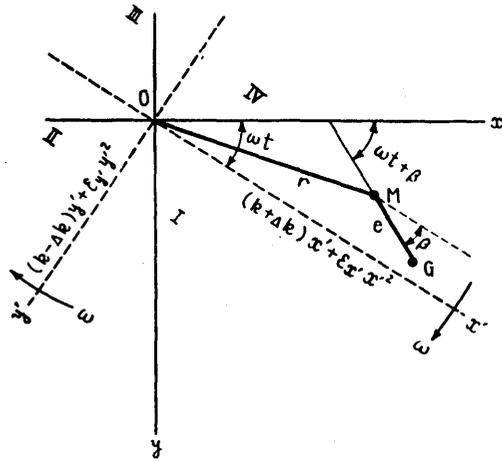
装置の組立条件によっては、図 1.7, 1.8 の場合のように、 $\varepsilon'_x \neq 0$ となり剛性の小さい y' 方向にのみ非線形特性が現われる。この場合の共振曲線の実験結果が図 1.20, 1.21 であり、それぞれ計算結果の図 1.7, 1.8 と同様になる。図 1.20 で共振曲線が二重のところは、データの欠けた部分を後日補ったとき、不つりあい量とその角位置に多少の相違を生じたためである。図 1.21 に示すように、図 1.8 の $b \sim c$ 間の安定領域の存在は、危険でこれを認めえなかった。図 1.22 に低速側での波形の頂点の方向と共振曲線の形との関係の多くの実験結果を示す。○印は図 1.20 (図 1.7), △印は図 1.21 (図 1.8) の形の場合であり、前節の解析結果同様、 x' 方向を境として $\beta \neq 0^\circ \sim 180^\circ$ なら図 1.20 (図 1.7), $\beta \neq 180^\circ \sim 360^\circ$ なら図 1.21 (図 1.8) の共振曲線になることがわかる。

1.5 結 論

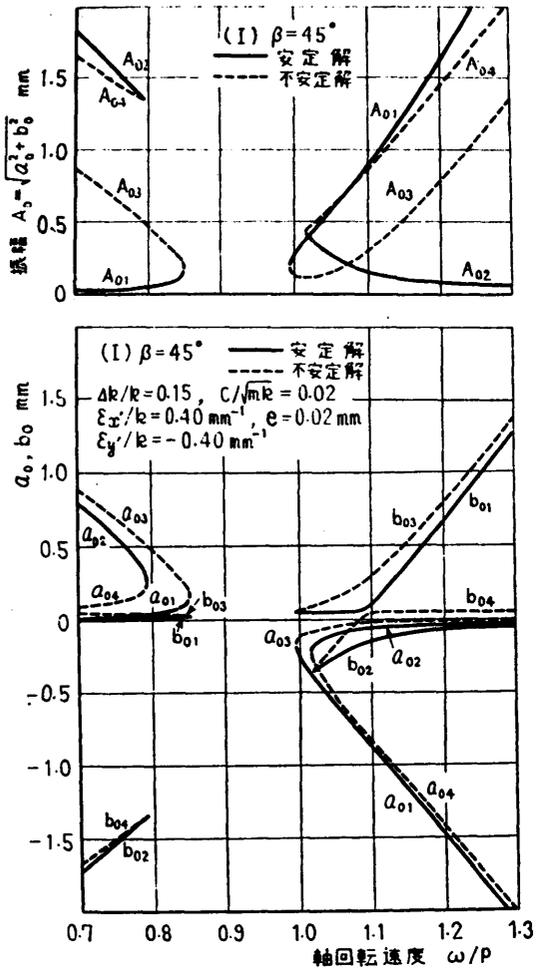
回転軸のばね特性に、玉軸受に起因する軸とともに回転する軸剛性の方向差と非対称非線形特性が存在する場合の主危険速度付近の強制振動に関して、以下のことを結論しうる。

- (1) 角度のがたをもつ単列深みぞ形玉軸受で軸を支持した場合、1.1 節の(a)~(d)などの原因で、軸とともに ω で回転する、ばね剛性の方向差(扁平性)と方向性のある非対称非線形ばね特性があらわれる。
- (2) このような系では、不つりあいの角位置により、不安定領域が発生、消失し、またさまざまな形の共振曲線が得られる。
- (3) ばね剛性の大きい方向、小さい方向の両方に非線形特性があるときは、不つりあいの角位置により、4種類の共振曲線を生ずる。
- (4) ばね剛性の大きい方向の非線形特性がなくなると、共振曲線は2種類になる。
- (5) このような不安定領域の発生と消失、共振曲線の形の不つりあいの角位置への依存という特異な振動現象は、軸回転速度 ω で回転するばね剛性の方向差 Δk と、やはり ω で回転する方向性のあ

る座標の二乗の非対称非線形ばね特性とによって、これらを十分説明することができる。

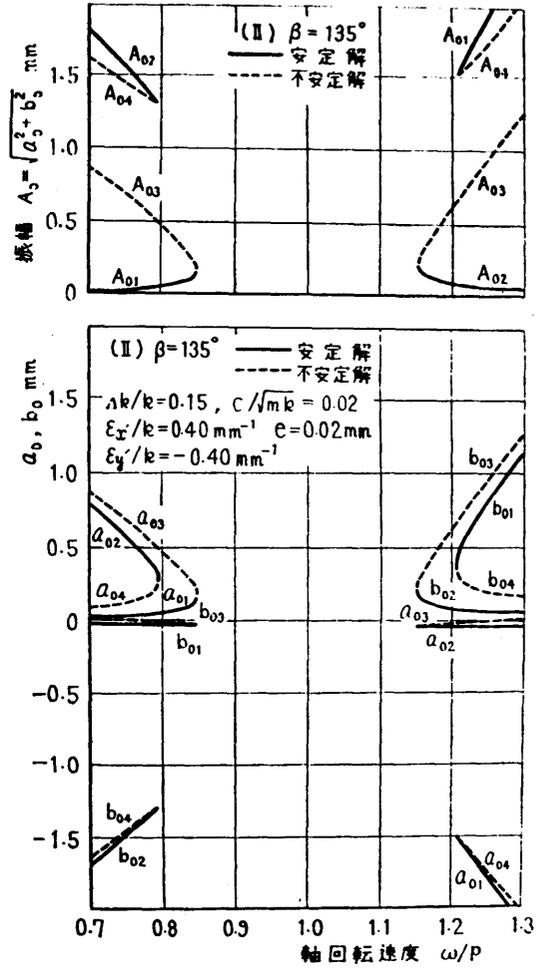


☒ 1.1



Δk : ばね定数の方向差, k : 平均のばね定数, $\varepsilon_x', \varepsilon_y'$: 非線形項の係数, m : 回転体の質量, c : 減衰係数, e : 偏心量

☒ 1.2 共振曲線 (偏心 e が第I象限にあるとき, US形)



☒ 1.3 共振曲線 (偏心 e が第II象限にあるとき, U形)

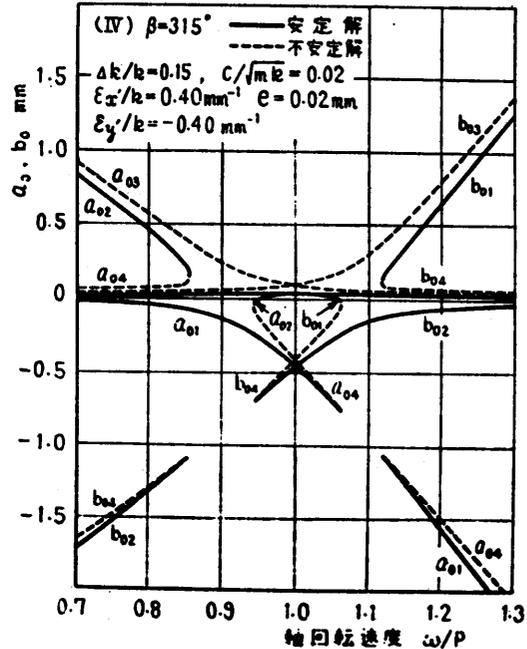
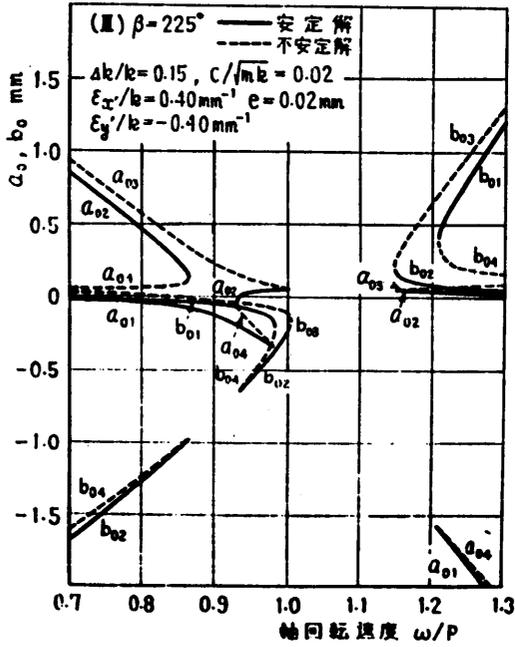
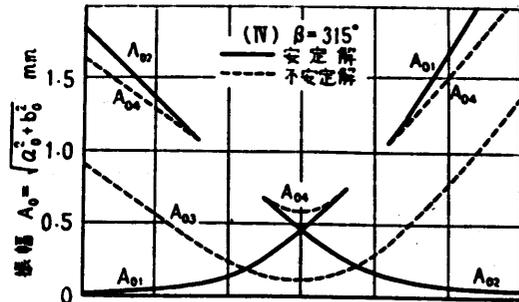
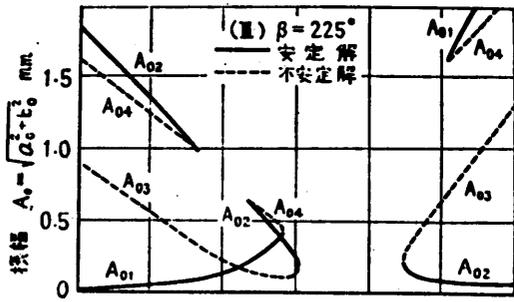


図 1.4 共振曲線 (偏心 e が第III象限にあるとき, SU形)

図 1.5 共振曲線 (偏心 e が第IV象限にあるとき, SS形)

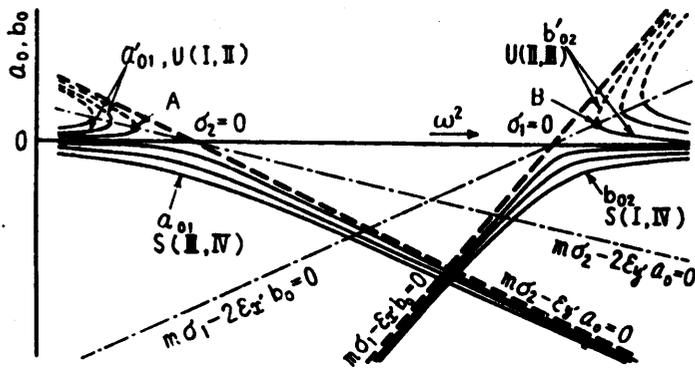


図 1.6 ($\epsilon_x' > 0$, $\epsilon_y' < 0$, I-US, II-UU, III-SU, IV-SS)

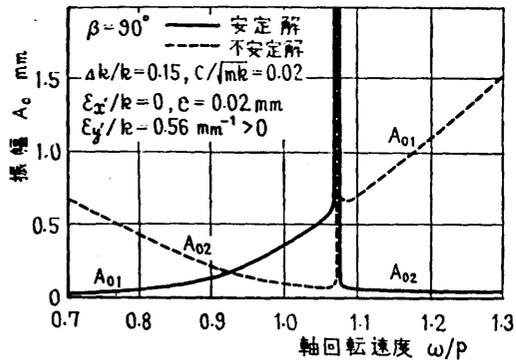


図 1.7 共振曲線 (y' 方向にのみ非線形性のあるとき)

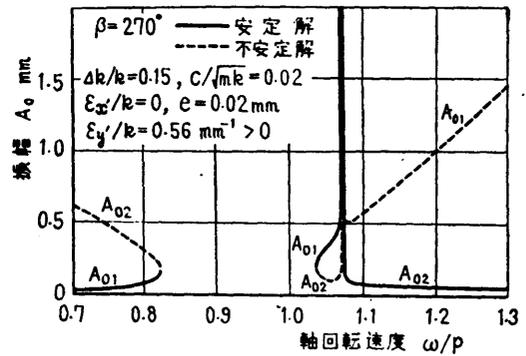


図 1.8 共振曲線 (y' 方向にのみ非線形性のあるとき)

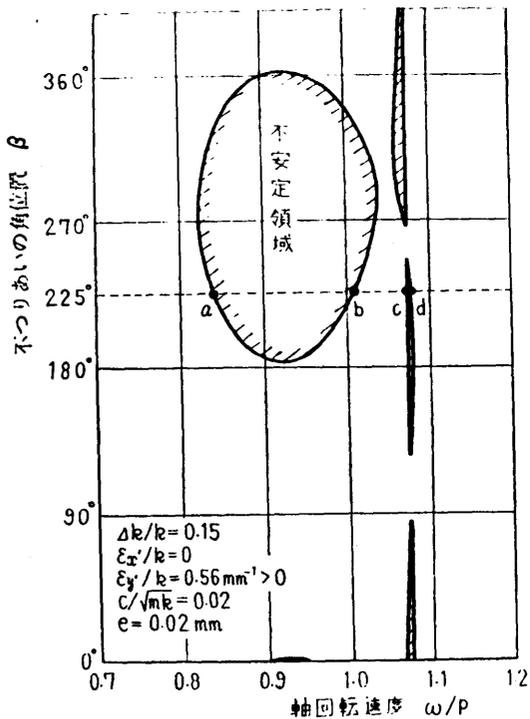


図 1.9 不安定領域と不つりあい e の角位置 β との関係

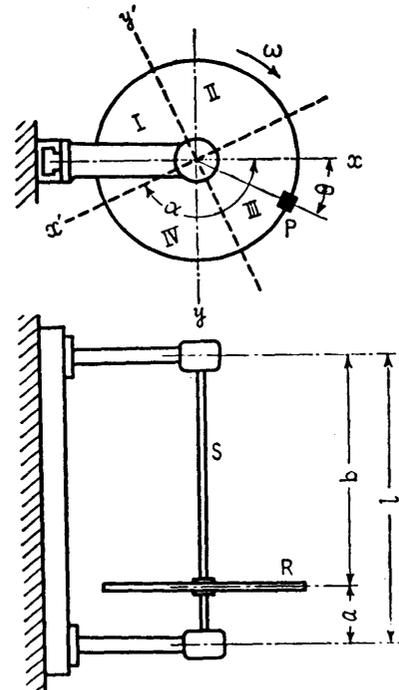


図 1.10 実験装置略図

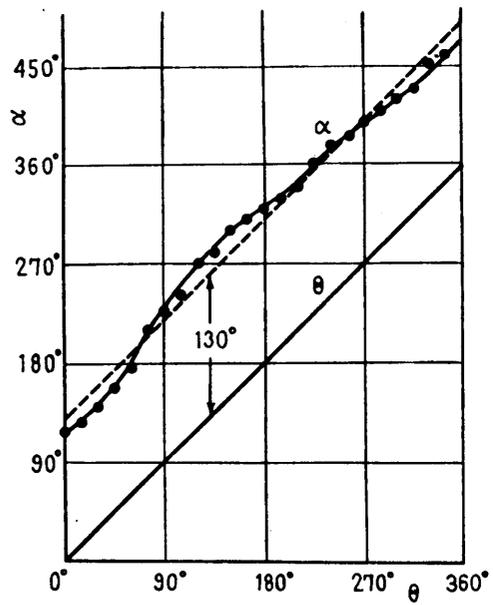


図 1.11 x' 方向の角位置 α の角度 θ に対する変化

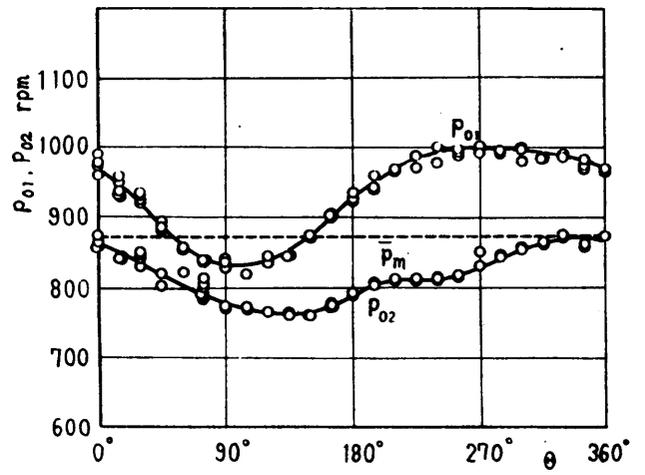


図 1.12

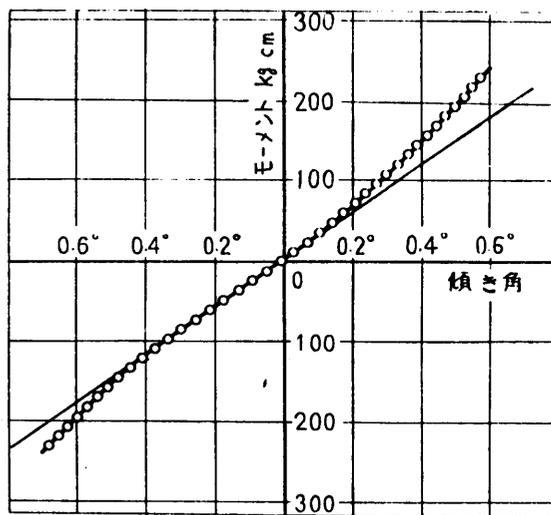


図 1.13 回転軸のばね特性

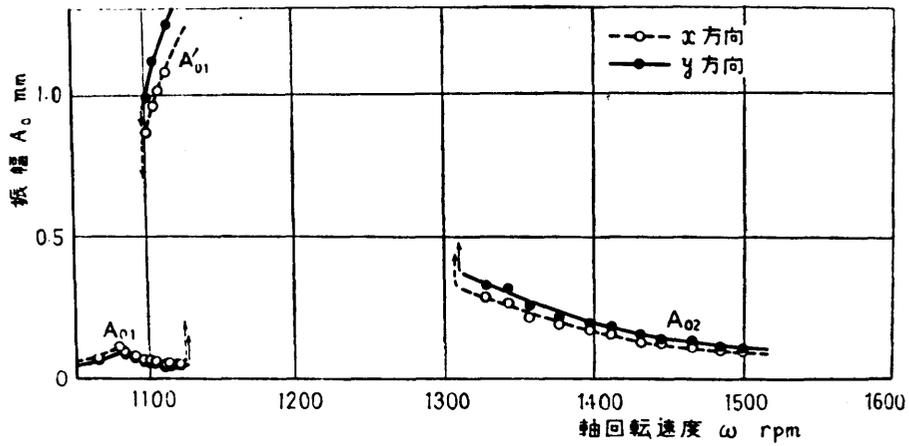


図 1.14 共振曲線 (図 2 に対応, US形, $\epsilon'_x > 0$, $\epsilon'_y < 0$, 不つりあいは第I象限)

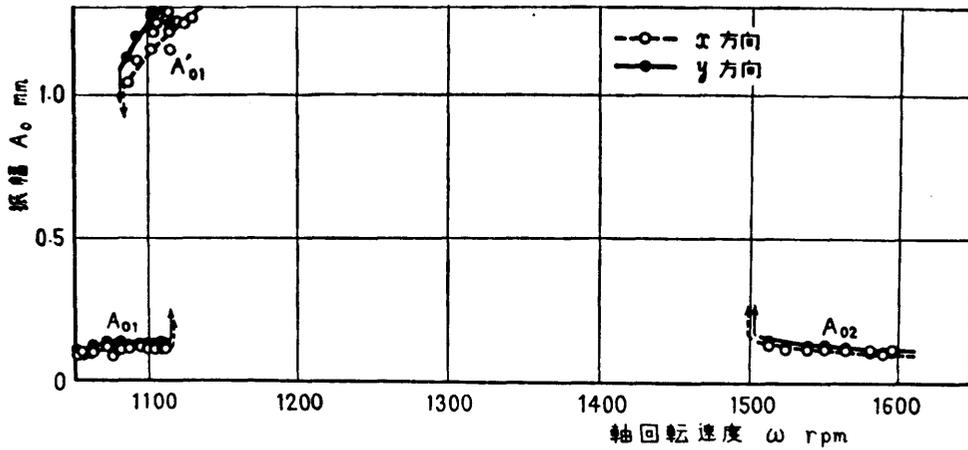


図 1.15 共振曲線 (図 3 に対応, UU形, $\epsilon'_x > 0$, $\epsilon'_y < 0$, 不つりあいは第II象限)

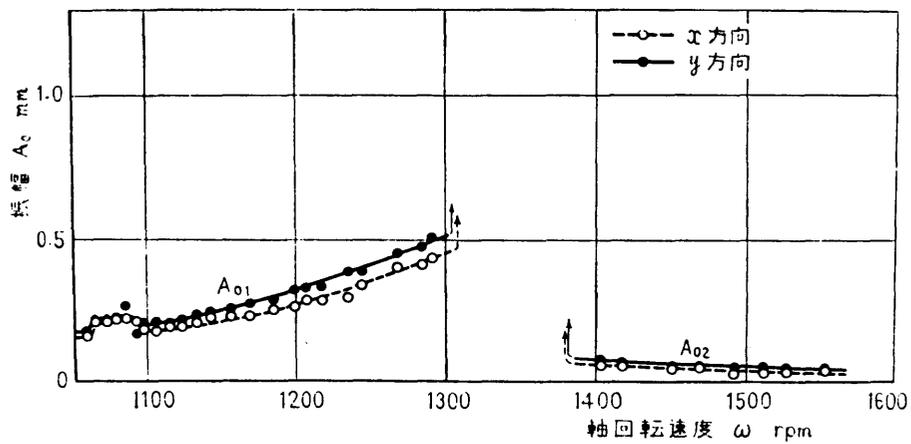


図 1.16 共振曲線 (図 4 に対応, SU形, $\epsilon'_x > 0$, $\epsilon'_y < 0$, 不つりあいは第III象限)

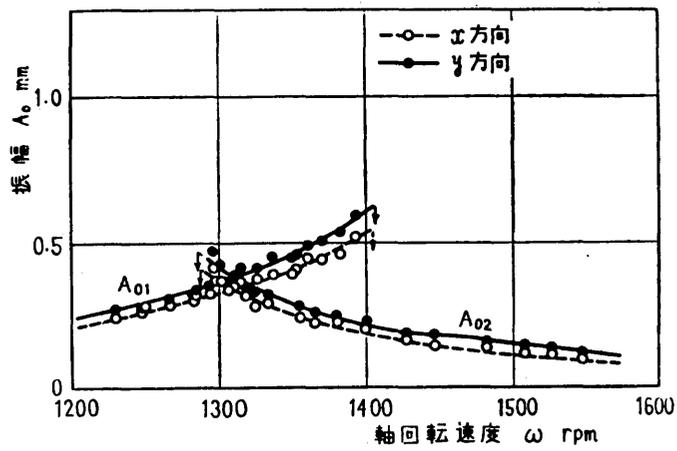


図 1.17 共振曲線 (図 5 に対応, SS形, $\epsilon_x' > 0$, $\epsilon_y' < 0$, 不つきあいは第IV象限)

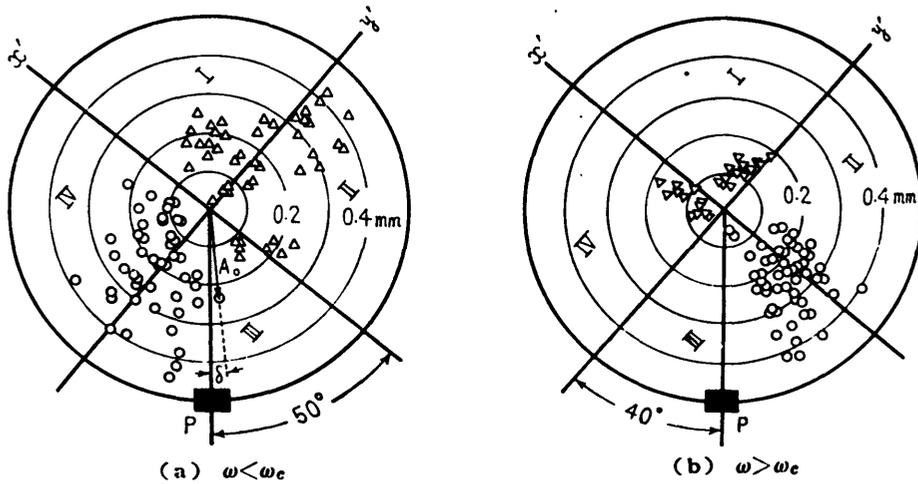


図 1.18 A_0, δ の極座標表示 ($\epsilon_x' > 0$, $\epsilon_y' < 0$, \triangle : U形, \circ : S形)

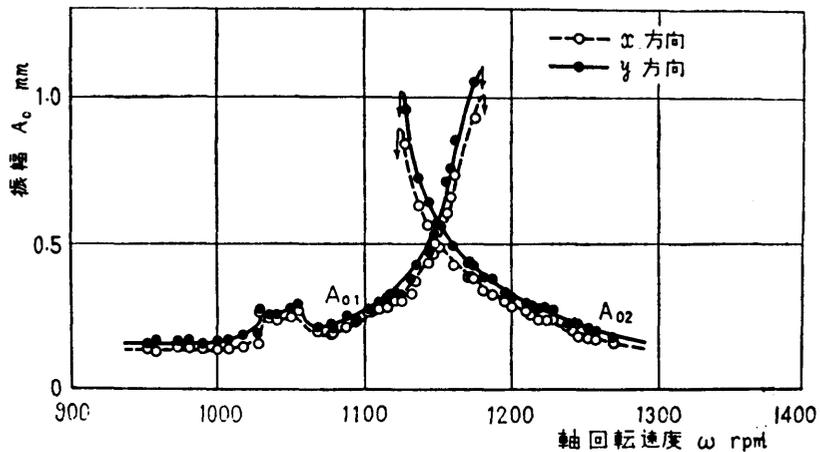


図 1.19 共振曲線 (図 5, 17 に対応)

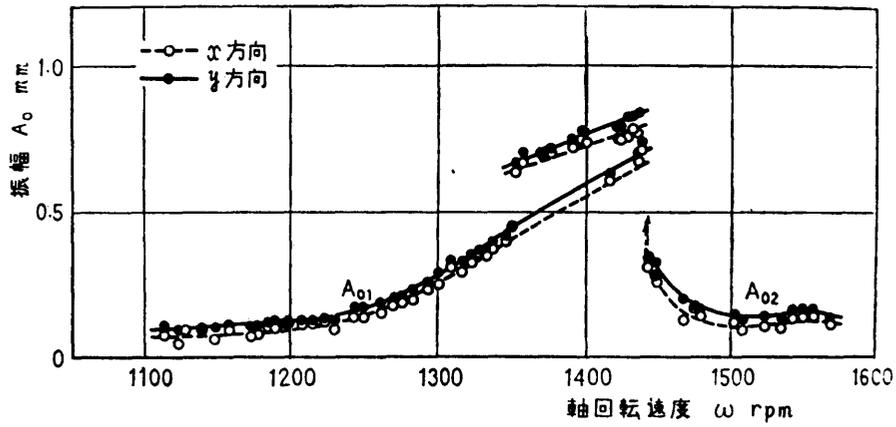


図 1.20 共振曲線 (図 7 に対応, $\varepsilon_x' \approx 0$, $\varepsilon_y' > 0$)

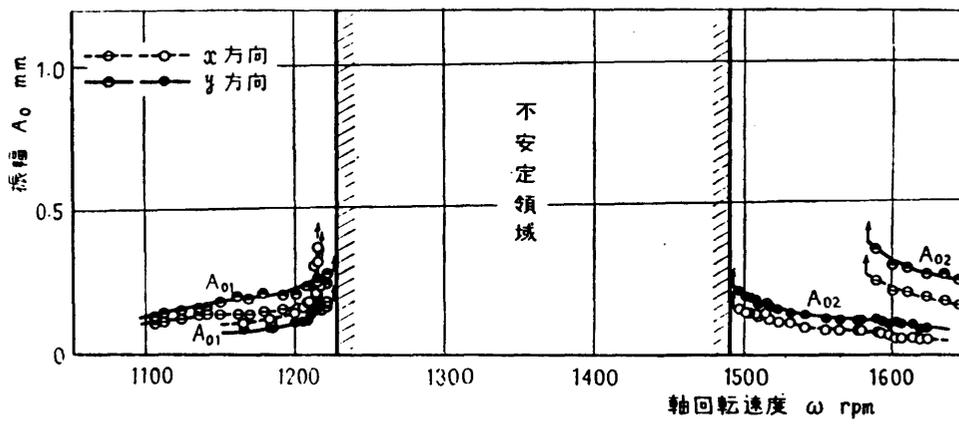


図 1.21 共振曲線 (図 8 に対応, $\varepsilon_x' \approx 0$, $\varepsilon_y' > 0$)

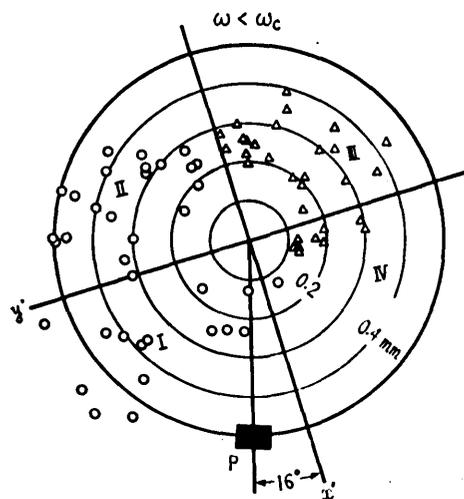


図 1.22 A_0 , δ の極座標表示, ($\varepsilon_x' \approx 0$, $\varepsilon_y' > 0$,
 \triangle : U形, \circ : S形)

表 1.1

ε_x'	ε_y'	不つりあいの存在する象限			
		I	II	III	IV
+	+	SS	SU	UU	US
+	-	US	UU	SU	SS
-	+	SU	SS	US	UU
-	-	UU	US	SS	SU

第2章 対称非線形ばね特性をもつ 回転軸の振動⁽³⁴⁾

2.1 ま え が き

単列深みぞ形玉軸受で回転軸を支えた場合、軸両端の軸受台の中心線間のわずかな不一致などにより、回転軸中心線の平衡位置が、玉軸受に存在する“角度のがた⁽¹²⁾”の中央からはずれると、回転軸の復元力に比較的大きな非対称非線形特性と、弱い対称非線形特性が現われる。その結果、ジャイロ作用をともなう一般の回転軸系では、 $1/2$ 次分数調波振動、 $[\rho_i + \rho_j]$ 様式の和差調波振動(ρ_i, ρ_j は系の固有振動数)などのふれ回り運動が発生する。これらの実験的⁽¹²⁾⁽²³⁾⁽²⁴⁾、解析的⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾研究には山本らによる報告がある。また、非対称非線形特性にともなう軸剛性の方向差(復元力の一次の項の係数の方向差)に起因する後向き同期歳差運動様式の強制振動についても報告されている⁽⁷⁾。

単列深みぞ形玉軸受を用いた場合、一般的には上記のように非対称非線形特性が対称非線形特性より強く現われやすいが、鉛直軸で上下両軸受台の中心線の一致に特に留意して装置を組み立てると、静止状態での回転軸中心線が角度のがたのはば中央に位置するため、軸の復元力に対称非線形特性が非対称非線形特性より強く現われる。

本章では、このようなばね特性をもつ回転軸系には、山本らの報告⁽¹²⁾⁽²³⁾⁽²⁴⁾では発生しなかった $1/3$ 次分数調波振動、 $[2\rho_i \pm \rho_j]$ 、 $[\rho_i \pm \rho_j \pm \rho_k]$ 様式の和差調波振動など、対称非線形系に特有な各種のふれ回り強制振動が新たに発生することを実験により確めた。往復振動系における対称非線形ばね特性に起因する各種の強制振動については、すでに山本らの報告^{(27)~(31)}があるが、回転軸系のふれ回り運動様式のこの種の振動に関する報告はこれまでにはない。さらに本章では、比較的大きな対称非線形特性の存在のため、主危険速度付近での調和振動と後向き同期歳差運動様式の強制振動の共振曲線が、文献(7)とは異なって跳躍現象をともなう漸硬ばね形共振曲線になることを指摘するとともに、非対称非線形特性に起因する $1/2$ 次分数調波振動、 $[\rho_i \pm \rho_j]$ 様式の和差調波振動の共振曲線が、文献(12)、(23)、(24)に比べて著しく右になびいた漸硬ばね形になること、またこれらの強制振動のうち、比較的大きな発生しにくい振動は、非対称非線形ばね特性が強い文献(12)、(23)、(24)の回転軸系では発生し得るが、これが弱い本章の場合には発生し得ぬことを実験により明らかにするなど、すでに報告されている諸実験結果⁽⁷⁾⁽¹²⁾⁽²³⁾⁽²⁴⁾との比較をも行っている。

一般の回転軸系に発生する、 $x-y$ 平面内(図1.10)でのふれ回り運動様式の各種の非線形振動

には、往復振動系とは異った力学的解釈により非線形ばね特性を表示する必要がある。これに関する理論的考察は第3章で詳しく行う。そしてその解析結果に基づいて、本章の実験結果は合理的に説明される。

2.2 実験装置と発生可能な非線形強制振動

本章の実験で用いた装置は、図1.10に示されている前章の実験装置と同じであり、その各部の寸法は同一である。

図1.10の回転軸系の固有振動数に関しては、以下のことが常に成立する⁽³⁵⁾。

(i) 4個の固有振動数 p_i ($i=1\sim 4$) をもち

$$p_1 > p_2 > 0 > p_3 > p_4 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

が常に成立する。 p_1 と p_2 は前向き、 p_3 と p_4 は後向き歳差運動の固有振動数である。

(ii) p_1 は軸回転速度 ω に対し次の関係を満たす。

$$p_1 > (I_p/I) \cdot \omega, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} p_1 = (I_p/I) \cdot \omega \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

(iii) p_2, p_3, p_4 は $\omega \rightarrow \infty$ で一定値に漸近し、かつ ω の $0 \sim \infty$ の全範囲にわたり一定限界値をこえることはない。

図2.1に、この実験装置の $p_1 \sim p_4$ を、 ω に対して実線で図示してある。また固有振動数の和または差の絶対値を表わす曲線のうち、必要なものを図中に破線で示しておいた。

座標の奇数乗項で表わされる対称非線形ばね特性により生ずる各種の強制振動のうち、高次の項に起因するものが発生することはまれであるので、三乗項までを考える。まず

$$3p_1 = \omega, \quad 3p_2 = \omega, \quad -3p_3 = \omega, \quad -3p_4 = \omega \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

を満たす軸回転速度付近で発生する振動数

$$\omega_1 = \frac{1}{3}\omega, \quad \omega_2 = \frac{1}{3}\omega, \quad \omega_3 = -\frac{1}{3}\omega, \quad \omega_4 = -\frac{1}{3}\omega \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

の分数調波振動がある。さらに

$$|2p_i \pm p_j| = \omega \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

の関係を満たす軸回転速度付近で

$$\omega_i \doteq p_i, \quad \omega_j \doteq p_j, \quad |2\omega_i \pm \omega_j| = \omega \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

の関係を満たす、振動数 ω_i, ω_j の2つの振動が同時に発生する和差調波振動と、

$$|p_i \pm p_j \pm p_k| = \omega \quad (i \neq j \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

の関係をみたす軸回転速度付近で

$$\omega_i \doteq p_i, \quad \omega_j \doteq p_j, \quad \omega_k \doteq p_k, \quad |\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k| = \omega \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

で与えられる，振動数 $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ の3つの振動が同時に発生する和差調波振動がある。

しかし本章の実験系は $I_p / I \doteq 2$ であるので，上述の性質(ii)より $\rho_1 > 2\omega$ となり，さらに (iii) の性質があるため， ρ_1 が関与する諸振動において，式 (2.3)，(2.5)，(2.7) の関係をみたす軸回転速度 ω は存在しない。また一般の往復振動系と同様に⁽²⁹⁾⁽³¹⁾，ふれ回り様式の回転軸系でも，絶対値の和形の和差調波振動のみが発生可能との結論をうる。したがって，この実験装置で発生可能な分数調波振動と和差調波振動は，次の式 (2.9)，(2.10) をみたすものに限られる。

$$3\rho_2 = \omega, \quad -3\rho_3 = \omega, \quad -3\rho_4 = \omega, \quad \dots \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 - 2\rho_4 = \omega, \quad 2\rho_2 - \rho_4 = \omega, \quad -\rho_3 - 2\rho_4 = \omega \\ 2\rho_2 - \rho_3 = \omega, \quad -2\rho_3 - \rho_4 = \omega, \quad \rho_2 - 2\rho_3 = \omega \end{aligned} \right\} \dots \quad (2.10-a)$$

$$\rho_2 - \rho_3 - \rho_4 = \omega, \quad \dots \quad (2.10-b)$$

これらの振動の発生個所は，図 2.1 において交点 $E, F_2, F_1, G_1 \sim G_6, G'_1$ の横座標で示される。それらの回転数をそれぞれ $\omega_{\frac{1}{3}}, \omega'_{\frac{1}{3}}, \omega_{-\frac{1}{3}}, \omega_{244}, \omega_{224}, \omega_{344}, \omega_{223}, \omega_{334}, \omega_{233}, \omega_{234}$ で表示する。

非対称非線形特性に起因する強制振動も，座標の二乗項により生ずる振動がほとんどであり，この場合も上記の理由により，この実験装置で発生可能な振動は次の式 (2.11) と (2.12) をみたすものに限られる⁽²⁶⁾。

$$2\rho_2 = \omega, \quad -2\rho_3 = \omega, \quad -2\rho_4 = \omega, \quad \dots \quad (2.11)$$

$$\rho_2 - \rho_4 = \omega, \quad -\rho_3 - \rho_4 = \omega, \quad \rho_2 - \rho_3 = \omega, \quad \dots \quad (2.12)$$

これらの発生個所は，図 2.1 の交点 $C, D_2, D_1, H_1 \sim H_3$ の横座標で示され，それらを $\omega_{\frac{1}{2}}, \omega_{-\frac{1}{2}}, \omega_{-\frac{1}{2}}, \omega_{24}, \omega_{34}, \omega_{23}$ とする。

2.3 実験結果

(I) ばね特性

上下両軸端における軸受台中心線の一致に特に留意して装置を組み立てた場合の，ばね特性の測定結果を図 2.2，2.3 に示す。

図 2.2 は，前章のような軸とともに回転する軸剛性の方向差が，この場合にも存在するか否かを調べた実験結果である。軸の回転をとめた状態で，回転体の角位置 \ominus (図 1.10) を変えて，それぞれの角位置において軸剛性の最大と最小の方向での固有振動数 ρ_{01}, ρ_{02} を測定した。前者を \oplus 印，後者を \ominus 印で示し，また両者の区別がつかぬ場合を \circ 印とした。図から， ρ_{01} と ρ_{02} の差はほとんどなく，また \ominus によっても変化しないことを知る。すなわち軸とともに回転する軸剛性の方向

差はほとんど無いと結論しうる。

円板を角位置 $\ominus = 0^\circ$ に固定しておき、測定方向 φ (図 2.3)を変えて測った、回転体に加えたモーメントと回転体の傾き角との関係を示したのが図 2.3 である。文献(12)においても、これと同じ方法で回転軸系のばね特性を測っているが、その第5図とは逆に、非対称非線形特性は小さく、対称非線形特性が大きく現われていることがわかる。さらに図中のすべての曲線がほぼ同じ形であるから、この場合の対称非線形特性にはほとんど方向性がないこともわかる。

装置の組立条件を、図 2.2 と 2.3 の場合とは少し変えたときの測定結果が図 2.4 である。この場合も対称非線形特性が強く現われているが、測定方向 φ により特性曲線の形が多少異なり、方向性をもつ。すなわち、たとえば x 、 y 方向のばね力をそれぞれ $\alpha x + \beta_x x^3$ 、 $\alpha y + \beta_y y^3$ とすると、図 2.3 では β_x と β_y はほぼ等しいが図 2.4 では両者の間に差があるということになる。

図 2.3、2.4とも漸硬ばね形になっているが、このことはその発生機構から自明であろう。

(II) 対称非線形特性の影響をうける強制ふれ回り振動

(II-a) 共振曲線の形に影響をうける振動

図 2.5 は、図 2.3 のばね特性の場合に生じた振動のうち、対称非線形特性と関係のある強制振動を取り出した実験結果である。そのうち、 ω_{b2} 、 ω_c 、 ω_{b1} (図 2.1) 付近の振動は、非線形特性のないときにも発生する振動である。

$\omega = \rho_2$ となる主危険速度 ω_c 付近の振動は、対称非線形特性のために、一般の往復振動系の場合と同様、跳躍現象と履歴現象をとともなう典型的な漸硬ばね形の共振曲線になる。右へなびいている上側の共振曲線は、実際はさらに高速側へ伸びているが、危険なので約 1350 rpm で実験を中止した。以下の各種の振動においても、上側の共振曲線の高速端に跳躍を意味する矢印を記入していない場合は、これと同じ意味とする。

$\omega = -\rho_3$ 、 $\omega = -\rho_4$ となる ω_{b2} 、 ω_{b1} 付近では、軸剛性の方向差に起因する、振動数 $-\omega$ の後向き同期歳差運動様式の強制振動が発生する。その振幅は軸剛性の方向差に比例し⁽⁶⁾、またこの方向差は、軸受台の剛性の方向差⁽⁶⁾や、玉軸受の角度のがたのために生ずる非対称非線形特性⁽⁷⁾にとともなって発生する。したがって非対称非線形特性が強い文献(7)に比べて、それが弱い図 2.3 のばね特性の場合は、軸剛性の方向差も小さく、図 2.5 のこの種の振動の振幅も文献(7)よりかなり小さい。しかし文献(7)では対称非線形特性が小さいため、線形の共振曲線の形になるが、これが大きい今の場合は、 ω_c における形と同様、漸硬ばね形の非線形系の共振曲線となる。

方向性のある非線形ばね特性である図 2.4 の場合も、 ω_c 、 ω_{b1} 、 ω_{b2} 付近に発生する振動に関し

ては、図 2.5 とほとんど同じ結果になる。

(II - b) 発生の有無に影響をうける振動

$\omega = 2\rho_2 - \rho_3$, $\omega = 2\rho_2 - \rho_4$ となる軸回転速度 ω_{223} , ω_{224} の付近で発生する図 2.5 の和差調波振動は、対称非線形特性がなければ発生しない振動である。

図 2.5 の ω_{223} 付近では、 $\omega \doteq 2640 \sim 3120$ rpm 以上の広範囲に、振動数 ω_2 ($\doteq \rho_2$) と ω_3 ($\doteq \rho_3$) の前向きと後向き歳差運動様式の振動が同時に発生している。この場合も漸硬ばね形である。同じ軸回転数においても初期条件の与え方により、和差調波振動が発生するときと、小振幅の調和振動のままのときとがあり、これも対称非線形特性に起因する強制振動の一つの特性である。

図 2.6 にこの $[2\rho_2 - \rho_3]$ 様式の和差調波振動の振動数 ω_2 , ω_3 の実測値を示す。 ω_2 ($\doteq \rho_2$) ω_3 ($\doteq \rho_3$) は原点を通る直線上にはぼのっている。

図 2.7 に $[2\rho_2 - \rho_3]$ 様式の和差調波振動の振動波形を示す。図中の白い縦線は、図 1.10 の小紙片 P により軸一回転ごとに記入される回転マークである。小振幅の細かい振動が重なっているが、これは振動数 ω の調和振動成分であり、以下に示すすべての振動波形にも現われている。図中の印 A ごとにほぼ同じ波形をくり返し、この A A 間に軸は 37 回転し、速い振動は 17 回、おそい振動は 3 回振動していることがわかる。さらに x , y 両方向の波形の位相の比較から、速い方は前向き、おそい方は後向き歳差運動であることが判別される。したがって、 $\omega : \omega_2 : \omega_3 = 37 : 17 : (-3)$ となり、 $2 \times 17 - (-3) = 37$ より $2\omega_2 - \omega_3 = \omega$ の関係が成立している。

図 2.5 の ω_{224} 付近では、 $[2\rho_2 - \rho_4]$ 様式の和差調波振動が、 $\omega \doteq 4500 \sim 4830$ rpm 以上の範囲で発生している。図 2.8 にその振動数 ω_2 , ω_4 の実測結果を示す。これらは原点を通る直線上にはぼのっている。図 2.9 に振動波形を示す。同じ波形となる A A 間で、 $\omega : \omega_2 : \omega_4 = 16 : 5 : (-6)$, したがって $2 \times 5 - (-6) = 16$ すなわち $2\omega_2 - \omega_4 = \omega$ が成立している。

以上は図 2.3 の方向性のない対称非線形ばね特性の場合に発生した非線形強制振動の実験結果であるが、図 2.4 の方向性のある対称非線形ばね特性の場合は、上記の $[2\rho_2 - \rho_3]$, $[2\rho_2 - \rho_4]$ 様式の和差調波振動の他に、新たに $\omega = 3\rho_2$ が成立する軸回転数付近の $1/3$ 次分数調波振動、 $[\rho_2 - 2\rho_3]$, $[\rho_2 - 2\rho_4]$ 様式の和差調波振動、3つの振動が同時に生ずる $[\rho_2 - \rho_3 - \rho_4]$ 様式の和差調波振動が発生する。これらの振動の実験結果を図 2.10 に示す。いずれも漸硬ばね形の共振曲線になっている。

$\omega = \rho_2 - 2\rho_3$, $\omega = \rho_2 - 2\rho_4$ となる軸回転速度 ω_{233} , ω_{244} 付近で、 $[\rho_2 - 2\rho_3]$, $[\rho_2 - 2\rho_4]$ 様式の和差調波振動が発生しているが、前者は $\omega \doteq 1860 \sim 1940$ rpm , 後者は $\omega \doteq 4750 \sim 4930$ rpm と比較的それらの発生範囲は狭い。図 2.11 , 2.12 にそれぞれ $[\rho_2 - 2\rho_3]$, $[\rho_2 - 2\rho_4]$

様式の振動の振動数を示す。いずれも原点を通る直線上にのっている。図 2.13, 2.14 に $[\rho_2 - 2\rho_3]$, $[\rho_2 - 2\rho_4]$ 様式の振動の振動波形を示す。AA 間の回転数と振動数から、図 2.13 では $\omega : \omega_2 : \omega_3 = 40 : 26 : (-7)$ であり、 $26 - 2 \times (-7) = 40$ すなわち $\omega_2 - 2\omega_3 = \omega$ が成立し、図 2.14 では $\omega : \omega_2 : \omega_4 = 54 : 16 : (-19)$ であり、 $16 - 2 \times (-19) = 54$ すなわち $\omega_2 - 2\omega_4 = \omega$ が成立していることがわかる。

図 2.10 中の $[\rho_2 - \rho_3 - \rho_4]$ 様式の和差調波振動は、 $\omega = \rho_2 - \rho_3 - \rho_4$ となる軸回転数 ω_{234} 付近で、振動数 $\omega_2 (\div \rho_2)$, $\omega_3 (\div \rho_3)$, $\omega_4 (\div \rho_4)$ の 3 つの振動が同時に発生するもので、 $\omega = 3265 \sim 3320$ rpm と比較的狭い範囲内で発生している。図 2.15 にその振動数を、図 2.16 に振動波形を示す。この和差調波振動の諸性質は、文献(31)の往復振動系の場合とよく似ている。図 2.16 の AA 間で、ゆっくりした大きな波形が ω_3 で -7 回、大きく現われている振動波形が ω_2 で 43 回振動し、また ω_2 の波形の唸りから ω_4 の振動数の振動も発生していることがわかり、それが -50 回である。この間の軸回転数は 100 であるから、 $43 - (-7) - (-50) = 100$ すなわち $\omega_2 - \omega_3 - \omega_4 = \omega$ が成立している。

図 2.5, 2.10 より、方向性のある対称非線形特性に起因する $[\rho_2 - 2\rho_3]$, $[\rho_2 - 2\rho_4]$, $[\rho_2 - \rho_3 - \rho_4]$ 様式の振動の発生範囲は、方向性のない対称非線形特性のときにも発生する $[2\rho_2 - \rho_3]$, $[2\rho_2 - \rho_4]$ 様式の振動の発生範囲より、かなり狭いことがわかる。

$\omega = 3\rho_2$ となる軸回転速度 $\omega_{\frac{1}{3}}$ 付近で発生する前向き歳差運動様式の 1/3 次分数調波振動は、図 2.10 に示すように、往復振動系の場合と同様、典型的な漸硬ばね形共振曲線になる。その発生範囲は $\omega \div 4120 \sim 4500$ rpm 以上とかなり広い。その振動波形を図 2.17 に示す。図中の細かい波形は ω の調和振動成分である。

方向性のない対称非線形ばね特性のとき生じた図 2.5 の $[2\rho_2 - \rho_3]$, $[2\rho_2 - \rho_4]$ 様式の和差調波振動は、方向性のある対称非線形ばね特性の場合にも発生し、それらの振動の諸性質は図 2.5 に示すものとはほぼ同じであった。

軸の回転速度 ω の広範囲にわたりくり返し振動の有無を調べたが、対称非線形特性に起因する非線形強制振動は、上記(II-b)で述べたもの以外は発生しなかった。

前節の(2.9), (2.10)に示した、対称非線形ばね特性に起因する発生可能な諸振動に関する発生状況を表 2.1 に示す。これに関する詳しい考察は次章で行う。

(III) 非対称非線形特性の影響をうける強制ふれ回り振動

(III-a) 発生の有無に影響をうける振動

この種の強制振動の諸性質は、図 2.3, 2.4 のばね特性を通じほぼ同じであった。すなわち対称

非線形特性の方向性の有無は影響しない。

図 2.18 に $[2\rho_2]$ 様式の $1/2$ 次分数調波振動, $[\rho_2-\rho_3]$, $[\rho_2-\rho_4]$ 様式の和差調波振動の共振曲線の実験結果を示す。対称非線形特性が強いため, $1/2$ 次分数調波振動の漸硬ばね形共振曲線もかなりなびいており, $\omega \div 2480 \sim 2900$ rpm と広範囲にわたり存在している。 $[\rho_2-\rho_3]$, $[\rho_2-\rho_4]$ 様式の振動も, 漸硬ばね形であり, それぞれ $\omega \div 1500 \sim 1650$ rpm, $\omega \div 2950 \sim 3290$ rpm と発生範囲は広い。

文献(12), (23), (24)の実験装置は図 1.10 の装置とはほぼ同じである。したがって, それらの報告と図 2.18 との実験結果の比較により, 非対称非線形特性と対称非線形特性の強弱の相異が, 非対称非線形ばね特性に起因する各種の強制振動におよぼす影響を知り得る。

前節の式(2.11), (2.12)で発生可能とした諸振動の実験における発生状況を表 2.2 に示す。これから次のことを知ることができる。

文献中の実験で強力に大振幅で発生した振動は本実験でも発生し, 比較的小振幅で発生した振動は, 非対称非線形特性が減少したため, 本実験では発生していない。また, 発生している振動は, 本実験の方が対称非線形特性が大きいため, 共振曲線が右へ著しくなびき, その発生範囲も広がっている。

2.4 結 論

- (1) 単列深みぞ形玉軸受で回転軸を支えた場合, 軸中心線の平衡位置が玉軸受の“角度のがた”の中央からはずれる程度により, 軸のばね特性中に非対称非線形特性が強く現われたり, 対称非線形特性が強く現われたりする。
- (2) 方向性のない対称非線形ばね特性をもつ回転軸系では, 対称非線形特性に起因する振動として, $[2\rho_2-\rho_3]$, $[2\rho_2-\rho_4]$ 様式の和差調波振動が発生した。
- (3) 方向性のある対称非線形ばね特性をもつ回転軸系では, 対称非線形特性に起因する振動として, 上記(2)の振動の他に, $[3\rho_2]$ 様式の $1/3$ 次分数調波振動, $[\rho_2-2\rho_3]$, $[\rho_2-2\rho_4]$, $[\rho_2-\rho_3-\rho_4]$ 様式の和差調波振動が新たに発生した。
- (4) $[-3\rho_3]$, $[-3\rho_4]$ 様式の $-1/3$ 次分数調波振動, $[-2\rho_3-\rho_4]$, $[-\rho_3-2\rho_4]$ 様式の和差調波振動は, 本実験では発生しなかった。
- (5) 主危険速度付近と, 後向き同期歳差運動様式の危険速度付近の共振曲線に関しては, 上記(2), (3)を通じ, 対称非線形特性の影響のため, 跳躍現象と履歴現象をともなった非線形特有の共振曲線となった。

- (6) 本実験においては、非対称非線形特性に起因する諸振動のうち、 $[2\rho_2]$ 様式の1/2次分数調波振動、 $[\rho_2 - \rho_3]$ 、 $[\rho_2 - \rho_4]$ 様式の和差調波振動が発生した。これらの共振曲線は、強い対称非線形特性の存在のため、著しく高速側へなびいている。

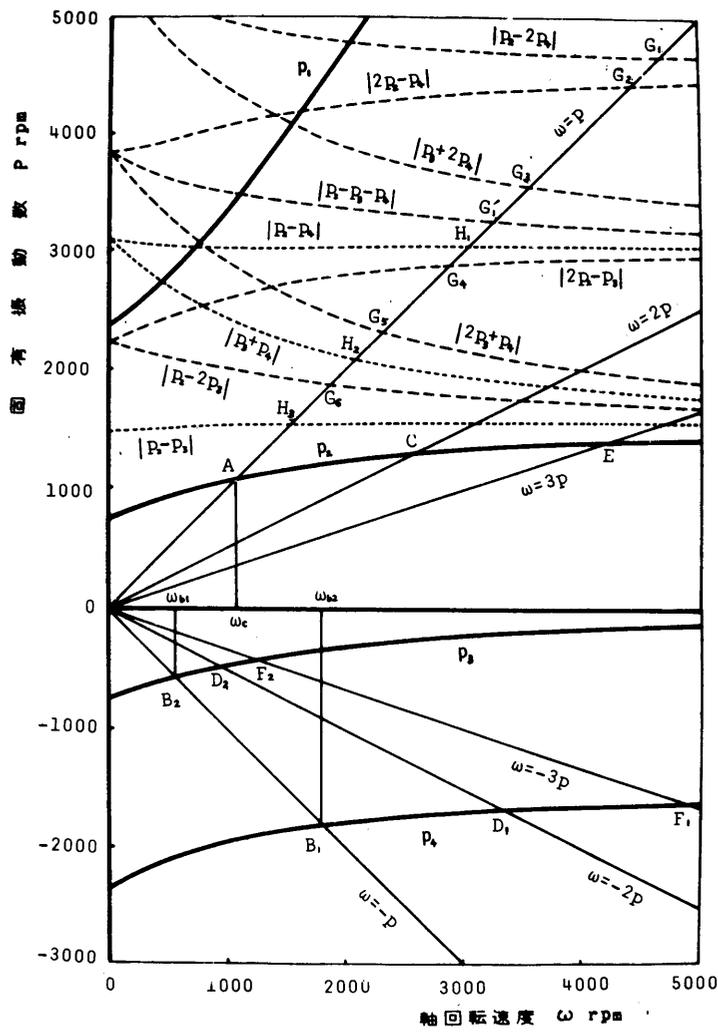


図 2.1 p- ω 線図

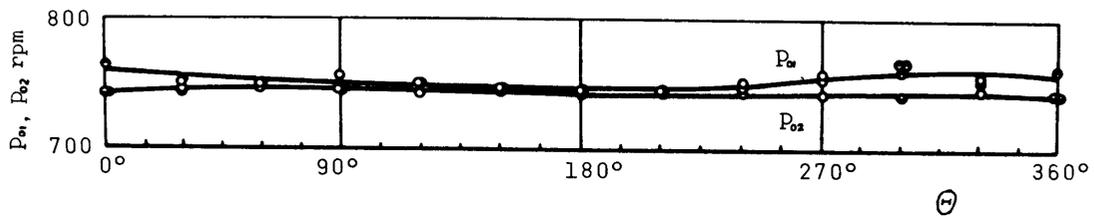


図 2.2 $\omega=0$ における固有振動数

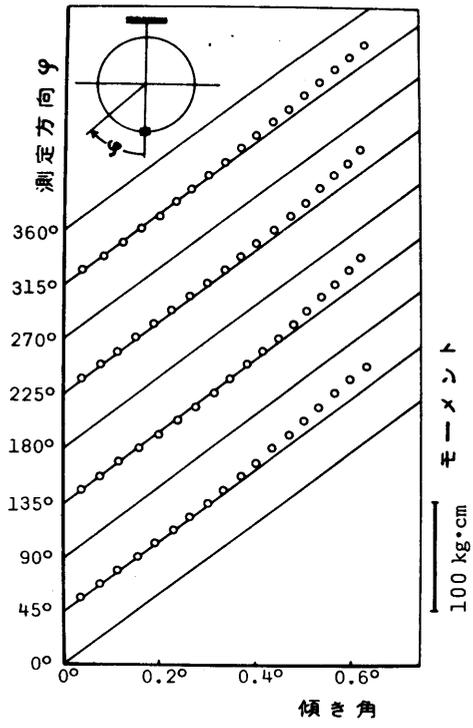


図 2.3 ばね特性 (I)

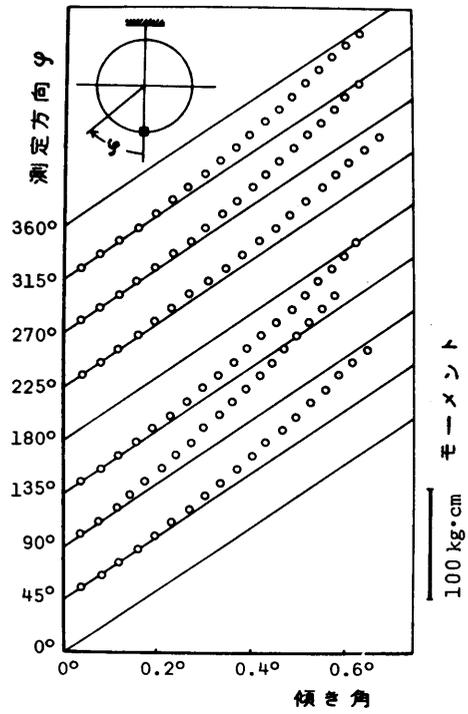


図 2.4 ばね特性 (II)

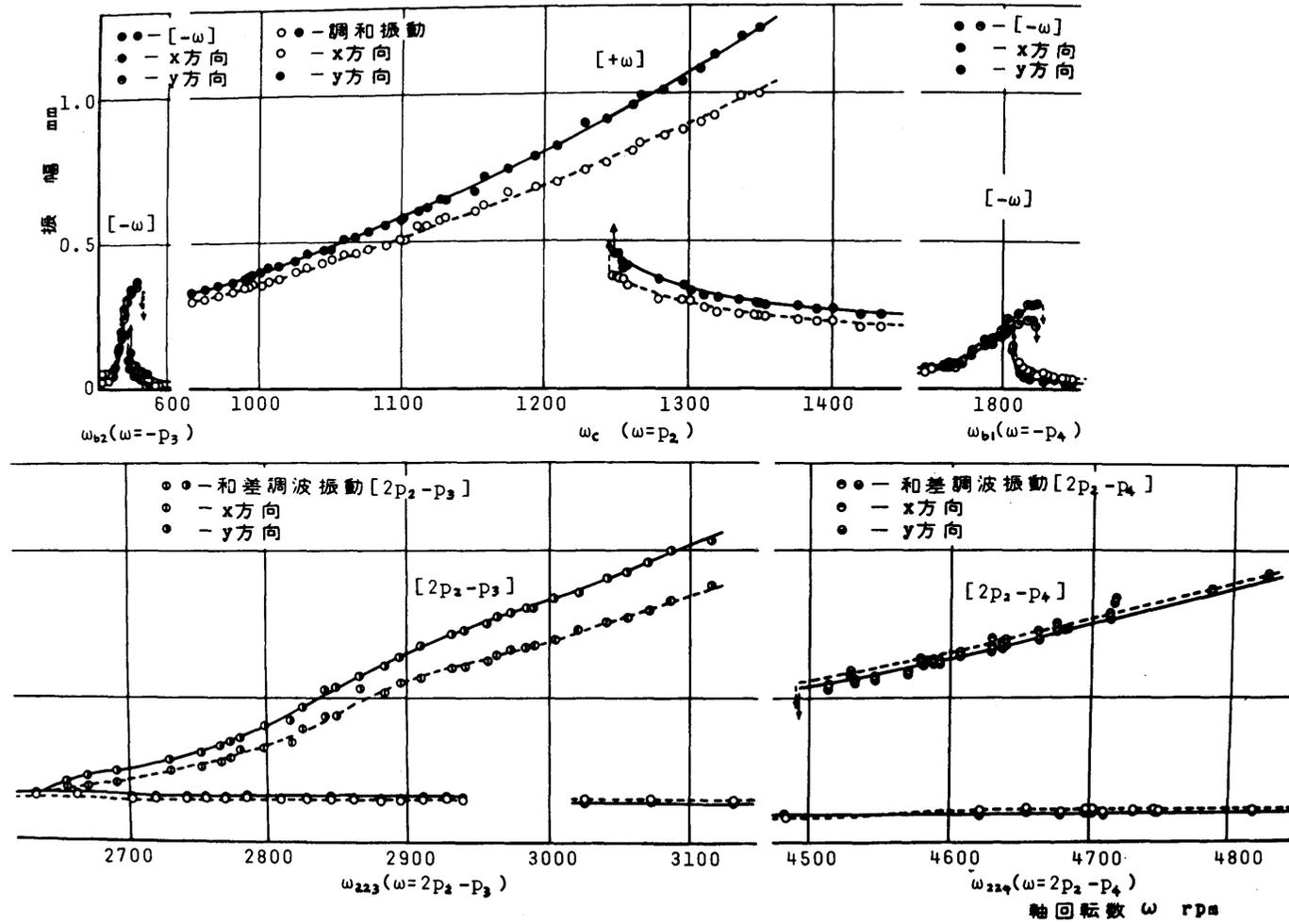


図 2.5 方向性のない対称非線形ばね特性のとき発生する振動

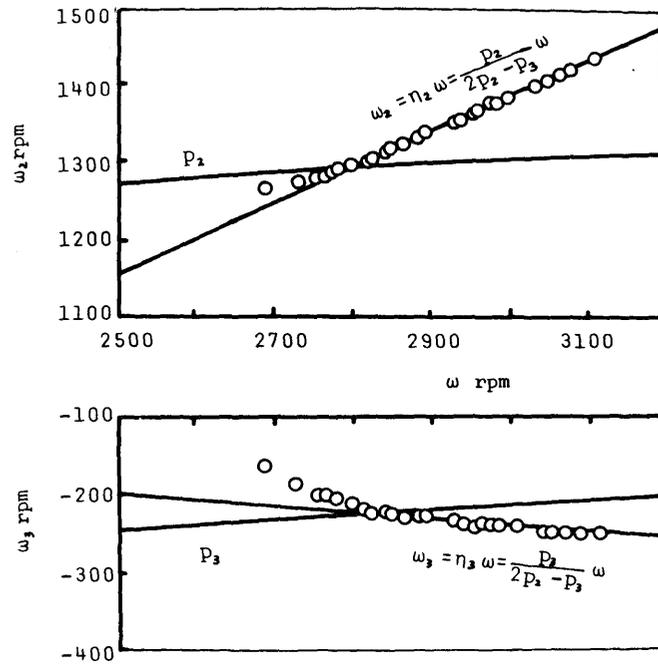


図 2.6 $[2p_2 - p_3]$ 様式の和差調波振動の振動数

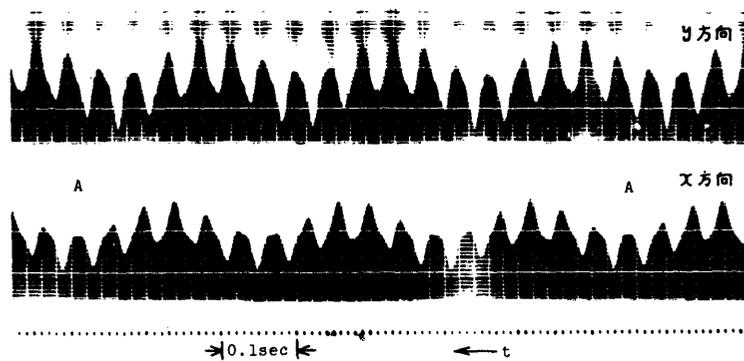


図 2.7 和差調波振動 $[2p_2 - p_3]$ の波形

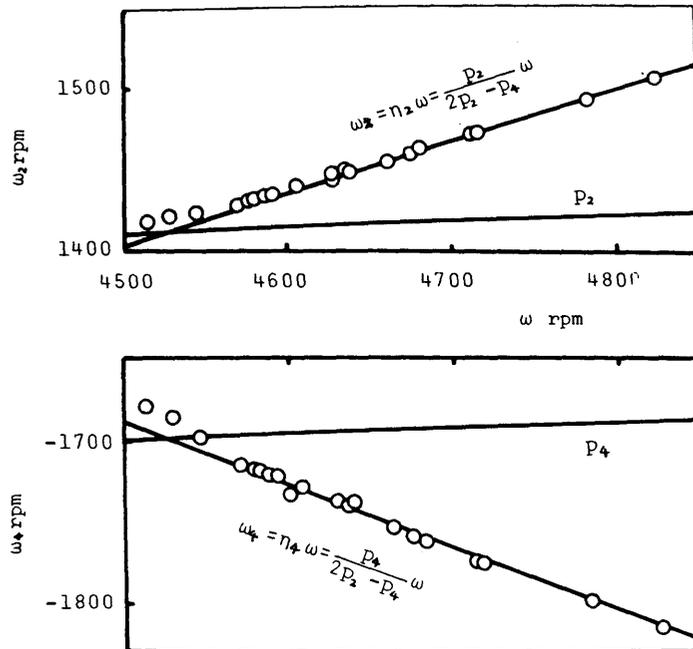


図 2.8 $[2p_2 - p_4]$ 様式の和差調波振動の振動数

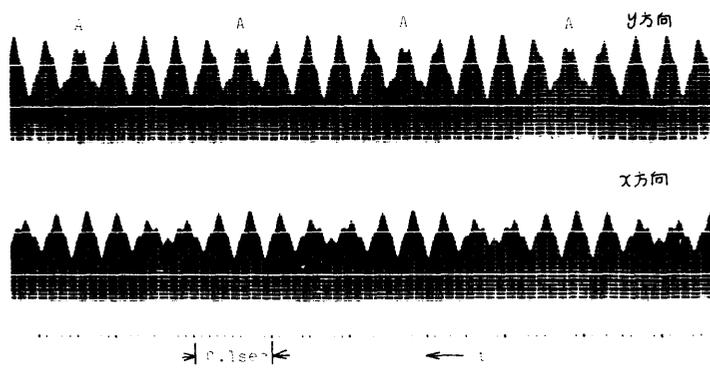


図 2.9 和差調波振動 $[2p_2 - p_4]$ の波形

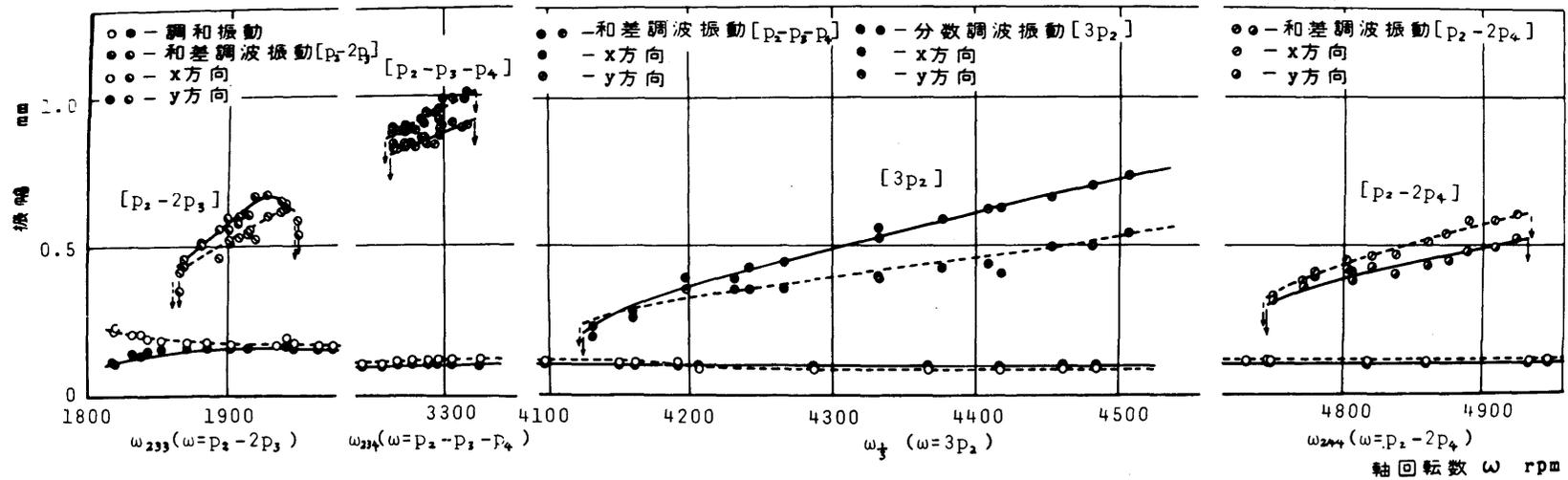


図 2.10 方向性のある対称非線形ばね特性のとき新たに発生する振動

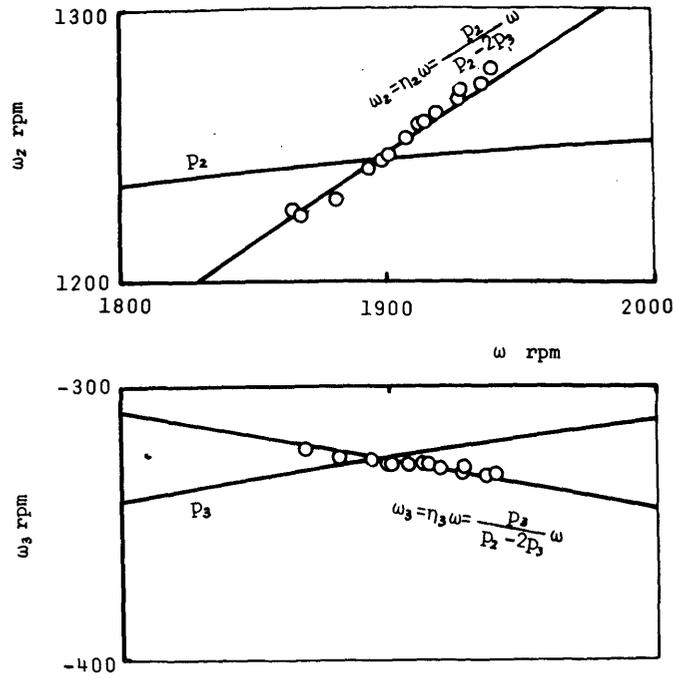


図 2.11 $[p_2 - 2p_3]$ 様式の和差調波振動の振動数

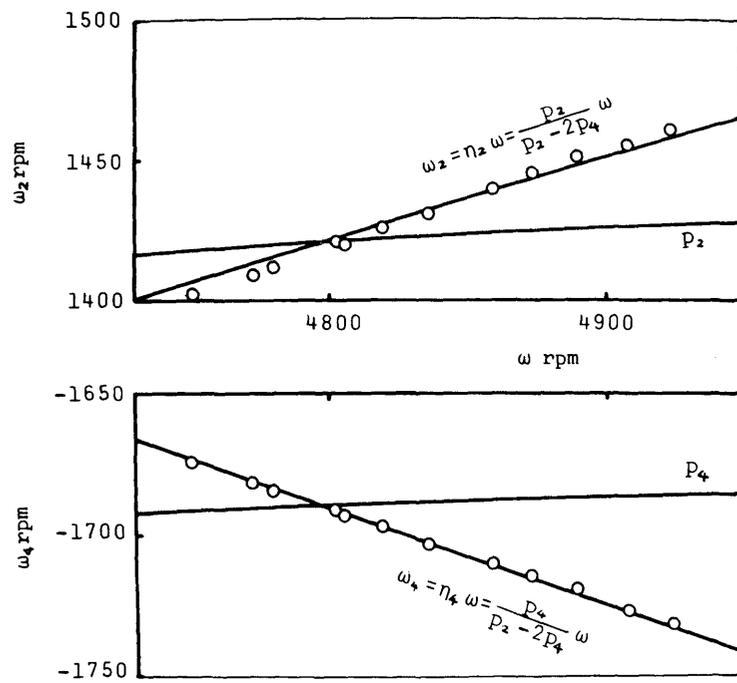


図 2.12 $[p_2 - 2p_4]$ 様式の和差調波振動の振動数

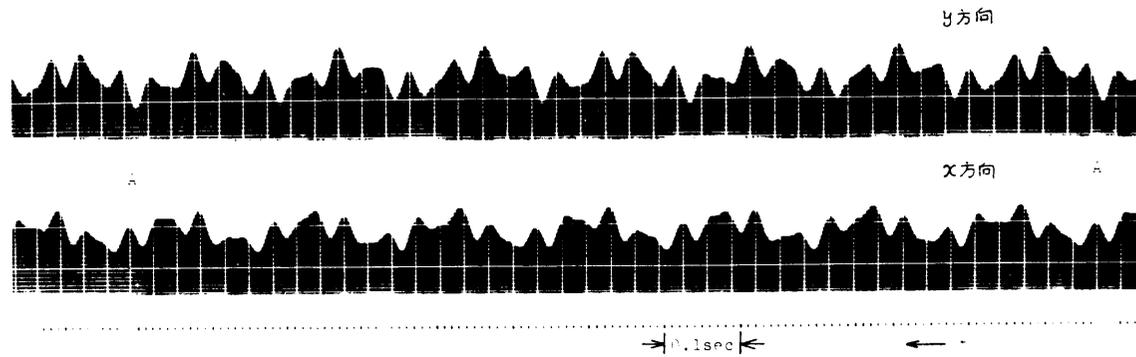


図 2.13 和差調波振動 $[p_2-2p_3]$ の波形

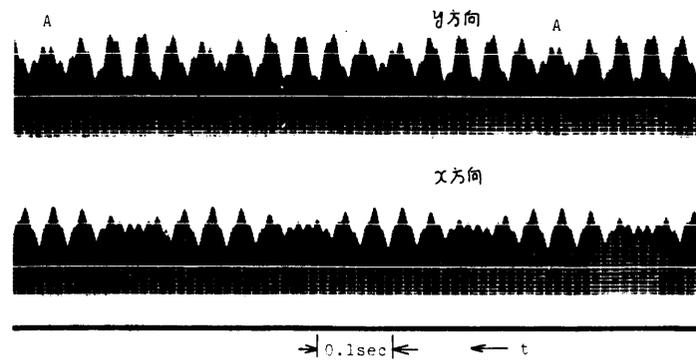


図 2.14 和差調波振動 $[p_2-2p_4]$ の波形

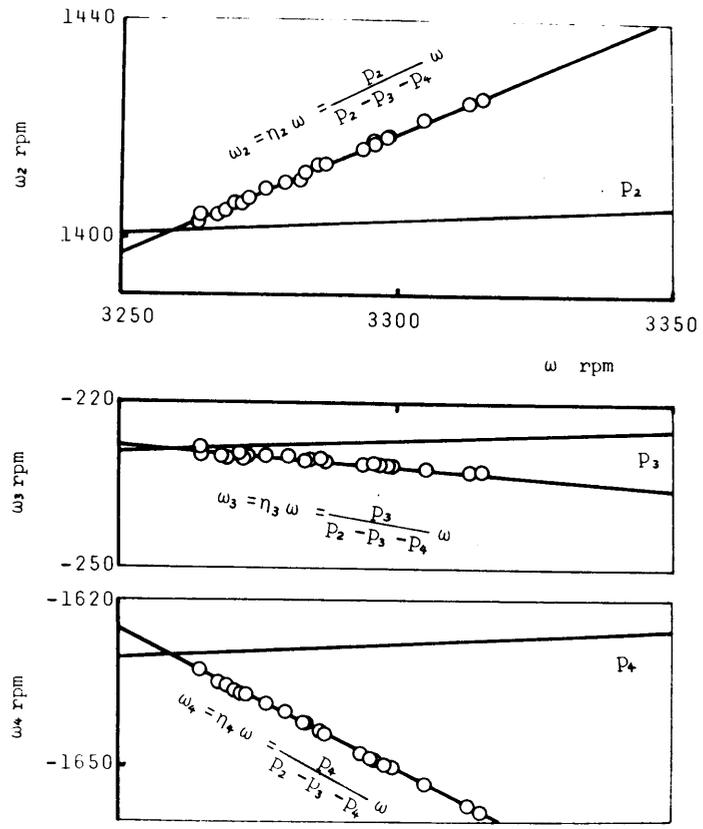


図 2.15 $[p_2 - p_3 - p_4]$ 様式の和差調波振動
 の振動数

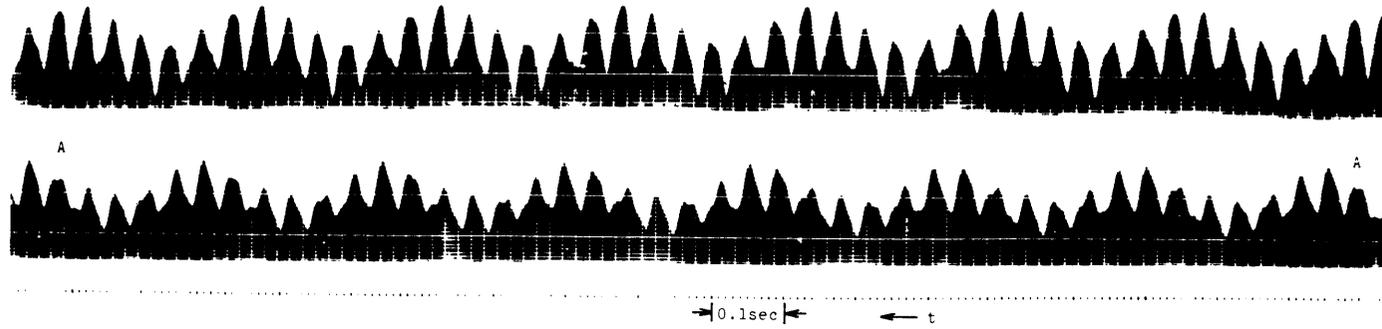


図 2.16 和差調波振動 $[p_2 - p_3 - p_4]$ の波形

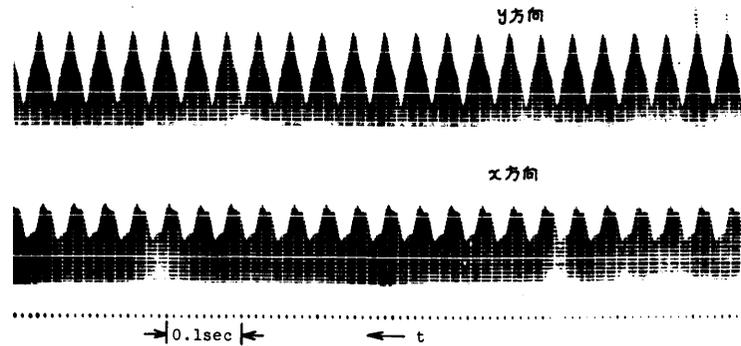


図 2.17 分数調波振動 $[3p_2]$ の波形

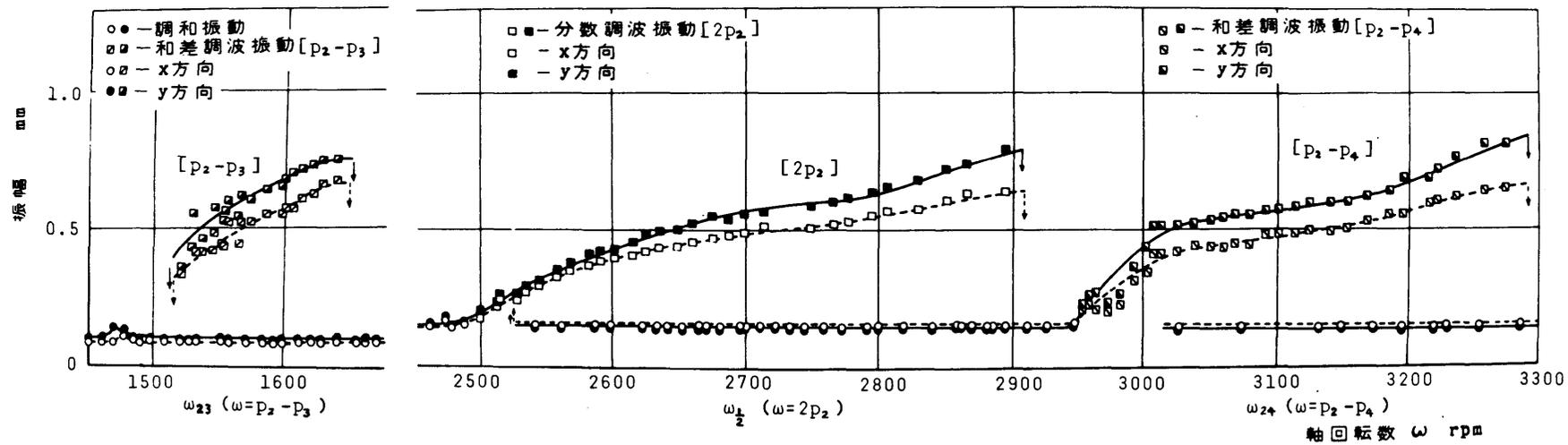


図 2.18 非対称非線形ばね特性に起因する振動

表 2.1 対称非線形ばね特性に起因する各種の強制振動の発生状況

振動の種類 ばね特性	1/3 次 分 数 調 波 振 動			和 差 調 波 振 動						
	3p ₂	-3p ₃	-3p ₄	二 つ の 振 動						三つの振動
				2p ₂ -p ₃	2p ₂ -p ₄	p ₂ -2p ₃	p ₂ -2p ₄	-2p ₃ -p ₄	-p ₃ -2p ₄	p ₂ -p ₃ -p ₄
B - I	×	×	×	○	○	×	×	×	×	×
B - II	○	×	×	○	○	○	○	×	×	○

B - I : 方向性のない対称非線形ばね特性 (図 2.3)

B - II : 方向性のある対称非線形ばね特性 (図 2.4)

○・・・発生 ×・・・発生せず

表 2.2 非対称非線形ばね特性に起因する各種の強制振動の発生状況

振動の種類 ばね特性		1/2 次 分 数 調 波 振 動			和 差 調 波 振 動		
		2 p ₂	-2 p ₃	-2 p ₄	p ₂ -p ₃	p ₂ -p ₄	-p ₃ -p ₄
A	発生の有無	○	△	△	○	○	△
	発生回転数幅 (rpm)	25, 40, 150	20, 30	75	100	50, 100, 200	50, 100
	振幅の大小	大	小	小	大	大	小
B-I	発生の有無	○	×	×	○	○	×
B-II	発生回転数幅 (rpm)	420			150, 200	340	

A・・・非対称非線形特性が強い文献(12),(23),(24)の場合, B-I・・・対称非線形特性が強い

図2.3 の場合 (方向性なし), B-II・・・対称非線形特性が強い図2.4 の場合 (方向性あり),

○・・・発生, ×・・・発生せず, △・・・系の組立状態により発生したりしなかったりしたもの。

第 3 章 非線形ばね特性をもつ回転軸の振動の解析的考察⁽³⁶⁾

3.1 ま え が き

ジャイロモーメントが作用する一般の回転軸系の軸の横振動は、往復振動ではなくふれ回り運動であり⁽³⁵⁾、回転体中心は、その平衡位置を通り軸受中心線に垂直な x, y 平面内で平面運動を行う。しかるに回転軸の弾性復元力に非線形特性がある場合、直交座標 x, y によりこれを表示するのが通例であった。

本章では、平面運動を行ういまの場合、 x, y 平面内にいわば平面的に分布している軸の非線形特性を、従来とは異なる力学的解釈により表示するのが妥当であることを指摘し、非線形ばね特性の新たな表示方法を提案している。そしてこれにより、各種の非線形強制振動の諸特性、振動発生の難易、発生の予測などに、より明確な考察と展望が可能となることを示した。さらに対称非線形ばね特性（座標の奇数乗項で表示される）に起因する回転軸系の各種の非線形強制振動⁽³⁴⁾に関する理論的解析を行い、また比較的簡単な、座標の偶数乗項で表示される非対称非線形ばね特性の場合の文献（26）の解析結果をより一般的な場合に拡張し、これに上記のばね特性に関する新表示方法を適用し、解析結果解釈の明確化を計った。さらに山本によりすでに報告されている実験結果⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾⁽²⁴⁾と前章の実験結果⁽³⁴⁾が、本章の解析結果により合理的に説明されうることを示した。

座標の四乗以上の高次項に起因する非線形強制振動の発生はまれであるので、本章では非対称、対称非線形特性は、それぞれ座標の二、三乗項で表示されるものに限定した。

3.2 ばね特性と運動方程式

ふれ回り運動をする最も簡単な場合は、回転体が両軸受の中央にあり、回転体のたわみ振動と傾き振動とが連成しない系の傾き振動である。この場合系は回転体の傾き θ の x, y 方向の成分 θ_x, θ_y の 2 つの座標をもつ 2 自由度系である。まずこの場合について、ポテンシャルエネルギー V と非線形ばね特性に関する考察を行う。三乗までの非線形項を考えると、ポテンシャルエネルギー V は

$$V = 1/2 \cdot \delta (\theta_x^2 + \theta_y^2) + (\epsilon_{30} \theta_x^3 + \epsilon_{21} \theta_x^2 \theta_y + \epsilon_{12} \theta_x \theta_y^2 + \epsilon_{03} \theta_y^3) + (\beta_{40} \theta_x^4 + \beta_{31} \theta_x^3 \theta_y + \beta_{22} \theta_x^2 \theta_y^2 + \beta_{13} \theta_x \theta_y^3 + \beta_{04} \theta_y^4) \dots \dots \dots (31)$$

となる。ここに δ はばね定数、 ϵ_{ab} ($a+b=3$)、 β_{ab} ($a+b=4$) はそれぞれ非対称、対称非線形項の係数で小さい量である。また、 θ_x, θ_y に関するばね力は

$$\left. \begin{aligned} F_{\theta x} &= -\partial V / \partial \theta_x = -\delta \theta_x - \psi_{\theta x}(\theta_x, \theta_y) - \varphi_{\theta x}(\theta_x, \theta_y) \\ F_{\theta y} &= -\partial V / \partial \theta_y = -\delta \theta_y - \psi_{\theta y}(\theta_x, \theta_y) - \varphi_{\theta y}(\theta_x, \theta_y) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

となり，ここに

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\theta x} &= 3\varepsilon_{30}\theta_x^2 + 2\varepsilon_{21}\theta_x\theta_y + \varepsilon_{12}\theta_y^2 \\ \psi_{\theta y} &= 3\varepsilon_{03}\theta_y^2 + 2\varepsilon_{12}\theta_x\theta_y + \varepsilon_{21}\theta_x^2 \\ \varphi_{\theta x} &= 4\beta_{40}\theta_x^3 + 3\beta_{31}\theta_x^2\theta_y + 2\beta_{22}\theta_x\theta_y^2 + \beta_{13}\theta_y^3 \\ \varphi_{\theta y} &= 4\beta_{04}\theta_y^3 + 3\beta_{13}\theta_x\theta_y^2 + 2\beta_{22}\theta_x^2\theta_y + \beta_{31}\theta_x^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.3)$$

であり， $\psi_{\theta x}$ ， $\psi_{\theta y}$ と $\varphi_{\theta x}$ ， $\varphi_{\theta y}$ はそれぞれ非対称と対称非線形項である。式(3.1)の V に

$$\theta_x = \theta \cos \varphi, \quad \theta_y = \theta \sin \varphi \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

を代入し，極座標 (θ, φ) で表わすと

$$\begin{aligned} V &= 1/2 \cdot \delta \theta^2 + (\varepsilon_c^{(1)} \cos \varphi + \varepsilon_s^{(1)} \sin \varphi + \varepsilon_c^{(3)} \cos 3\varphi + \varepsilon_s^{(3)} \sin 3\varphi) \theta^3 \\ &\quad + (\beta_c^{(0)} + \beta_c^{(2)} \cos 2\varphi + \beta_s^{(2)} \sin 2\varphi + \beta_c^{(4)} \cos 4\varphi + \beta_s^{(4)} \sin 4\varphi) \theta^4 \dots\dots\dots (3.5) \end{aligned}$$

となる。ここで係数は式(3.1)と同数あり，

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_c^{(1)} &= (3\varepsilon_{30} + \varepsilon_{12})/4, & \varepsilon_s^{(1)} &= (\varepsilon_{21} + 3\varepsilon_{03})/4, \\ \varepsilon_c^{(3)} &= (\varepsilon_{30} - \varepsilon_{12})/4, & \varepsilon_s^{(3)} &= (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{03})/4, \\ \beta_c^{(0)} &= (3\beta_{40} + \beta_{22} + 3\beta_{04})/8, & & \\ \beta_c^{(2)} &= (\beta_{40} - \beta_{04})/2, & \beta_s^{(2)} &= (\beta_{31} + \beta_{13})/4, \\ \beta_c^{(4)} &= (\beta_{40} - \beta_{22} + \beta_{04})/8, & \beta_s^{(4)} &= (\beta_{31} - \beta_{13})/8, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6)$$

の係数間の関係がある。式(3.5)はさらに

$$\begin{aligned} V &= 1/2 \cdot \delta \theta^2 + \{ \varepsilon_c^{(1)} \cos(\varphi - \varphi_1) + \varepsilon_s^{(3)} \cos 3(\varphi - \varphi_3) \} \theta^3 \\ &\quad + \{ \beta_c^{(0)} + \beta_c^{(2)} \cos 2(\varphi - \varphi_2) + \beta_s^{(4)} \cos 4(\varphi - \varphi_4) \} \theta^4 \dots\dots\dots (3.5a) \\ \varepsilon_c^{(1)} &= \sqrt{\varepsilon_c^{(1)2} + \varepsilon_s^{(1)2}}, & \varepsilon_s^{(3)} &= \sqrt{\varepsilon_c^{(3)2} + \varepsilon_s^{(3)2}}, \\ \beta_c^{(2)} &= \sqrt{\beta_c^{(2)2} + \beta_s^{(2)2}}, & \beta_s^{(4)} &= \sqrt{\beta_c^{(4)2} + \beta_s^{(4)2}}, \\ \varphi_1 &= \tan^{-1}(\varepsilon_s^{(1)}/\varepsilon_c^{(1)}); & \varphi_3 &= 1/3 \cdot \tan^{-1}(\varepsilon_s^{(3)}/\varepsilon_c^{(3)}), \\ \varphi_2 &= 1/2 \cdot \tan^{-1}(\beta_s^{(2)}/\beta_c^{(2)}), & \varphi_4 &= 1/4 \cdot \tan^{-1}(\beta_s^{(4)}/\beta_c^{(4)}) \end{aligned} \dots\dots\dots (3.7)$$

の形になる。係数中 $\beta^{(0)}$ のみが正負両方になり，他はすべて正である。式(3.5)，(3.5a)で，方向角 φ に無関係な，方向性をもたぬ非線形項は，対称非線形項の一つである $\beta^{(0)}\theta^4$ のみであり，他はすべて方向性をもつ非線形項である。

図3.1のようにポテンシャルエネルギー V を図示すると，線形のときのポテンシャルエネルギー $V_0 = 1/2 \cdot \delta(\theta_x^2 + \theta_y^2)$ は破線の回転放物面になるが，式(3.1)，(3.5)，(3.5a)で表わされる V は実線のように V_0 面から各方向に不規則にずれた形になり，式(3.6)の $\varepsilon_c^{(1)}$ ， $\beta_s^{(2)}$ などの成分に分けて考えれば，図3.2，3.3に示すような規則性のある方向性をもったものの和になる。図3.2，3.3に

それぞれ $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(3)}$ と $\beta^{(0)}$, $\beta^{(2)}$, $\beta^{(4)}$ の係数の非線形項のみをもつ場合の, $\theta_x \theta_y$ 平面に平行な平面での V 曲面の断面を示す。図からわかるように, $\varepsilon_s^{(n)}$, $\beta_c^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$, $\beta^{(n)}$ などは方向角 φ が 2π 変化する間に n 回増減する方向性のある非線形成分の係数である。図 3.3 の (i) のみが方向性をもたぬ場合である。

式 (3.1) の V にさらに高次の項を含むとき, すなわち $2n+1$, $2m$ (m, n は正整数) 乗項までの, 非対称, 対称非線形項を含む一般の場合は, 前者の係数は $\varepsilon^{(1)} \sim \varepsilon^{(2n+1)}$, 後者の係数は $\beta^{(0)} \sim \beta^{(2m)}$ までを含む表示になる。

以後, 方向角が 2π 変わる間に n 回増減する非線形成分を, $N_{(n)}$ の記号で表わす。

回転体の極慣性モーメントを I_p , 回転体中心を通る直径に関する慣性モーメントを I , ばね定数を δ , 減衰係数を c , 動不つりあいを τ , 回転軸の角速度を ω , 時間を t とし

$$\left. \begin{aligned} i_p &= I_p / I, & t' &= t \sqrt{\delta / I}, & \omega' &= \omega \sqrt{I / \delta} \\ c' &= c / \sqrt{\delta \cdot I}, & \varepsilon'_{ab} &= \varepsilon_{ab} / \delta, & \beta'_{ab} &= \beta_{ab} / \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8)$$

の無次元量を用い, 肩のダッシュを省略すると, 次の無次元量表示の運動方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x + \psi_{\theta x} + \varphi_{\theta x} &= (i_p - 1) \tau \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y + \psi_{\theta y} + \varphi_{\theta y} &= (i_p - 1) \tau \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.9)$$

この系に発生する振動はふれ回り運動であり $\rho_f = (i_p \omega + \sqrt{i_p^2 \omega^2 + 4}) / 2$ (> 0) と $\rho_b = (i_p \omega - \sqrt{i_p^2 \omega^2 + 4}) / 2$ (< 0) の前向きと後向き歳差運動の 2 個の固有振動数をもつ, 振動数 $\omega_f (\doteq \rho_f)$ と $\omega_b (\doteq \rho_b)$ の 2 個の強制振動が同時に発生するときの解の形は, 文献 (26) で述べられている摂動法により, 小さい量を見捨すれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R_f \cos(\omega_f t + \delta_f) + R_b \cos(\omega_b t + \delta_b) + F_0 \cos \omega t \\ \theta_y &= R_f \sin(\omega_f t + \delta_f) + R_b \sin(\omega_b t + \delta_b) + F_0 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.10)$$

$$F_0 = (i_p - 1) \tau \omega^2 / \{ 1 + (i_p - 1) \omega^2 \} \dots\dots\dots (3.11)$$

次に 1 個の回転体が弾性回転軸で支えられ, たわみ r の振動と傾き θ の振動が連成する一般の 4 自由度系の場合を取り扱う。この系の運動方程式と基準座標表示については既に報告⁽²⁵⁾されているので, ここでは議論に必要な最小限の記述にとどめる。質量 m , 慣性モーメント I_p , I の回転体のたわみと傾きを x, y と θ_x, θ_y , 軸のばね定数を α, γ, δ , 回転体の偏心を e , 動不つりあいを τ , e と τ の間の角度を β , 減衰係数を c_{ab} とすると無次元量

$$\left. \begin{aligned} x' &= x / \sqrt{I/m}, & y' &= y / \sqrt{I/m}, & e' &= e / \sqrt{I/m}, \\ c'_{11} &= c_{11} / \sqrt{\alpha m}, & c'_{12} &= c'_{21} = c_{12} / \sqrt{\alpha I} = c_{21} / \sqrt{\alpha I}, \\ c'_{22} &= c_{22} / (I \sqrt{\alpha/m}), & \omega' &= \omega / \sqrt{\alpha/m}, & t' &= t \sqrt{\alpha/m}, \end{aligned} \right\}$$

$$\gamma' = \gamma / (\alpha \sqrt{I/m}), \quad \delta' = \delta m / (\alpha I), \quad i_p = I_p / I \quad \dots \dots \dots (3.12)$$

により表わされる運動方程式は、上式中の肩のダッシュを省略すると

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + c_{11} \dot{x} + c_{12} \dot{\theta}_y + x + \gamma \theta_x + \psi_x + \varphi_x &= e \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} + c_{11} \dot{y} + c_{12} \dot{\theta}_y + y + \gamma \theta_y + \psi_y + \varphi_y &= e \omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c_{21} \dot{x} + c_{22} \dot{\theta}_x + \gamma x + \delta \theta_x + \psi_{\theta x} + \varphi_{\theta x} &= (i_p - 1) \tau \omega^2 \cos(\omega t + \beta) \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c_{21} \dot{y} + c_{22} \dot{\theta}_y + \gamma y + \delta \theta_y + \psi_{\theta y} + \varphi_{\theta y} &= (i_p - 1) \tau \omega^2 \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.13)$$

となる。ここに $\psi_x, \psi_{\theta y}$ などは非対称非線形項、 $\varphi_x, \varphi_{\theta y}$ などは対称非線形項である。振動数方程式は、固有振動数を ρ とすると

$$f(\rho) = (1 - \rho^2)(\delta + i_p \omega \rho - \rho^2) - \gamma^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (3.14)$$

であり、4個の固有振動数 $\rho_{1,2,3,4}$ の間には

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 > \rho_{10} > 1 > \rho_2 > 0 > \rho_3 > -1 > \rho_4 > -\rho_{10}, \\ \rho_1 > i_p \omega \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.15)$$

の関係がある。上式において ρ_{10} は

$$\rho_{10}^2 = \{ (1 + \delta) + \sqrt{(1 + \delta)^2 - 4(\delta - \gamma^2)} \} / 2 \quad \dots \dots \dots (3.16)$$

である。変換

$$x = \sum_{s=1}^4 X_s, \quad y = -\sum_{s=1}^4 (\dot{X}_s / \rho_s), \quad \theta_x = \sum_{s=1}^4 \kappa_s X_s, \quad \theta_y = -\sum_{s=1}^4 (\kappa_s \dot{X}_s / \rho_s) \quad \dots \dots \dots (3.17)$$

により式(3.13)は基準座標 X_s に移され、運動方程式

$$\begin{aligned} \ddot{X}_s + \omega^2 X_s &= (\omega_s^2 - \rho_s^2) X_s + n_s \{ [c_{11} (-\dot{x} + \rho_s y) / \kappa_s \\ &+ c_{12} (-\dot{x} + \rho_s y - \dot{\theta}_x / \kappa_s + \rho_s \theta_y / \kappa_s) + c_{22} (-\dot{\theta}_x + \rho_s \theta_y) \} \\ &+ \{ -(\psi_x + \varphi_x) / \kappa_s - (\psi_{\theta x} + \varphi_{\theta x}) + \rho_s (\Psi_y + \Phi_y) / \kappa_s + \rho_s (\Psi_{\theta y} + \Phi_{\theta y}) \} \\ &+ \omega (\omega + \rho_s) \{ e / \kappa_s \cdot \cos \omega t + (i_p - 1) \tau \cos(\omega t + \beta) \} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3.18)$$

($s = 1, 2, 3, 4$)

をうる。ここに

$$\begin{aligned} \kappa_s &= (\rho_s^2 - 1) / \gamma, \quad n_s = \gamma \rho_s / \{ (\rho_s - \rho_i) (\rho_s - \rho_j) (\rho_s - \rho_k) \} \\ (s &\neq i \neq j \neq k, \quad i, j, k, s = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3.19)$$

であり、 $\Psi_y, \Phi_y, \Psi_{\theta y}, \Phi_{\theta y}$ はそれぞれ $\psi_y, \varphi_y, \psi_{\theta y}, \varphi_{\theta y}$ の時間 t に関する不定積分である。

本章において三乗項までの非線形項を考えれば、発生する非線形強制振動、すなわち分数調波振

動あるいは和差調波振動の円振動数 ω 以外の成分振動は最大限3個である。この場合式(3.18)の解は

$$X_s = R_s \cos(\omega_s t + \delta_s) + A_s \cos \omega t + B_s \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

の形になり、小さい量を無視すれば、

$$\left. \begin{aligned} x &= K_i \frac{\cos(\omega_i t + \delta_i)}{\sin} + R_j \frac{\cos(\omega_j t + \delta_j)}{\sin} + R_k \frac{\cos(\omega_k t + \delta_k)}{\sin} \\ &+ F_v \frac{\cos \omega t}{\sin} \mp F_2 \frac{\sin \omega t}{\cos} \\ \theta_x &= K_i R_i \frac{\cos(\omega_i t + \delta_i)}{\sin} + K_j R_j \frac{\cos(\omega_j t + \delta_j)}{\sin} + K_k R_k \frac{\cos(\omega_k t + \delta_k)}{\sin} \\ &+ F_3 \frac{\cos \omega t}{\sin} \mp F_4 \frac{\sin \omega t}{\cos} \\ &(i, j, k = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \neq k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.21)$$

の形の解を得る。⁽²⁶⁾ここに、

$$\begin{aligned} F_1 &= \omega^2 \{ \delta + (i_p - 1) \omega^2 \} e - \gamma (i_p - 1) \tau \cos \beta \} / f(\omega) \\ F_2 &= -\gamma (i_p - 1) \tau \omega^2 \sin \beta / f(\omega) \\ F_3 &= \omega^2 \{ -e \gamma + (1 - \omega^2) (i_p - 1) \tau \cos \beta \} / f(\omega) \\ F_4 &= (1 - \omega^2) (i_p - 1) \tau \omega^2 \sin \beta / f(\omega) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

であり、 $f(\omega)$ は式(3.14)で $p = \omega$ としたものである。

この場合のポテンシャルエネルギー V は

$$\begin{aligned} V &= \{ 1/2 \cdot (x^2 + y^2) + \gamma (x\theta_x + y\theta_y) + 1/2 \cdot \delta(\theta_x^2 + \theta_y^2) \} \\ &+ \sum_{\substack{a,b,c,d=0 \\ (a+b+c+d=3)}}^3 \epsilon_{abcd} x^a y^b \theta_x^c \theta_y^d + \sum_{\substack{a,b,c,d=0 \\ (a+b+c+d=4)}}^4 \beta_{abcd} x^a y^b \theta_x^c \theta_y^d \quad \dots\dots\dots (3.23) \end{aligned}$$

となる。上式中の第2, 3項は、それぞれ x, y, θ_x, θ_y に関する三乗項と四乗項である。各座標に関するばね力はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\partial V / \partial x = -x - \gamma \theta_x - \psi_x - \varphi_x \\ F_y &= -\partial V / \partial y = -y - \gamma \theta_y - \psi_y - \varphi_y \\ F_{\theta_x} &= -\partial V / \partial \theta_x = -\gamma x - \delta \theta_x - \psi_{\theta_x} - \varphi_{\theta_x} \\ F_{\theta_y} &= -\partial V / \partial \theta_y = -\gamma y - \delta \theta_y - \psi_{\theta_y} - \varphi_{\theta_y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.24)$$

となる。上式において

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= 3\epsilon_{3000} x^2 + 2\epsilon_{2100} x y + \epsilon_{1200} y^2 + 2\epsilon_{2010} x \theta_x + 2\epsilon_{2001} x \theta_y \\ &+ \epsilon_{1110} y \theta_x + \epsilon_{1101} y \theta_y + \epsilon_{1020} \theta_x^2 + \epsilon_{1011} \theta_x \theta_y + \epsilon_{1002} \theta_y^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a=1}^3 \sum_{\substack{b,c,d=0 \\ (a+b+c+d=3)}}^2 a \varepsilon_{abcd} x^{a-1} y^b \theta_x^c \theta_y^d \\
\psi_y &= \sum_{b=1}^3 \sum_{\substack{a,c,d=0 \\ (a+b+c+d=3)}}^2 b \varepsilon_{abcd} x^a y^{b-1} \theta_x^c \theta_y^d \\
\psi_{\theta x} &= \sum_{c=1}^3 \sum_{\substack{a,b,d=0 \\ (a+b+c+d=3)}}^2 c \varepsilon_{abcd} x^a y^b \theta_x^{c-1} \theta_y^d \\
\psi_{\theta y} &= \sum_{d=1}^3 \sum_{\substack{a,b,c=0 \\ (a+b+c+d=3)}}^2 d \varepsilon_{abcd} x^a y^b \theta_x^c \theta_y^{d-1} \\
\varphi_x &= 4\beta_{4000} x^3 + 3\beta_{3100} x^2 y + 2\beta_{2200} x y^2 + \beta_{1300} y^3 + 3\beta_{3010} x^2 \theta_x \\
&\quad + 3\beta_{3001} x^2 \theta_y + 2\beta_{2110} x y \theta_x + 2\beta_{2101} x y \theta_y + \beta_{1210} y^2 \theta_x + \beta_{1201} y^2 \theta_y \\
&\quad + 2\beta_{2020} x \theta_x^2 + 2\beta_{2002} x \theta_y^2 + 2\beta_{2011} x \theta_x \theta_y + \beta_{1120} y \theta_x^2 + \beta_{1102} y \theta_y^2 \\
&\quad + \beta_{1111} y \theta_x \theta_y + \beta_{1030} \theta_x^3 + \beta_{1021} \theta_x^2 \theta_y + \beta_{1012} \theta_x \theta_y^2 + \beta_{1003} \theta_y^3 \\
&= \sum_{a=1}^4 \sum_{\substack{b,c,d=0 \\ (a+b+c+d=4)}}^3 a \beta_{abcd} x^{a-1} y^b \theta_x^c \theta_y^d \\
\varphi_y &= \sum_{b=1}^4 \sum_{\substack{a,c,d=0 \\ (a+b+c+d=4)}}^3 b \beta_{abcd} x^a y^{b-1} \theta_x^c \theta_y^d \\
\varphi_{\theta x} &= \sum_{c=1}^4 \sum_{\substack{a,b,d=0 \\ (a+b+c+d=4)}}^3 c \beta_{abcd} x^a y^b \theta_x^{c-1} \theta_y^d \\
\varphi_{\theta y} &= \sum_{d=1}^4 \sum_{\substack{a,b,c=0 \\ (a+b+c+d=4)}}^3 d \beta_{abcd} x^a y^b \theta_x^c \theta_y^{d-1}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

であり、 $\psi_x, \psi_{\theta y}$ などは非対称非線形項を、 $\varphi_x, \varphi_{\theta y}$ などは対称非線形項を表わしている。式(3.23)に

$$x = r \cos \varphi_r, \quad y = r \sin \varphi_r, \quad \theta_x = \theta \cos \varphi_\theta, \quad \theta_y = \theta \sin \varphi_\theta \tag{3.26}$$

を代入して極座標表示を行うと

$$\begin{aligned}
V &= \{ 1/2 \cdot r^2 + \gamma \cdot r \theta \cos(\varphi_r - \varphi_\theta) + 1/2 \cdot \delta \theta^2 \} \\
&\quad + \left[\left[\left(\varepsilon_{30c}^{(1)} \cos \varphi_r + \varepsilon_{30s}^{(1)} \sin \varphi_r \right) r^3 + \left\{ \varepsilon_{21c}^{(1)} \cos \varphi_\theta + \varepsilon_{21s}^{(1)} \sin \varphi_\theta \right. \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. \varepsilon_{21c}^{\prime(1)} \cos(2\varphi_r - \varphi_\theta) + \varepsilon_{21s}^{\prime(1)} \sin(2\varphi_r - \varphi_\theta) \right\} r^2 \theta + \left\{ \varepsilon_{12c}^{(1)} \cos \varphi_r + \varepsilon_{12s}^{(1)} \sin \varphi_r \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. \varepsilon_{12c}^{\prime(1)} \cos(2\varphi_\theta - \varphi_r) + \varepsilon_{12s}^{\prime(1)} \sin(2\varphi_\theta - \varphi_r) \right\} r \theta^2 + \left(\varepsilon_{03c}^{(1)} \cos \varphi_\theta + \varepsilon_{03s}^{(1)} \sin \varphi_\theta \right) \theta^3 \right] \\
&\quad + \left[\left(\varepsilon_{30c}^{(3)} \cos 3\varphi_r + \varepsilon_{30s}^{(3)} \sin 3\varphi_r \right) r^3 + \left\{ \varepsilon_{21c}^{(3)} \cos(2\varphi_r + \varphi_\theta) + \varepsilon_{21s}^{(3)} \sin(2\varphi_r + \varphi_\theta) \right\} r^2 \theta \right. \\
&\quad + \left. \left\{ \varepsilon_{12c}^{(3)} \cos(2\varphi_\theta + \varphi_r) + \varepsilon_{12s}^{(3)} \sin(2\varphi_\theta + \varphi_r) \right\} r \theta^2 + \left(\varepsilon_{03c}^{(3)} \cos 3\varphi_\theta + \varepsilon_{03s}^{(3)} \sin 3\varphi_\theta \right) \theta^3 \right] \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left[\beta_{40}^{(0)} r^4 + \{ \beta_{31c}^{(3)} \cos(\varphi_r - \varphi_\theta) + \beta_{31s}^{(3)} \sin(\varphi_r - \varphi_\theta) \} r^3 \theta + \{ \beta_{22}^{(0)} + \beta_{22c}^{(0)} \cos 2(\varphi_r - \varphi_\theta) \right. \right. \\
& + \left. \beta_{22s}^{(0)} \sin 2(\varphi_r - \varphi_\theta) \} r^2 \theta^2 + \{ \beta_{13c}^{(0)} \cos(\varphi_\theta - \varphi_r) + \beta_{13s}^{(0)} \sin(\varphi_\theta - \varphi_r) \} r \theta^3 + \beta_{04}^{(0)} \theta^4 \right] \\
& + \left[(\beta_{40c}^{(2)} \cos 2\varphi_r + \beta_{40s}^{(2)} \sin 2\varphi_r) r^4 + \{ \beta_{31c}^{(2)} \cos(\varphi_r + \varphi_\theta) + \beta_{31s}^{(2)} \sin(\varphi_r + \varphi_\theta) \} \right. \\
& + \left. \beta_{31c}^{\prime(2)} \cos(3\varphi_r - \varphi_\theta) + \beta_{31s}^{\prime(2)} \sin(3\varphi_r - \varphi_\theta) \} r^3 \theta + \{ \beta_{22c}^{(2)} \cos 2\varphi_r + \beta_{22s}^{(2)} \sin 2\varphi_r \right. \\
& + \left. \beta_{22c}^{\prime(2)} \cos 2\varphi_\theta + \beta_{22s}^{\prime(2)} \sin 2\varphi_\theta \} r^2 \theta^2 + \{ \beta_{13c}^{(2)} \cos(\varphi_\theta + \varphi_r) + \beta_{13s}^{(2)} \sin(\varphi_\theta + \varphi_r) \right. \\
& + \left. \beta_{13c}^{\prime(2)} \cos(3\varphi_\theta - \varphi_r) + \beta_{13s}^{\prime(2)} \sin(3\varphi_\theta - \varphi_r) \} r \theta^3 + (\beta_{04c}^{(2)} \cos 2\varphi_\theta + \beta_{04s}^{(2)} \sin 2\varphi_\theta) \theta^4 \right] \\
& + \left[(\beta_{40c}^{(4)} \cos 4\varphi_r + \beta_{40s}^{(4)} \sin 4\varphi_r) r^4 + \{ \beta_{31c}^{(4)} \cos(3\varphi_r + \varphi_\theta) + \beta_{31s}^{(4)} \sin(3\varphi_r + \varphi_\theta) \} r^3 \theta \right. \\
& + \{ \beta_{22c}^{(4)} \cos 2(\varphi_r + \varphi_\theta) + \beta_{22s}^{(4)} \sin 2(\varphi_r + \varphi_\theta) \} r^2 \theta^2 + \{ \beta_{13c}^{(4)} \cos(3\varphi_\theta + \varphi_r) + \\
& \left. \beta_{13s}^{(4)} \sin(3\varphi_\theta + \varphi_r) \} r \theta^3 + (\beta_{04c}^{(4)} \cos 4\varphi_\theta + \beta_{04s}^{(4)} \sin 4\varphi_\theta) \theta^4 \right] \dots\dots\dots (327)
\end{aligned}$$

となる。 $\varphi_r - \varphi_\theta$ の値は一定であり、たとえば上式で $\varphi_r - \varphi_\theta$, $2\varphi_r - \varphi_\theta$, $3\varphi_r - \varphi_\theta$, $2\varphi_r + \varphi_\theta$, $3\varphi_r + \varphi_\theta$ を含む項は、それぞれ $N(0)$, $N(1)$, $N(2)$, $N(3)$, $N(4)$ の非線形成分である。上式と式(3.23)の係数は同数あり、それらの間には次の関係がある。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{30c}^{(1)} &= (3\varepsilon_{3000} + \varepsilon_{1200}) / 4, & \varepsilon_{30s}^{(1)} &= (3\varepsilon_{0300} + \varepsilon_{2100}) / 4, \\
\varepsilon_{21c}^{(1)} &= (\varepsilon_{2010} + \varepsilon_{0210}) / 2, & \varepsilon_{21s}^{(1)} &= (\varepsilon_{0201} + \varepsilon_{2001}) / 2, \\
\varepsilon_{21c}^{\prime(1)} &= (\varepsilon_{2010} + \varepsilon_{1101} - \varepsilon_{0210}) / 4, & \varepsilon_{21s}^{\prime(1)} &= (\varepsilon_{0201} + \varepsilon_{1110} - \varepsilon_{2001}) / 4, \\
\varepsilon_{12c}^{(1)} &= (\varepsilon_{1020} + \varepsilon_{1002}) / 2, & \varepsilon_{12s}^{(1)} &= (\varepsilon_{0102} + \varepsilon_{0120}) / 2, \\
\varepsilon_{12c}^{\prime(1)} &= (\varepsilon_{1020} + \varepsilon_{0111} - \varepsilon_{1002}) / 4, & \varepsilon_{12s}^{\prime(1)} &= (\varepsilon_{0102} + \varepsilon_{1011} - \varepsilon_{0120}) / 4, \\
\varepsilon_{03c}^{(1)} &= (3\varepsilon_{0030} + \varepsilon_{0012}) / 4, & \varepsilon_{03s}^{(1)} &= (3\varepsilon_{0003} + \varepsilon_{0021}) / 4, \\
\varepsilon_{30c}^{(3)} &= (\varepsilon_{3000} - \varepsilon_{1200}) / 4, & \varepsilon_{30s}^{(3)} &= (-\varepsilon_{0300} + \varepsilon_{2100}) / 4, \\
\varepsilon_{21c}^{(3)} &= (\varepsilon_{2010} - \varepsilon_{1101} - \varepsilon_{0210}) / 4, & \varepsilon_{21s}^{(3)} &= (-\varepsilon_{0201} + \varepsilon_{1110} + \varepsilon_{2001}) / 4, \\
\varepsilon_{12c}^{(3)} &= (\varepsilon_{1020} - \varepsilon_{0111} - \varepsilon_{1002}) / 4, & \varepsilon_{12s}^{(3)} &= (-\varepsilon_{0102} + \varepsilon_{1011} + \varepsilon_{0120}) / 4, \\
\varepsilon_{03c}^{(3)} &= (\varepsilon_{0030} - \varepsilon_{0012}) / 4, & \varepsilon_{03s}^{(3)} &= (-\varepsilon_{0003} + \varepsilon_{0021}) / 4, \\
\beta_{40}^{(0)} &= \{ 3(\beta_{4000} + \beta_{0400}) + \beta_{2200} \} / 8, & \beta_{04}^{(0)} &= \{ 3(\beta_{0040} + \beta_{0004}) + \beta_{0022} \} / 8, \\
\beta_{22}^{(0)} &= (\beta_{2020} + \beta_{0202} + \beta_{2002} + \beta_{0220}) / 4, \\
\beta_{31c}^{(0)} &= \{ 3(\beta_{3010} + \beta_{0301}) + (\beta_{2101} + \beta_{210}) \} / 8, & \beta_{31s}^{(0)} &= \{ -3(\beta_{3001} - \beta_{0310}) + (\beta_{2110} - \beta_{1201}) \} / 8, \\
\beta_{22c}^{(0)} &= (\beta_{2020} + \beta_{0202} - \beta_{2002} - \beta_{0220} + \beta_{1111}) / 8, & \beta_{22s}^{(0)} &= (\beta_{0211} + \beta_{1120} - \beta_{2011} - \beta_{1102}) / 8, \\
\beta_{13c}^{(0)} &= \{ 3(\beta_{1030} + \beta_{1003}) + (\beta_{0121} + \beta_{0112}) \} / 8, & \beta_{13s}^{(0)} &= \{ 3(\beta_{1003} - \beta_{0130}) + (\beta_{1021} - \beta_{0112}) \} / 8, \\
\beta_{40c}^{(2)} &= (\beta_{4000} - \beta_{0400}) / 2, & \beta_{40s}^{(2)} &= (\beta_{3100} + \beta_{1300}) / 4, \\
\beta_{31c}^{(2)} &= \{ 3(\beta_{3010} - \beta_{0301}) - (\beta_{2101} - \beta_{210}) \} / 8, & \beta_{31s}^{(2)} &= \{ 3(\beta_{3001} + \beta_{0310}) + (\beta_{2110} + \beta_{201}) \} / 8, \\
\beta_{31c}^{\prime(2)} &= (\beta_{3010} - \beta_{0301} + \beta_{2101} - \beta_{210}) / 8, & \beta_{31s}^{\prime(2)} &= (-\beta_{3001} - \beta_{0310} + \beta_{2110} + \beta_{1201}) / 8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{22c}^{(2)} &= (\beta_{2020} - \beta_{2022} + \beta_{2002} - \beta_{20220}) / 4, & \beta_{22s}^{(2)} &= (\beta_{1120} + \beta_{1102}) / 4, \\
\beta_{22c}'^{(2)} &= (\beta_{2020} - \beta_{2022} - \beta_{2002} + \beta_{20220}) / 4, & \beta_{22s}'^{(2)} &= (\beta_{2011} + \beta_{2011}) / 4, \\
\beta_{13c}^{(2)} &= \{3(\beta_{1030} - \beta_{1032}) - (\beta_{0121} - \beta_{0122})\} / 8, & \beta_{13s}^{(2)} &= \{3(\beta_{0130} + \beta_{1003}) + (\beta_{1021} + \beta_{0112})\} / 8, \\
\beta_{13c}'^{(2)} &= (\beta_{1030} - \beta_{1032} + \beta_{0121} - \beta_{0122}) / 8, & \beta_{13s}'^{(2)} &= (-\beta_{0130} - \beta_{1003} + \beta_{0121} + \beta_{0112}) / 8, \\
\beta_{04c}^{(2)} &= (\beta_{0040} - \beta_{0004}) / 2, & \beta_{04s}^{(2)} &= (\beta_{0031} + \beta_{0013}) / 4, \\
\beta_{40c}^{(4)} &= (\beta_{4000} + \beta_{0400} - \beta_{2200}) / 8, & \beta_{40s}^{(4)} &= (\beta_{3100} - \beta_{1300}) / 8, \\
\beta_{31c}^{(4)} &= (\beta_{3010} + \beta_{0301} - \beta_{2101} - \beta_{1210}) / 8, & \beta_{31s}^{(4)} &= (\beta_{3001} - \beta_{0310} + \beta_{2110} - \beta_{1201}) / 8, \\
\beta_{22c}^{(4)} &= (\beta_{2020} + \beta_{0202} - \beta_{2002} - \beta_{0220} - \beta_{1111}) / 8, & \beta_{22s}^{(4)} &= (\beta_{2011} + \beta_{1120} - \beta_{1102} - \beta_{0211}) / 8, \\
\beta_{13c}^{(4)} &= (\beta_{1030} + \beta_{0103} - \beta_{0121} - \beta_{0122}) / 8, & \beta_{13s}^{(4)} &= (\beta_{0130} - \beta_{1003} + \beta_{1021} - \beta_{0112}) / 8, \\
\beta_{04c}^{(4)} &= (\beta_{0040} + \beta_{0004} - \beta_{0022}) / 8, & \beta_{04s}^{(4)} &= (\beta_{0031} - \beta_{0013}) / 8, \\
& & & \dots\dots\dots (3.28)
\end{aligned}$$

上式の肩の()の中の数字は、方向角が 2π 変わる間のばね特性の増減の回数であり $N(n)$ の n を示している。

3.3 発生可能な各種非線形強制振動の分類

非対称非線形項に起因する和差調波振動は、振動数の絶対値に関する和形の振動のみが発生可能であることはすでに山本により証明されている⁽²⁶⁾。対称非線形項に起因する振動も後述するように和形のみが発生可能であることを、文献(26)とはほぼ同じ方法で証明しよう。このことと、固有振動数 ρ_1 、 ρ_2 は正で前向き歳差運動を、 ρ_3 、 ρ_4 は負で後向き歳差運動を表わしていることから、発生可能な非線形強制振動は表3.1のように分類される。表中で $(i_p < 1)$ などの表示は、 $I_p / I = i_p < 1$ の場合にのみ発生可能であることを意味する。この制限のない振動は、回転軸、回転体の寸法いかんにかかわらず常に発生の可能性がある。また、必要な非線形成分の欄に関しては後に説明する。表3.1には、2自由度系の場合も示してある。

3.4 非線形ばね特性により発生する各種の非線形強制振動

式(3.18)の右辺に式(3.25)を代入したものに式(3.20)、(3.21)を代入し、振動数 ω_s の項をまとめると

$$(C_s - C'_s) \cos(\omega_s t + \delta_s) + (S_s - S'_s) \sin(\omega_s t + \delta_s)$$

の形になり、振動数 ω_s の項の係数を零とすることにより次式

$$\left. \begin{aligned} C_s &= C'_s, \quad S_s = S'_s \\ (s &= i, j, k, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.29)$$

が得られる。上式から共振曲線，背骨曲線，振動数，位相角に関する式が導びかれる。式(3.29)中の C_s, S_s は前節で分類した振動の種類に関係なく，すなわち表3.1中の関係式の成立に無関係に，常に派生する ω_s の項の係数の合計で，非対称非線形項の係数は含まれない。 C_s 中の係数は β_{abcd} よりなるが，これらはすべて式(3.28)中の方向性のない非線形特性 $N(0)$ の係数のみで整理される。すなわち若干の計算から次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} C_s &= [(\omega_s^2 - \rho_s^2) - n_s \{ 2(\rho_{si}^{(0)} R_i^2 + \rho_{sj}^{(0)} R_j^2 + \rho_{sk}^{(0)} R_k^2) - \rho_{ss}^{(0)} R_s^2 + (\beta^{(0)} F^2)_s \}] R_s \\ S_s &= 2 n_s c_s \omega_s R_s \\ (s &= i, j, k, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.30)$$

ここで，

$$\left. \begin{aligned} \rho_{si}^{(0)} &= 2 \{ 4\beta_{40}^{(0)} + 2(\kappa_i + \kappa_s) \beta_{31c}^{(0)} + (\kappa_i + \kappa_s)^2 \beta_{22}^{(0)} + 4\kappa_i \kappa_s \beta_{22c}^{(0)} \\ &\quad + 2\kappa_i \kappa_s (\kappa_i + \kappa_s) \beta_{13c}^{(0)} + 4\kappa_i^2 \kappa_s^2 \beta_{04}^{(0)} \} / \kappa_s \\ (\beta^{(0)} F^2)_s &= 4(4\beta_{40}^{(0)} / \kappa_s + 2\beta_{31c}^{(0)} + \kappa_s \beta_{22}^{(0)}) (F_1^2 + F_2^2) + 8(\beta_{31c}^{(0)} / \kappa_s + \beta_{22}^{(0)} \\ &\quad + 2\beta_{22c}^{(0)} + \kappa_s \beta_{13c}^{(0)}) (F_1 F_3 + F_2 F_4) + 4(\beta_{22}^{(0)} / \kappa_s + 2\beta_{13c}^{(0)} + 4\kappa_s \beta_{04}^{(0)}) (F_3^2 + F_4^2) \\ &\quad + 8(\beta_{31c}^{(0)} / \kappa_s + 2\beta_{22c}^{(0)} - \kappa_s \beta_{13c}^{(0)}) (F_2 F_3 - F_1 F_4) \\ c_s &= c_{11} / c_s + 2c_{12} + \kappa_s c_{22} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.31)$$

式(3.30)，(3.31)中の $(\beta^{(0)} F^2)_s$ は $N(0)$ の非線形項の係数をもつ調和振動の振幅 F_1, F_2, F_3, F_4 の二乗項よりなる式を意味する表示である。

上記のように， C_s 中に方向性をもたぬ非線形成分 $N(0)$ の係数のみを含むことが，すべての非線形強制振動の共振曲線，背骨曲線の漸硬ばね形，漸軟ばね形の決定が，方向性のない対称非線形項のみに支配される理由である。

式(3.29)中の C'_s, S'_s は，表3.1中の関係式の成立によりはじめて派生する振動数 ω_s の項の係数の合計であり，振動の種類によりその内容は異なる。 C'_s, S'_s 中の係数は $\varepsilon_{abcd}, \beta_{abcd}$ であるが，後述するようにこれらは整理されて $N(0), N(1), N(2), N(3), N(4)$ の非線形成分中の一種類の係数のみで表示されることは注目すべきである。

同時に発生する円振動数 ω 以外の成分振動が3個なら式(3.30)をそのまま，2個なら $R_k = 0$ とおき，1個のときは $R_j = R_k = 0$ とおけば，それぞれの場合の C_s が得られる。 C'_s, S'_s も若干の計算により求まり，以下に各種の振動における式(3.29)の具体的内容，共振曲線，背骨曲線の式を示す。

(I) 対称非線形ばね特性に起因する強制ふれ回り振動

A 1/3 次分数調波振動

(a) $\omega = 3\omega_i \div 3\rho_i$ ($i=1, 2$) の振動

$$\left. \begin{aligned} & (1/9 \cdot \omega^2 - \rho_i^2) / n_i - \{ \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 + (\beta^{(0)} F^2)_i \} \\ & = R_i \{ (\beta^{(2)} F)_{ii} \cos 3\delta_i + (\beta^{(2)} F)'_{ii} \sin 3\delta_i \} / K_i \\ & 2/3 \cdot c_i \omega = R_i \{ (\beta^{(2)} F)_{ii} \sin 3\delta_i - (\beta^{(2)} F)'_{ii} \cos 3\delta_i \} / K_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.32)$$

共振曲線，背骨曲線はそれぞれ次式となる。

$$\left[(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_i^2) / n_i - \{ \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 + (\beta^{(0)} F^2)_i \} \right]^2 + 4/9 \cdot c_i^2 \omega^2 = R_i^2 \{ (\beta^{(2)} F)_{ii}^2 + (\beta^{(2)} F)'_{ii}^2 \} / K_i^2 \dots\dots\dots (3.33)$$

$$(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_i^2) / n_i - \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 = 0 \dots\dots\dots (3.34)$$

式(3.9)の2自由度系では次式になる ($\omega = 3\omega_f \div 3\rho_f$ の場合)。

$$\left. \begin{aligned} & (2 - 3i_\rho)(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_f^2) - 8\beta^{(0)}(R_f^2 + 2F_0^2) \\ & = 6F_0 R_f (\beta_c^{(2)} \cos 3\delta_f + \beta_s^{(2)} \sin 3\delta_f) \\ & 2/3 \cdot c\omega = 6F_0 R_f (\beta_c^{(2)} \sin 3\delta_f - \beta_s^{(2)} \cos 3\delta_f) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.32a)$$

$$\{ (2 - 3i_\rho)(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_f^2) - 8\beta^{(0)}(R_f^2 + 2F_0^2) \}^2 + 4/9 \cdot c^2 \omega^2 = 36\beta^{(2)^2} F_0^2 R_f^2 \dots\dots (3.33a)$$

$$(2 - 3i_\rho)(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_f^2) - 8\beta^{(0)} R_f^2 = 0 \dots\dots\dots (3.34a)$$

(b) $\omega = -3\omega_k \div -3\rho_k$ ($k=3, 4$) の振動

$$\left. \begin{aligned} & (1/9 \cdot \omega^2 - \rho_k^2) / n_k - \{ \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)} F^2)_k \} \\ & = R_k \{ (\beta^{(4)} F)_{kk} \cos 3\delta_k + (\beta^{(4)} F)'_{kk} \sin 3\delta_k \} / K_k \\ & 2/3 \cdot c_k \omega = R_k \{ -(\beta^{(4)} F)_{kk} \sin 3\delta_k + (\beta^{(4)} F)'_{kk} \cos 3\delta_k \} / K_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.35)$$

共振曲線，背骨曲線はそれぞれ次式となる。

$$\left[(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_k^2) / n_k - \{ \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)} F^2)_k \} \right]^2 + 4/9 \cdot c_k^2 \omega^2 = R_k^2 \{ (\beta^{(4)} F)_{kk}^2 + (\beta^{(4)} F)'_{kk}^2 \} / K_k^2 \dots\dots\dots (3.36)$$

$$(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_k^2) / n_k - \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 = 0 \dots\dots\dots (3.37)$$

式(3.9)の2自由度系では次式になる ($\omega = -3\omega_b \div -3\rho_b$ の場合)。

$$\left. \begin{aligned} & (2 + 3i_\rho)(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_b^2) - 8\beta^{(0)}(R_b^2 + 2F_0^2) \\ & = 24F_0 R_b (\beta_c^{(4)} \cos 3\delta_b - \beta_s^{(4)} \sin 3\delta_b) \\ & 2/3 \cdot c\omega = 24F_0 R_b (\beta_c^{(4)} \sin 3\delta_b + \beta_s^{(4)} \cos 3\delta_b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.35a)$$

$$\{ (2 + 3i_\rho)(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_b^2) - 8\beta^{(0)}(R_b^2 + 2F_0^2) \}^2 + 4/9 \cdot c^2 \omega^2 = 576\beta^{(4)^2} F_0^2 R_b^2 \dots\dots (3.36a)$$

$$(2 + 3i_\rho)(1/9 \cdot \omega^2 - \rho_b^2) - 8\beta^{(0)} R_b^2 = 0 \dots\dots\dots (3.37a)$$

B 和差調波振動 (2 個の振動の場合)

(c) $\omega = 2\omega_i + \omega_j \doteq 2\rho_i + \rho_j$ ($i, j=1, 2, \quad i \neq j$) の振動

$$\begin{aligned}
 & \left[(\omega_i^2 - \rho_i^2) / n_i - \{ \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 + 2 \rho_{ij}^{(0)} R_j^2 + (\beta^{(0)} F^2)_i \} \right] R_i \\
 & \quad = 2 R_i R_j \{ (\beta^{(2)} F)_{ij} \cos(2\delta_i + \delta_j) + (\beta^{(2)} F)'_{ij} \sin(2\delta_i + \delta_j) \} / K_i \\
 2c_i \omega_i R_i & = 2 R_i R_j \{ (\beta^{(2)} F)_{ij} \sin(2\delta_i + \delta_j) - (\beta^{(2)} F)'_{ij} \cos(2\delta_i + \delta_j) \} / K_i \\
 & \left[(\omega_j^2 - \rho_j^2) / n_j - \{ \rho_{jj}^{(0)} R_j^2 + 2 \rho_{ji}^{(0)} R_i^2 + (\beta^{(0)} F^2)_j \} \right] R_j \\
 & \quad = R_i^2 \{ (\beta^{(2)} F)_{ij} \cos(2\delta_i + \delta_j) + (\beta^{(2)} F)'_{ij} \sin(2\delta_i + \delta_j) \} / K_j \\
 2c_j \omega_j R_j & = R_i^2 \{ (\beta^{(2)} F)_{ij} \sin(2\delta_i + \delta_j) - (\beta^{(2)} F)'_{ij} \cos(2\delta_i + \delta_j) \} / K_j
 \end{aligned}
 \tag{338}$$

(d) $\omega = 2\omega_i - \omega_k \doteq 2\rho_i - \rho_k$ ($i=1, 2 \quad ; \quad k=3, 4$) の振動

$$\begin{aligned}
 & \left[(\omega_i^2 - \rho_i^2) / n_i - \{ \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 + 2 \rho_{ik}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)} F^2)_i \} \right] R_i \\
 & \quad = 2 R_i R_k \{ (\beta^{(0)} F)_{ik} \cos(2\delta_i - \delta_k) - (\beta^{(0)} F)'_{ik} \sin(2\delta_i - \delta_k) \} / K_i \\
 2c_i \omega_i R_i & = 2 R_i R_k \{ (\beta^{(0)} F)_{ik} \sin(2\delta_i - \delta_k) + (\beta^{(0)} F)'_{ik} \cos(2\delta_i - \delta_k) \} / K_i \\
 & \left[(\omega_k^2 - \rho_k^2) / n_k - \{ \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 + 2 \rho_{ki}^{(0)} R_i^2 + (\beta^{(0)} F^2)_k \} \right] R_k \\
 & \quad = R_i^2 \{ (\beta^{(0)} F)_{ik} \cos(2\delta_i - \delta_k) - (\beta^{(0)} F)'_{ik} \sin(2\delta_i - \delta_k) \} / K_k \\
 2c_k \omega_k R_k & = R_i^2 \{ -(\beta^{(0)} F)_{ik} \sin(2\delta_i - \delta_k) - (\beta^{(0)} F)'_{ik} \cos(2\delta_i - \delta_k) \} / K_k
 \end{aligned}
 \tag{339}$$

式 (3.9) の 2 自由度系では次式になる ($\omega = 2\omega_f - \omega_b \doteq 2\rho_f - \rho_b$ の場合)

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (2 - i_\rho) / (1 + i_\rho) \cdot (\omega_f^2 - \rho_f^2) - 8 \beta^{(0)} (R_f^2 + 2R_b^2 + 2F_0^2) \right\} R_f \\
 & \quad = 16 \beta^{(0)} F_0 R_f R_b \cos(2\delta_f - \delta_b) \\
 2c \omega_f R_f & = -16 \beta^{(0)} F_0 R_f R_b \sin(2\delta_f - \delta_b) \\
 & \left\{ (2 - i_\rho) / (1 - 2i_\rho) \cdot (\omega_b^2 - \rho_b^2) - 8 \beta^{(0)} (R_b^2 + 2R_f^2 + 2F_0^2) \right\} R_b \\
 & \quad = 8 \beta^{(0)} F_0 R_f^2 \cos(2\delta_f - \delta_b) \\
 2c \omega_b R_b & = 8 \beta^{(0)} F_0 R_f^2 \sin(2\delta_f - \delta_b)
 \end{aligned}
 \tag{339a}$$

(e) $\omega = \omega_i - 2\omega_k \doteq \rho_i - 2\rho_k$ ($i=1, 2 \quad ; \quad k=3, 4$) の振動

$$\begin{aligned}
 & \left[(\omega_i^2 - \rho_i^2) / n_i - \{ \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 + 2 \rho_{ik}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)} F^2)_i \} \right] R_i \\
 & \quad = R_k^2 \{ (\beta^{(2)} F)_{ik} \cos(\delta_i - 2\delta_k) - (\beta^{(2)} F)'_{ik} \sin(\delta_i - 2\delta_k) \} / K_i \\
 2c_i \omega_i R_i & = R_k^2 \{ (\beta^{(2)} F)_{ik} \sin(\delta_i - 2\delta_k) + (\beta^{(2)} F)'_{ik} \cos(\delta_i - 2\delta_k) \} / K_i \\
 & \left[(\omega_k^2 - \rho_k^2) / n_k - \{ \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 + 2 \rho_{ki}^{(0)} R_i^2 + (\beta^{(0)} F^2)_k \} \right] R_k \\
 & \quad = 2 R_i R_k \{ (\beta^{(2)} F)_{ik} \cos(\delta_i - 2\delta_k) - (\beta^{(2)} F)'_{ik} \sin(\delta_i - 2\delta_k) \} / K_k
 \end{aligned}$$

$$2c_k \omega_k R_k = 2R_i R_k \left\{ -(\beta^{(2)}F)''_{i k k} \sin(\delta_i - 2\delta_k) - (\beta^{(2)}F)'_{i k k} \cos(\delta_i - 2\delta_k) \right\} / \kappa_k \quad (3.40)$$

式(3.9)の2自由度系では次式になる ($\omega = \omega_f - 2\omega_b \doteq \rho_f - 2\rho_b$ の場合)。

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ (2+i_\rho) / (1+2i_\rho) \cdot (\omega_f^2 - \rho_f^2) - 8\beta^{(0)}(R_f^2 + 2R_b^2 + 2F_0^2) \right\} R_f \\ & \quad = 6F_0 R_b^2 \left\{ \beta_c^{(2)} \cos(\delta_f - 2\delta_b) + \beta_s^{(2)} \sin(\delta_f - 2\delta_b) \right\} \\ 2c\omega_f R_f & = 6F_0 R_b^2 \left\{ -\beta_c^{(2)} \sin(\delta_f - 2\delta_b) + \beta_s^{(2)} \cos(\delta_f - 2\delta_b) \right\} \\ & \left\{ (2+i_\rho) / (1-i_\rho) \cdot (\omega_b^2 - \rho_b^2) - 8\beta^{(0)}(R_b^2 + 2R_f^2 + 2F_0^2) \right\} R_b \\ & \quad = 12F_0 R_f R_b \left\{ \beta_c^{(2)} \cos(\delta_f - 2\delta_b) + \beta_s^{(2)} \sin(\delta_f - 2\delta_b) \right\} \\ 2c\omega_b R_b & = 12F_0 R_f R_b \left\{ \beta_c^{(2)} \sin(\delta_f - 2\delta_b) - \beta_s^{(2)} \cos(\delta_f - 2\delta_b) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.40a)$$

(f) $\omega = -2\omega_k - \omega_l \doteq -2\rho_k - \rho_l$ ($k, l = 3, 4, \quad k \neq l$) の振動

$$\left. \begin{aligned} & \left[(\omega_k^2 - \rho_k^2) / n_k - \left\{ \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 + 2\rho_{kl}^{(0)} R_l^2 + (\beta^{(0)}F^2)_k \right\} \right] R_k \\ & \quad = 2R_k R_l \left\{ (\beta^{(4)}F)_{kl} \cos(2\delta_k + \delta_l) + (\beta^{(4)}F)''_{kl} \sin(2\delta_k + \delta_l) \right\} / \kappa_k \\ 2c_k \omega_k R_k & = 2R_k R_l \left\{ (\beta^{(4)}F)_{kl} \sin(2\delta_k + \delta_l) - (\beta^{(4)}F)'_{kl} \cos(2\delta_k + \delta_l) \right\} / \kappa_k \\ & \left[(\omega_l^2 - \rho_l^2) / n_l - \left\{ \rho_{ll}^{(0)} R_l^2 + 2\rho_{lk}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)}F^2)_l \right\} \right] R_l \\ & \quad = R_k^2 \left\{ (\beta^{(4)}F)_{kl} \cos(2\delta_k + \delta_l) + (\beta^{(4)}F)'_{kl} \sin(2\delta_k + \delta_l) \right\} / \kappa_l \\ 2c_l \omega_l R_l & = R_k^2 \left\{ (\beta^{(4)}F)_{kl} \sin(2\delta_k + \delta_l) - (\beta^{(4)}F)'_{kl} \cos(2\delta_k + \delta_l) \right\} / \kappa_l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.41)$$

C 和差調波振動 (3個の振動の場合)

(g) $\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_k \doteq \rho_1 + \rho_2 - \rho_k$ ($k = 3, 4$) の振動

$$\left. \begin{aligned} & \left[(\omega_1^2 - \rho_1^2) / n_1 - \left\{ \rho_{11}^{(0)} R_1^2 + 2\rho_{12}^{(0)} R_2^2 + 2\rho_{1k}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)}F^2)_1 \right\} \right] R_1 \\ & \quad = 2R_2 R_k \left\{ (\beta^{(0)}F)_{12k} \cos(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) - (\beta^{(0)}F)'_{12k} \sin(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) \right\} / \kappa_1 \\ 2c_1 \omega_1 R_1 & = 2R_2 R_k \left\{ (\beta^{(0)}F)_{12k} \sin(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) + (\beta^{(0)}F)'_{12k} \cos(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) \right\} / \kappa_1 \\ & \left[(\omega_2^2 - \rho_2^2) / n_2 - \left\{ \rho_{22}^{(0)} R_2^2 + 2\rho_{21}^{(0)} R_1^2 + 2\rho_{2k}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)}F^2)_2 \right\} \right] R_2 \\ & \quad = 2R_1 R_k \left\{ (\beta^{(0)}F)_{12k} \cos(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) - (\beta^{(0)}F)'_{12k} \sin(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) \right\} / \kappa_2 \\ 2c_2 \omega_2 R_2 & = 2R_1 R_k \left\{ (\beta^{(0)}F)_{12k} \sin(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) + (\beta^{(0)}F)'_{12k} \cos(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) \right\} / \kappa_2 \\ & \left[(\omega_k^2 - \rho_k^2) / n_k - \left\{ \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 + 2\rho_{k1}^{(0)} R_1^2 + 2\rho_{k2}^{(0)} R_2^2 + (\beta^{(0)}F^2)_k \right\} \right] R_k \\ & \quad = 2R_1 R_2 \left\{ (\beta^{(0)}F)_{12k} \cos(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) - (\beta^{(0)}F)'_{12k} \sin(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) \right\} / \kappa_k \\ 2c_k \omega_k R_k & = 2R_1 R_2 \left\{ -(\beta^{(0)}F)_{12k} \sin(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) - (\beta^{(0)}F)'_{12k} \cos(\delta_1 + \delta_2 - \delta_k) \right\} / \kappa_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.42)$$

(h) $\omega = \omega_i - \omega_3 - \omega_4 \doteq \rho_i - \rho_3 - \rho_4$ ($i = 1, 2$) の振動

$$\begin{aligned}
& [(\omega_i^2 - \rho_i^2) / n_i - \{ \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 + 2\rho_{i3}^{(0)} R_3^2 + 2\rho_{i4}^{(0)} R_4^2 + (\beta^{(0)} F^2)_i \}] R_i \\
& \quad = 2R_3 R_4 \{ (\beta^{(2)} F)_{i34} \cos(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) - (\beta^{(2)} F)'_{i34} \sin(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) \} / \mathbf{K}_i \\
2c_i \omega_i R_i & = 2R_3 R_4 \{ (\beta^{(2)} F)_{i34} \sin(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) + (\beta^{(2)} F)'_{i34} \cos(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) \} / \mathbf{K}_i \\
& [(\omega_3^2 - \rho_3^2) / n_3 - \{ \rho_{33}^{(0)} R_3^2 + 2\rho_{3i}^{(0)} R_i^2 + 2\rho_{34}^{(0)} R_4^2 + (\beta^{(0)} F^2)_3 \}] R_3 \\
& \quad = 2R_i R_4 \{ (\beta^{(2)} F)_{i34} \cos(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) - (\beta^{(2)} F)'_{i34} \sin(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) \} / \mathbf{K}_3 \\
2c_3 \omega_3 R_3 & = 2R_i R_4 \{ -(\beta^{(2)} F)_{i34} \sin(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) - (\beta^{(2)} F)'_{i34} \cos(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) \} / \mathbf{K}_3 \\
& [(\omega_4^2 - \rho_4^2) / n_4 - \{ \rho_{44}^{(0)} R_4^2 + 2\rho_{4i}^{(0)} R_i^2 + 2\rho_{43}^{(0)} R_3^2 + (\beta^{(0)} F^2)_4 \}] R_4 \\
& \quad = 2R_i R_3 \{ (\beta^{(2)} F)_{i34} \cos(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) - (\beta^{(2)} F)'_{i34} \sin(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) \} / \mathbf{K}_4 \\
2c_4 \omega_4 R_4 & = 2R_i R_3 \{ -(\beta^{(2)} F)_{i34} \sin(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) - (\beta^{(2)} F)'_{i34} \cos(\delta_i - \delta_3 - \delta_4) \} / \mathbf{K}_4
\end{aligned} \tag{3.43}$$

式(3.32) ~ (3.43) 中の左辺の係数 n_i , $\rho_{ij}^{(0)}$, $(\beta^{(0)} F^2)_i$ などは, それぞれ式(3.19),

(3.31) で与えられており, また右辺中の諸係数は次のようである。

$$\begin{aligned}
(\beta^{(2)} F)_{ij} & = \xi_{ij}^{(2)} F_1 - \eta_{ij}^{(2)} F_2 + \zeta_{ij}^{(2)} F_3 - \mu_{ij}^{(2)} F_4 \\
(\beta^{(2)} F)'_{ij} & = \eta_{ij}^{(2)} F_1 + \xi_{ij}^{(2)} F_2 + \mu_{ij}^{(2)} F_3 + \zeta_{ij}^{(2)} F_4 \\
\xi_{ij}^{(2)} & = 2 \{ 3\beta_{40c}^{(2)} + (2\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \beta_{31c}^{(2)} + \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_i + 2\mathbf{K}_j) \beta_{22c}^{(2)} + 3\mathbf{K}_i^2 \mathbf{K}_j \beta_{13c}^{(2)} \} \\
\eta_{ij}^{(2)} & = 2 \{ 3\beta_{40s}^{(2)} + (2\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \beta_{31s}^{(2)} + \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_i + 2\mathbf{K}_j) \beta_{22s}^{(2)} + 3\mathbf{K}_i^2 \mathbf{K}_j \beta_{13s}^{(2)} \} \\
\zeta_{ij}^{(2)} & = 2 \{ 3\beta_{31c}^{(2)} + (2\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \beta_{22c}^{(2)} + \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_i + 2\mathbf{K}_j) \beta_{13c}^{(2)} + 3\mathbf{K}_i^2 \mathbf{K}_j \beta_{04c}^{(2)} \} \\
\mu_{ij}^{(2)} & = 2 \{ 3\beta_{31s}^{(2)} + (2\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \beta_{22s}^{(2)} + \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_i + 2\mathbf{K}_j) \beta_{13s}^{(2)} + 3\mathbf{K}_i^2 \mathbf{K}_j \beta_{04s}^{(2)} \}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

($i, j = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
(\beta^{(4)} F)_{kl} & = \xi_{kl}^{(4)} F_1 + \eta_{kl}^{(4)} F_2 + \zeta_{kl}^{(4)} F_3 + \mu_{kl}^{(4)} F_4 \\
(\beta^{(4)} F)'_{kl} & = \eta_{kl}^{(4)} F_1 - \xi_{kl}^{(4)} F_2 + \mu_{kl}^{(4)} F_3 - \zeta_{kl}^{(4)} F_4 \\
\xi_{kl}^{(4)} & = 2 \{ 12\beta_{10c}^{(4)} + 3(2\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_l) \beta_{31c}^{(4)} + 2\mathbf{K}_k (\mathbf{K}_k + 2\mathbf{K}_l) \beta_{22c}^{(4)} + 3\mathbf{K}_k^2 \mathbf{K}_l \beta_{13c}^{(4)} \} \\
\eta_{kl}^{(4)} & = 2 \{ 12\beta_{10s}^{(4)} + 3(2\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_l) \beta_{31s}^{(4)} + 2\mathbf{K}_k (\mathbf{K}_k + 2\mathbf{K}_l) \beta_{22s}^{(4)} + 3\mathbf{K}_k^2 \mathbf{K}_l \beta_{13s}^{(4)} \} \\
\zeta_{kl}^{(4)} & = 2 \{ 3\beta_{31c}^{(4)} + 2(2\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_l) \beta_{22c}^{(4)} + 3\mathbf{K}_k (\mathbf{K}_k + 2\mathbf{K}_l) \beta_{13c}^{(4)} + 12\mathbf{K}_k^2 \mathbf{K}_l \beta_{04c}^{(4)} \} \\
\mu_{kl}^{(4)} & = 2 \{ 3\beta_{31s}^{(4)} + 2(2\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_l) \beta_{22s}^{(4)} + 3\mathbf{K}_k (\mathbf{K}_k + 2\mathbf{K}_l) \beta_{13s}^{(4)} + 12\mathbf{K}_k^2 \mathbf{K}_l \beta_{04s}^{(4)} \}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

($k, l = 3, 4$)

$$\begin{aligned}
(\beta^{(0)} F)_{ijk} & = \xi_{ijk}^{(0)} F_1 + \eta_{ijk}^{(0)} F_2 + \zeta_{ijk}^{(0)} F_3 - \mu_{ijk}^{(0)} F_4 \\
(\beta^{(0)} F)'_{ijk} & = \eta_{ijk}^{(0)} F_1 - \xi_{ijk}^{(0)} F_2 - \mu_{ijk}^{(0)} F_3 - \zeta_{ijk}^{(0)} F_4 \\
\xi_{ijk}^{(0)} & = 2 \{ 4\beta_{40}^{(0)} + (\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j + \mathbf{K}_k) \beta_{31c}^{(0)} + \mathbf{K}_k (\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \beta_{22c}^{(0)} + 2\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j \beta_{22c}^{(0)} + \mathbf{K}_i \mathbf{K}_j \mathbf{K}_k \beta_{13c}^{(0)} \} \\
\eta_{ijk}^{(0)} & = 2 \{ (\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j - \mathbf{K}_k) \beta_{31s}^{(0)} + 2\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j \beta_{22s}^{(0)} - \mathbf{K}_i \mathbf{K}_j \mathbf{K}_k \beta_{13s}^{(0)} \}
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{ij\kappa}^{(0)} &= 2 \{ \beta_{31c}^{(0)} + (\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \beta_{22}^{(0)} + 2\mathbf{K}_\kappa \beta_{22c}^{(0)} + (\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j + \mathbf{K}_j \mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_i) \beta_{3c}^{(0)} + 4\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j \mathbf{K}_\kappa \beta_{04}^{(0)} \} \\ \mu_{ij\kappa}^{(0)} &= 2 \{ \beta_{31s}^{(0)} + 2\mathbf{K}_\kappa \beta_{22s}^{(0)} + (\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j - \mathbf{K}_j \mathbf{K}_\kappa - \mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_i) \beta_{3s}^{(0)} \} \\ & \quad (i, j = 1, 2 : \kappa = 3, 4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.46)$$

$$\left. \begin{aligned} (\beta^{(2)} F)_{i\kappa l} &= \xi_{i\kappa l}^{(2)} F_1 + \eta_{i\kappa l}^{(2)} F_2 + \zeta_{i\kappa l}^{(2)} F_3 + \mu_{i\kappa l}^{(2)} F_4 \\ (\beta^{(2)} F)_{i\kappa l} &= \eta_{i\kappa l}^{(2)} F_1 - \xi_{i\kappa l}^{(2)} F_2 + \mu_{i\kappa l}^{(2)} F_3 - \zeta_{i\kappa l}^{(2)} F_4 \\ \xi_{i\kappa l}^{(2)} &= 2 \{ 3\beta_{31c}^{(2)} + (\mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_l) \beta_{31c}^{(2)} + 3\mathbf{K}_i \beta_{31c}^{(2)} + \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_l) \beta_{22c}^{(2)} + \mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_l \beta_{22c}^{(2)} + \mathbf{K}_i \mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_l \beta_{3c}^{(2)} \} \\ \eta_{i\kappa l}^{(2)} &= 2 \{ 3\beta_{31s}^{(2)} + (\mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_l) \beta_{31s}^{(2)} + 3\mathbf{K}_i \beta_{31s}^{(2)} + \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_l) \beta_{22s}^{(2)} + \mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_l \beta_{22s}^{(2)} + \mathbf{K}_i \mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_l \beta_{3s}^{(2)} \} \\ \zeta_{i\kappa l}^{(2)} &= 2 \{ \beta_{31c}^{(2)} + \mathbf{K}_i \beta_{22c}^{(2)} + (\mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_l) \beta_{22c}^{(2)} + \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_l) \beta_{3c}^{(2)} + 3\mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_l \beta_{3c}^{(2)} + 3\mathbf{K}_i \mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_l \beta_{04c}^{(2)} \} \\ \mu_{i\kappa l}^{(2)} &= 2 \{ \beta_{31s}^{(2)} + \mathbf{K}_i \beta_{22s}^{(2)} + (\mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_l) \beta_{22s}^{(2)} + \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_l) \beta_{3s}^{(2)} + 3\mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_l \beta_{3s}^{(2)} + 3\mathbf{K}_i \mathbf{K}_\kappa \mathbf{K}_l \beta_{04s}^{(2)} \} \\ & \quad (i = 1, 2 : \kappa, l = 3, 4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.47)$$

式(3.32)～(3.47)で、 $(\beta^{(n)} F)_{ij}$ などの表示は、 $N(n)$ の非線形成分を係数とする調和振動の振幅 F_1, F_2, F_3, F_4 の一次項よりなる式を意味する。式(3.44)は式(3.32)，(3.33)，(3.38)に、式(3.45)は式(3.35)，(3.36)，(3.41)に、式(3.46)は式(3.39)，(3.42)に、式(3.47)は式(3.40)，(3.43)に適用される。

和差調波振動の振幅，振動数，位相角を式(3.38)～(3.43)から導くことは，文献(25)，(29)，(30)，(31)で述べられている方法で行なえるので省略する。式(3.32)～(3.43)はこれらの文献中の式と同じ形であり，その共振曲線の形も文献(30)，(31)に示されているものと同じである。

式(3.39)，(3.42)の振動は $N(0)$ が，式(3.32)，(3.33)，(3.38)，(3.40)，(3.43)の振動は $N(0)$ と $N(2)$ の両者が，式(3.35)，(3.36)，(3.41)の振動は $N(0)$ と $N(4)$ の両者が存在しないと発生し得ぬことも容易に証明できる。

ここで対称非線形項に起因するふれ回り運動様式の和差調波振動では，振動数の絶対値の和形の振動のみが発生可能であることを証明する。基準座標 X_s で表示された散逸関数

$$D = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^4 c_{rs} \dot{X}_r \dot{X}_s \dots\dots\dots (3.48)$$

は \dot{X}_s に関する正の二次形式であるから

$$c_{ss} > 0 \quad (s = 1, 2, 3, 4) \dots\dots\dots (3.49)$$

となる。変換式(3.17)を基準座標で表わされた運動方程式(3.18)の右辺中の減衰項に代入し，

\dot{X}_s に関する項を取り出すと $-2n_s c_s \dot{X}_s$ となる。一方、 $-\partial D/\partial \dot{X}_s$ の \dot{X}_s に関する項は $-c_{ss} \dot{X}_s$ であるから、両者を等しくおくと次式が成立する。

$$c_{ss} = 2n_s c_s \quad \dots\dots\dots (3.50)$$

たとえば $\omega \doteq 2\rho_i + \rho_j$ の形の振動の場合、式(3.38)の第2, 4式および式(3.50)を用いて次式が成り立つ。

$$2 \frac{R_j^2}{R_i^2} = \frac{K_i c_i \omega_i}{K_j c_j \omega_j} = \left(\frac{K_i n_j c_{ii}}{K_j n_i c_{jj}} \right) \frac{\omega_i}{\omega_j} \quad \dots\dots\dots (3.51)$$

$\omega \doteq 2\rho_i - \rho_k$ の形の振動の場合は、式(3.39)と式(3.50)から次式が成立する。

$$2 \frac{R_k^2}{R_i^2} = - \left(\frac{K_i n_k c_{ii}}{K_k n_i c_{kk}} \right) \frac{\omega_i}{\omega_k} \quad \dots\dots\dots (3.52)$$

式(3.51)は和形、式(3.52)は差形の場合である。一方、式(3.38), (3.39)の関係は $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ の正負にかかわらず成立する。式(3.15), (3.19)の関係より、 K_s/n_s は常に負であり、また式(3.49)が成立するから、式(3.51), (3.52)の括弧の中は常に正である。したがって振幅 R_i, R_j, R_k が実数であるためには、和形の式(3.51)では ω_i と ω_j が同符号、差形の式(3.52)では ω_i と ω_j が異符号でなくてはならない。同様のことが式(3.40), (3.41), (3.42), (3.43)に関しても成立する。したがって、ふれ回り運動様式の対称非線形ばね特性に起因する $\omega \doteq |2\rho_i \pm \rho_j|$, $\omega \doteq |\rho_i \pm \rho_j \pm \rho_k|$ 形の和差調波振動においても、振動数の絶対値に関する和形のみが発生可能であることを結論しうる。

(II) 非対称非線形ばね特性に起因する強制ふれ回り振動

A 1/2次分数調波振動

(a) $\omega = 2\omega_i \doteq 2\rho_i$ ($i=1, 2$) の振動

$$\left. \begin{aligned} (1/4 \cdot \omega^2 - \rho_i^2) / n_i - \{ \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 + (\beta^{(0)} F^2)_i \} \\ = \{ (\varepsilon^{(1)} F)_{ii} \cos 2\delta_i + (\varepsilon^{(1)} F)'_{ii} \sin 2\delta_i \} / K_i \\ c_i \omega = \{ (\varepsilon^{(1)} F)_{ii} \sin 2\delta_i - (\varepsilon^{(1)} F)'_{ii} \cos 2\delta_i \} / K_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.53)$$

共振曲線、背骨曲線は次式で与えられる。

$$\left[(1/4 \cdot \omega^2 - \rho_i^2) / n_i - \{ \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 + (\beta^{(0)} F^2)_i \} \right]^2 + c_i^2 \omega^2 = \{ (\varepsilon^{(1)} F)_{ii}^2 + (\varepsilon^{(1)} F)'_{ii}^2 \} / K_i^2 \quad \dots\dots\dots (3.54)$$

$$(1/4 \cdot \omega^2 - \rho_i^2) / n_i - \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.55)$$

式(3.9)の2自由度系では次式になる ($\omega = 2\omega_f \doteq 2\rho_f$ の場合)。

$$(1 - i_p)(1/4 \cdot \omega^2 - \rho_f^2) - 4\beta^{(0)}(R_f^2 + 2F_0^2) \quad \left. \vphantom{(1 - i_p)(1/4 \cdot \omega^2 - \rho_f^2) - 4\beta^{(0)}(R_f^2 + 2F_0^2)} \right\}$$

$$= 2F_0 \left(\varepsilon_c^{(1)} \cos 2\delta_i + \varepsilon_s^{(1)} \sin 2\delta_i \right) \left. \vphantom{= 2F_0} \right\} \dots\dots\dots (3.53a)$$

$$c\omega = 4F_0 \left(\varepsilon_c^{(1)} \sin 2\delta_i - \varepsilon_s^{(1)} \cos 2\delta_i \right)$$

$$4 \left\{ (1 - i_p) (1/4 \cdot \omega^2 - \rho_f^2) - 4\beta^{(0)} (R_f^2 + 2F_0^2) \right\}^2 + c^2 \omega^2 = 16\varepsilon^{(1)2} F_0^2 \dots\dots\dots (3.54a)$$

$$(1 - i_p) (1/4 \cdot \omega^2 - \rho_f^2) - 4\beta^{(0)} R_f^2 = 0 \dots\dots\dots (3.55a)$$

(b) $\omega = -2\omega_k \doteq -2\rho_k$ ($k=3, 4$) の振動

$$\left. \begin{aligned} & (1/4 \cdot \omega^2 - \rho_k^2) / n_k - \{ \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)} F^2)_k \} \\ & = \{ (\varepsilon^{(3)} F)_{kk} \cos 2\delta_k + (\varepsilon^{(3)} F)_{kk}' \sin 2\delta_k \} / \mathbf{K}_k \\ & c_k \omega = \{ -(\varepsilon^{(3)} F)_{kk} \sin 2\delta_k + (\varepsilon^{(3)} F)_{kk}' \cos 2\delta_k \} / \mathbf{K}_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.56)$$

共振曲線，背骨曲線は次式で与えられる。

$$\left[(1/4 \cdot \omega^2 - \rho_k^2) / n_k - \{ \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)} F^2)_k \} \right]^2 + c_k^2 \omega^2 = \{ (\varepsilon^{(3)} F)_{kk}^2 + (\varepsilon^{(3)} F)_{kk}'^2 \} / \mathbf{K}_k^2 \dots\dots\dots (3.57)$$

$$(1/4 \cdot \omega^2 - \rho_k^2) / n_k - \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 = 0 \dots\dots\dots (3.58)$$

式(3.9)の2自由度系では次式になる ($\omega = -2\omega_b \doteq -2\rho_b$ の場合)。

$$\left. \begin{aligned} & (1 + i_p) (1/4 \cdot \omega^2 - \rho_b^2) - 4\beta^{(0)} (R_b^2 + 2F_0^2) \\ & = 6F_0 \left(\varepsilon_c^{(3)} \cos 2\delta_b + \varepsilon_s^{(3)} \sin 2\delta_b \right) \\ & c\omega = 12F_0 \left(-\varepsilon_c^{(3)} \sin 2\delta_b + \varepsilon_s^{(3)} \cos 2\delta_b \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.56a)$$

$$4 \left\{ (1 + i_p) (1/4 \cdot \omega^2 - \rho_b^2) - 4\beta^{(0)} (R_b^2 + 2F_0^2) \right\}^2 + c^2 \omega^2 = 144\varepsilon^{(3)2} F_0^2 \dots\dots\dots (3.57a)$$

$$(1 + i_p) (1/4 \cdot \omega^2 - \rho_b^2) - 4\beta^{(0)} R_b^2 = 0 \dots\dots\dots (3.58a)$$

B 和差調波振動

(c) $\omega = \omega_1 + \omega_2 \doteq \rho_1 + \rho_2$ の振動

$$\left. \begin{aligned} & \left[(\omega_1^2 - \rho_1^2) / n_1 - \{ \rho_{11}^{(0)} R_1^2 + 2\rho_{12}^{(0)} R_2^2 + (\beta^{(0)} F^2)_1 \} \right] R_1 \\ & = R_2 \left\{ (\varepsilon^{(1)} F)_{12} \cos (\delta_1 + \delta_2) + (\varepsilon^{(1)} F)_{12}' \sin (\delta_1 + \delta_2) \right\} / \mathbf{K}_1 \\ & 2c_1 \omega_1 R_1 = R_2 \left\{ (\varepsilon^{(1)} F)_{12} \sin (\delta_1 + \delta_2) - (\varepsilon^{(1)} F)_{12}' \cos (\delta_1 + \delta_2) \right\} / \mathbf{K}_1 \\ & \left[(\omega_2^2 - \rho_2^2) / n_2 - \{ \rho_{22}^{(0)} R_2^2 + 2\rho_{21}^{(0)} R_1^2 + (\beta^{(0)} F^2)_2 \} \right] R_2 \\ & = R_1 \left\{ (\varepsilon^{(1)} F)_{21} \cos (\delta_1 + \delta_2) + (\varepsilon^{(1)} F)_{21}' \sin (\delta_1 + \delta_2) \right\} / \mathbf{K}_2 \\ & 2c_2 \omega_2 R_2 = R_1 \left\{ (\varepsilon^{(1)} F)_{21} \sin (\delta_1 + \delta_2) - (\varepsilon^{(1)} F)_{21}' \cos (\delta_1 + \delta_2) \right\} / \mathbf{K}_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.59)$$

(d) $\omega = \omega_i - \omega_k \doteq \rho_i - \rho_k$ ($i=1, 2$; $k=3, 4$) の振動

$$\left. \begin{aligned} & \left[(\omega_i^2 - \rho_i^2) / n_i - \{ \rho_{ii}^{(0)} R_i^2 + 2\rho_{ik}^{(0)} R_k^2 + (\beta^{(0)} F^2)_i \} \right] R_i \\ & = R_k \left\{ (\varepsilon^{(1)} F)_{ik}'' \cos (\delta_i - \delta_k) - (\varepsilon^{(1)} F)_{ik}'' \sin (\delta_i - \delta_k) \right\} / \mathbf{K}_i \\ & 2c_i \omega_i R_i = R_k \left\{ (\varepsilon^{(1)} F)_{ik}'' \sin (\delta_i - \delta_k) + (\varepsilon^{(1)} F)_{ik}'' \cos (\delta_i - \delta_k) \right\} / \mathbf{K}_i \\ & \left[(\omega_k^2 - \rho_k^2) / n_k - \{ \rho_{kk}^{(0)} R_k^2 + 2\rho_{ki}^{(0)} R_i^2 + (\beta^{(0)} F^2)_k \} \right] R_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.60)$$

$$= R_i \{ (\varepsilon^{(1)}F)''_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k) - (\varepsilon^{(1)}F)'''_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) \} / \mathbf{K}_k$$

$$2c_k \omega_k R_k = R_i \{ -(\varepsilon^{(1)}F)''_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) - (\varepsilon^{(1)}F)'''_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k) \} / \mathbf{K}_k$$

式(3.9)の2自由度系では次式になる ($\omega = \omega_f - \omega_b \rightleftharpoons \rho_f - \rho_b$ の場合)。

$$\left. \begin{aligned} & \{ 2(\omega_f^2 - \rho_f^2) / (1 + i_\rho) - 8\beta^{(0)}(R_f^2 + 2R_b^2 + 2F_0^2) \} R_f \\ & = 4F_0 R_b \{ \varepsilon_c^{(1)} \cos(\delta_f - \delta_b) - \varepsilon_s^{(1)} \sin(\delta_f - \delta_b) \} \\ 2c\omega_f R_f & = 4F_0 R_b \{ \varepsilon_c^{(1)} \sin(\delta_f - \delta_b) + \varepsilon_s^{(1)} \cos(\delta_f - \delta_b) \} \\ & \{ 2(\omega_b^2 - \rho_b^2) / (1 - i_\rho) - 8\beta^{(0)}(R_b^2 + 2R_f^2 + 2F_0^2) \} R_b \\ & = 4F_0 R_f \{ \varepsilon_c^{(1)} \cos(\delta_f - \delta_b) - \varepsilon_s^{(1)} \sin(\delta_f - \delta_b) \} \\ 2c\omega_b R_b & = 4F_0 R_f \{ -\varepsilon_c^{(1)} \sin(\delta_f - \delta_b) - \varepsilon_s^{(1)} \cos(\delta_f - \delta_b) \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.60a)$$

(e) $\omega = -\omega_3 - \omega_4 \rightleftharpoons -\rho_3 - \rho_4$ の振動

$$\left. \begin{aligned} & \{ (\omega_3^2 - \rho_3^2) / n_3 - \{ \rho_{33}^{(0)} R_3^2 + 2\rho_{34}^{(0)} R_4^2 + (\beta^{(0)} F_2)_3 \} \} R_3 \\ & = R_4 \{ (\varepsilon^{(3)}F)_{34} \cos(\delta_3 + \delta_4) + (\varepsilon^{(3)}F)'_{34} \sin(\delta_3 + \delta_4) \} / \mathbf{K}_3 \\ 2c_3 \omega_3 R_3 & = R_4 \{ (\varepsilon^{(3)}F)_{34} \sin(\delta_3 + \delta_4) - (\varepsilon^{(3)}F)'_{34} \cos(\delta_3 + \delta_4) \} / \mathbf{K}_3 \\ & \{ (\omega_4^2 - \rho_4^2) / n_4 - \{ \rho_{44}^{(0)} R_4^2 + 2\rho_{43}^{(0)} R_3^2 + (\beta^{(0)} F_2)_4 \} \} R_4 \\ & = R_3 \{ (\varepsilon^{(3)}F)_{43} \cos(\delta_3 + \delta_4) + (\varepsilon^{(3)}F)'_{43} \sin(\delta_3 + \delta_4) \} / \mathbf{K}_4 \\ 2c_4 \omega_4 R_4 & = R_3 \{ (\varepsilon^{(3)}F)_{43} \sin(\delta_3 + \delta_4) - (\varepsilon^{(3)}F)'_{43} \cos(\delta_3 + \delta_4) \} / \mathbf{K}_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.61)$$

式(3.53) ~ (3.61)の右辺中の諸係数は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon^{(1)}F)_{ij} & = \lambda_{ij}^{(1)} F_1 - \sigma_{ij}^{(1)} F_2 + \tau_{ij}^{(1)} F_3 - \nu_{ij}^{(1)} F_4 \\ (\varepsilon^{(1)}F)'_{ij} & = \sigma_{ij}^{(1)} F_1 + \lambda_{ij}^{(1)} F_3 + \nu_{ij}^{(1)} F_3 + \tau_{ij}^{(1)} F_4 \\ \lambda_{ij}^{(1)} & = 4\varepsilon_{30c}^{(1)} + 2(\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \varepsilon_{21c}^{(1)} + 4\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j \varepsilon'_{12c}^{(1)} \\ \sigma_{ij}^{(1)} & = 4\varepsilon_{30s}^{(1)} + 2(\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \varepsilon_{21s}^{(1)} + 4\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j \varepsilon'_{12s}^{(1)} \\ \tau_{ij}^{(1)} & = 4\varepsilon'_{21c}^{(1)} + 2(\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \varepsilon_{12c}^{(1)} + 4\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j \varepsilon_{03c}^{(1)} \\ \nu_{ij}^{(1)} & = 4\varepsilon'_{21s}^{(1)} + 2(\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j) \varepsilon_{12s}^{(1)} + 4\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j \varepsilon_{03s}^{(1)} \\ & (i, j = 1, 2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.62)$$

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon^{(1)}F)''_{ik} & = \lambda'_{ik} F_1 + \sigma'_{ik} F_2 + \tau'_{ik} F_3 + \nu'_{ik} F_4 \\ (\varepsilon^{(1)}F)'''_{ik} & = \sigma'_{ik} F_1 - \lambda'_{ik} F_2 + \nu'_{ik} F_3 - \tau'_{ik} F_4 \\ \lambda'_{ik} & = 4\varepsilon_{30c}^{(1)} + 4\mathbf{K}_i \varepsilon'_{21c}^{(1)} + 2\mathbf{K}_k \varepsilon_{21c}^{(1)} + 2\mathbf{K}_i \mathbf{K}_k \varepsilon_{12c}^{(1)} \\ \sigma'_{ik} & = 4\varepsilon_{30s}^{(1)} + 4\mathbf{K}_i \varepsilon'_{21s}^{(1)} + 2\mathbf{K}_k \varepsilon_{21s}^{(1)} + 2\mathbf{K}_i \mathbf{K}_k \varepsilon_{12s}^{(1)} \\ \tau'_{ik} & = 2\varepsilon_{21c}^{(1)} + 2\mathbf{K}_i \varepsilon_{12c}^{(1)} + 4\mathbf{K}_k \varepsilon'_{12c}^{(1)} + 4\mathbf{K}_i \mathbf{K}_k \varepsilon_{03c}^{(1)} \\ \nu'_{ik} & = 2\varepsilon_{21s}^{(1)} + 2\mathbf{K}_i \varepsilon_{12s}^{(1)} + 4\mathbf{K}_k \varepsilon'_{12s}^{(1)} + 4\mathbf{K}_i \mathbf{K}_k \varepsilon_{03s}^{(1)} \\ & (i = 1, 2 \quad ; \quad k = 3, 4) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.63)$$

$$\left. \begin{aligned}
(\varepsilon^{(3)}F)_{kl} &= \lambda_{kl}^{(3)}F_1 + \sigma_{kl}^{(3)}F_2 + \tau_{kl}^{(3)}F_3 + \nu_{kl}^{(3)}F_4 \\
(\varepsilon^{(3)}F)_{k'l'} &= \sigma_{k'l'}^{(3)}F_1 - \lambda_{k'l'}^{(3)}F_2 + \nu_{k'l'}^{(3)}F_3 - \tau_{k'l'}^{(3)}F_4 \\
\lambda_{kl}^{(3)} &= 4 \{ 3\varepsilon_{30c}^{(3)} + (\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_l) \varepsilon_{21c}^{(3)} + \mathbf{K}_k \mathbf{K}_l \varepsilon_{12c}^{(3)} \} \\
\sigma_{kl}^{(3)} &= 4 \{ 3\varepsilon_{30s}^{(3)} + (\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_l) \varepsilon_{21s}^{(3)} + \mathbf{K}_k \mathbf{K}_l \varepsilon_{12s}^{(3)} \} \\
\tau_{kl}^{(3)} &= 4 \{ \varepsilon_{21c}^{(3)} + (\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_l) \varepsilon_{12c}^{(3)} + 3\mathbf{K}_k \mathbf{K}_l \varepsilon_{03c}^{(3)} \} \\
\nu_{kl}^{(3)} &= 4 \{ \varepsilon_{21s}^{(3)} + (\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_l) \varepsilon_{12s}^{(3)} + 3\mathbf{K}_k \mathbf{K}_l \varepsilon_{03s}^{(3)} \} \\
& \quad (k, l = 3, 4)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.64)$$

式(3.62)は式(3.53), (3.54), (3.59)に, 式(3.63)は式(3.60)に, 式(3.64)は式(3.56), (3.57), (3.61)に適用される。式(3.53), (3.54), (3.59), (3.60)の振動は $N(0)$ と $N(1)$ が, 式(3.56), (3.57), (3.61)の振動は $N(0)$ と $N(3)$ がないと発生し得ない。

式(3.53)~(3.61)は文献(26), (30), (37)中の式と同形であり, 共振曲線の形も文献(30)と同形になる。

振動の発生に必要な非線形成分を表3.1にまとめて示してある。この表から, すべての振動に方向性のない $N(0)$ 成分が必要であることがわかる。

3.5 主危険速度における強制振動と後向き同期歳差運動様式の強制振動

回転体の不つりあい e , τ により, $\omega = \rho_i$ ($i=1, 2$)となる主危険速度 ω_c 付近で発生する振動数 ω の強制振動の共振曲線は

$$\left\{ \frac{(\omega^2 - \rho_i^2)}{n_i} R_i - \rho_{ii}^{(0)} R_i^3 \right\}^2 + 4c_i^2 \omega^2 R_i^2 \\
= 4\omega^4 \left\{ \frac{e^2}{K_i^2} + 2\frac{e}{K_i} (i_\rho - 1) \tau \cos\beta + (i_\rho - 1)^2 \tau^2 \right\} \dots\dots\dots (3.65)$$

となり, 上式は $N(0)$ 成分のみを含む。

式(3.9)の2自由度系では次式になる。

$$\left\{ (2 - i_\rho)(\omega^2 - \rho_f^2) R_f - 8\beta^{(0)} R_f^3 \right\}^2 + 4c^2 \omega^2 R_f^2 = 4(i_\rho - 1)^2 \tau^2 \omega^4 \dots\dots\dots (3.65a)$$

x , y 方向のばね定数(式(3.13)を参照)がそれぞれ $1 + \Delta$, $\gamma + \Delta\gamma$, $\delta + \Delta\delta$ と, $1 - \Delta$, $\gamma - \Delta\gamma$, $\delta - \Delta\delta$ で表わされ, 軸剛性の方向差 2Δ , $2\Delta\gamma$, $2\Delta\delta$ がある場合は, $\omega = -\rho_k$ ($k=3, 4$)となる軸回転速度 ω 付近において, 振動数 $-\omega$ の後向き同期歳差運動の強制振動が発生す

る⁽⁶⁾。この場合の共振曲線の式は $N(0)$, $N(2)$, $N(4)$ 成分を含む複雑な式になるが、背骨曲線は $N(0)$ のみを含み、共振曲線の漸硬ばね形、漸軟ばね形の区別は方向性のない非線形特性により支配される。もしばね特性が $N(0)$ 成分のみを含む場合ならば、共振曲線は次式になる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{(\omega_k^2 - \rho_k^2)}{n_k} R_k - \rho_{kk}^{(0)} R_k^3 - (\beta^{(0)} F^2)_k R_k \right\}^2 + 4 c_k^2 \omega_k^2 R_k^2 \\ & = 4 \left\{ \left(\frac{\Delta}{K_k} + \Delta\gamma \right)^2 (F_1^2 + F_2^2) + \left(\frac{\Delta\gamma}{K_k} + \Delta\delta \right)^2 (F_3^2 + F_4^2) \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\frac{\Delta}{K_k} + \Delta\gamma \right) \left(\frac{\Delta\gamma}{K_k} + \Delta\delta \right) (F_1 F_3 + F_2 F_4) \right\} \dots\dots\dots (3.66) \end{aligned}$$

式(3.9)の2自由度系では、 x , y 方向のばね定数を $1+\Delta$, $1-\Delta$ とすると次式になる。

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1+\rho_b^2}{\rho_b^2} \right) (\omega^2 - \rho_b^2) R_b - 4\beta^{(0)} (R_b^2 + 2F_0^2) R_b \right\}^2 + c^2 \omega^2 R_b^2 = \Delta^2 F_0^2 \dots\dots\dots (3.66b)$$

式(3.65), (3.66)の共振曲線の形は、Duffingの式の調和振動解のそれと同じである。

3.6 実験結果との比較

前章と文献(12), (23), (24)の実験装置では $i_\rho = I_\rho / I \approx 2$ であり、式(3.15)の $\rho_1 > i_\rho \omega \approx 2\omega$ から、表3.1中の ρ_1 を含む関係は成立せず、したがって ρ_1 が関与する非線形強制振動は発生しないから、前章と文献(12), (23), (24)の装置で発生が期待されるのは表3.2のものに限られる。

実験では、単列深みぞ形玉軸受の角度のがたが非線形ばね特性の原因であり、文献(12), (23)(24)では非対称非線形特性の方が、前章では対称非線形特性の方が大きく現われている。これは前者では平衡状態で回転軸中心線が角度のがたの中央から多少はずれているが、後者ではこのはずれが小さいためである。また前章では、方向性のある対称非線形成分がほとんどないIの場合と、これがあるIIの場合とについて実験を行っている。いずれの場合も、非線形特性の原因から自明であるが、大きな $N(3)$, $N(4)$ 成分の存在は期待できない。

前章と文献(12), (23), (24)の実験結果は、本章で得られた解析結果により次のように説明される(表3.2参照)

- (1) 文献(12), (23), (24)では、 $N(0)$ が小さいので、主危険速度と後向き同期歳差運動の共振曲線は線形系のそれらとほぼ同じ形になり、また対称非線形特性に起因する非線形強制振動は発生しない。

- (ii) 文献(12), (23), (24)では, 非対称非線形成分のうち大きいと予想される $N(1)$ を必要とする振動は常に大振幅で発生するが, $N(3)$ を必要とする振動は発生しないか, また発生してもその振幅は小さい。
- (iii) 前章では非対称非線形特性が小さいため, $N(3)$ を必要とする振動は発生していない。
- (iv) 前章のIでは, 対称非線形成分のうち方向性のない $N(0)$ を必要とする $2\rho_2-\rho_3$, $2\rho_2-\rho_4$ の振動は発生するが, 方向性をもつ $N(2)$ を必要とする振動は発生していない。
- (v) 前章のIIでは, $N(0)$ のみを必要とする振動と, $N(0)$ と $N(2)$ の両者を必要とする振動が発生している。
- (vi) 小さいと予想される対称非線形成分 $N(4)$ が必要な振動は, I, IIを通じ発生していない。
- (vii) 前章と文献(12), (23), (24)の実験から得られた共振曲線の形は, 式(3.32)~(3.43); 式(3.53)~(3.61)からわかるように, 文献(30)に示すものと同じ形である。
- (viii) 主危険速度と後向き同期歳差運動様式の危険速度の共振曲線に関しては, 実験結果と式(3.65), (3.66)とは同じ形である。
- (ix) $N(0)$ が大きく, したがって係数 $\rho_{s_i}^{(0)}$ が大きい前章のすべての共振曲線は, なびき方が著るしく, そのため発生範囲も比較的広い。

3.7 結 論

本論文で得られた結果を以下に示す。

- (1) ふれ回り運動様式の振動系では, 非線形ばね特性の極座標表示が, 各種非線形強制振動の諸性質の解明に有用である。
- (2) この表示法により, 非線形ばね特性は平衡位置を一周する間に変化しない成分 $N(0)$ と, 1, 2, 3, 4……回大きさが周期的に変化する成分 $N(1)$, $N(2)$, $N(3)$, $N(4)$ ……に分類される。
- (3) 対称非線形特性は $N(0)$, $N(2)$, $N(4)$, …… $N(2n)$, ……(n :正整数)の, 非対称非線形特性は $N(1)$, $N(3)$, …… $N(2n+1)$, ……の成分に分けられる。
- (4) すべての非線形強制振動の発生には, 方向性のない対称非線形成分 $N(0)$ が必要である。
- (5) 主危険速度付近の振動と後向き同期歳差運動様式の振動も含めて, すべての強制振動において, 共振曲線が漸硬ばね形あるいは漸軟ばね形のどちらになるかは $N(0)$ の係数の符号に依存し, そのなびき方もこの係数の絶対値の大小に依存する。
- (6) すべての非線形強制振動の発生には $N(0)$ のみを, あるいは $N(0)$ と $N(1)\sim N(n)$ のうち一つの成分のみを必要とする。

- (7) 強制振動の種類により，どの非線形成分が発生に必要であるかが明らかになった。
- (8) 非線形強制振動の共振曲線の形は，文献(30)，(31)に示されている往復振動系のもと同形である。
- (9) 対称非線形特性のある場合の調和振動と後向き同期歳差運動様式の強制振動の共振曲線は，*Duffing* の式の調和振動解のそれと同じ形である。
- (10) 本章の非線形ばね特性の表示法により，前章と文献(12)，(23)，(24)の実験結果がよく説明される。
- (11) この表示法による解析結果により，各種非線形強制振動の発生の難易の判定，発生の予測を行うことができ，また振動の動力学的諸特性をより明確に把握できる。

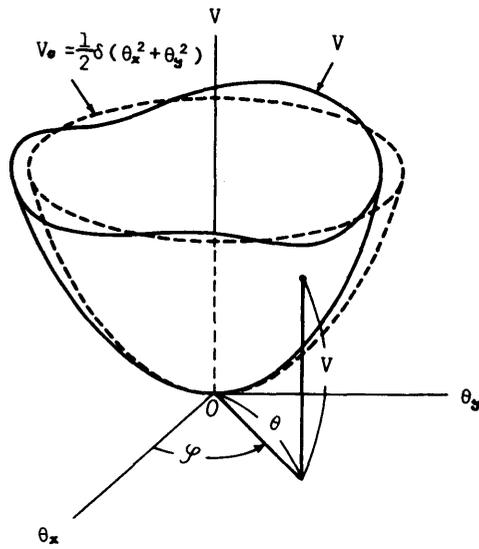
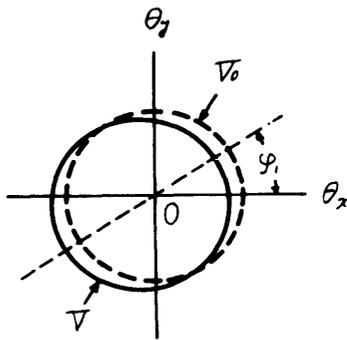
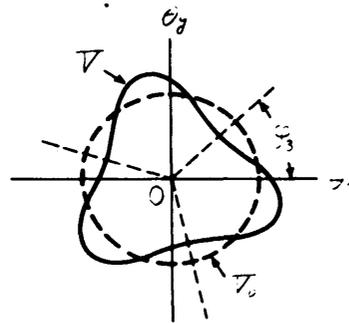


図 3.1 V の平面的分布

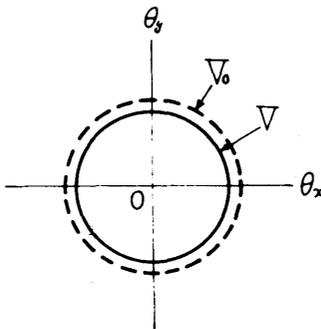


$$(i) \quad V = V_0 + (\epsilon_c^{(1)} \cos \varphi + \epsilon_s^{(1)} \sin \varphi) \theta^3 \\ = V_0 + \epsilon^{(1)} \cos(\varphi - \varphi_1) \theta^3$$

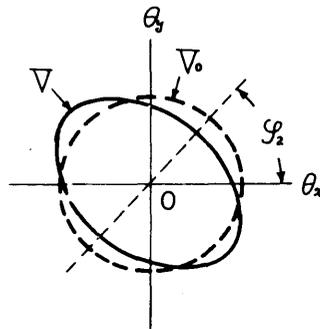


$$(ii) \quad V = V_0 + (\epsilon_c^{(3)} \cos 3\varphi + \epsilon_s^{(3)} \sin 3\varphi) \theta^3 \\ = V_0 + \epsilon^{(3)} \cos 3(\varphi - \varphi_3) \theta^3$$

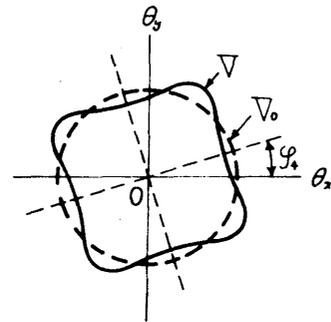
図 3.2 非対称非線形ばね特性



$$(i) \quad V = V_0 + \beta^{(0)} \theta^4$$



$$(ii) \quad V = V_0 + \beta^{(2)} \cos 2(\varphi - \varphi_2) \theta^4$$



$$(iii) \quad V = V_0 + \beta^{(4)} \cos 4(\varphi - \varphi_4) \theta^4$$

図 3.3 対称非線形ばね特性

表 3.1 各種非線形強制振動の分類と、その発生に必要な非線形成分

(1) 4 自由度系

		歳差運動	振動の種類	必要な非線形成分
対称非線形特性に起因する強制振動	1/2 調波振動	前向き	$\omega \doteq 3p_1$ ($i_p < 1/3$ のとき発生) $\omega \doteq 3p_2$	N(0), N(2)
		後向き	$\omega \doteq -3p_3$ $\omega \doteq -3p_4$	N(0), N(4)
	2 個の和差調波振動	前向き+前向き	$\omega \doteq 2p_1+p_2$ ($i_p < 1/2$) $\omega \doteq p_1+2p_2$ ($i_p < 1$)	N(0), N(2)
		前向き+後向き (前向きの振動数2倍)	$\omega \doteq 2p_1-p_3$ ($i_p < 1/2$), $\omega \doteq 2p_2-p_3^*$ $\omega \doteq 2p_1-p_4$ ($i_p < 1/2$), $\omega \doteq 2p_2-p_4$	N(0)
		前向き+後向き (後向きの振動数2倍)	$\omega \doteq p_1-2p_3$ ($i_p < 1$), $\omega \doteq p_2-2p_3$ $\omega \doteq p_1-2p_4$ ($i_p < 1$), $\omega \doteq p_2-2p_4$	N(0), N(2)
		後向き+後向き	$\omega \doteq -2p_3-p_4$ $\omega \doteq -p_3-2p_4$	N(0), N(4)
	3 個の振動	前向き+前向き+後向き	$\omega \doteq p_1+p_2-p_3$ ($i_p < 1$) $\omega \doteq p_1+p_2-p_4$ ($i_p < 1$)	N(0)
		前向き+後向き+後向き	$\omega \doteq p_1-p_3-p_4$ ($i_p < 1$) $\omega \doteq p_2-p_3-p_4$	N(0), N(2)
非対称非線形特性に起因する強制振動	1/2 調波振動	前向き	$\omega \doteq 2p_1$ ($i_p < 1/2$) $\omega \doteq 2p_2$	N(0), N(1)
		後向き	$\omega \doteq -2p_3$ $\omega \doteq -2p_4$	N(0), N(3)
	和差調波振動	前向き+前向き	$\omega \doteq p_1+p_2$ ($i_p < 1$)	N(0), N(1)
		前向き+後向き	$\omega \doteq p_1-p_3$ ($i_p < 1$), $\omega \doteq p_2-p_3$ $\omega \doteq p_1-p_4$ ($i_p < 1$), $\omega \doteq p_2-p_4$	N(0), N(1)
		後向き+後向き	$\omega \doteq -p_3-p_4$	N(0), N(3)

* この式の意味は、 $\omega \doteq 2p_2-p_3$ が成立する回転数付近で、 $\omega = 2\omega_2 - \omega_3$, $\omega_2 \doteq p_2$, $\omega_3 \doteq p_3$ の関係を満たす振動数 ω_2 と ω_3 の2つの振動が同時に発生するということである。 他も同様。

(11) 2 自由度系

対称非線形特性	1/2 調波振動	前向き	$\omega \doteq 3p_f$ ($i_p < 1/3$)	N(0), N(2)
		後向き	$\omega \doteq -3p_b$	N(0), N(4)
	和差調波振動	前向き+後向き (前向きの振動数2倍)	$\omega \doteq 2p_f - p_b$ ($i_p < 1/2$)	N(0)
		前向き+後向き (後向きの振動数2倍)	$\omega \doteq p_f - 2p_b$ ($i_p < 1$)	N(0), N(2)
非対称非線形特性	1/2 調波振動	前向き	$\omega \doteq 2p_f$ ($i_p < 1/2$)	N(0), N(1)
		後向き	$\omega \doteq -2p_b$	N(0), N(3)
	和差調波振動	前向き+後向き	$\omega \doteq p_f - p_b$ ($i_p < 1$)	N(0), N(1)

表 3.2 実験における非線形強制振動の発生状況

振動の種類	対称非線形特性に起因する強制振動						非対称非線形特性に起因する強制振動			
	1/2次分数調波振動		和差調波振動				1/2次分数調波振動		和差調波振動	
	$3p_2$	$-3p_3$ $-3p_4$	$2p_2-p_3$ $2p_2-p_4$	p_2-2p_3 p_2-2p_4	$-2p_3-p_4$ $-p_3-2p_4$	$p_2-p_3-p_4$	$2p_2$	$-2p_3$ $-2p_4$	p_2-p_3 p_2-p_4	$-p_3-p_4$
発生に必要な非線形成分	N(0) N(2)	N(0) N(4)	N(0) のみ	N(0) N(2)	N(0) N(4)	N(0) N(2)	N(0) N(1)	N(0) N(3)	N(0) N(1)	N(0) N(3)
文献(12),(23),(24)	×	×	×	×	×	×	○	△	○	△
文献(34) (第2章)	I	×	×	○	×	×	×	○	×	×
	II	○	×	○	○	×	○	○	×	×

○・・・常に発生， ×・・・発生せず， △・・・系の組立状態により発生したり， しなかったり， また発生しても小振幅の振動， 文献(12)，(23)，(24)・・・非対称非線形特性が大きい， 文献(34)・・・対称非線形特性が大きい， I・・・対称非線形特性に方向性なし， II・・・対称非線形特性に方向性あり。

参 考 文 献

- (1) A. Stodola,
Dampf- und Gas-turbinen, Berlin, (1924), Kap. V.
- (2) 亘理 厚,
機械力学(改訂版), 共立全書86, 共立出版, (1969), 第4章。
- (3) S. チモシェンコ(谷下, 渡辺訳)
工業振動学, 東京図書, (1956), 第4章。
- (4) デン・ハルトック(谷口, 藤井訳)
機械振動論(改訂版), コロナ社, (1960), 第6章。
- (5) F. M. Dimentberg,
Flexural Vibrations of Rotating Shafts. Butterworths. (1961),
P. 42。
- (6) 下山美徳, 山本敏男,
軸受台のたわみに基く回転軸の危険速度について, 機械学会論文集, 20巻91号
(昭和29), 215頁。
- (7) 山本敏男,
後向き同期歳差運動様式の軸の危険速度について, 機械学会論文集, 22巻115号
(昭和31-3), 167頁。
- (8) H. D. Taylor,
Critical-Speed Behavior of Unsymmetrical Shafts, J. Appl. Mech.,
(1940-6), A. 71。
- (9) 山本敏男,
玉軸受の寸法誤差に基く危険速度について(その1), 機械学会論文集, 20巻99
号(昭和29), 750頁。
- (10) 山本敏男,
低速で起る玉軸受による危険速度,
機械学会論文集, 23巻135号(昭和32-11), 838頁。
- (11) 山本敏男, 河野和豊,
回転速度が変動する回転体の振動について,

- 機械学会論文集， 35 卷 278 号（昭和 44-10）， 2044 頁。
- (12) 山本敏男，
分数調波振動の軸の危険速度について，
機械学会論文集， 21 卷 111 号（昭和 30）， 853 頁。
- (13) 山本敏男，
軸受にがたのある場合の危険速度について，
機械学会論文集， 21 卷 103 号（昭和 30-3）， 186 頁。
- (14) 山本敏男，
低速で起る軸の危険速度について，
機械学会論文集， 22 卷 123 号（昭和 31-11）， 863 頁。
- (15) 堀 幸夫，
オイルウィップ，
機械学会誌， 61 卷 478 号（昭和 33-11）， 1348 頁。
- (16) A. L. Kimball，
Internal Friction Theory of Shaft Whirling，
General Electric Review, 27(1924), P. 244
- (17) B. L. Newkirk，
Shaft Whipping，
General Electric Review, 27(1924), P. 169
- (18) 榎木義一， 岩本義輝，
軸受の乾性摩擦によりひきおこされる " shaft whipping " について
機械学会論文集， 17 卷 57 号（昭和 26）， 61 頁。
- (19) P. J. Brosens, S. H. Crandall，
Whirling of Unsymmetrical Rotors，
Trans. ASME., Ser. E, Vol. 23(1961), P. 355
- (20) 山本敏男， 太田 博，
非対称回転体の振動について
機械学会論文集， 28 卷 188 号（昭和 37-4）， 475 頁。
- (21) J. J. Stoker，
Nonlinear Vibrations, Interscience Publishers, (1950)

- (22) N. Minorsky,
Nonlinear Oscillations, Van Nostrand Co., (1962)
- (23) 山本敏男,
ある特殊な軸の危険速度について,
機械学会論文集, 22巻115号(昭和31-3), 172頁。
- (24) 山本敏男,
分数調波, "和差調波"形危険速度の共振曲線,
機械学会論文集, 26巻161号(昭和35-1), 11頁。
- (25) 山本敏男,
多自由度非線型系における分数調波と特殊な様式の振動.
機械学会論文集, 22巻123号(昭和31-11), 868頁。
- (26) 山本敏男,
回転軸の分数調波, "和差調波"振動について,
機械学会論文集, 26巻164号(昭和35-4), 612頁。
- (27) 西原利夫, 榎木義一, 岡田幸雄,
非線形復元力を有する振動系の $\frac{1}{2}$ 分数調波振動について,
機械学会論文集, 17巻64号(昭和26), 26頁
- (28) 西野吉次,
非線形振動系における分数調波振動に関する覚書,
応用力学, 3巻18号(1950-8), 121頁。
- (29) 山本敏男,
対称性非線形系における"和差調波"振動,
機械学会論文集, 27巻182号(昭和36-10), 1676頁。
- (30) 山本敏男, 林 叡,
和差調波振動の共振曲線と安定性について,
機械学会論文集, 28巻194号(昭和37-10), 1283頁。
- (31) 林 叡,
三次非線形ばね特性をもつ振動系に発生する"和差調波"振動について
機械学会論文集, 32巻234号(昭和41-2), 219頁。
- (32) 山本敏男, 石田幸男,

玉軸受に起因する主危険速度付近の特異な振動現象，

機械学会論文集， 39巻321号（昭和48-5）， 1488頁。

(33) 山本敏男， 石田幸男， 川角順造，

玉軸受に起因する主危険速度付近の特異な振動現象（続報：対称非線形ばね特性の影響について），

機械学会関西支部第232回講演会講演論文集（49.6.8）， 79頁。

(34) 山本敏男， 石田幸男， 川角順造，

対称非線形ばね特性をもつ回転軸の振動，

機械学会論文集， 41巻341号（昭和50-1）。

(35) 山本敏男，

回転軸の危険速度について

機械学会誌， 66巻531号（昭和38-4）， 528頁。

(36) 山本敏男， 石田幸男，

非線形ばね特性をもつ回転軸の振動の解析的考察，

機械学会・精機学会東海支部津地方講演会論文集（1973-12-6）No.733-4，
57頁。

(37) 山本敏男，

非線形系における"和差調波"振動（非対称性非線形系の場合），

機械学会論文集， 27巻173号（昭和36-1）， 146頁。

本研究は名古屋大学工学部機械工学科機械力学研究室において、名古屋大学の山本敏男教授の指導のもとに行われたものである。本研究に対し、長期間にわたり御指導と御鞭撻を賜った山本教授に深甚の謝意を表す。

また著者の研究一般に関し、適切なる御指導、御批判を賜った名古屋大学の太田博助教授、安田仁彦講師に厚く感謝する。

本研究は日本機械学会に発表した一連の研究論文を中心にしてまとめたものである。その研究の内容、実験などに、当時大学院学生であった川角順造氏の多大な協力を得たこともここに記し、深く感謝する。

なお、実験に際し種々の御協力をいただいた名古屋大学工学部機械力学実験室の諸氏にも厚くお礼申し上げる。

名古屋大学大学院工学研究科

機械工学専攻

石 田 幸 男

付録

著者の発表論文ならびに業績リスト

1. 本論文に関係のあるもの

1. 玉軸受に起因する主危険速度付近の特異な振動現象

昭和48年5月 日本機械学会論文集第39巻321号1488頁

共著者：山本敏男

2 The Particular Vibration Phenomena Due to Ball Bearings at the Major Critical Speed

Jan., 1974, Bulletin of the JSME, Vol.17, No.103, p.59.

Collaborator: Toshio YAMAMOTO

3. 対称非線形ばね特性をもつ回転軸の振動

昭和50年1月 日本機械学会論文集 第41巻341号133頁

共著者：山本敏男，川角順造。

4. 非線形ばね特性をもつ回転軸の振動の解析的考察

昭和50年5月 日本機械学会論文集第41巻345号(掲載予定)

共著者：山本敏男，

2. その他

1. 玉軸受に起因する主危険速度付近の特異な振動現象

(続報：対称非線形ばね特性の影響について)

昭和49年6月 日本機械学会関西支部第232回講演会講演論文集 79頁

共著者：山本敏男，川角順造。