

報告番号 ※ 甲第 930 号

主論文の要旨

題名

非線形ばね特性をもつ
回転軸の振動

氏名 石田 幸男

回転機械の回転軸が、各種の原因により、ある特定の回転数で振幅が増大して激しく振動することがある。このような回転数は回転軸の危険速度とよばれる。特に、軸の回転数が回転軸系の固有振動数と一致したとき共振して激しいふれ回りを起すが、このときの回転数を主危険速度とよんでいる。

19世紀末以来、A. Stodola をはじめとして多くの研究者によって回転軸の振動に関する数多くの理論的、実験的研究がなされてきたが、その初期の段階では、軸の固有振動数と主危険速度の決定に関するものがほとんどであった。その後、回転機械の高速化に伴ない主危険速度を超えて運転されることも多くなり、各種の振動現象が見出され研究されてきた。各種の原因によって生ずる周期的強制外力の振動数が回転軸の固有振動数の一つと一致したとき生ずる強制振動、非線形ばね特性が存在する場合にのみ発生する強制振動、オイルウィップ、内部摩擦、乾性摩擦などによる自励振動、扁平軸とか非対称回転体をもつ系に生ずる不安定振動などの各種の振動現象に関して多くの報告が出されている。しかしこのうちで回転軸の非線形振動に関する研究は新しく、未解決の問題も多い。そこで本研究において、弾性回転軸に発生する非線形振動を実験的、理論的に研究し、従来不明であったいくつかの点を明らかにした。

非線形振動に関する研究は進んでいるが、そのほとんどは一自由度往復振動系についてである。回転軸における非線形振動問題はかなり複雑であり、その研究もあまりみあたらない。山本は単列深みぞ形玉軸受で支えられた回転軸系に発生する振動の一連の実験的、解析的研究を行った。その研究では回転軸の復元力に（静止している）非対称非線形特性が現われた場合を取扱っており、その系に発生する $1/2$ 次分調波振動、 $[p_1 \pm p_2]$ 様式の和差調波振動について報告している。これに対し、対称非線形特性に起因する非線形強制振動に関しては、一般の往復振動系に発生する各種の振動については山本をはじめとして多くの報告があるが、回転軸系に発生する旋回運動様式のこの種の振動に関する報告はない。

第一章では、軸回転速度 ω で回転する軸剛性の方向差（扁平性）と、同じく ω で回転する非対称非線形ばね特性が存在する場合の、主危険速度付近の振動現象を実験と理論の両面から取扱っている。回転軸系の軸の復元力にも、さまざまな原因により非線形ばね特性が現われるが、この特性が空間に対して固定している場合と、軸とともに回転する場合とがある。このような回転する非線形ばね特性は、往復振動系などにはなく回転軸系に特有のものである。

単列深みぞ形玉軸受には、その構造上いわゆる「角度の

た」がある。そのため回転軸中心線がこの小さながた内にあるれば軸端は自由支持的になるが、なんらかの原因で角度のがたの外へ出ようとするすると支持条件は固定支持的になる。これがばね剛性の方向差とか非線形ばね特性を生じさせる原因となる。両端支持の弾性回転軸で単刃深み玉形玉軸受を用いた場合、(A)玉軸受の外輪がはまる軸箱内筒内面の中心線と軸受中心線の間になずかな不一致があるとき、(B)玉軸受の外輪がわずかも傾いて軸箱内にそう入されているとき、(C)外輪の玉み玉の横ぶれがあるとき、(D)軸箱内筒内面が厳密には真円ではなく、外輪と軸箱内面との間のはめあいがゆるいときなどは、回転軸中心線の平衡位置が玉軸受の角度のがたの中央からずれるため、軸剛性の方向差と方向性のある非対称非線形ばね特性が現われる。そしてこれらの方向差、方向性は、軸が回転するしだいに関係なく、その方向が空間に固定している。

これに対し、(a)回転軸になずかなあらかじめの曲りのあるとき、(b)内輪がわずかも軸けい(頸)に傾いてそう入されているとき、(c)内輪の玉み玉の横ぶれがあるとき、(d)軸けいが厳密には真円ではなく、内輪と軸けいとの間のはめあいがゆるいときなどでも、回転軸中心線が角度のがたの中央からずれて、軸剛性の方向差と方向性のある非対称非線形ばね

特性が現われるが、この場合は回転速度 ω で軸とともにその方向が回転する方向差、方向性である。

上記 (a) ~ (d) のような原因により、回転軸系にこのような軸回転速度 ω で回転するばね特性が存在する場合、主危険速度 ω_c 付近で、不つりあいの角位置いかんにより不安定領域が現われたり消失したり、不安定領域の幅が増減したり、また共振曲線の形に著しい変化を生じたりする。ばね剛性の大きい方向と小さい方向の両方に非対称非線形特性があるときは、不つりあいの角位置により4種類の共振曲線を生じ、ばね剛性の大きい方向の非線形特性が厚くなると、共振曲線は二種類になる。この章では、このような特異な振動現象を明らかにしている。ここで扱っているような回転する非線形ばね特性に関する研究は従来よりなされておらず、主危険速度付近のこの種の特異な現象も新たに見だされたものである。

第二章では、静止した対称非線形ばね特性をもつ回転軸系に発生する振動現象を実験的に解明している。

単列深みぎ形玉軸受を用いた場合、一般には非対称非線形特性が対称非線形特性より強く現われやすいが、鉛直軸で上下両軸受台の中心線の一致に特に注意して装置を組み立てると、静止状態での回転軸中心線が角度のかたのほうに位置するため、軸の復元力に対称非線形特性が非対称非線形持

性より強く現われる。この場合、実験装置の組立状態により、方向性のない対称非線形ばね特性と、測定方向によつてばね特性の異なる、すなわち方向性のある対称非線形ばね特性とが得られる。前者の状態での実験においては、 $p_1 \sim p_4$ を系の固有振動数とすると、対称非線形特性に起因する振動として、 $[2p_2 - p_3]$, $[2p_2 - p_4]$ 様式の和差調波振動が発生し、後者ではこの他に $[3p_2]$ 様式の $1/3$ 次分数調波振動、 $[p_2 - 2p_3]$, $[p_2 - 2p_4]$, $[p_2 - p_3 - p_4]$ 様式の和差調波振動が新たに発生することを確かめた。 $[-3p_3]$, $[-3p_4]$ 様式の $-1/3$ 次分数調波振動、 $[-2p_3 - p_4]$, $[-p_3 - 2p_4]$ 様式の和差調波振動は、発生する可能性はあるが、実際に実験では得られなかった。

さらに比較的強い対称非線形特性の存在のため、主危険速度付近での調和振動と後向き同期歳差運動様式の強制振動の共振曲線が、山本によつて報告されている非対称非線形特性が強い系の場合と異なり、跳躍現象をもともなう漸硬ばね形共振曲線になることを指摘している。また非対称非線形特性に起因する $1/2$ 次分数調波振動、 $[p_i \pm p_j]$ 様式の和差調波振動に関しても、本報告の系では著しく右へたびい長漸硬ばね形になること、またこれらのうち比較的発生しにくい振動は、非対称非線形ばね特性が強い山本の報告にある系では発生するが、これが弱い本論文の系では発生し得ぬことなどを実験

により明らかにするなど、すでに報告されている諸実験結果との比較をも行っている。

この章の実験結果は、次の第三章の解析結果により合理的に説明される。

第三章では、回転軸に発生する非線形強制振動を理論的に解析している。

従来、回転軸の弾性復元力に非線形特性がある場合、直交座標 x, y によりこれを表示するのが通例であった。ジャイロモーメントが作用する一般の回転軸系の軸の横振動はふれ回り運動であり、回転体中心はその平衡位置を通り軸受中心線に垂直な x, y 平面内で平面運動を行う。したがってこのような系の非線形ばね特性は極座標で表わすのが妥当であることを指摘し、新たな表示方法を提案した。この表示法によれば、非線形ばね特性は平衡位置を一周する間に変化しない成分 $N(0)$ と、 $1, 2, 3, 4, \dots$ 回大きさを周期的に変化する成分 $N(1), N(2), N(3), N(4), \dots$ に分類される。このうち、 n を正整数とすれば、対称非線形特性は $N(2n)$ の、非対称非線形特性は $N(2n+1)$ の成分に分けられる。続いて各種の非線形強制振動の共振曲線の式を求め、それらをこの諸成分との関連において論じている。その結果、次のようなことが解析的に結論される。すべての非線形強制振動の発生には方向性

のない対称非線形成分 $N(\omega)$ が必要である。主危険速度付近の振動と後向き同期歳差運動様式の振動も含めてすべての強制振動において、共振曲線が漸硬ばね形あるいは漸軟ばね形のどちらになるかは $N(\omega)$ の係数の符号に依存し、そのなびき方もこの係数の絶対値の大小に依存する。またすべての非線形強制振動の発生には $N(\omega)$ のみを、あるいは $N(\omega)$ に加えて $N(\omega) \sim N(n)$ のうち一つの成分のみを必要とし、どの非線形強制振動にどの成分が必要であるかが明らかとなった。得られた式の形から、共振曲線の形は往復振動系における同種の振動と同じ形であることも結論できる。このような解析結果により、各種の非線形強制振動の諸特性や発生の難易などが明確に説明される。たとえば第二章の実験装置で発生可能な振動のうち、対称性の非線形振動においては $[2p_2 - p_3]$, $[2p_2 - p_4]$ 様式の振動が最も発生しやすく、次に $[3p_2]$ 様式の $1/3$ 次分数調波振動, $[p_2 - 2p_3]$, $[p_2 - 2p_4]$, $[p_2 - p_3 - p_4]$ 様式の和差調波振動が起りやすく、そして $[-3p_3]$, $[-3p_4]$ 様式の $-1/3$ 次分数調波振動, $[-2p_3 - p_4]$, $[-p_3 - 2p_4]$ 様式の和差調波振動はまず発生しないであろうと結論できる。非対称性の非線形振動においては、 $[2p_2]$ 様式の $1/2$ 次分数調波振動, $[p_2 - p_3]$, $[p_2 - p_4]$ 様式の和差調波振動は発生しやすく、 $[-2p_3]$, $[-2p_4]$ 様式の $-1/2$ 次分数調波振動, $[-p_3 - p_4]$ 様式の和差調波振動は起りに

くいであろうこともわかる。

以上のように、第二章の実験結果も、また山本らによる非対称非線形ばね特性をもつ回転軸に発生する振動に関する諸実験結果も、この章の解析結果により説明される。