報告番号	※ ~~甲~~乙第 999 号

主論文の要旨

題名

Qualitative theory of codimension-one foliations

(余次元1の葉層構造の定性的理論)

氏名 大和一夫

主論文の要旨

報告番号 ※甲第999号 氏名 大和一夫

序．多様体上の解析的構造のいくつかは，微分型式を用いて表わされるが，微分型式のうちで基本的なのは1次のそれである．一般の1次微分型式は扱うにはあまりにも自由性をもちすぎているが，逆に閉1次微分型式を扱うことは，その多様体上で函数を考えることとあまり違わない．そこで次に，1次微分型式 ω が条件 $\omega\wedge d\omega=0$ をみたす場合を考えることに導かれる．そしてこれが主論文の扱う対象で，このような ω を（余次元1の）葉層構造（foliation）という．

主論文の目的は，多様体上に葉層構造 ω が与えられたとき，$\omega=0$ によって定義される極大積分多様体（leaf）の大域的なふるまい（定性的性質）を調べるひとつの方法を与えることである．

我々の方法の idea は，葉層構造を定義する微分方程式の変分方程式を考え，その特異点をとおして leaves のふるまいを調べることにあるが，それらの特異点はちょうど leaves が"平行"になっている点であることから，いろいろ幾何学的な論法が使えるのである．

以下，主論文の順序に従って，まず我々の主定理を述べ，次にそれらの証明に必要な概念，補題について，つづいて主定理がそれらからいかに導かれるか，残りにおいてその証明をあとまわしにしたところの補題について，その本質的な点を述べる．

さて，V^{n+1} をコンパクトな，境界のない，連結な $(n+1)$ 次元の微分可能多様体とし，この上に非特異な 1 次微分型式 ω で完全積分可能 $(\omega \wedge d\omega = 0)$ なものが与えられたとしよう．以下，(V, ω) はこのものをあらわすとし，又簡単のため，断わらない

補助用紙

限り class C^∞ のカテゴリーで考える。

<u>主定理の陳述（§1）</u>．(V,ω) に対して，ω の外微分 $d\omega$ の零点の集合 Σ

$$\Sigma = \{ x \in V \mid d\omega_x = 0 \}$$

を考える。このような集合を考えることは自然であるが，実は更に Σ は

$$\Sigma = \Sigma_* \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_n \ (\text{disjoint union})$$

と分解する。この右辺の各集合は，ω からきまるある函数の Hessian の index に関係して自然に定義される。

さて，我々はこの Σ の分解から leaves の定性的性質を論ずるのであるが，そのためには (V,ω) がある transversality condition，(T)，をみたすと仮定しなければならない。この条件 (T) については次のことが重要である。

(1) (T) がみたされていれば，Σ は V の 1 次元コンパクト部分多様体で，Σ は leaves と Σ_* の点でのみ接し，又，Σ_* は有限集合である。（それで，Σ を (V,ω) の critical サイクルとよぶ。）

(2) 条件 (T) は"一般的"である。

以下，(V, ω) は (T) をみたすと仮定する。我々の主定理は次の3つからなる。

<u>定理 I</u>. $\Sigma_0 \neq \phi$，$\Sigma_1 = \phi$ ならば，V は S^1 上の fibre bundle で，その各 fibre が leaf になっている。又，各 leaf は単連結である。

<u>定理 II</u>. $\Sigma_n \neq \phi$，$\Sigma_{n-1} = \phi$，$\Sigma_0 = \phi$ ならば V は noncompact leaves の S^1-family を含む。そしてこれらの noncompact leaves は単連結である。更に，ある条件（例えば，$\Sigma_1 = \phi$）をつけ加えると，これらの noncompact leaves の極限集合はちょうど有限個のコンパクト leaves になっている。

<u>定理 III</u>. $\Sigma_n = \phi$ ならば，V の open, dense な部分集合 V_0 が存在して，V_0 の点をとおる leaf は G. Reeb の意味において locally dense である。

§2 にうつる前に，定理 I についてひとつ注意しておこう。ω は $\omega \wedge d\omega = 0$ をみたすから，Frobenius の定理に

より ω は局所的には，閉1次微分型式の函数倍にあらわされる．定理Iは ω が大域的にそのようにあらわされるための十分条件を与えている．この意味において，この定理は微分方程式の大域的な解の存在に関する主張として興味深い．

<u>葉脈構造(§2)</u>．(V,ω) に対してその各leaf L 上に，閉1次微分型式 $\omega'|L$ が自然に定まり，こうして得られたfoliated manifold $(L, \omega'|L)$ のleaf（一般には $(n-1)$ 次元の，特異点のある多様体）を我々は (V,ω) の葉脈(vein)とよぶ．従って，V 上に，一般には特異点のある余次元2のfoliationが定義される．これを (V,ω) の葉脈構造(veined structure)と呼ぶ．正確にいうと，V 上のベクトル場 X で $\omega(X)=1$ なるものをひとつ選び，$\omega' = -\mathcal{L}_X\omega$（$\mathcal{L}_X$ はLie微分）とおく．この ω' は次の性質（補題2.1.1）をもつ：

(1) (V,ω) の各leaf L に対して，L 上の微分型式 $\omega'|L$ は閉型式である．

又，この型式 $\omega'|L$ は X のとり方によらないで決まる．

(2) leaf L の点 p について，$p\in\Sigma$ ということと，p が $\omega'|L$ の特異点であることとは同値．更に，$p\in\Sigma_i$，$i=0,\cdots,n$，ということと，p での $\omega'|L$ の Jacobian の index（負の固有値の個数）が i ということとは同値．

我々は (V,ω) の leaves の定性的性質を (V,ω) の veins の定性的性質から調べていくのであるが，§2 の後半はそのために用意されている．命題 2.2.1 は，連結，完備なリーマン多様体 M^n 及びその上の閉 1 次微分型式 α が与えられたとき，α がいつ，M 上の函数 f の微分 df として表わされ，かつ f が proper であるようにとれるかを判定する十分条件を与える．いうまでもなく主定理の証明の際に，(V,ω) の leaf L 及び，先に述べた L 上の閉型式 $\omega'|L$ に対して，$M=L$，$\alpha=\omega'|L$（あるいは $\alpha=-\omega'|L$）として，この命題を適用するのである．

<u>Tangential curves とそれらの lifts (§3).</u>

V 上のベクトル場 X で $\omega(X)=1$ なるものをひとつ固定し，$\omega' = -\mathcal{L}_X \omega$ とおき，$\{\varphi_s\}$ を X で生成される 1 径数変換群とする．まず，いくつかの基本的な言葉の定義を与えよう．V の中の曲線が <u>tangential</u> とは，その image が 1 枚の leaf に含まれるときとする．tangential な曲線 $c:[0,\tau]\to V$ に対して，その <u>η-lift</u> (η は 0 に十分近い実数) とは tangential な曲線 $\delta:[0,\tau]\to V$ で，ある連続函数 $\sigma:[0,\tau]\to\mathbb{R}$，$\sigma(0)=\eta$，によって

$$\delta(t) = \varphi_{\sigma(t)}(c(t)) \quad \text{for } {}^\forall t \in [0,\tau]$$

とあらわされるものと定義する．又，この函数 σ を，c の η-lift δ の <u>height parameter</u> とよぶ．簡単な例が示すように，tangential curve がつねに η-lift をもつとは限らない．(σ が発散する.) §3 では，tangential curve がいつ，どのような η に対して，η-lift をもつか，そのとき height parameter はどのような評価式をもつかを論じている．特に，この height parameterを上下から評価することは定理IIの証明にどうしても必要で、それを与えるのが補題3.1.1である．しかし，ここで与えた式をもっと使いやすくするためには§4まで待たねばならない(補題4.1.3)．この補題3.1.1の証明は，height parameter σ がみたす微分方程式を求めて，それをあるリッカチ型微分方程式で比較することによってなされる．

ω-preferredなリーマン構造(§4).

ここでは，Σ の近傍のveinsを扱いやすくするために，Vにωに関して都合のよいリーマン構造を入れることを考える．そして，Σ の近傍のveinsがみたすべき性質が定義4.2.1で与えられる．これから，§3で残したheight parameterの使いやすい評価式(補題4.1.3)が得られる．この他，この都合のよいリーマン構造の導入によって2つの重要な補題4.1.2及び4.1.4が得られる．前者は，命題2.2.1の主張に

おいて，オー積分 f が proper であるようにとれるという部分を更に強い形でいい表わしている．後者は，admissible tangential curve（その上での ω' の積分が"常に小さくなる"ような tangential curve）が，前と後に Σ_n か Σ_0 の点にぶつかるまでいくらでも延長できることを教える．

定理Ⅰの証明（§5）

単連結なコンパクト leaf の存在がいえて，G.Reeb の大域的安定性定理から定理Ⅰが示される．§5の後半では，Σ が自然な向きをもつこと，そしてそのホモロジー類 $[\Sigma] \in H_1(V;\mathbb{Z})$ が，定理Ⅰの仮定のもとで，leaves のオイラー標数と単純な関係式をもつことが論じられる．それから次の系が得られる．

系5.3.3. 定理Ⅰと同じ仮定のもとで，$[\Sigma]$ が nontrivial ならば，(V, ω) の leaves に横断的な任意のベクトル場はつねに周期解をもつ．

補助用紙

定理IIの証明（§6）

この定理の前半（noncompact leavesのS^1-family Rの存在）は容易に示されるが，このRの極限集合がcompact leavesになっていることを主張する後半は，更にいくつかの補題を必要とする．本質的なのは，このS^1-family Rに含まれるveins（すべてcompact）の，Rの境界の近くでの拡がり方が上からおさえられるという事実で（これは，6.4でその基礎的部分が論じられ，証明される．），これから補題6.2.4が得られ，そして定理IIが証明される．

定理IIIの証明（§7）

§4で準備した補題の他に，G.Reebによる，leafの位相的性質に関する結果が用いられる．（我々はωから出発したから，leafを扱うのに量的（解析的）な議論ができ，Reebの位相的方法による結果がつよめられ，精密化されるのである．）

命題4.1.1及び4.2.1の証明(§8)

前半で，Vに，ωに関して都合のよいリーマン構造が入ること(命題4.1.1)が証明される．そのために，Σの近傍で，適当な座標系が存在してそこではωが標準的な形で表わされること(補題8.2.1-3)が必要になる．これらの補題の証明は，Σの各点の近傍では座標系が選べて，そこではωが標準的な形であらわされ(補題8.1.1,2)，次に，有限個の，このような座標近傍でΣをcoverして，それらの2つが共通部分をもったとき，そこでは"両立する"ように出来ること(補題8.1.3,4)をしめすことによってなされる．§8の後半は，Σの近傍で，ωと上で与えた都合のよいリーマン構造に関して，都合よいものが存在すること(命題4.2.1)が証明される．

付録

(V,ω)に関する条件(T)が一般的

補助用紙

であることが R.Thom の jet transversality lemma を用いて証明される.
