報告番号	※ ~~甲~~ 乙 第 1036 号

主論文の要旨

題名 On the canonical holomorphic map from the moduli space of stable curves to the Igusa monoidal transform

安定曲線のモジュライ空間から井草単項変換への自然な正則写像について

氏名 浪川幸彦

主論文の要旨

報告番号 ※乙第1036号　氏名 浪川幸彦

代数幾何学に於て、ある幾何的な対象の同型類を代数多様体によってパラメトライズする、いわゆるモジュラスの問題は、極めて豊かな、しかし困難な研究課題に満ちている。この中で、非特異完備曲線とアーベル多様体のモジュラスの理論が比較的古くから知られ、最も美しい代数幾何学の理論の一つとして双璧をなしている。しかもなお更にその上に構築さるべき未解決の問題は多い。ところで、すぐ後で具体的に述べるが、これら二つの理論の間には一つの美しいかけ橋がかゝっている。本論文はこのかけ橋の上に更なる一石を積み上げようとするものである。

M_gを種数gの非特異完備代数曲線の(粗)モジュラス空間、$\mathfrak{S}_g^*$をg次元主偏極(principally polarized) Abel多様体の(粗)モジュラス空間とする。空間$\mathfrak{S}_g^*$は解析的に、Siegel上半空間$\mathfrak{S}_g=\{\Omega\in M_g(\mathbb{C})\ ;\ {}^t\Omega=\Omega,\ \mathrm{Im}\,\Omega>0\}$の$g$次シンプレクティック群$Sp(g,\mathbb{Z})$の作用

による商空間 $Sp(g,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g$ として定義される。これら二つの空間 $\mathcal{M}_g$, $\mathfrak{A}_g^*$ はいずれも擬射影的(quasi-projective)代数多様体である。曲線Cの同型類に対して、CのJacobi多様体の同型類を対応させることにより、自然な写像 $\tau:\mathcal{M}_g\to\mathfrak{A}_g^*$ が定義される。名高いTorelliの定理は、この写像 τ が単射であることを主張する。実はさらに強く、τ は代数多様体間の射であり、$\mathcal{M}_g$ の τ による像は $\mathfrak{A}_g^*$ の部分多様体となることが知られる。

ところで g が正ならば、$\mathcal{M}_g$ も $\mathfrak{A}_g^*$ も完備ではない。そこで $\mathcal{M}_g$ と $\mathfrak{A}_g^*$ の幾何学的に意味のある完備化を求める問題が生じた。現在までにいくつかの完備化が知られている。$\mathcal{M}_g$ に関してはDeligneとMumfordの導入した「安定曲線(stable curve)」のモジュラス空間 $\mathcal{S}_g$ が挙げられる。又 $\mathfrak{A}_g^*$ に関しては、いわゆる佐武コンパクト化 $\overline{\mathfrak{A}}_g^*$ が良く知られている。$\overline{\mathfrak{A}}_g^*$ は集合としては、

$$\overline{\mathfrak{A}}_g^* = \mathfrak{A}_g^* \cup \mathfrak{A}_{g-1}^* \cup \cdots \cup \mathfrak{A}_1^* \cup \mathfrak{A}_0^*$$

として定義され、この上に自然な射影多様

体の構造を与えたものである。ところで $\overline{\mathcal{A}}_g^*$ の「へり」$\partial_g = \overline{\mathcal{A}}_g^* - \mathcal{A}_g^*$ は余次元 g と小さく、この上で $\overline{\mathcal{A}}_g^*$ は正規ではあるが高い特異性を持つ。井草準一教授は（やゝ不正確な表現であるが）$\overline{\mathcal{A}}_g^*$ の特異点解消を試み、$\overline{\mathcal{A}}_g^*$ の ∂_g に沿った単項変換 $\hat{\mathcal{A}}_g^*$ の特異性を研究された。その結果一般には $(g \geq 4)$ この方法では特異性が解消されないことが分った。しかし $\mathcal{A}_g^*$ 内の点列で、その $\mathcal{A}_g$ に於ける代表系の虚数部分が主錐 (principal cone) と呼ばれる二次形式論的意味のある特殊な錐から有限の距離にあるようなものの、極限となっている点全体の集合を考えて $\mathcal{A}_g^\circ$ であらわす。$\mathcal{A}_g^\circ$ は $\hat{\mathcal{A}}_g^*$ の稠密開部分集合で、明らかに $\mathcal{A}_g^*$ を含む。すると $\mathcal{A}_g^\circ$ 上の特異性は有限部分的被覆をとれば解消できることを井草教授は示された。（正確な記述は定理 (2.8) 参照。）さて、$\hat{\mathcal{A}}_g^*$ の正規化 $\tilde{\mathcal{A}}_g^*$ も $\mathcal{A}_g^*$ の一つの完備化を与える。この $\tilde{\mathcal{A}}_g^*$ をこゝでは井草単項変換と名付ける。井草教授の結果から、特に $\mathcal{A}_g^\circ$ は正規であり、従って $\mathcal{A}_g^\circ$ は $\tilde{\mathcal{A}}_g^*$ の開部分集合と見做すことがで

きる。$\tilde{\mathcal{N}}_g^*$ から $\bar{\mathcal{N}}_g^*$ への自然な全射を p であらわしておく。$\mathcal{S}_g$ および $\tilde{\mathcal{N}}_g^*$ に於て付加された「へり」はともに余次元1である。

さて、冒頭に述べた単射 $\tau: \mathcal{M}_g \to \mathcal{N}_g^*$ がこれらの完備化間の写像 $J: \mathcal{S}_g \to \bar{\mathcal{N}}_g^*$ へ拡張できるかどうか、もしできるならば、J はどんな写像であるかがたゞちに問題となる。前者について肯定的な答え、後者について満足すべき解答を与えることが本論文の目標である。

先ず定理4(§6)に於て、第一の問題に肯定的解答、即ち写像 $\tau: \mathcal{M}_g \to \mathcal{N}_g^*$ は正則写像 $j: \mathcal{S}_g \to \tilde{\mathcal{N}}_g^*$ に拡張されることが示される。合成写像 $J = p \circ j: \mathcal{S}_g \to \tilde{\mathcal{N}}_g^* \to \bar{\mathcal{N}}_g^*$ は安定曲線 C の同型類を C の正規化の Jacobi 多様体の同型類にうつす(§5, 定理3)。証明に際してはまず τ が J に拡張されることを示し、次いで J が j に持ち上がることを証明する。τ が解析的には、曲線 C の同型類に対し、C の周期行列の $Sp(g, \mathbb{Z})$ による剰余類を対応させることによって得られることに着目すれば、特異点をもった安定曲

線に対応する $\mathcal{S}_g$ 内の点の近傍での周期行列の挙動を述べる定理2(§3)が証明の基礎となることが理解される。この定理に、井草教授が展開された方法、特に中心錐(central cone)とFourier-Jacobi級数の概念を応用して定理4が示される。証明の過程で二次型式論に於る一つの定理を用いる必要があり、その定理は第一節で定理1として証明される。

次いで写像 $j: \mathcal{S}_g \to \tilde{\mathcal{V}}_g^*$ が調べられる。

まず安定曲線 C に対して、次の様なグラフを対応させる。即ち C の既約成分を頂点、重複点を辺、その重複点の属している既約成分達を重複点に対応する辺の端の頂点達としてグラフを作る。このグラフが平面内に描かれるならば、C に対応する $\mathcal{S}_g$ の点の j による像は、先に述べた $\mathcal{V}_g^{\circ}$ に入る(§7、定理5)。

つぎに、$\mathcal{U}_g$ を既約な安定曲線に対応する $\mathcal{S}_g$ 内の点の集合とする。$\mathcal{U}_g$ は $\mathcal{S}_g$ 内の稠密開集合で明らかに $\mathcal{M}_g$ を含む。又上記の定理5によって $\mathcal{U}_g$ の j による像は $\mathcal{V}_g^{\circ}$

に含まれる。第八節の定理7に於て j は $\mathcal{U}_g$ 上単射であることを証明する。又 $g=2$ の場合には j は同型である（§9, 定理8）。$g \geq 3$ で，$\mathcal{U}_g$ の補集合の余次元1の一般点上では j はもはや単射でないことが容易に示されるので、これら二つの定理は Torelli の定理の最も自然な一つの拡張を与える。定理7の証明では，一般 Jacobi 多様体の理論と古典的な代数函数論とが本質的役割を果す。