

2種類イオンプラズマ中の
非線形磁気音波と重イオン加速

名古屋大学図書	
和	1253481

1995年
樋田 美栄子

概要

磁気音波は、磁場が存在するプラズマにおける、最も基本的な波の一つであり、核融合および宇宙のプラズマにおいて重要な役割を果たしている。このため、非線形磁気音波の伝播と、それに伴う粒子加速については、長年にわたり活発な研究が行われてきた。

核融合および宇宙のプラズマには、多くの場合、多種類のイオンが含まれており、このことは、様々な現象を解明するうえで、無視することのできない要素の一つとなっている。しかし、非線形磁気音波に関する、従来の主な理論およびシミュレーション研究は、イオンを1種類と仮定して進められてきた。したがって、従来の研究では不十分であり、多種類イオンの存在を考慮に入れた研究が、強く望まれる。

本研究では、2種類のイオンと電子からなるプラズマ中を、磁場に直角方向に伝播する磁気音波について、非線形の振る舞いを調べた。さらに、それを基にして、非線形磁気音波は軽イオンとは全く異なったメカニズムで、重イオンを加速することを明らかにした。

2種類のイオンが存在すると、磁気音波は低周波モードと高周波モードに分裂する。低周波モードの周波数は、長波長の極限で0に近づく。このモードに対して、従来の減衰摂動法を適用し、非線形の振る舞いを記述するKdV方程式を導出した。ただし、このKdV方程式が成立するのは、非常に小振幅の場合に限られる。一方、高周波モードは、有限なカットオフ周波数を持つ。それにもかかわらず、非線形方程式としてKdV方程式が導出されることを、新しい展開法を導入して示した。高周波モードのKdV方程式は、極めて小振幅の場合は適用できないが、低周波モードのそれに比べると、ずっと広い振幅領域で成立する。

次に、宇宙プラズマと同様の、主成分を軽イオン、副成分を重イオンとするプラズマを仮定し、高周波モードの非線形波におけるイオンの運動を解析した。軽イオンは、1種類イオンプラズマの場合と同様、一部の粒子が磁気音波中に形成される縦電場によって反射され、加速される。それに対し、本論文では、重イオンは全ての粒子が横電場によって加速され得ることを示し、加速された重イオンの速さを定量的に求めた。大振幅磁気音波は、重イオンをおよそ波の伝播速度にまで加速することが可能である。さらに、2種類のイオンと電子の運動、およびそれらに伴う電磁場の変動を全て含んだ、粒子モデルに基づいた計算機シミュレーションを行なって、非線形磁気音波によるイオンの加速を調べた。シミュレーション結果は、軽イオンと重イオンはともに強く加速されること、そしてそれらの加速機構は、全く異なったものであることを、はっきりと表すものであった。また、加速された重イオンの速さの観測値は、理論的な予測と良く一致した。

目次

1	はじめに	1
1.1	プラズマ中の非線形波動	1
1.2	非線形磁気音波と粒子加速	2
1.3	多種類イオンを含むプラズマ	4
1.4	本論文の目的と概要	5
2	1種類イオンプラズマ中の磁気音波	8
2.1	線形分散関係式	8
2.2	非線形方程式	9
2.2.1	KdV方程式	9
2.2.2	遞減摂動法	10
2.3	大振幅磁気音波と粒子加速	12
2.3.1	有限振幅磁気音波の構造	12
2.3.2	イオン反射	14
3	2種類イオンプラズマ中の磁気音波	17
3.1	線形分散関係式	17
3.1.1	低周波モード	21
3.1.2	高周波モード	24
3.2	非線形方程式	27
3.2.1	規格化	28
3.2.2	低周波モードのKdV方程式	29
3.2.3	高周波モードのKdV方程式	31
3.2.4	展開法の検討	35
3.2.5	KdV方程式の適用範囲	37
4	磁気音波による重イオン加速	40
4.1	重イオンの加速メカニズム	40
4.2	シミュレーションモデル	47
4.3	シミュレーション結果	51
4.3.1	小振幅の場合	51
4.3.2	大振幅の場合	55
4.3.3	重イオン加速：理論との比較	66

5	まとめ	68
	謝辞	70
付録 A	分散式の導出	71
付録 B	低周波モードの分散関係式	73
付録 C	線形物理量	75
付録 D	低周波モードの KdV 方程式の導出	76
付録 E	高周波モードの KdV 方程式の導出	80
付録 F	流体シミュレーション	85
付録 G	孤立波における物理量の最大値	89
	参考文献	92

1 はじめに

1.1 プラズマ中の非線形波動

荷電粒子の集合体であるプラズマ中には、電場・磁場を介して多種多様の波が存在する [1]。また、それらの波の振幅を増大させる不安定性は、粒子の速度分布を原因とするミクロなものから、プラズマのマクロな構造に依存するものまで、非常に多岐に渡っている [2][3]。このため、プラズマは非線形現象の宝庫と呼ばれ、非線形波動の研究が他分野に先駆けて、活発に行なわれてきた。

プラズマ中の非線形現象を解析しようとする場合、その基礎方程式系は、多くの独立変数と従属変数を含む複雑なものである。そこで、より取り扱いやすい非線形方程式を導出し、その解の性質を調べることが、まず行なわれる。最も代表的な非線形方程式は、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式である。これは、もともと浅い水面上を伝播する有限振幅波について導かれたものであるが [4]、プラズマ中の波についても広範囲に研究されてきた。そして、イオン音波や磁気音波の長波長領域の非線形の振る舞いが、KdV 方程式で記述されることが示された [5]-[8]。

1965年に Zabusky and Kruskal[9] は、KdV 方程式を数値計算で解き、左右対称な孤立波が波の衝突の前後でもその個性を失わず、極めて安定に伝播することを発見した。そして、その粒子的性質から、その波動をソリトンと呼ぶことを提唱した。その後ソリトンの存在が解析的に証明され [10]、これを契機として、電子波に対する非線形シュレディンガー方程式など、KdV 方程式以外の非線形方程式についても精力的に研究された [11]-[13]。

複雑な基礎方程式系から、非線形方程式を導出する際には、非線形現象の本質を抽出する正しい近似を行なわなければならない。その代表的な手法の一つとして、逓減摂動法があげられる。これは、Washimi and Taniuti によって、1966年にイオン音波の KdV 方程式の導出の際に導入されたものである [5]。逓減摂動法では、長波長領域における波の線形分散関係が、非線形方程式を決定するための本質的な役割を果たす [14]。イオン音波や磁気音波は、長波長領域で弱い分散を示す、すなわち、線形分散関係式が

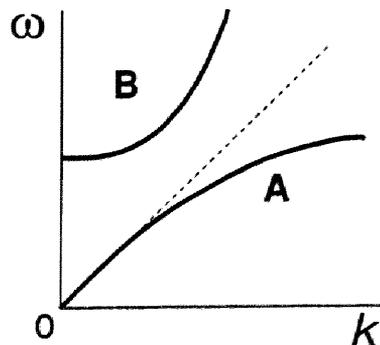


図 1.1: 分散関係の概観図

$$\omega/k = v_{p0} - \mu k^2 \quad (1.1)$$

の形で書ける。ここで、 ω は波の周波数、 k は波数、 v_{p0} は長波長の極限での位相速度、 μ は分散を表す係数である。(1.1) 式を、図で示すと、図 1.1 の線 A で表されるような形になる（ここでは、 $\mu > 0$ とした）。KdV 方程式は、非線形効果と (1.1) 式で表される分散効果の釣り合いを記述する式である。そして、(1.1) 式および図 1.1 の線 A からわかるように、従来 $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ となることが、KdV 方程式が導出されるための必要条件であると考えられてきた。なお、図 1.1 の線 B で表されるような有限なカットオフ周波数を持つ波（例えば、電子プラズマ波）の長波長領域の振る舞いは KdV 方程式では記述されない。

非線形波動が壊れることなく、安定に伝播するためには、非線形効果による波の突っ立ちを抑えることが必要である。ソリトンでは、分散効果はその役割を担っている。分散の他に、非線形効果を抑えるものとして、エネルギー散逸がある。散逸が伴うと、波は左右非対称な衝撃波となる。通常的气体では分子間衝突が、エネルギー散逸をもたらす。それに対し、粒子間衝突がほとんど無視できるプラズマでは、どのようにして波のエネルギーが散逸するのかが、重要な問題となる [15]-[17]。

プラズマ中の波のエネルギー散逸機構の一つとして、粒子加速があげられる。荷電粒子の加速現象は、宇宙でも実験室でもしばしば見出され、プラズマ物理の最も重要な研究課題の一つとなっている。磁場を用いたプラズマの閉じ込め実験では、高エネルギー粒子ビームの発生が、古くから報告されている [18]。また、新しい粒子加速器として、プラズマ中の加速現象を応用した研究が、現在行なわれている [19]。宇宙に目を向けると [20][21]、高エネルギー宇宙線（最高エネルギーは $\sim 10^{20}$ eV）が、宇宙空間を飛び交っていることは良く知られている。最も身近な天体である太陽でも、フレア時に高エネルギー粒子が生成されており、その最高エネルギーは 相対論的エネルギー ($\sim 10^{10}$ eV) にまで及ぶ。このような粒子加速現象を議論する際にも、非線形波動の研究はその基礎となる。

1.2 非線形磁気音波と粒子加速

磁場とプラズマの圧力を復元力として伝播する磁気音波（速い磁気流体波ともよばれている）は、外部磁場の中におかれたプラズマ中を伝播する、最も基本的な波の一つである。このため、磁場によるプラズマの閉じ込めを行なう核融合炉、および天体磁場を伴う宇宙プラズマにおいて、磁気音波は重要な役割を果たしている。例えば、核融合プラズマの有効な加熱手段の一つとして、磁気音波による加熱が研究されている [22][23]。また、地球磁気圏のまわりの定在衝撃波や、惑星間空間で観測されている磁場の不連続構造等は、磁気音波の衝撃波の実例としてあげられる [24][25]。

非線形磁気音波に関する研究は、プラズマ研究の初期の時代である 1950 年代から現在に至るまで、多くの人々によって精力的に進められてきた [26]-[40]。最も初期の研

究は、Adlam and Allen[26] と Davis et al.[27] によるものである。彼らは、電子とイオンの二流体の基礎方程式系から、有限振幅磁気音波の定常解を導出した。この定常解には孤立波型の解が含まれる。その後、1960年に Gardner and Morikawa [7] は直角伝播の磁気音波の非線形の振る舞いが近似的に KdV 方程式で記述されることを示した。この研究は、その後の非線形波動の研究に大きな影響を与えている。また、磁場に斜めに伝播する非線形磁気音波も KdV 方程式で記述されることが、他の著者によって示された [28]-[30]。

非線形磁気音波は、振幅が大きくなると、一部のイオン粒子を反射し、それらにエネルギーを与え加速するということが、1960年代に理論的に示された [15][31]。反射は、伝播方向に形成される、電場によるものである。このため、非線形磁気音波の内部構造を解明するためには、流体的な描像では不十分で、粒子的な効果を含めた議論が必要となった。しかし、粒子的効果を純粹に理論的に取り扱おうとすると、非常に難しい問題となる。そこで、粒子モデルに基づいた、計算機シミュレーションを使った研究が、精力的に行なわれた。粒子シミュレーションでは、プラズマを構成する粒子の運動を、自分自身がつくる自己無矛盾の電場・磁場をもとに、運動方程式を用いて追跡する。そのようなシミュレーション研究の結果、大振幅磁気音波の主要なエネルギー散逸機構は、イオン粒子の反射であることが明らかにされた [32]-[39]。なお、このような反射粒子については、地球磁気圏のまわりの定在衝撃波の衛星観測において、その存在が確認されている [41]。

磁気音波によって加速された粒子のエネルギーは、磁場が強くプラズマ密度が低いほど大きい。特に、電子のサイクロトロン周波数 Ω_e が、プラズマ周波数 ω_{pe} より大きいプラズマでは、粒子は非常に短時間で相対論的エネルギーにまで加速される [42][43]。そのようなプラズマは、例えば、太陽の磁力管内部に見出すことができる (図 1.2 参照)。太陽フレアは、この磁力管内に蓄えられたエネルギーが、磁力線再結合等を通じて、急激に開放された結果、起こるものと考えられている [44]。フレア時に発生する高エネルギー粒子の加速機構については、フェルミ加速のような、粒子が多数回散乱されて、徐々に高エネルギーに達するという、統計的加速が定説とされてきた [45]。しかし、1980年代の観測により、相対論的エネルギーへの加速が、非常に短時間 (~ 1 秒以下) で起こっていることが明らかとなった [46]-[48]。このため、統計的加速よりもずっと効率の良い加速機構が必要となり、その機構として磁気音波による加速が議論された [49][50]。つ

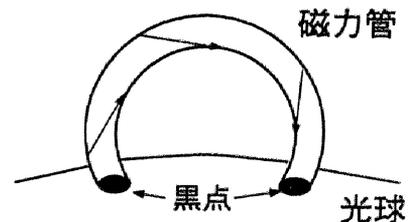


図 1.2: 太陽の磁力管の概観図。太陽の内部の対流層で生成された磁力管が、磁気浮力によって太陽大気中に現われる。磁力管の太陽表面（光球面）での切り口が黒点である。フレアは、磁力管内に蓄えられた磁気エネルギーの急激な開放現象である。

まり、図 1.2 のような磁力管内部に、フレアーに伴って、大振幅磁気音波が励起されるとすれば、磁気音波による加速は、急激な粒子加速を無理なく説明することができる。

これらの非線形磁気音波の伝播と、それに伴う粒子加速に関する理論およびシミュレーション研究は、主に 1 種類のイオンと電子からなるプラズマを仮定して行なわれてきた。しかし、実際のプラズマには、多くの場合、多種類のイオンが存在する。

1.3 多種類イオンを含むプラズマ

我々の興味の対象となるプラズマの多くは、多種類のイオンを含んでいる。例えば、最も実現が可能だと思われる DT 反応の核融合炉には、燃料である重水素 D とトリチウム T、そして生成物である α 粒子と中性子等が存在する。また、宇宙のプラズマには、表 1.1 に示したように、水素とヘリウムの主成分イオン（存在比は約 10 対 1）と、その他少量であるが、炭素や鉄などの重イオンが含まれている。

表 1.1 宇宙プラズマの化学組成 (Si の存在量を 1.0 とする)

element	Local Galactic	Solar Corona
H	2.71×10^4	2.55×10^4
He	0.26×10^4	0.25×10^4
C	12.6	6.0
N	2.25	1.0
O	22.5	6.3
Ne	3.25	0.9
Mg	1.05	0.95
Si	1.0	1.0
S	0.53	0.22
Fe	0.88	1.0

Meyer (1985) [64] より

このような多種類イオンの存在は、核融合および宇宙のプラズマにおいて、興味深い課題を提供している。例えば、核融合研究では、プラズマ加熱の有効な方法の一つとして、少数粒子加熱という手法が研究されている [51]-[55]。これは、多種類イオンを含むプラズマ中の線形波の伝播特性を、利用したものである。また、宇宙プラズマでは、太陽フレアーにおける ^3He 過剰現象が、注目すべき問題の一つとしてあげられる [56]-[58]。通常の宇宙組成では、 ^3He の存在量は、 ^4He のそれに比べて、非常に小さい。ところが、太陽フレアーのなかには、その時つくられる高エネルギー粒子の中に、極めて多くの ^3He 粒子 (^4He より多い場合もある) が含まれていることがある。この現

象に対する理論的モデルとして、多種類のイオンが存在するプラズマ中の不安定性に注目したものが、いくつか提出されている [59]-[62]。

粒子加速現象の解明においても、多種類イオンの存在を無視することができない。例えば、観測によると、太陽の大規模なフレア時に生成される、高エネルギー粒子の化学組成は、平均すれば背景のコロナの化学組成とほぼ等しくなっている [63]-[66]。これは、重イオンが軽イオンとほぼ同じ割合で加速されたことを表している。また、惑星間空間の衝撃波においても、軽イオンと同様に、重イオンも高エネルギーに加速されているという観測例がある [67]。加速機構は、これらの高エネルギー粒子の化学組成を説明し得るものでなければならない。

1.2 節で述べたように、非線形磁気音波による加速は、太陽フレア時に発生する高エネルギー粒子の加速機構としても、議論されてきた。この加速機構は、高エネルギー粒子の化学組成を説明できるのであろうか。多種類イオンプラズマ中を非線形磁気音波が伝播すると仮定すると、重イオンはほとんど反射されないものと考えられる [68][69]。したがって、反射によってのみ加速が起こるとすると、非線形磁気音波によって軽イオンは加速されるが、重イオンはほとんど加速されないということになる。これは、太陽フレア時に発生する高エネルギー粒子の平均の化学組成と矛盾している。重イオンは、軽イオンとは異なったメカニズムで加速されるのであろうか。この問題に答えるためには、まず、多種類イオンの存在が、非線形磁気音波の性質にどのような影響を与えるのかを調べなければならない。そして、その結果に基づいて、磁気音波中のそれぞれのイオンの運動を解析することが必要である。

1.4 本論文の目的と概要

1.3 節で述べたように、多種類イオンの存在は、プラズマ中の物理現象を考察するうえで、重要な要素の一つである。しかし、非線形磁気音波の伝播と、それに伴う粒子加速に関する、理論およびシミュレーション研究は、主にイオンを1種類と仮定して行なわれてきた。したがって、従来の研究では不十分であり、多種類イオンの存在を考慮に入れた研究が、不可欠である。

本論文は、2種類のイオンと電子からなるプラズマ中の、磁気音波の非線形の振る舞いと、磁気音波によるイオンの加速を、調べることを目的とする。磁場に直角方向に伝播する磁気音波を考察の対象とし、理論と計算機シミュレーションを使った解析を行なう [70]-[72]。

第2章では、本研究の基礎となる、1種類イオンプラズマにおける、直角伝播の磁気音波の性質と、非線形波による粒子加速について、定量的な議論を復習する。

第3章では、最初に、2種類のイオンと電子から構成される3流体の方程式系に基づいて、磁気音波の線形分散関係を詳しく調べる。2種類のイオンが存在すると、磁気

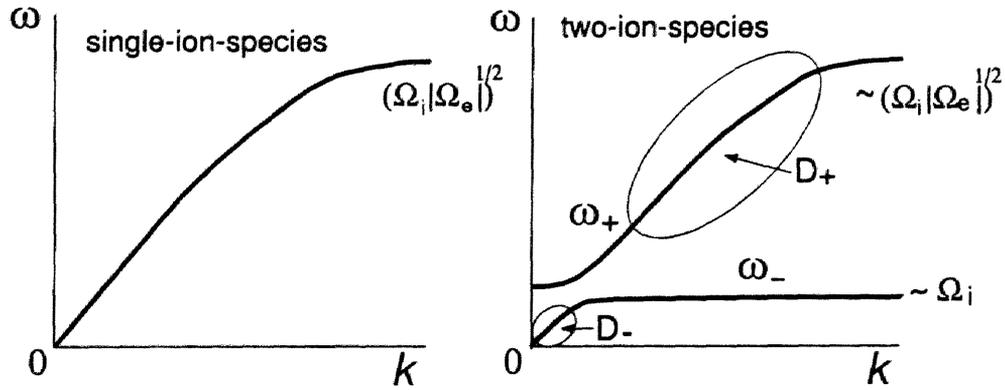


図 1.3: 磁気音波の線形分散関係の概観図。左図が1種類イオンの場合、右図が2種類イオンの場合である。2種類イオンプラズマでは、磁気音波は、低周波モード ω_- と高周波モード ω_+ に分裂する。領域 D_- と D_+ の分散関係は (1.1) 式の形で書ける。

音波は、図 1.3に示したように、低周波モード ω_- と高周波モード ω_+ に分裂する。低周波モードは $k \rightarrow 0$ で、 $\omega \rightarrow 0$ であり、イオンのサイクロトロン周波数 Ω_i のオーダーの周波数で共鳴する [73]。長波長領域 (図 1.3の領域 D_-) の分散関係は、(1.1) 式の形で書けるが、分散を表す係数 μ は1種類イオンプラズマの場合より大きい [74]。一方、高周波モードは有限なカットオフ周波数 ($\sim \Omega_i$) を持ち [75]、低域混成周波数 $\sqrt{|\Omega_i \Omega_e|}$ のオーダーの周波数で共鳴する。ここで、 Ω_e は電子のサイクロトロン周波数である。高周波モードは、 $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ ではないが、 $\Omega_i \ll \omega \ll \sqrt{|\Omega_i \Omega_e|}$ の広い周波数領域で、(1.1) 式の形の分散関係を持つ。図 1.3では、その領域を D_+ で表した。

次に、線形分散関係をもとにして、2種類イオンプラズマ中の磁気音波の非線形方程式を導出する [70][71]。特に、分散関係が (1.1) 式の形で書ける領域に注目した。1.1 節で述べたように、逓減摂動法を用いて KdV 方程式を導くためには、 $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ であり、長波長領域で (1.1) 式の形の分散関係を持つことが、必要条件だとされてきた。低周波モードは、この条件を満たしている。このため、低周波モードについては、従来の逓減摂動法を使って、KdV 方程式を導出した。ただし、その適用範囲は非常に小振幅の場合に限られている。それに対し、高周波モードは、有限なカットオフ周波数を持ち、長波長領域の分散は強い。しかし、図 1.3に示したように、比較的短波長の領域の分散関係は、(1.1) 式の形で表せる。しかも、その領域は、低周波モードのそれに比べて、ずっと大きい。本研究では、新しい展開法を開発し、高周波モードの非線形の振る舞いが、KdV 方程式で記述されることを示した。適用範囲には振幅の下限が存在するが、低周波モードよりも広い振幅範囲で KdV 方程式が成立する。有限なカットオフ周波数を持つ高周波モードに対し、KdV 方程式が得られたということは、 $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ ということが、KdV 方程式導出のための必要条件ではなく、さらに多様な

分散式を持つ波について、KdV 方程式が得られる可能性があることを示唆している。

第4章の前半では、宇宙プラズマと同様の主成分を軽イオン、副成分を重イオンとするプラズマを仮定し、非線形磁気音波中のイオンの運動を解析する。高周波モードの非線形波の方が、低周波モードのそれより、大振幅で安定に伝播できるので、高周波モードを考察の対象とした。そして、重イオンは、軽イオンとは全く異なったメカニズムで、高エネルギーに加速されることを明らかにした [72]。

磁気音波には、波の伝播方向の縦電場と、垂直方向の横電場が存在する。主成分の軽イオンは、1種類イオンプラズマの場合と同様、一部の粒子が縦電場によって反射され、加速される。それに対し、本論文では、副成分の重イオンは全ての粒子が横方向の電場によって加速され得ることを示し、加速された重イオンの速さを理論的に見積った。その速さは波の振幅に強く依存するが、小振幅の孤立波型パルスの場合と、大振幅衝撃波型パルスの場合について具体的な値を予測した。小振幅波の場合、最大速度はアルヴェン速度 v_A よりずっと小さく、 $v \sim (M-1)^{1/2}(m_e/m_i)^{1/2}v_h$ と与えられる。ここで、 v_h は高周波モードの特徴的な速度（近似的には、図 1.3 の領域 D_+ での群速度）であり、 v_A より少し大きい値をとる。 M は v_h で規格化したマッハ数、 m_e/m_i は電子とイオンの質量比である。一方、大振幅波の場合の最大速度は、 $v \sim Mv_h$ と見積ることができる。すなわち、大振幅磁気音波は重イオンをアルヴェン速度以上に加速することが可能である。

第4章の後半では、粒子モデルに基づいた計算機シミュレーションを使って、重イオンの加速を調べる。使用したシミュレーションコードは、空間1次元速度3次元の相対論的電磁粒子コードで、2種類のイオンと電子の運動を全て含んだものである。磁気音波を励起させたところ、高周波モードに対応する非線形波の伝播が観測された。小振幅孤立波型パルスの場合と、大振幅衝撃波型パルスの場合のシミュレーション結果を詳しく示す。どちらも、理論の予測通り、重イオンが加速されることを表している。特に、大振幅波の場合のシミュレーション結果は、軽イオンと同様、重イオンも強く加速されること、および、その二つの加速メカニズムは全く異なったものであることをはっきりと示すものであった。また、観測された重イオンの速さは、理論的な見積もりと良く一致している。

本研究は、2種類以上のイオンが存在するプラズマにおける、非線形磁気音波の振る舞いを考察する際に、その基礎を与えであろう。さらに、粒子加速現象の解明においても、高エネルギー粒子の化学組成を説明するための、重要な手掛かりになるものと考えられる。

2 1種類イオンプラズマ中の磁気音波

本論文は、2種類イオンと電子から構成されるプラズマ中を磁場に直角方向に伝播する磁気音波を研究の対象とし、その非線形の振る舞いと非線形波によるイオンの加速を調べることを目的とする。そこで本章では、その基本となる、1種類イオンプラズマ中の直角伝播の磁気音波の性質と非線形磁気音波による粒子加速について、これまでの研究を概観する。また、KdV方程式、およびその逡減摂動法を使った導出法についても、良く知られていることではあるが第3章で必要となるので、簡単に触れておく。

2.1 線形分散関係式

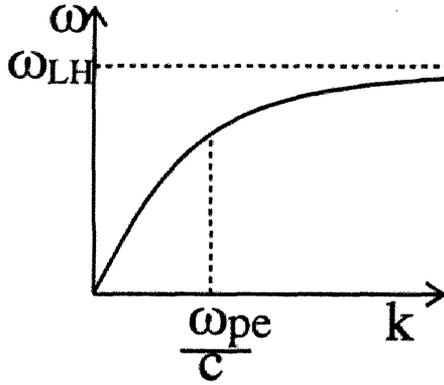


図 2.1: 1種類イオンプラズマ中の直角伝播の磁気音波の線形分散関係

1種類のイオンと電子からなるプラズマ中を、磁場に対して直角方向に伝播する磁気音波の線形分散関係式は、温度の効果を無視した場合、次のようになる。

$$\omega = \frac{v_A k}{(1 + c^2 k^2 / \omega_{pe}^2)^{1/2}}. \quad (2.1)$$

ここで ω は波の周波数、 k は波数、 v_A はアルヴェン速度、 ω_{pe} はプラズマ振動数、 c は光速である。 v_A と ω_{pe} は、平衡状態の磁場 B_0 とプラズマ数密度 n_0 、およびイオンの質量 m_i 、電子の質量 m_e と電子の電荷 $-e$ を使って

$$v_A = B_0 / (4\pi n_0 m_i)^{1/2}, \quad (2.2)$$

$$\omega_{pe} = (4\pi n_0 e^2 / m_e)^{1/2}, \quad (2.3)$$

と定義される。(2.1)式に基づいた ω の k に対する依存性を図 2.1に示す。 k の小さい領域では、 ω は k に比例して増加するが、 $k \sim \omega_{pe}/c$ で増加の仕方が鈍り、 $k \rightarrow \infty$ で低域混成周波数 $\omega_{LH} \equiv \sqrt{|\Omega_i| |\Omega_e|}$ に近づく。ここで、 Ω_i はイオンのサイクロトロン周波数、 Ω_e は電子のサイクロトロン周波数で、それぞれ

$$\Omega_i \equiv eB_0 / (cm_i), \quad \Omega_e \equiv -eB_0 / (cm_e), \quad (2.4)$$

と定義される。1種類イオンプラズマ中の直角伝播の磁気音波の分散関係では、電子の質量が重要な役割を果たしている（電子の質量を0とすると分散は現われない）。

$ck/\omega_{pe} \ll 1$ の長波長領域では位相速度は

$$\omega/k = v_A [1 - (c/\omega_{pe})^2 k^2/2], \quad (2.5)$$

と近似することができる。これは、(1.1) 式と同じ形をしている。すなわち、直角伝播の磁気音波は長波長領域で弱い分散を示す。

2.2 非線形方程式

2.2.1 KdV 方程式

振幅は小さいが非線形性が無視できない場合、1 種類イオンプラズマ中の磁気音波の長波長領域での振る舞いは、近似的に KdV 方程式で記述される [7][8]。また、イオン音波も KdV 方程式を非線形方程式として持つことは良く知られている [5][6]。磁気音波およびイオン音波の分散関係は、どちらも長波長領域において次の形で書ける。

$$\omega/k = v_{p0} - \mu k^2 = v_{p0}(1 - \lambda^2 k^2/2). \quad (2.6)$$

ここで、 v_{p0} は長波長の極限での位相速度、 μ は分散を表す係数であり、 λ は分散が重要になる波長の目安を与える。波の伝播方向を x 方向とし、 v_{p0} で動く系でみると KdV 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_0 v_{p0} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v_{p0} \lambda^2}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (2.7)$$

となる。ここで、 u は擾乱量（特徴的な量で規格化された無次元の量）、 α_0 は定数である。KdV 方程式 (2.7) の第 2 項は対流微分に起因する非線形効果を、第 3 項は分散効果をそれぞれ表している。1 種類イオンプラズマ中の直角伝播の磁気音波の場合、 α_0 および λ は次のようになる。

$$\alpha_0 = 3/2, \quad \lambda = c/\omega_{pe}, \quad (2.8)$$

KdV 方程式はソリトン解をもつことは良く知られている [9][10]。波の振幅を A 、波の伝播速度を v_p とすると (2.7) 式のソリトン解は、

$$u = A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - v_p t}{D} \right), \quad (2.9)$$

とかける。ここで、 v_p およびソリトンの幅 D は振幅を使って次のように与えられる。

$$v_p = v_{p0}(1 + \alpha_0 A/3), \quad (2.10)$$

$$D = (6/\alpha_0)^{1/2} \lambda / A^{1/2}. \quad (2.11)$$

これは、ソリトンの振幅が大きくなると、伝播速度は速くなり、幅が狭くなることを示している。また、ソリトンの幅は波の分散が重要になる波長 λ で特徴づけられる。

1 種類イオンプラズマ中の磁気音波については、ソリトンの特徴的幅は電子の慣性長 c/ω_{pe} で与えられる。また、波の伝播速度を Mv_A とすると、磁場の最大値 B_m とアルヴェンマッハ数 M の間には次の関係がある。

$$B_m = 2M - 1. \quad (2.12)$$

2.2.2 透減摂動法

複雑な基礎方程式系から非線形方程式を導く手法の代表的なものとして、透減摂動法があげられる。これは、谷内ら [5] によってイオン音波の KdV 方程式の導出の際に開発されたものである。透減摂動法では、非線形波の空間変化および時間変化が波の振幅に依存していることを考慮に入れ、多数の微小量の間関係を求めて、複雑な系の振る舞いを近似する非線形方程式を決定する。

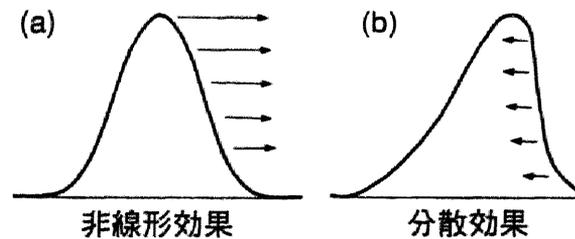


図 2.2: 非線形効果 (a) と分散効果 (b)。非線形効果は波の急峻化をもたらす、分散効果はそれを抑える。

KdV 方程式で記述される波の空間変化と振幅の間には次のような関係がある。非線形効果によって、振幅の大きい部分が小さいところと比べて速く進み、波の急峻化が生じる。すなわち、短波長高周波成分が励起される (図 2.2(a))。ところが、(2.6) 式の分散関係を持つ波は、波長が短くなると位相速度が小さくなり急峻化が抑えられる (図 2.2(b))。これらの非線形効果と分散効果のつりあいによって、波の空間変化が決定される。振幅に相当する微小パラメータを ϵ とすると、非線形効果による位相速度のずれは ϵv_{p0} と見積もることができる。一方、分散によるずれは、 $v_{p0} \lambda^2 k^2$ の大きさとなる。これらがつり合うのは、波数 k と振幅 ϵ が

$$k\lambda \sim \epsilon^{1/2}, \quad (2.13)$$

の関係を満たすときである。(2.13)式は振幅が大きくなると、特徴的な波長が短くなることを表している。また、ソリトンの幅 D を使って、波数 k を $k \sim 1/D$ と見積もると、(2.11)式と(2.13)式は対応していることがわかる。

時間変化、および多数の従属変数についてもその大きさを見積もる必要がある。そこで、変数を特徴的な量で規格化し、次のように無次元化して考える。

$$\begin{aligned} x/\lambda &\rightarrow x, & v/v_{p0} &\rightarrow v, \\ t/(\lambda/v_{p0}) &\rightarrow t, & u/u_o &\rightarrow u. \end{aligned} \quad (2.14)$$

すると、(2.6)式の分散関係を持つ波の位相 $\psi(= kx - \omega t)$ は

$$\psi = k\lambda(x - t) + k^3\lambda^3 t/2, \quad (2.15)$$

と表せる。(2.13)式を考慮に入れると、 v_{p0} の速度で動く系では波の時間変化は $\epsilon^{3/2}$ のオーダーと非常にゆっくりしていることがわかる。そこで、次のように定義される新変数

$$\xi = \epsilon^{1/2}(x - t), \quad (2.16)$$

$$\tau = \epsilon^{3/2}t, \quad (2.17)$$

を導入する。(2.16)(2.17)式の変換は Gardner-Morikawa 変換と呼ばれている [7]。これは、 v_{p0} で動く系に移り、空間および時間を引き伸ばして波の振る舞いを観測することに相当する。この時、 $\partial/\partial\xi$ 、 $\partial/\partial\tau$ は同オーダーの量とみなすことができる。従属変数については、次のような展開を行なう。

$$u = 1 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (2.18)$$

基本方程式系に(2.16)(2.17)式の変数変換を行ない、展開式(2.18)を代入し、

$$\epsilon \ll 1, \quad (2.19)$$

とみなして ϵ の低い次数の項から関係式を求めていく。すると、1次の摂動量の非線形発展を記述する式として次の KdV 方程式が得られる。

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \alpha_0 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \xi^3} = 0. \quad (2.20)$$

(2.20)式の規格化を外し、基の変数に戻したものが(2.7)式である。

このように、漸減摂動法を使って KdV 方程式を導出するためには、長波長領域の分散関係が(2.6)式の形で書けることが必要条件となっている。したがって、従来、長波長の極限 $k \rightarrow 0$ で周波数 ω も $\omega \rightarrow 0$ になる波が考察の対象となってきた。

2.3 大振幅磁気音波と粒子加速

2.3.1 有限振幅磁気音波の構造

1種類イオンプラズマ中の直角伝播の有限振幅磁気音波には、基礎方程式系（電子とイオンの2流体モデル）から近似を用いずに得られる厳密な定常進行波解が存在する [26][27]。波の伝播速度を Mv_A (M はアルヴェンマッハ数) とすると、定常解が成立するのは $1 < M < 2$ の範囲である。定常解には電子の慣性長 c/ω_{pe} を特徴的な長さとする孤立波型の解が含まれている。ここでは、この定常解に基づいた有限振幅磁気音波の構造を示し、その中での電子流体、イオン流体の運動を考察する。

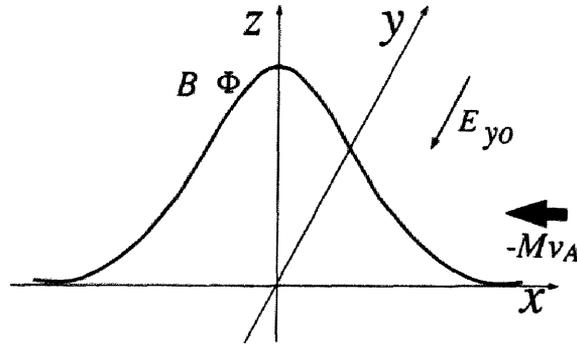


図 2.3: 波の静止系における、有限振幅磁気音波の概観図。

磁場を z 方向、波の伝播方向を $+x$ 方向と仮定し、図 2.3 にあるような孤立波型のパルスを考える。磁場 B の最大値とアルヴェンマッハ数 M の間には (2.12) 式の関係がある。伝播方向には、 B とほぼ同じプロファイルを示す電位 ϕ が形成され、その大きさは

$$e\phi = 2m_i v_A^2 (M - 1), \quad (2.21)$$

と与えられる。波の静止系に移ると、ローレンツ変換により y 方向の電場 $E_{y0} = -Mv_A B_0/c$ が生じる。上流でのプラズマの速度 $-Mv_A$ はこの E_{y0} によるドリフト速度に等しい。したがって、波の系では z 方向の磁場 B 、 y 方向の電場 E_{y0} そして、 x 方向の電場 $E_x (= -d\phi/dx)$ が存在する。なお、実験室系においては横電場 E_y は一定でなく、磁場 B と同じプロファイルを示す。

パルス領域に (2.21) 式で表される大きな電位が形成される理由は次のように説明される。波の系ではプラズマは上流から $-Mv_A$ の速度でパルス領域に流れてくる。パルス領域では磁場が強くなっているため、質量の小さい電子はすぐに減速される。一方、慣性の大きいイオンはすぐには反応できず、そのままパルス内部に突っ込んでいく。このため、電荷分離が生じ電位が形成される。そして、その電位の大きさは突っ込んで

くるイオンの運動エネルギーのオーダーと見積もることができる。実際 (2.21) 式はそのオーダーとなっている。

磁気音波中の電子の運動は、ほぼ電場によるドリフトで近似することができる。そして、 x 方向の速度 v_{ex} と y 方向の速度 v_{ey} はそれぞれ、

$$v_{ex} \simeq cE_{y0}/B, \quad (2.22)$$

$$v_{ey} \simeq -cE_x/B \sim v_A(m_i/m_e)^{1/2}(M-1)^{3/2}, \quad (2.23)$$

と見積もることができる。(2.23) 式の y 方向の電子電流が磁場のプロファイルを決定する。

磁気音波中ではプラズマの準中性条件がほぼ成立しており、 x 方向のイオン流体と電子流体の速度はほぼ等しいと近似することができる。

$$v_{ix} \simeq v_{ex} \equiv v_x. \quad (2.24)$$

プラズマ速度 v_x と磁場 B 、電場 E_{y0} の間には次の関係がある。

$$E_{y0} - v_x B/c \simeq 0. \quad (2.25)$$

イオンの y 方向の運動方程式は

$$m_i \frac{dv_{iy}}{dt} = e \left(E_{y0} - \frac{v_x B}{c} \right), \quad (2.26)$$

と書けるが、(2.25) 式より (2.26) 式の右辺はほぼ 0 であるとみなすことができる。したがって、イオン流体の y 方向の速度は磁気音波を通過する際ほとんど変化しない。すなわち、いたるところで

$$v_{iy} \simeq 0, \quad (2.27)$$

とみなすことができる。

2.3.2 イオン反射

前節で示したような流体的な描像でなく、プラズマを構成している個々の粒子の運動（熱運動）を考える。この場合、大振幅磁気音波中に形成される電気ポテンシャルによって一部のイオン粒子が反射されることは良く知られている [31]-[39]。イオンが反射される条件は次のようにして与えられる [76]。波の系で観測した場合の、パルス入射時の粒子の x 方向の速度を $-Mv_A + v$ とする。ここで、第1項はプラズマ流体の速度を、第2項は熱運動による速度を表す。本論文では、 β 値（= 熱的な圧力 / 磁場の圧力）が小さいプラズマを対象とするので、 $v_A \gg v$ である。入射時の運動エネルギーが (2.21) 式の電気ポテンシャル $e\phi$ より小さいと、粒子は反射される。それは速度 v が

$$v > v_{\text{ref}}, \quad (2.28)$$

$$v_{\text{ref}} \equiv Mv_A[1 - 2(M - 1)^{1/2}/M], \quad (2.29)$$

を満たすときである。ここで、 v_{ref} は反射が起こるための最小速度である。図 2.4 はパルス上流での実験室系におけるイオンの分布関数を示したものであるが、斜線部の少数の粒子が反射される [38]。

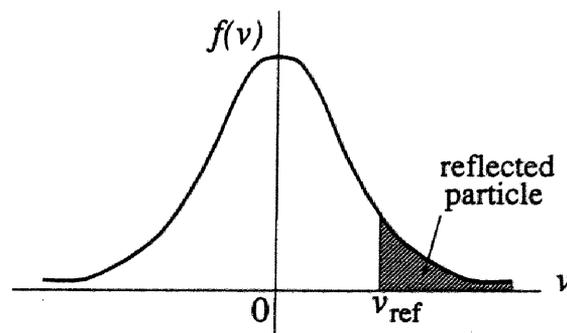


図 2.4: パルス上流での実験室系におけるイオンの分布関数。 v_{ref} は反射が起こる最小速度。斜線部分の粒子が反射される。

図 2.5 はイオン粒子の (x, y) 平面での軌道の概観図を波の系で表したものである。斜線部分がパルス領域で、磁場は紙面に垂直な方向をむいている。波の系でみているので、一定な電場 E_{y_0} が存在する。粒子はこの電場によるドリフトで、上流からパルス領域にやって来る。パルス領域には電位差が存在するため、イオン粒子の速度は一旦減速されるが、大部分の粒子はそれを乗り越えていく。そのような粒子の軌道を図 2.5 の上の曲線で表した。一方、下の曲線は電位差によって反射される粒子の軌道を表す。反射された粒子は旋回運動によって、パルス領域に再突入するが、今度は通り過

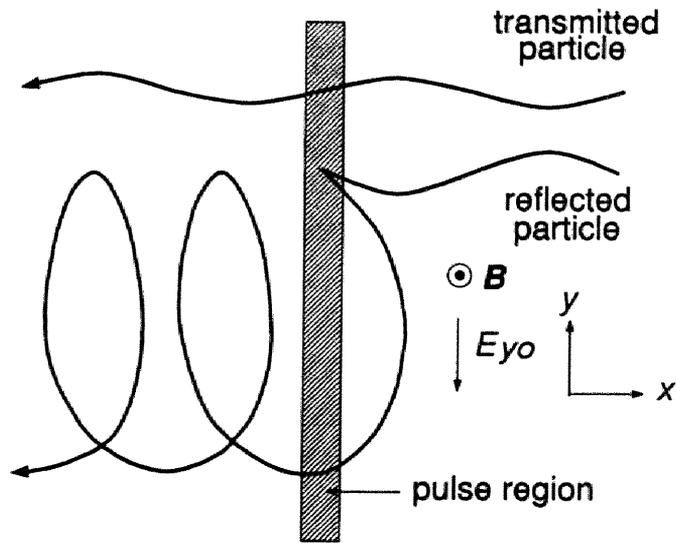


図 2.5: 波の系における、 (x, y) 平面での粒子軌道の概観図。磁場は紙面に垂直方向。上の曲線が通過粒子の軌道を、下の曲線が反射粒子の軌道を表す。反射粒子の下流での旋回半径は、上流に比べてずっと大きくなる。

ることができる。そして、下流での旋回半径は上流に比べてずっと大きくなる。すなわち、反射された粒子は加速されている。

加速の大きさは次のように見積もることができる。波の系では粒子の速度は、上流での $-Mv_A$ から、反射によっておよそ $+Mv_A$ に変化する。これを、実験室系でみると、ほぼ静止していた粒子が $2Mv_A$ の速度にまで加速されたということになる。すなわち、 β 値の小さいプラズマでは、一部のイオンが磁気音波による反射によって強く加速されるとみなすことができる [35][36][39]。

反射された粒子はリング状の速度分布関数を形成する [77]。これは不安定な状態であり、低域混成波やイオンサイクロトロン波を励起する可能性がある [2]。そして、それらの波は、粒子加熱をもたらすものと考えられている [78]-[80]。

このように、大振幅磁気音波はイオンを加速したり、不安定性を励起することによって、波のエネルギーの一部を消費する。すると、パルスは左右対称な孤立波型から非対称な衝撃波型に移行する [15][16]。

次に、1種類のイオンの他に、多種類の重イオンが少数存在した場合、それぞれの種類のイオンがどのくらいの割合で、磁気音波によって反射されるのかを考察する [68]。ただし、重イオンの存在量は非常に少なく、波の構造に影響を与えないものとする。また、パルス上流でのイオンの温度は共通であり、全てのイオンが同じメカニズムで反射されるものと仮定する。パルス入射時の運動エネルギーと、(2.21) 式の電気ポテンシャルを比較して、反射の割合を求める。それを、イオンの質量の関数として表

したものが、図 2.6 である。ここで、 n_{j0} は j 種イオンの背景の粒子数密度、 n_{jref} は反射される粒子の数密度である。また、 m_p 、 m_j はプロトンおよび j 種イオンの質量で、 $Z_j^*(=q_j/|e|)$ は j 種イオンの電荷である。図 2.6 に示したように、反射の割合 n_{jref}/n_{j0} は、質量が増加すると急激に減少する。したがって、重イオンが反射によって加速されることは、ほとんどないと予想される。本論文では第 4 章で、重イオンは軽イオンとは全く異なった機構で、磁気音波によって加速され得ることを明らかにする。

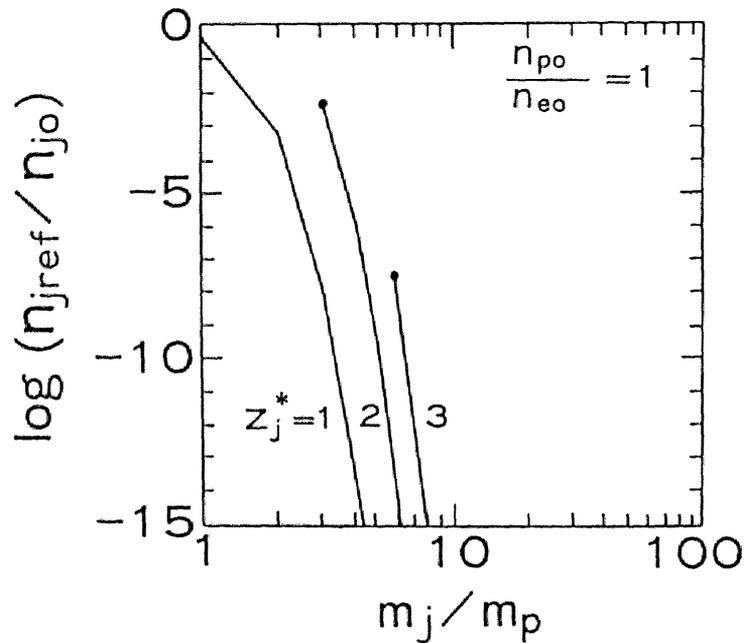


図 2.6: 高エネルギー粒子の割合 n_{jref}/n_{j0} を、イオンの質量の関数として表した。 m_p はプロトンの質量、 m_j は j 種イオンの質量、 $Z_j^*(=q_j/|e|)$ は j 種イオンの電荷である。

3 2種類イオンプラズマ中の磁気音波

第3章では、2種類のイオンが存在するプラズマ中を、磁場に直角方向に伝播する磁気音波について議論する。2種類のイオンと電子の3流体の方程式系を出発点とし、磁気音波の線形および非線形の振る舞いを理論的に解析する。

3.1節では線形分散関係を詳しく調べる。2種類イオンプラズマ中の磁気音波は、低周波モードと高周波モードに分裂する。低周波モードは、長波長の極限で周波数が0であり、長波長領域の分散関係は(2.6)式の形で書ける。一方、高周波モードは有限なカットオフ周波数を持つが、比較的短波長の領域の分散関係は(2.6)式の形で表せる。3.2節では、各モードの非線形方程式を求める。低周波モードに対しては、従来の逡減摂動法を用いてKdV方程式を導出する。高周波モードについては新しい展開法を導入し、有限なカットオフ周波数が存在するにもかかわらず、非線形の振る舞いがKdV方程式で記述されることを示す。また、各モードのKdV方程式の適用範囲についても議論する。

3.1 線形分散関係式

2種類のイオンを含むプラズマ中を磁場に対して直角方向に伝播する磁気音波を、流体モデルに基づいて考察する[70][71]。流体はイオン2種類と電子の3種類から構成されるとする。磁場の圧力に対して熱的な圧力を無視すると、基本方程式系は次のように書ける。

連続の式は

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0. \quad (3.1)$$

運動方程式は

$$m_j \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \right) \mathbf{v}_j = q_j \mathbf{E} + \frac{q_j}{c} \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}. \quad (3.2)$$

ファラデーの式は

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (3.3)$$

アンペールの式は

$$\nabla \times \mathbf{B} = (4\pi/c) \sum_j q_j n_j \mathbf{v}_j. \quad (3.4)$$

ここで添え字 j はイオン種 (種類 a または b) あるいは電子 ($j = e$) を表す。 m_j は質量、 q_j は電荷、 n_j は数密度、 \mathbf{v}_j は速度を表す。光のような高い周波数の波は考えていないので、(3.4)式において変位電流は無視されている。図3.1に示すように、

磁場の向きを z 方向とする。波は磁場に垂直な x 方向に伝播すると仮定する ($\partial/\partial x \neq 0, \partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$)。(3.1) 式と (3.4) 式の x 成分より、準中性の式を得る。

$$\sum_j n_j q_j = 0. \quad (3.5)$$

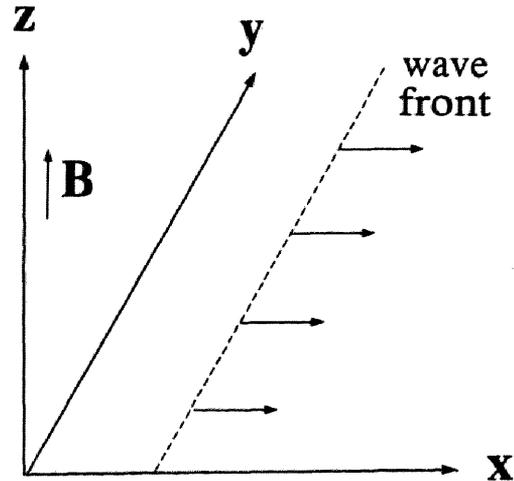


図 3.1: 波の伝播の配位図

全ての変動量が $\exp[i(kx - \omega t)]$ に比例して変化すると仮定する。変動量が十分小さいとして、上の方程式系を線形化すると次の関係式が得られる。

$$\begin{pmatrix} -\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \Omega_j^2} & -i \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \Omega_j}{\omega(\omega^2 - \Omega_j^2)} \\ i \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \Omega_j}{\omega(\omega^2 - \Omega_j^2)} & -\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \Omega_j^2} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

ここで、 Ω_j と ω_{pj} はそれぞれサイクロトロン周波数 (符号を含む) とプラズマ周波数であり、次のように定義される。

$$\Omega_j = q_j B / (m_j c), \quad (3.7)$$

$$\omega_{pj} = (4\pi n_{j0} q_j^2 / m_j)^{1/2}. \quad (3.8)$$

ただし、 n_{j0} は平衡状態における粒子数密度である。(3.6) 式より、線形分散関係式は次のようになる。

$$\left(\sum_j \frac{\Omega_j \omega_{pj}^2}{\omega^2 - \Omega_j^2} \right)^2 - \left(c^2 k^2 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \omega^2}{\omega^2 - \Omega_j^2} \right) \left(\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \Omega_j^2} \right) = 0. \quad (3.9)$$

(3.9) 式に $\prod_j (\omega^2 - \Omega_j^2)$ を掛けて整理すると、 ω^2 に対する 2 次式を得る。

$$A_2 \omega^4 - A_1 \omega^2 + A_0 = 0. \quad (3.10)$$

ここで、係数は

$$A_2 = \omega_{pe}^4 [1 + c^2 k^2 / \omega_{pe}^2], \quad (3.11)$$

$$A_1 = \left(\frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^2} + \frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^2} \right)^2 \Omega_a^2 \Omega_b^2 \Omega_e^2 + (\omega_{pa}^2 + \omega_{pb}^2) \Omega_e^2 c^2 k^2, \quad (3.12)$$

$$A_0 = \left(\frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^2} + \frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^2} \right) \Omega_a^2 \Omega_b^2 \Omega_e^2 c^2 k^2, \quad (3.13)$$

である。したがって、 ω^2 は次の式で与えられる。

$$\omega_{\pm}^2 = [A_1 \pm (A_1^2 - 4A_2A_0)^{1/2}] / (2A_2). \quad (3.14)$$

右辺の + 記号に対応する周波数を ω_+ 、- 記号に対応する周波数を ω_- とする。本論文では ω_+ に対応するモードを高周波モード、 ω_- に対応するモードを低周波モードと呼ぶ。

図 3.2 に ω_+ と ω_- の波数 k に対する依存性を示した。ただし、2 種類のイオンを H と He (完全電離しているものとする)、それらの密度比を $n_{He}/n_H = 0.1$ とした。これは、ほぼ宇宙の平均の組成に等しい。低周波モード ω_- は $k \rightarrow 0$ とともに $\omega \rightarrow 0$ となる。そして $k \rightarrow \infty$ で ω はイオン-イオン混成共鳴周波数 [73]

$$\omega_{-r} = \left(\frac{\omega_{pa}^2 \Omega_b^2 + \omega_{pb}^2 \Omega_a^2}{\omega_{pa}^2 + \omega_{pb}^2} \right)^{1/2}, \quad (3.15)$$

に近づく。 ω_{-r} は、一方のイオンの存在量を少なくすると、そのイオンのサイクロトロン周波数に近づくという性質がある。すなわち、 $n_{b0} \rightarrow 0$ で $\omega_{-r} \rightarrow \Omega_b$ となる。イオン-イオン混成共鳴を利用したプラズマ加熱は、核融合プラズマ (トカマク等) の加熱の有効な手段の一つとして研究が行なわれている [51]-[55]。一方、高周波モード ω_+ は $k = 0$ で次のカットオフ周波数をもつ [75]。

$$\omega_{+0} = \left(\frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^2} + \frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^2} \right) \frac{\Omega_a \Omega_b |\Omega_e|}{\omega_{pe}^2} = \frac{n_{a0} q_a}{n_{e0} e} \Omega_b + \frac{n_{b0} q_b}{n_{e0} e} \Omega_a. \quad (3.16)$$

ω_{-r} および ω_{+0} はイオンサイクロトロン周波数のオーダーであり、 $\Omega_b < \Omega_a$ の場合、

$$\Omega_b < \omega_{-r} < \omega_{+0} < \Omega_a \quad (3.17)$$

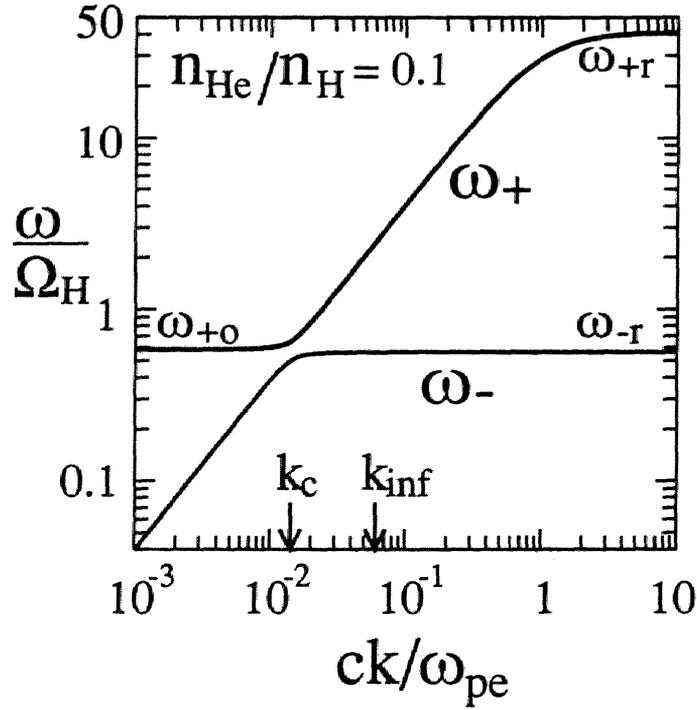


図 3.2: 2 種類イオンプラズマ中の磁気音波の線形分散関係。 ω_+ が高周波モード、 ω_- が低周波モードを表す。2 種類のイオンは H と He で、それらの密度比は $n_{\text{He}}/n_{\text{H}} = 0.1$ とした。

の関係にある。また、高周波モードは、 $k \rightarrow \infty$ で次の共鳴周波数に漸近する。

$$\omega_{+r} = (\omega_{pa}^2 + \omega_{pb}^2)^{1/2} |\Omega_e| / \omega_{pe}. \quad (3.18)$$

ω_{+r} は低域混成周波数 ($|\Omega_e| \Omega_i$)^{1/2} のオーダーである。ここで、 Ω_i はイオン (a あるいは b) のサイクロトロン周波数の大きさの目安を与えるものである。本節では以後、 m_i や ω_{pi} 等の添え字 i を含む量が現われた場合、それらはそれぞれ、イオン質量とイオンプラズマ周波数のおよその大きさを表すものとする。

共鳴周波数 ω_{-r} 、 ω_{+r} およびカットオフ周波数 ω_{+o} が (3.15)-(3.18) 式で表せるのは、 $\omega_{pe}/|\Omega_e| \geq 1$ の比較的高密度のプラズマを対象としている場合である。プラズマ密度が低く、 $\omega_{pe}/|\Omega_e| \ll 1$ の時は (3.4) 式に変位電流の項を含めなければならない。 $\omega_{pe}/|\Omega_e| \ll (m_e/m_i)^{1/2}$ の低密度の極限では、共鳴周波数は $\omega_{-r} = \Omega_b$ 、 $\omega_{+r} = \Omega_a$ [73]、カットオフ周波数は $\omega_{+o} = \Omega_b$ となる。本論文では、 $\omega_{pe}/|\Omega_e| \geq 1$ のプラズマを仮定して議論を進める。

図 3.2 に示すように低周波モード ω_- および高周波モード ω_+ の分散曲線は $k \simeq k_c$

の付近で急激に曲がっている。この波数 k_c は次のように与えられる。

$$k_c = \omega_{-r}/v_A. \quad (3.19)$$

ここで、 v_A は2種類イオンプラズマにおけるアルヴェン速度で、平均質量密度 ρ_0

$$\rho_0 = n_{a0}m_a + n_{b0}m_b, \quad (3.20)$$

を使って、

$$v_A = B/(4\pi\rho_0)^{1/2}, \quad (3.21)$$

と定義される。(3.19)式の波数 k_c に相当する波長はイオンの慣性長、 c/ω_{pi} のオーダーである [$ck_c/\omega_{pe} \sim (m_e/m_i)^{1/2}$]。 k_{inf} は高周波モードの変曲点 (inflection point) でその表式は、3.1.2節で示す。

次に低周波モードと高周波モードに分けて、それらの分散関係を詳しく調べる。

3.1.1 低周波モード

次の不等式で示されるような

$$k \ll k_c \quad \text{すなわち} \quad ck/\omega_{pe} \ll (m_e/m_i)^{1/2}, \quad (3.22)$$

非常に長波長の領域では、低周波モードの分散関係式は

$$\omega_{-}/k = v_A(1 - k^2d_1^2/2), \quad (3.23)$$

と近似される (詳しい計算は付録 A に示す)。ここで d_1 は、次のように定義される定数 r_{ab}

$$r_{ab} \equiv 1 - \frac{\omega_{-r}^2}{\omega_{+0}^2} = \frac{\omega_{pa}^2\omega_{pb}^2(\Omega_a - \Omega_b)^2}{(\omega_{pa}^2 + \omega_{pb}^2)(\omega_{pa}^2\Omega_b^2 + \omega_{pb}^2\Omega_a^2)}, \quad (3.24)$$

と (3.19) 式の k_c を使って

$$d_1 = r_{ab}^{1/2}/k_c, \quad (3.25)$$

と与えられる。(3.23)式は、(2.6)式と同じ形をしている。すなわち、低周波モードは(3.22)式の長波長領域で弱い分散を示す。分散は波長が d_1 程度で重要となる。

図 3.3 に r_{ab} の値をイオンの存在比の関数としてプロットした。ただし H-He プラズマを仮定している。 r_{ab} は1種類イオンプラズマの場合 0 となる量である。図 3.2 に相当する $n_{He}/n_H = 0.1$ ($n_{He}/n_e = 0.08$) の場合は、 $r_{ab} \simeq 0.065$ となる。

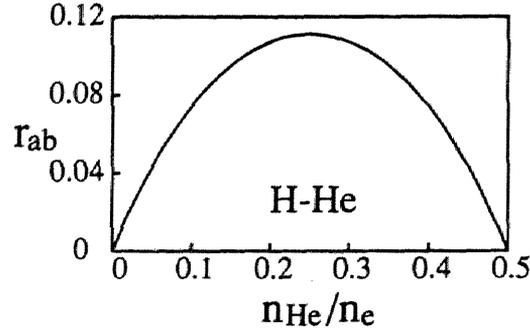


図 3.3: r_{ab} のイオンの存在比に対する依存性

次に (3.25) 式で定義される d_l の大きさを議論する。(3.19) 式より、 $1/k_c \sim c/\omega_{pi}$ である。したがって、 $n_{a0} \sim n_{b0}$ の 2 種類イオンプラズマの場合、 $d_l \sim c/\omega_{pi}$ と見積もることができる。これは、1 種類イオンプラズマ中の磁気音波の分散が重要になる波長 c/ω_{pe} に比べておよそ $(m_i/m_e)^{1/2}$ 倍大きい。つまり、2 種類イオンプラズマ中の低周波モードの分散の強さは、(3.23) 式より d_l^2 で与えられるが、1 種類イオンプラズマ中の磁気音波の分散に比べて、およそ (m_i/m_e) 倍大きい。

付録 B に熱的圧力と電子の慣性の効果を含めた低周波モードの分散関係式を示した。電子の慣性を含めると、分散の効果が重要になる波長 d_l は次のように与えられる。

$$d_l^2 = \frac{v_A^4}{c^2} \left[\frac{\omega_{pa}^2 \omega_{pb}^2}{\Omega_a^2 \Omega_b^2} \left(\frac{1}{\Omega_a} - \frac{1}{\Omega_b} \right)^2 + \frac{\omega_{pb}^2 \omega_{pc}^2}{\Omega_b^2 \Omega_c^2} \left(\frac{1}{\Omega_b} - \frac{1}{\Omega_c} \right)^2 + \frac{\omega_{pc}^2 \omega_{pa}^2}{\Omega_c^2 \Omega_a^2} \left(\frac{1}{\Omega_c} - \frac{1}{\Omega_a} \right)^2 \right]. \quad (3.26)$$

(3.26) 式では第 1 項が主要項である。(3.25) 式はこの第 1 項に相当する。(3.24) 式で定義される定数 r_{ab} を使うと (3.26) 式は

$$d_l^2 = \frac{r_{ab}}{k_c^2} + \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} + r_{ab} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{\Omega_a \Omega_b}{\omega_{-r}^2} \left(2 + \frac{\Omega_a \Omega_b}{\omega_{-r}^2} \right), \quad (3.27)$$

と書き直すことができる。1 種類イオンプラズマの場合、 $r_{ab} = 0$ であるから $d_l = c/\omega_{pe}$ となる。 $n_{a0} \sim n_{b0}$ の 2 種類イオンプラズマの場合は、第 1 項が第 2 項および第 3 項よりおよそ m_i/m_e 倍大きい。 $\omega_{pa} \gg \omega_{pb}$ あるいは $\omega_{pa} \ll \omega_{pb}$ のプラズマで、 $r_{ab} \sim m_e/m_i$ の場合、(3.27) 式の第 1 項と第 2 項はほぼ同じ大きさとなる。すると、低周波モードの分散に電子の慣性の効果を含めなければならなくなる。 $\omega_{pa} \gg \omega_{pb}$ のプラズマを例にとると r_{ab} は

$$r_{ab} \simeq (\omega_{pb}^2/\omega_{pa}^2)(1 - \Omega_a/\Omega_b)^2, \quad (3.28)$$

と見積もることができる。したがって、(3.27) 式の第 2 項が重要となる、すなわち電子

の質量を無視することができなくなるのは、 $\omega_{pb}^2/\omega_{pa}^2(1 - \Omega_a/\Omega_b)^2 \lesssim (m_e/m_i)$ の時である。なお、(3.27) 式の第 3 項は、第 1 項および第 2 項よりずっと小さい。

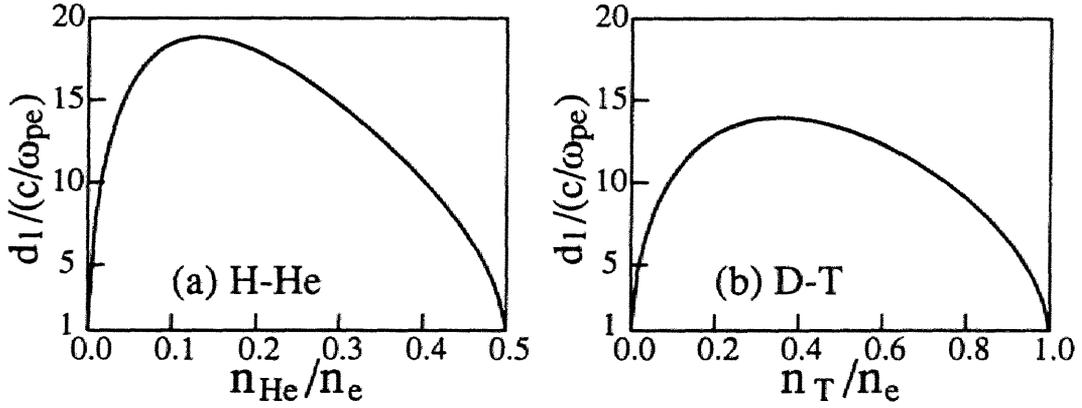


図 3.4: 低周波モードの分散が重要となる波長 d_1 (電子の慣性長で規格化) をイオンの存在比の関数としてプロットした。(a) は H-He プラズマ (b) は D-T プラズマである。

図 3.4 に d_1 をイオンの存在比の関数としてプロットした。縦軸の d_1 は電子の慣性長 c/ω_{pe} で規格化している。図 3.4(a) は H-He プラズマ、図 3.4(b) は D-T プラズマの場合である。計算は電子の慣性の効果を含めた (3.26) 式を使用している。図 3.4(a) より、 $n_{He}/n_e = 0$ のイオンが H のみのプラズマでは $d_1 = c/\omega_{pe}$ であるが、He の割合を増やしていくと、急激に d_1 が増加することがわかる。平均の宇宙プラズマ、すなわち $n_{He}/n_e \simeq 0.08$ では、磁気音波の低周波モードの分散が重要になる波長 d_1 は、1 種類イオンプラズマの場合に比べておよそ 18 倍も大きい。

波数が $k \gg k_c$ にある領域では、周波数 ω_- はほぼ一定で、 $\omega_- = \omega_{-r}$ となる。したがって、低周波モードは波数 k_c を境にして、急激に分散が強くなる。近似式 (3.23) の適用範囲を調べるために、厳密な分散式との差

$$\Delta\omega_- = \omega_- - v_A k(1 - k^2 d_1^2/2), \quad (3.29)$$

を波数 k の関数として図 3.5 に、プロットした (図 3.2 と同じパラメータを設定)。その差は、波数 k_c ($ck_c/\omega_{pe} = 0.014, k_c d_1 = 0.25$) の付近より急激に大きくなっていることがわかる。

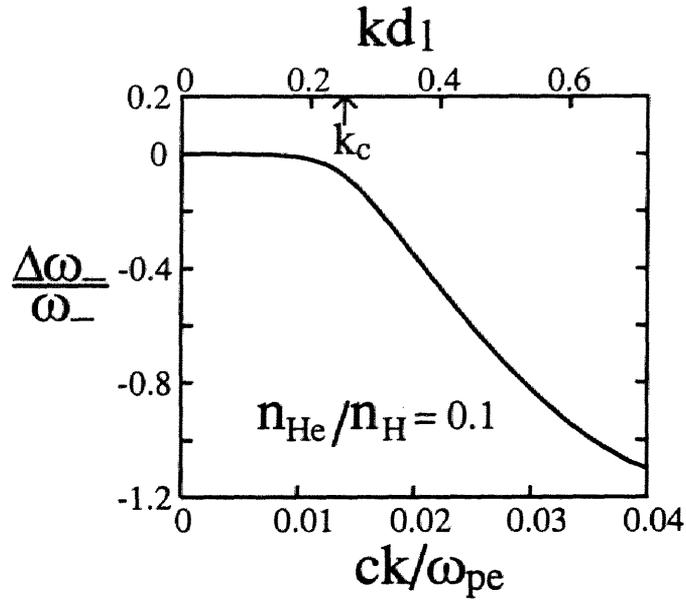


図 3.5: 低周波モードの厳密な分散式と近似式 (3.26) との差を波数 k の関数として表した。プラズマパラメータは図 3.2 と同じとした。

3.1.2 高周波モード

高周波モードの線形分散関係を調べる。まず、 $k \ll k_c$ の非常に長波長の領域では分散関係式は

$$\omega_+^2 = \omega_{+0}^2 [1 + r_{ab} k^2 / k_c^2 + r_{ab}(1 - r_{ab}) k^4 / k_c^4], \quad (3.30)$$

と与えられる (付録 A 参照)。ここで、 ω_{+0} は (3.16) 式で定義される高周波モードのカットオフ周波数、 r_{ab} は (3.24) 式で定義される定数である。

$k \gg k_c$ の比較的短波長の領域では

$$\omega_+^2 = v_h^2 k^2 \left(\frac{1 + r_{ab} k_c^2 / k^2}{1 + c^2 k^2 / \omega_{pe}^2} \right), \quad (3.31)$$

となる。ここで、速度の次元を持つ量 v_h は次のように定義される。

$$v_h = \frac{(\omega_{pa}^2 + \omega_{pb}^2)^{1/2} |\Omega_e| c}{\omega_{pe}^2} = v_A \left[1 + \frac{n_{a0} q_a n_{b0} q_b (\Omega_a - \Omega_b)^2}{(n_{e0} e)^2 \Omega_a \Omega_b} \right]^{1/2}. \quad (3.32)$$

(3.32) 式の右辺からわかるように、2種類イオンプラズマでは v_h は v_A より少し大きい値をとる。1種類イオンプラズマに近づくと、すなわち $n_{a0} \rightarrow 0$ あるいは $n_{b0} \rightarrow 0$ で、 $v_h \rightarrow v_A$ となる。速度 v_h を使って (3.19) 式で定義される波数 k_c を表すと

$$k_c = \omega_{+0}/v_h, \quad (3.33)$$

となる。 v_h 、 v_A 、高周波モードのカットオフ周波数 ω_{+0} および低周波モードの共鳴周波数 ω_{-r} の間には

$$v_h/v_A = \omega_{+0}/\omega_{-r} \quad (3.34)$$

の関係がある。

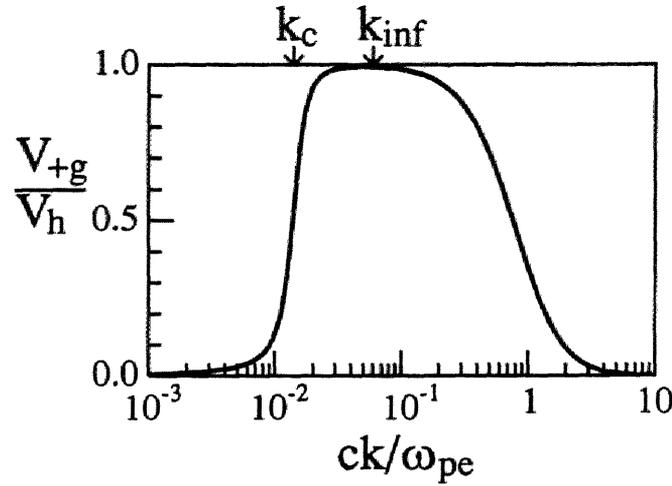


図 3.6: 高周波モードの群速度 v_g を波数 k の関数としてプロットした (図 3.2 と同じパラメータを設定)。波数 k_{inf} で群速度は最大値をとる。この波数は分散曲線の変曲点に対応する。

高周波モードの分散曲線には、 $k \gg k_c$ の領域に変曲点が存在する。図 3.6 に高周波モードの群速度 $v_g = d\omega_+/dk$ を波数 k の関数としてプロットした。なお、縦軸は (3.32) 式で定義される速度 v_h で規格化している。 v_g が最大となる点が、高周波モードの分散曲線の変曲点に相当する。その波数を k_{inf} とすると、 k_{inf} は

$$k_{inf} = r_{ab}^{1/4} (k_c \omega_{pe}/c)^{1/2}, \quad (3.35)$$

と与えられる。この大きさは、 $ck_{inf}/\omega_{pe} \sim (r_{ab} m_e/m_i)^{1/4}$ のオーダーである。図 3.2 のパラメータを設定した場合は $ck_{inf}/\omega_{pe} \simeq 0.06$ となる。図 3.6 からわかるように

$$\begin{aligned} k < k_{inf} \text{ では, } & d^2\omega_+/dk^2 > 0 \\ k > k_{inf} \text{ では, } & d^2\omega_+/dk^2 < 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

である。

$k_c \ll k \ll k_{\text{inf}}$ の領域では、高周波モードの分散関係式は

$$\omega_+^2 = v_h^2 k^2 (1 + r_{\text{ab}} k_c^2 / k^2), \quad (3.37)$$

と近似することができる。

$k \gg k_{\text{inf}}$ すなわち

$$ck / \omega_{\text{pe}} \gg (r_{\text{ab}} m_e / m_i)^{1/4}, \quad (3.38)$$

の領域では、

$$\omega_+ = \frac{v_h k}{(1 + c^2 k^2 / \omega_{\text{pe}}^2)^{1/2}}, \quad (3.39)$$

と与えられる。したがって、この領域では v_h と v_A が異なることを除けば、高周波モードの分散関係式は1種類イオンプラズマ中の磁気音波の分散関係式(2.1)と等しい。また高周波モードの位相速度および群速度等の特徴的な速度は、ほぼ v_h で与えられることがわかる。

特に、 $k_{\text{inf}} \ll k \ll (\omega_{\text{pe}}/c)$ すなわち

$$(r_{\text{ab}} m_e / m_i)^{1/4} \ll ck / \omega_{\text{pe}} \ll 1 \quad (3.40)$$

の領域では、(3.39) 式は

$$\omega = v_h k [1 - k^2 c^2 / (2\omega_{\text{pe}}^2)] \quad (3.41)$$

と近似できる。これは(2.6)式と同じ形で、分散が弱いことを表している。ただし、 $k=0$ の近傍の長波長領域では成立しないことに注意する。近似式(3.41)の適用領域を調べるため、厳密な分散式との差

$$\Delta\omega_+ = \omega_+ - v_h k [1 - k^2 (c^2 / \omega_{\text{pe}}^2) / 2] \quad (3.42)$$

を図3.7にプロットした。なお、図3.2と同じパラメータを設定している。高周波モードは有限なカットオフ周波数を持つため、 k_{inf} ($ck_{\text{inf}}/\omega_{\text{pe}} \simeq 0.06$) より波数の小さい領域では厳密な分散式と(3.41)式の差は大きい。しかし、 k_{inf} より波数の大きい領域では(3.41)式が良い近似となっていることが分かる。

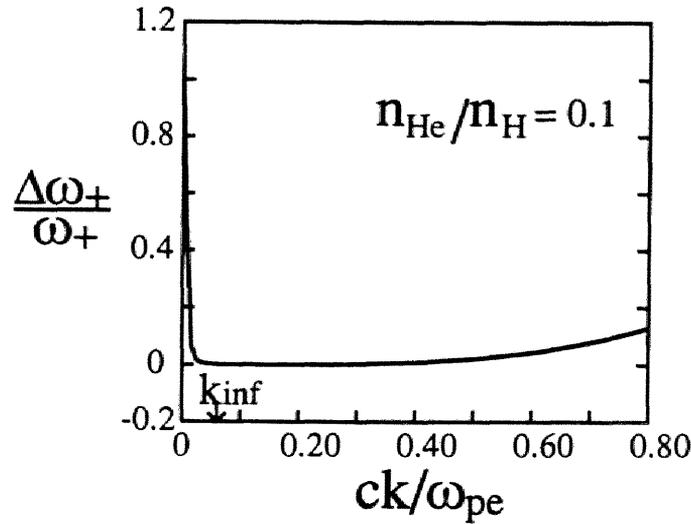


図 3.7: 高周波モードの厳密な分散式と近似式 (3.41) との差を波数 k の関数として表した。プラズマパラメータは図 3.2 と同じとした。

3.2 非線形方程式

本節では、前節で導いた線形分散関係式を基にして、2種類のイオンが存在するプラズマ中の非線形磁気音波の振る舞いを記述する方程式を求める [70][71]。非線形方程式の導出には、2.2 節で紹介した逡減摂動法を用いる。従来の逡減摂動法では、 $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ であり、長波長領域で弱い分散を示すことが、KdV 方程式が導出されるための必要条件だとされている。低周波モードはこの必要条件を満たしている。したがって、低周波モードの長波長領域での非線形の振る舞いが KdV 方程式で記述されるであろうことは容易に予想される。

一方、高周波モードは $k \sim 0$ の近傍を除けば、1種類イオンプラズマ中の磁気音波と似た分散関係式を持っている。しかし、 $k \rightarrow 0$ で ω は 0 でない有限の値をとり、長波長領域の分散は強い。それでは、高周波モードの非線形方程式はどのようなのであろうか。本論文では振幅に下限を設定し、長波長領域を避けるような展開を行なった。その結果、高周波モードは有限なカットオフ周波数をもつにもかかわらず、非線形の振る舞いが KdV 方程式で記述されることを明らかにした。この結果は、 $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ が KdV 方程式を導出するための必要条件ではなく、さらに広範囲な波に対して KdV 方程式が得られる可能性があることを示唆するものである。

3.2.1 規格化

基本方程式系 (3.1)-(3.5) には、速度、密度、電磁場等の多数の従属変数が含まれており、複数の方程式から構成されている。そこで、2.2 節で紹介した、遞減摂動法に基づいて非線形方程式を導出する。特に、各モードが弱い分散を示す、すなわち分散関係式が

$$\omega/k = v_{p0}(1 - \lambda^2 k^2/2), \quad (3.43)$$

の形で表せる領域に注目する。

低周波モードは

$$k \ll k_c, \quad (3.44)$$

の波数領域で (3.43) 式の形の分散関係を持ち、(3.23) 式より

$$v_{p0} = v_A, \quad \lambda = d_i, \quad (3.45)$$

となる。低周波モードは $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ であり、長波長領域で弱い分散を示す。

一方、高周波モードの分散関係が (3.43) 式の形で書けるのは、

$$k_{\text{inf}} \ll k \ll (\omega_{pe}/c), \quad (3.46)$$

の比較的短波長の領域であり、(3.41) 式より

$$v_{p0} = v_h, \quad \lambda = c/\omega_{pe}, \quad (3.47)$$

となる。高周波モードには有限なカットオフ周波数が存在するため、長波長領域の分散関係は (3.43) 式では表せない。

まず、基本方程式系 (3.1)-(3.5) に含まれる変数をそれぞれ特徴的な量で規格化し、次のように無次元化する。

$$\begin{aligned} x/\lambda &\rightarrow x, & t/(\lambda/v_{p0}) &\rightarrow t, & v/v_{p0} &\rightarrow v, & n_j/n_{e0} &\rightarrow n_j, \\ q_j/|e| &\rightarrow q_j, & B/B_0 &\rightarrow B, & E/(v_{p0}B_0/c) &\rightarrow E. \end{aligned} \quad (3.48)$$

ここで、矢印の右が新変数である。添え字 j は、電子 ($j = e$) あるいはイオン ($j = a$ または $j = b$) を表す。 λ, v_{p0} は低周波モードについては (3.45) 式、高周波モードについては (3.47) 式を設定する。(3.48) 式の規格化を行なうと、基本方程式は次のように書ける。

連続の式は

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_j v_{jx}) = 0, \quad (3.49)$$

運動方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla)\right) \mathbf{v}_j = \Omega_j \frac{\lambda}{v_{p0}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.50)$$

ファラデーの式は

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (3.51)$$

アンペールの式は

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{\omega_{pe}^2 \lambda v_{p0}}{|\Omega_e| c^2} \sum_j q_j n_j v_{jy}, \quad (3.52)$$

準中性の式は

$$\sum_j n_j q_j = 0. \quad (3.53)$$

3.2.2 低周波モードの KdV 方程式

低周波モードは $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ であり、(3.44) 式に示したような長波長領域で弱い分散を示す。したがって、その非線形方程式は従来の通減摂動法 [8] を用いて導くことができる。そこで次の新変数

$$\xi = \epsilon^{1/2}(x - t), \quad (3.54)$$

$$\tau = \epsilon^{3/2}t, \quad (3.55)$$

を導入する。ここで、振幅に相当する微小パラメータ ϵ と波数 k は、(2.13) 式に示したように

$$kd_1 \sim \epsilon^{1/2}, \quad (3.56)$$

の関係にある。(3.54)(3.55) 式の設定は分散関係式 (3.43) に基づいている。したがって、その有効範囲は (3.44) 式と (3.25) 式の d_1 の定義より

$$\epsilon \ll r_{ab}, \quad (3.57)$$

と見積もることができる。ここで、 r_{ab} は (3.24) 式で定義された量であり、そのイオンの存在比に対する依存性については図 3.3 に示されている。変数変換 (3.54) (3.55) によって

$$\frac{\partial}{\partial x} = \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (3.59)$$

となる。

プラズマ変数は次のように展開する。

$$n_j = n_{j0} + \epsilon n_{j1} + \epsilon^2 n_{j2} + \dots, \quad (3.60)$$

$$v_{jx} = \epsilon v_{jx1} + \epsilon^2 v_{jx2} + \dots, \quad (3.61)$$

$$E_y = \epsilon E_{y1} + \epsilon^2 E_{y2} + \dots, \quad (3.62)$$

$$B_z = B_0 + \epsilon B_1 + \epsilon^2 B_2 + \dots. \quad (3.63)$$

(3.58) 式の変換および (3.63) 式の展開を行なうと、(3.52) 式の左辺は $\epsilon^{3/2}$ のオーダーから始まる。したがって、(3.52) 式のつり合いが成り立つように y 方向の速度 v_{jy} は $\epsilon^{3/2}$ のオーダーから展開を行なう。また、運動方程式 (3.50) の x 成分の右辺には、速度 v_{jy} と電場 E_x が同時に含まれている。このため、 E_x は v_{jy} と同様の展開を設定する。

$$v_{jy} = \epsilon^{3/2} v_{jy1} + \epsilon^{5/2} v_{jy2} + \dots, \quad (3.64)$$

$$E_x = \epsilon^{3/2} E_{x1} + \epsilon^{5/2} E_{x2} + \dots. \quad (3.65)$$

v と E は $\epsilon \rightarrow 0$ で 0 になる量である。

基本方程式に変数変換を行い、(3.60)-(3.65) の展開式を代入すると、例えば運動方程式の x 成分および y 成分は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & -\epsilon^{3/2} \left(\frac{\partial v_{jx1}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_j r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{x1} + v_{jy1}) \right) - \epsilon^{5/2} \left(\frac{\partial v_{jx2}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{jx1}}{\partial \tau} \right. \\ & \left. - v_{jx1} \frac{\partial v_{jx1}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_j r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{x2} + v_{jy2} + B_1 v_{jx1}) \right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$-\epsilon \frac{\Omega_j r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{y1} - v_{jx1}) - \epsilon^2 \left(\frac{\partial v_{jy1}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_j r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{y2} - v_{jx2} + v_{jx1} B_1) \right) + \dots = 0. \quad (3.67)$$

ここで、添え字 j は、電子 ($j = e$) あるいはイオン ($j = a$ または b) を表す。従来の摂動法に従って、 ϵ の低い次数のオーダーの項から関係式を決定する。例えば、(3.67) 式の ϵ のオーダーの項からは

$$v_{jx1} = E_{y1}, \quad (3.68)$$

が得られる。これは、電子とイオン a およびイオン b の x 方向の速度は共通で、ほぼ電場 E_y によるドリフト速度で近似できることを表している。

ところで、(3.66)(3.67) 式にあるように、この方程式系には r_{ab} という小さな量が含まれている。したがって微小パラメータ ϵ のオーダーリングで話が閉じる、すなわち r_{ab} を ϵ と独立な 1 のオーダーの量とみなすことができるためには、 $\epsilon \ll r_{ab}$ でなければならない。これは、低周波モードが弱い分散を示す条件である (3.44) 式より求めた ϵ の範囲 (3.57) 式と矛盾がない。

付録 D に示したような計算を行なうと、次の KdV 方程式が得られる。

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 B_1}{\partial \xi^3} = 0. \quad (3.69)$$

規格化を外すと

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{3v_A}{2B_0} B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{v_A d_1^2}{2} \frac{\partial^3 B_1}{\partial \xi^3} = 0, \quad (3.70)$$

となる。この方程式のソリトン解の特徴的な幅 D は

$$D \sim d_1 \epsilon^{-1/2}, \quad (3.71)$$

と与えられる。 $n_{a0} \sim n_{b0}$ の 2 種類イオンプラズマでは、 $d_1 \sim c/\omega_{pi}$ である。 d_1 の値は、2 種類のイオンの存在比を変化させると図 3.4 に示したように変化する。2 種類のイオンのうちの一方のイオンの存在量を 0 とする、すなわち $n_{a0} \rightarrow 0$ (あるいは $n_{b0} \rightarrow 0$) の 1 種類イオンプラズマでは、 $d_1 \rightarrow c/\omega_{pe}$ となる。したがって、振幅 ϵ を同じとすると、2 種類イオンプラズマ中の低周波モードソリトンの特徴的な幅 D は、1 種類イオンプラズマのそれよりも $(m_i/m_e)^{1/2}$ 倍広がる。平均の宇宙プラズマ、すなわち $n_{He}/n_H \simeq 0.1$ ($n_{He}/n_e \simeq 0.08$) の場合、低周波モードソリトンの幅は、プロトンのみのプラズマの場合より 18 倍ほど大きい (図 3.4(a) 参照)。

3.2.3 高周波モードの KdV 方程式

従来の逡減摂動法を用いた KdV 方程式の導出では、 $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ であり、長波長領域で弱い分散を示す波であることが前提となっている。高周波モードは有限なカットオフ周波数 ω_{+0} を持ち、長波長領域の分散は強い。したがって、従来の方法では高周波モードの KdV 方程式を導出することはできない。そこで、本節では新しい展開法を導入して、高周波モードの領域 (3.46) における非線形の振る舞いが、KdV 方程式で記述されることを示す。

基本方程式 (3.50)(3.52) は、 $\lambda = c/\omega_{pe}$ 、 $v_{p0} = v_h$ とした場合、次のように書ける。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \right) \mathbf{v}_j = \frac{\Omega_j}{|\Omega_c|} \frac{1}{\eta} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\eta \sum_j q_j n_j v_{jy}. \quad (3.73)$$

ここで、 η は

$$\eta \equiv (\omega_{pa}^2 + \omega_{pb}^2)^{1/2} / \omega_{pe} \sim (m_e/m_i)^{1/2} \quad (3.74)$$

と定義される微小量である。運動方程式 (3.72) の右辺の係数 $\Omega_j/(|\Omega_e|\eta)$ はイオン ($j = a$ または b) については η のオーダー、電子 ($j = e$) については η^{-1} のオーダーである。

(3.54)(3.55) 式で定義される新変数を導入する。ただし、 ϵ と波数 k の間には

$$kc/\omega_{pe} \sim \epsilon^{1/2} \quad (3.75)$$

の関係がある。したがって、高周波モードが弱い分散を示す領域、(3.46) 式を振幅 ϵ を使って表すと、

$$c^2 k_{\text{inf}}^2 / \omega_{pe}^2 \ll \epsilon \ll 1 \quad (3.76)$$

となる。 k_{inf} の定義 (3.35) 式より、これは

$$r_{ab}^{1/2} \eta \ll \epsilon \ll 1 \quad (3.77)$$

と書き換えることができる。ここで、 r_{ab} は (3.24) 式で定義される微小量である ($r_{ab} < 1$)。

従属変数 n_j 、 v_{jx} 、 E_y 、 B_z については (3.60)-(3.63) 式の展開を行う。 v_{jy} および E_x の展開については、(3.64)(3.65) と同様に $\epsilon^{3/2}$ のオーダーから始める。ただし、ここではアンペール法則 (3.73) の左辺に微小量 η が含まれていることに注意する。そして、(3.73) 式のつり合いが成り立つよう

$$v_{jy} = \eta^{-1}(\epsilon^{3/2} v_{jy1} + \epsilon^{5/2} v_{jy2} + \dots), \quad (3.78)$$

$$E_x = \eta^{-1}(\epsilon^{3/2} E_{x1} + \epsilon^{5/2} E_{x2} + \dots), \quad (3.79)$$

と展開する。なお、付録 C に線形物理量 E_x と E_y の間の関係式を示した。高周波モードの弱分散領域における関係式は (C.6) である。(C.6) 式において、 $kc/\omega_{pe} \sim \epsilon^{1/2}$ および $E_y \sim \epsilon$ とみなし、(3.74) 式の η を使うと $E_x \sim \eta^{-1} \epsilon^{3/2}$ が得られる。これは、 E_x の展開式 (3.79) 式と対応している。

規格化された基本方程式に対して、(3.54)(3.55) 式の変数変換を行い、展開式 (3.60)-(3.63)、および (3.78)(3.79) 式を代入すると、イオンの運動方程式の x 成分は次のよう

になる。

$$\begin{aligned}
& -\epsilon^{3/2} \left(\frac{\partial v_{ix1}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_i}{|\Omega_e| \eta^2} (E_{x1} + v_{iy1}) \right) + \epsilon^{5/2} \left(-\frac{\partial v_{ix2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{ix1}}{\partial \tau} \right. \\
& \quad \left. + v_{ix1} \frac{\partial v_{ix1}}{\partial \xi} - \frac{\Omega_i}{|\Omega_e| \eta^2} (E_{x2} + v_{iy2} + B_1 v_{iy1}) \right) + \dots = 0. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

ここで添え字 i はイオン a ($i = a$) または、イオン b ($i = b$) を表す。係数 $\Omega_i / (|\Omega_e| \eta^2)$ は 1 のオーダーである。y 成分は

$$\begin{aligned}
& -\epsilon^2 \frac{\partial v_{iy1}}{\partial \xi} + \epsilon^3 \left(-\frac{\partial v_{iy2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{iy1}}{\partial \tau} + v_{ix1} \frac{\partial v_{iy1}}{\partial \xi} \right) + \dots \\
& -\frac{\Omega_i}{|\Omega_e|} \epsilon (E_{y1} - v_{ix1}) - \frac{\Omega_i}{|\Omega_e|} \epsilon^2 (E_{y2} - v_{ix2} - B_1 v_{ix1}) + \dots = 0, \tag{3.81}
\end{aligned}$$

と書ける。他の方程式については付録 E に示す。

(3.81) 式には微小量 $\Omega_i / |\Omega_e| \sim \eta^2$ が含まれている。 ϵ の低いオーダーの項から関係式を決定する従来の逐減摂動法では、この量を ϵ と独立な 1 のオーダーとみなすことができる場合を考えている。すなわち

$$\epsilon \ll \eta^2, \tag{3.82}$$

を仮定している。しかし、有限なカットオフ周波数をもつ高周波モードについては、条件 (3.77) が存在するため、この方法は適用できない。そこで、(3.77) 式が成立するよう、振幅に相当する微小パラメータ ϵ が η よりもずっと大きいと仮定する。

$$\eta \ll \epsilon \ll 1. \tag{3.83}$$

$r_{ab} < 1$ であるから、(3.83) が成り立てば (3.77) 式は満たされている。

(3.83) 式の仮定のもとでは、(3.81) 式の ϵ^2 のオーダーの第 1 列第 1 項、および ϵ^3 のオーダーの第 2 項は、 $\eta^2 \epsilon$ のオーダーの第 2 列第 1 項よりずっと大きくなる。したがって、

$$v_{iy1} = v_{iy2} = 0, \tag{3.84}$$

となる。また、 x 方向の速度については

$$v_{ex1} = B_1, \quad v_{ix1} = \frac{\Omega_i}{\eta^2 |\Omega_e|} B_1 \tag{3.85}$$

の関係式が得られる (付録 E 参照)。(3.85) 式は、 x 方向の速度が電子とイオン a およびイオン b で、それぞれ異なる値となることを示している。また、これはイオンの速

度が $E \times B$ ドリフトでは記述できないことを表している。つまり、対象としている高周波モードの周波数帯は $\Omega_i \ll \omega \ll \Omega_{LH}$ なので、イオンの運動にドリフト近似をあてはめることはできない。なお、低周波モードでは $\omega \ll \Omega_i$ の周波数帯を考えているので、(3.68)式にあるように、ドリフト近似が適用できる。

付録 E に示したような計算を行なうと、次の KdV 方程式が得られる。

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \alpha B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 B_1}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.86)$$

ここで、係数 α は次のように定義される。

$$\alpha = 1 + \frac{\omega_{pa}^2 \omega_{pb}^2 (\Omega_a - \Omega_b)^2}{(\omega_{pa}^2 + \omega_{pb}^2)^2 \Omega_a \Omega_b} \quad (3.87)$$

1 種類イオンの場合、第 2 項は 0 となる。したがって、イオンが 2 種類存在することの効果为非線形項の係数に現われている。

このように、有限なカットオフ周波数をもつ高周波モードの KdV 方程式の導出では、(3.83) 式が重要な役割を果たしている。すなわち、 $kc/\omega_{pe} \sim \epsilon^{1/2}$ なので、(3.83) 式によって、 $kc/\omega_{pe} \ll (m_e/m_i)^{1/2}$ の強い分散を示す領域を避け、(3.46) 式の弱分散を示す領域に焦点をあてることができる。(3.83) 式を設定せず、(3.82) とみなし従来の通減摂動法を適用すると、低周波モードの KdV 方程式が導出される。

ところで、(3.81) 式の ϵ^3 のオーダーの第 1 列第 2 項と $\eta^2 \epsilon$ のオーダーの第 2 列第 1 項がつり合うような場合、すなわち $\epsilon \sim \eta$ の場合、導出される方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \alpha B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 B_1}{\partial \xi^3} + \frac{(\Omega_a + \Omega_b) ck_c}{\epsilon^2 \eta |\Omega_e|} \frac{ck_c}{\omega_{pe}} r_{ab} \int B_1 d\xi = 0 \quad (3.88)$$

ck_c/ω_{pe} は η のオーダーであるから、第 4 項の係数は $\eta^2 r_{ab}/\epsilon^2$ のオーダーである。したがって、 $\epsilon \sim \eta$ かつ (3.77) 式が成り立つ場合、(3.88) 式の第 4 項は他の項に比べて無視することができる。すると (3.88) 式は KdV 方程式 (3.86) に帰着する。よって、(3.77) 式は高周波モードの KdV 方程式が導出されるための必要条件であるとみなすことができる。

(3.86) 式の規格化をはずすと、

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \frac{\alpha v_h B_1}{B_0} \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{v_h c^2}{2 \omega_{pe}^2} \frac{\partial^3 B_1}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.89)$$

と書ける。そして、高周波モードのソリトンの幅 D は次のように与えられる。

$$D \sim (c/\omega_{pe}) \epsilon^{-1/2} \quad (3.90)$$

これは1種類イオンプラズマ中の磁気音波のソリトンの幅と等しく、電子の慣性長 c/ω_{pe} のオーダーである。高周波モードソリトンの幅は低周波モードのそれに比べて、およそ $(m_e/m_i)^{1/2}$ 倍小さい。

以上のように、有限なカットオフ周波数をもつ高周波モードについて、KdV 方程式が導出されることを明らかにした。この結果は、長波長領域の分散関係がどのような形であっても、弱い分散を示す領域がそれ以外に存在すれば、そこでの非線形の振る舞いは KdV 方程式で記述される可能性があることを示している。

さらに、本節の展開法は比較的大振幅の波の非線形方程式の導出を可能にする。つまり、従来の逐次摂動法では m_e/m_i 等の微量が方程式系に含まれていた場合、厳密に言えば、適用範囲は $\epsilon \ll m_e/m_i$ の非常に小振幅に限られていた。1種類イオンプラズマ中の直角伝播の磁気音波は、その一例としてあげられる。本節の展開法を用いれば、 $m_e/m_i \ll \epsilon \ll 1$ の比較的大振幅の磁気音波についても KdV 方程式を導出することができる。

3.2.4 展開法の検討

高周波モードの KdV 方程式の導出の際に導入した展開法について、より高次のオーダーで矛盾が生じないかを検討する。前節では $\epsilon \gg \eta$ を仮定して高周波モードの KdV 方程式を導出したが、その際使われなかった項は、イオンの y 方向の運動方程式を例にとると、

$$\begin{aligned}
& +\epsilon^4 \left(-\frac{\partial v_{iy3}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{iy2}}{\partial \tau} + v_{ix1} \frac{\partial v_{iy2}}{\partial \xi} + v_{ix2} \frac{\partial v_{iy1}}{\partial \xi} \right) + \dots \\
& - \frac{\Omega_i}{|\Omega_e|} \epsilon (E_{y1} - v_{ix1}) - \frac{\Omega_i}{|\Omega_e|} \epsilon^2 (E_{y2} - v_{ix2} - B_1 v_{ix1}) + \dots = 0. \quad (3.91)
\end{aligned}$$

である。上の式は ϵ^m (m は正の整数) に比例する項からなる系列と、 $(\Omega_i/|\Omega_e|)\epsilon^m$ に比例する項からなる系列から構成されている。もしもこれら二つの系列が、各オーダーでそれぞれ異なる独立な関係式を与えるなら、得られる関係式が多すぎて相互に矛盾を来す可能性がある。これを避けるためには、第2列の $(\Omega_i/|\Omega_e|)\epsilon^m$ のオーダーの項が、第1列の ϵ^m の項とつり合うようにオーダーリングを設定すればよい。例えば、 $\epsilon^3 \sim \eta^2$ ならば、(3.91) 式の第1列第1項の ϵ^4 の項と第2列第1項の $(\Omega_i/|\Omega_e|)\epsilon \sim \eta^2 \epsilon$ の項とが同オーダーとなり、それらが一緒になって一つの関係式を与えることになる。つまり、前節では $\epsilon \ll \eta$ と仮定し、それより詳細な両者の関係は設定しなかったが、より高次の項で矛盾が起こらないためには、 ϵ と η の間に

$$\epsilon^n \sim \eta^2, \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \quad (3.92)$$

の関係が必要であることがわかる。なお、これと同じ結果が電子の x 方向の運動方程式からも得られる。

(3.92) 式において、例えば

$$\epsilon^3 \sim \eta^2 \quad (3.93)$$

を仮定する。この時 v_{jy} と E_x の展開式 (3.78)(3.79) の第 1 項は 1 のオーダーの大きさとなる。すなわち

$$v_{jy} = v_{jy1} + \epsilon v_{jy2} + \epsilon^2 v_{jy3} + \dots \quad (3.94)$$

$$E_x = E_{x1} + \epsilon E_{x2} + \epsilon^2 E_{x3} + \dots \quad (3.95)$$

と展開することになる。(3.94)(3.95) 式は、変動する量の最低次が ϵ^0 のオーダーとなることを示していて、一見奇異な感じを与える。しかし、これは物理的には、例えば第 2 章 (2.23) 式に示したように、電子の y 方向の速度 v_{ey} がアルヴェン速度のおよそ $(m_i/m_e)^{1/2} \epsilon^{3/2}$ 倍になることを反映している。つまり、極端に小振幅でない限り、 v_{ey} は実際アルヴェン速度に比べて大きな値をとる。なお、イオンについてはこの展開法で、 $v_{iy1} = v_{iy2} = 0$ であったことに注意する。

上の展開で数学的な矛盾は生じないが、揺動の最低次の項が $O(1)$ になることを避けようとするならば、規格化を変えてやればよい。例えば、 y 方向の速度の規格化を v_h/η で、 x 方向の電場の規格化を $v_h B_0/(c\eta)$ で行い、

$$v_{jy} = \epsilon^{3/2} v_{jy1} + \epsilon^{5/2} v_{jy2} + \dots \quad (3.96)$$

$$E_x = \epsilon^{3/2} E_{x1} + \epsilon^{5/2} E_{x2} + \dots \quad (3.97)$$

と展開すれば、最低次の項が $O(\epsilon^{3/2})$ となる。そして、当然のことながら、前節と同様に高周波モードの KdV 方程式を導出することができる。

最後に、前節の展開法におけるカットオフ周波数の相対的な大きさについて述べる。高周波モードのカットオフ周波数はイオンサイクロトロン周波数 Ω_i の大きさである。一方、非線形性による周波数のずれは $\sim \epsilon v_h k$ と見積ることができる。そして、 $v_h \sim c\Omega_i/\omega_{pi}$ と $ck/\omega_{pe} \sim \epsilon^{1/2}$ を考慮に入れると、カットオフ周波数と非線形性による周波数のずれの比は、 $\eta/\epsilon^{3/2}$ のオーダーであることがわかる。これは、例えば (3.93) を設定した場合、1 のオーダーとなる。したがって、カットオフ周波数は無視できる量ではない。つまり、高周波モードの KdV 方程式の導出においては、カットオフ周波数を有限に保ったまま (0 とする近似を採用したのではなく)、振幅に下限を設定することによって、 $k=0$ の近傍を考察の対象から外したのである。

3.2.5 KdV 方程式の適用範囲

3.2.2 節と 3.2.3 節で、低周波モードおよび高周波モードの非線形の振る舞いが、それぞれ KdV 方程式で記述されることを導いた。ただし、それぞれ適用範囲が存在する。KdV 方程式が有効なのは、振幅に相当するパラメータを ϵ とすると、低周波モードについては、(3.57) 式より

$$\epsilon \ll \epsilon_{\max}^- \quad (3.98)$$

$$\epsilon_{\max}^- \equiv r_{ab} \quad (3.99)$$

を満たすような小振幅波である。ここで、 r_{ab} は (3.24) 式で定義された量である。また、高周波モードについては (3.76) 式より

$$\epsilon_{\min}^+ \ll \epsilon \ll 1 \quad (3.100)$$

$$\epsilon_{\min}^+ \equiv c^2 k_{\text{inf}}^2 / \omega_{pe}^2 \sim \eta r_{ab}^{1/2} \quad (3.101)$$

を満たすような振幅をもつ波に対して KdV 方程式が有効である。ここで、 η は (3.74) 式で定義された定数で、その大きさは $(m_e/m_i)^{1/2}$ のオーダーである。低周波モードの孤立波解の特徴的な長さは、イオンの慣性長 c/ω_{pi} のオーダーであり、高周波モードのそれは電子の慣性長 c/ω_{pe} のオーダーである。

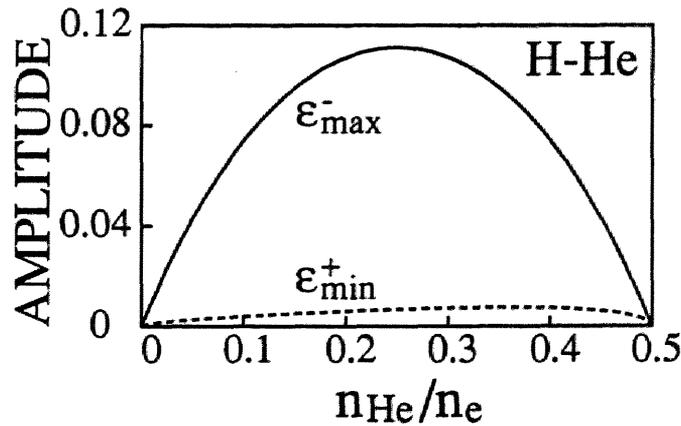


図 3.8: KdV 方程式の適用範囲。 ϵ_{\max}^- は低周波モードの振幅の上限、 ϵ_{\min}^+ は高周波モードの振幅の下限を表す。

低周波モードの KdV 方程式の適用範囲には (3.98) 式に示したように、振幅の上限 ϵ_{\max}^- が存在する。一方、高周波モードの KdV 方程式については、(3.100) 式に示したように振幅の下限 ϵ_{\min}^+ が存在する。 ϵ_{\max}^- と ϵ_{\min}^+ を、イオンの存在比の関数としてプロッ

トしたのが、図 3.8 である。ここでは、H-He プラズマを仮定している。実線が ϵ_{\max}^- を、点線が ϵ_{\min}^+ を表す。2 種類のイオンのうちの一方のイオンの存在量が極端に少なくなると、 ϵ_{\max}^- と ϵ_{\min}^+ はどちらも非常に小さくなる。つまり、1 種類イオンプラズマに近づくと、KdV 方程式の適用範囲は、低周波モードについては狭くなり、高周波モードについては広がる。二つの曲線で囲まれた部分は、高周波モードの KdV 方程式と低周波モードの KdV 方程式が同時に成立し得る振幅領域を表す。すなわち、そのような振幅では、 c/ω_{pi} と c/ω_{pe} のオーダーという非常に異なった幅をもつ孤立波が、ほぼ等しい速度で伝播する可能性がある。

このように、本論文で述べた二つの KdV 方程式は、それぞれ振幅に対して適用可能領域が存在する。このため、その領域外の波の振る舞いを詳細に調べることは、将来の一つの重要な課題である。現在、イオン 2 種類と電子の 3 流体の基礎方程式系を数値的に解くことにより、そのような波動を調べようとしている [81]。図 3.9 に、その一例を示す。ここでは初期値として、低周波モードの KdV 方程式の孤立波解を設定している。ただし、振幅は (3.98) 式を満たさないような大きな値を与えた。図 3.9 は初期値が低周波モードの KdV 方程式の孤立波解であるにもかかわらず、急峻化が起こっていることを示している。そして、もとのパルスの波長 ($\sim c/\omega_{pi}$) よりもずっと短い波長をもつパルスが複数生成され、それらが前方に伝播している。短波長パルスの幅は、高周波モードの孤立波の特徴的な幅 c/ω_{pe} のオーダーである。また、短波長のパルスの伝播速度の観測値は、高周波モードの孤立波の伝播速度の理論値と良く一致している。したがって、生成された短波長パルスは高周波モードの孤立波であるとみなすことができる。このように、低周波モードと高周波モードの非線形発展はカップルしている。つまり、低周波モードの急峻化によって高調波成分が生成されるが、そのいくつかは高周波モードの分散曲線の近くに存在する。このため、高周波モードの非線形波が生成されるのである。

シミュレーションパラメータ、図 3.9 に関する詳しい考察、およびその他のシミュレーション結果等は、付録 F に示している。

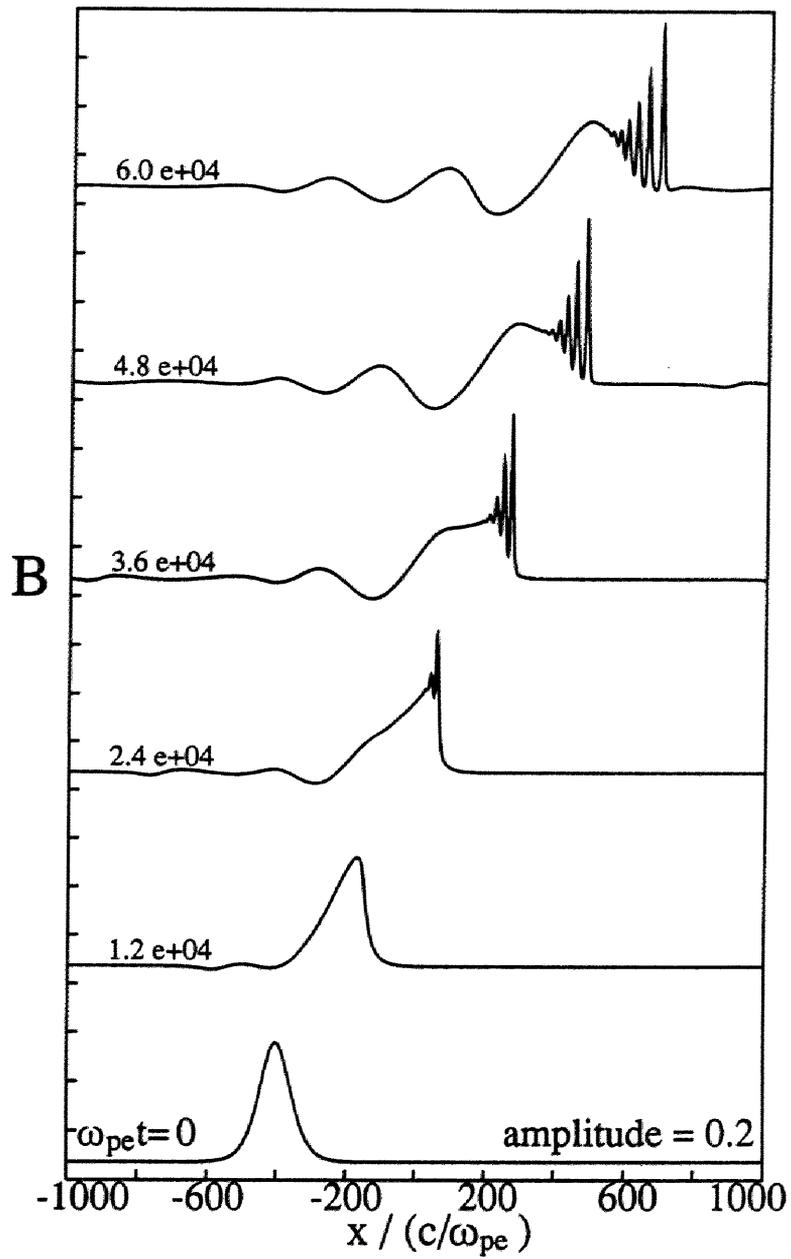


図 3.9: 2 種類イオンプラズマ中の磁気音波の非線形発展。磁場のプロファイルの時間変化を表す。初期値として低周波モードの大振幅孤立波 ($\delta\bar{B} = 0.2 > \epsilon_{\max}^-$) を設定。時間が経つにつれ、波の急峻化がおこり高周波モードに相当するパルスが生成されている。

4 磁気音波による重イオン加速

本章では2種類のイオンが存在するプラズマ中での、磁気音波による重イオンの加速を、理論と粒子モデルに基づいたシミュレーションを使って議論する [72]。ただし、宇宙プラズマと同じように、主成分を軽イオン、副成分を重イオンとする。

4.1 節では、非線形磁気音波中のイオンの軌道を理論的に解析する。そして、軽イオンは一部の粒子が縦電場によって加速を受けるが、重イオンは全ての粒子が横電場によって強く加速され得ることを示す。さらに、加速された重イオンの速さを、小振幅波と大振幅波の場合に分けて見積もる。大振幅波は、重イオンをおよそ波の伝播速度にまで加速することができる。4.2 節では、シミュレーションモデルについて述べる。本研究では、電子、軽イオンおよび重イオンを全て粒子として扱うモデルを使用する。4.3 節に、小振幅波を励起させた場合、および大振幅波を励起させた場合のシミュレーション結果を示す。その結果は、大振幅磁気音波は軽イオンと重イオンをともに強く加速すること、およびそれらの加速メカニズムは全く異なったものであることをはっきりと表している。さらに、加速された重イオンの速さの観測値は理論的な予測と良く一致する。

4.1 重イオンの加速メカニズム

2種類のイオンが存在するプラズマ中を磁場に対して直角方向に伝播する磁気音波は、低周波モードと高周波モードに分裂する。そして、どちらも弱い分散を示す領域が存在し、そこではその非線形の振る舞いは KdV 方程式で記述される。低周波モードの KdV 方程式が成立するのは、非常に小振幅の場合に限られている。一方、高周波モードの KdV 方程式は、極めて小振幅の場合は成立しないが、比較的大振幅の波に適用することができる。このため、低周波モードの孤立波よりも、高周波モードの孤立波の方が、大振幅では安定に伝播することが予想される。そこで、本節では高周波モードの非線形波におけるイオンの運動を考察し、重イオンは軽イオンとは異なるメカニズムで強く加速されることを明らかにする。

高周波モードは対象としている周波数帯が $\Omega_i \ll \omega \ll \omega_{LH}$ であるため、その中のイオンの運動にドリフト近似を適用することはできない。実際、3.2.3 節の (3.85) 式に示したように、孤立波中のイオンの速度は $E \times B$ ドリフトでは記述できず、イオンの種類に依存している。このことを前提として、以下の議論を進める。

磁場を z 方向、波の伝播方向を $+x$ 方向と仮定すると、実験室系で見た場合、そのような磁気音波中に存在する電磁場成分は、磁場 B_z 、伝播方向の縦電場 E_x 、そして伝播方向および磁場に垂直な横電場 E_y である。図 4.1 に孤立波型の構造を持つ場合の、電磁場の典型的なプロファイルを示した。 B_z と E_y は同じプロファイルを示し、パル

ス領域で正の値をもつ。 E_x はパルスの前面で正、パルスの後面で負の値を取る。また、波の伝播速度を Mv_h とした。ここで、 v_h は (3.32) 式で定義される高周波モードの特徴的な速度、 M はマッハ数である。

イオンの運動方程式は

$$m_i \frac{dv_{ix}}{dt} = q_i \left(E_x + \frac{v_{iy}}{c} B_z \right), \quad (4.1)$$

$$m_i \frac{dv_{iy}}{dt} = q_i \left(E_y - \frac{v_{ix}}{c} B_z \right), \quad (4.2)$$

となる。ここで、添字 i は イオン種 a あるいは b を表す。イオン種 a を軽イオン、イオン種 b を重イオンとする。すなわち、 $q_b/m_b < q_a/m_a$ を仮定する。軽イオン a を主成分、重イオン b を副成分とする。

最初に流体の運動を考察する。第 2.3 節に示したように、1 種類イオンプラズマ中の磁気音波では、 x 方向の速度は、イオン流体と電子流体でほぼ等しい。そして、その速度と横電場 E_y との間には次の関係が成立している。

$$E_y - v_{jx} B_z / c \simeq 0. \quad (4.3)$$

このため、イオン流体の y 方向の速度はパルス通過時にほとんど変化しないことが、イオンの運動方程式の y 成分 (4.2) 式よりわかる。2 種類イオンプラズマにおいても、主成分の軽イオン流体 a と電子流体の x 方向の速度は関係式 (4.3) をほぼ満たしている。したがって、主成分イオンの y 方向の速度 v_{ay} はパルス領域でもほとんど変化しない。

一方、副成分の重イオン流体 b は関係式 (4.3) を満たさない。パルスがやって来ると、縦電場 E_x が軽イオン a と電子の v_x をすぐに変化させる。しかし、重イオン b はそれほど素早くパルスに反応することができない。このため、パルス内部では v_{bx} は v_{ax} より小さい。

$$v_{bx} < v_{ax}. \quad (4.4)$$

v_{ax} は (4.3) 式を満たしているので、(4.4) 式より

$$E_y - v_{bx} B_z / c > 0, \quad (4.5)$$

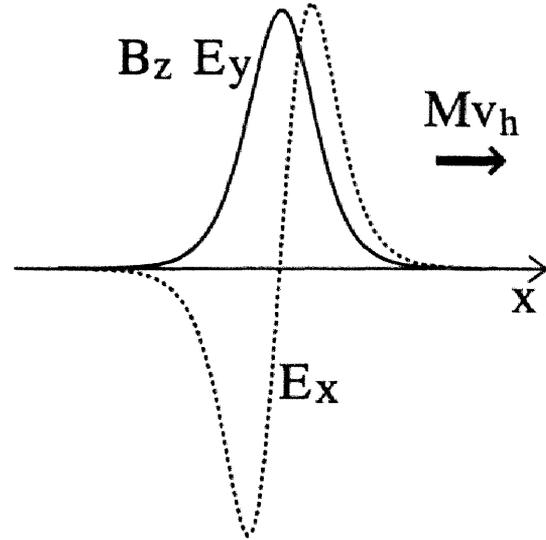


図 4.1: 孤立波型磁気音波の電磁場成分のプロファイル

となる。(4.5) 式は、横電場 E_y による力がローレンツ力より大きくなることを示している。したがって、運動方程式の y 成分 (4.2) 式の右辺は正になり、パルス内部で重イオン流体は $+y$ 方向、すなわち横電場 E_y の方向に加速される。

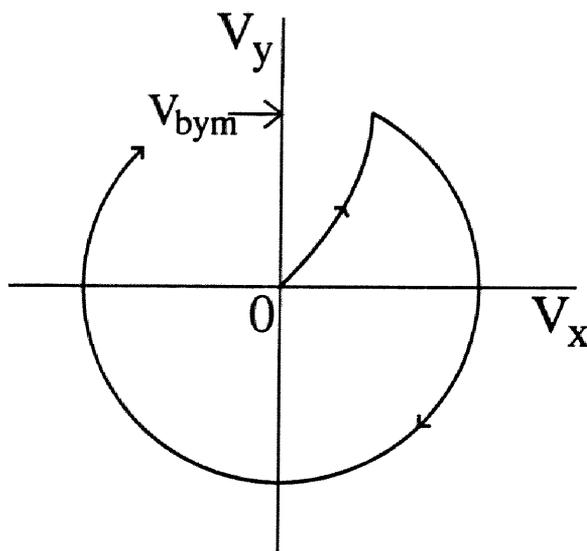


図 4.2: 図 4.1 に示した磁気音波中の (v_x, v_y) 平面における重イオンの軌道。パルスを通過する際重イオンは v_{bym} の速度にまで加速される。

次に流体を構成している個々の粒子の運動を考える。主成分の軽イオン a については、大部分の粒子がパルス通過後ほぼ通過前の状態に戻る。そして、第 2.3 節に示した 1 種類イオンプラズマの場合と同様、一部の少数粒子が縦電場 E_x によって反射され加速を受けることが予想される。一方、副成分の重イオン b は、全ての粒子がパルス通過時に横電場 E_y によって加速される。図 4.1 のパルスにおける、重イオン粒子の (v_x, v_y) 平面での典型的な軌道を図 4.2 にプロットした。パルス内での v_x の変化は小さいが、 v_y が増加する。その最大値を v_{bym} とした。加速終了後は、ほぼ v_{bym} の速さで旋回運動をする。このように、全ての重イオン粒子は磁気音波によって加速されるが、その機構は軽イオン粒子のそれとは全く異なっている。

v_{bym} を具体的に求めて、重イオンの加速の大きさを見積もる。磁気音波の振幅を δB_z と δE_y で表し、重イオンが $+y$ 方向の力を受けている時間を Δt とする。磁気音波内における、 v_{bx} の増加を無視すると、運動方程式の y 成分 (4.2) 式より

$$v_{bym} \sim (q_b/m_b)(\delta E_y/2)\Delta t, \quad (4.6)$$

が得られる。ただし、 Δt の時間の E_y の平均値を $\delta E_y/2$ と見積もった。 v_{bym} を磁場の最大値 B_m を使って表すために、ファラデーの法則の近似式

$$\delta E_y \sim (\delta x/\delta t)(\delta B_z/c), \quad (4.7)$$

を使用する。 $\delta x/\delta t \sim Mv_h$ 、 $\delta B_z \sim (B_m - B_0)$ より、(4.7) 式は

$$\delta E_y \sim Mv_h(B_m - B_0)/c, \quad (4.8)$$

と書き換えることができる。(4.8) 式を (4.6) 式に代入すると

$$v_{bym} \sim [\Omega_b Mv_h(B_m - B_0)/(2B_0)]\Delta t, \quad (4.9)$$

が得られる。

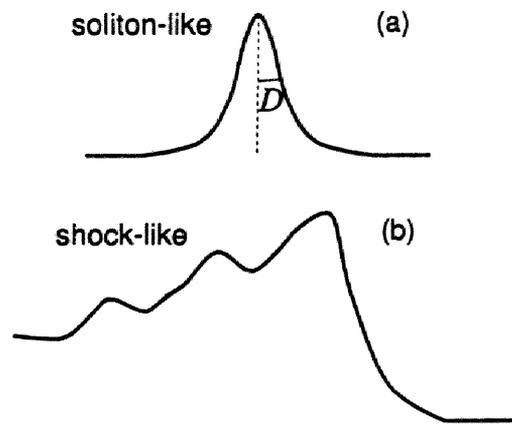


図 4.3: 孤立波型パルス (a) と衝撃波型パルス (b) の概観図

小振幅の孤立波型のパルスと大振幅の衝撃波型のパルスの2つの場合について、力を受ける時間 Δt を見積もり加速の大きさを議論する。図 4.3にそれらの典型的な形を示した。(a) は孤立波型のパルス、(b) は衝撃波型のパルスである。なお、 D は孤立波の特徴的な幅でその定量的な定義は後で示す。小振幅波は、2.3 節で示したような粒子反射を起こさない。また、パルス領域に存在する電子電流は弱く、電流不安定性を引き起こすことはない。このため、小振幅波は左右対象な形をした孤立波として、ほぼ定常的に伝播する。一方、大振幅波の伝播には粒子反射が伴っている。また、不安定性を伴う可能性もある。そして、これらによるエネルギー散逸によって、波は左右非対象な衝撃波型となる [15]-[17]。

孤立波型のパルスは、ほぼ次の KdV 方程式のソリトン解で記述することができる。

$$B_z/B_0 = 1 + (2/\alpha)(M - 1)\text{sech}^2[(x - Mv_h t)/D]. \quad (4.10)$$

ここで、 α は (3.87) 式で定義される定数であり、 D はマッハ数 M を使って

$$D = (c/\omega_{pe})\sqrt{2/(M-1)}, \quad (4.11)$$

と表される。なお、図 4.3(a) に長さ D を示した。重イオンの加速が起こるのはパルス内部である。パルス幅を $2D$ で近似し、パルス内部で重イオンの x 方向の速度は変化しないと仮定すると、加速時間は

$$\Delta t \sim 2D/(Mv_h), \quad (4.12)$$

と見積もることができる。(4.12) 式を (4.9) 式に代入すると、

$$v_{bym} \sim (m_e/m_i)^{1/2}(B_m/B_0 - 1)^{1/2}v_h, \quad (4.13)$$

が得られる。ただし、ここでは、磁場の最大値 B_m とマッハ数 M との間に

$$B_m/B_0 \sim 2M - 1, \quad (4.14)$$

の関係があることを使った。なお、KdV 方程式の孤立波解 (4.10) 式に基づいた v_{bym} の導出を Appendix G に示す。(4.13) 式から、小振幅孤立波による重イオンの加速は、非常に強い磁場の存在するプラズマ中では、重要になることが予想される。つまり、プラズマベータ値 (= プラズマ圧/磁気圧) が、 $\beta \ll (m_e/m_i)$ のプラズマの場合、磁気音波は小振幅であっても、重イオンを熱速度よりもずっと大きい速度にまで加速することができる。

大振幅衝撃波型のパルスでは、パルスの前面で B_z 、 E_y 等が急激に増加した後、しばらくの間その値を保っている (図 4.3(b))。このため、横電場 E_y による重イオンの加速は、孤立波型のパルスの場合よりも、長時間続くことになる。しかし、加速は無限に続くわけではない。増加した y 方向の速度はローレンツ力によって x 方向の速度に徐々に変換される。そして、 v_x の値がかなり増加し、 E_y による力よりもローレンツ力の方が大きくなると、重イオンの加速は終わる。加速時間 Δt は、その間の重イオンの平均のサイクロトロン周波数 $\langle \Omega_b \rangle$ 、

$$\langle \Omega_b \rangle \sim q_b[(B_m + B_0)/2]/(m_b c), \quad (4.15)$$

を使って

$$\Delta t \sim 1/\langle \Omega_b \rangle, \quad (4.16)$$

と見積もることができる。(4.16) 式を (4.9) 式に代入すると

$$v_{bym} \sim \left(\frac{B_m - B_0}{B_m + B_0} \right) M v_h, \quad (4.17)$$

が得られる。(4.17)式は、大振幅波は重イオンを Mv_h のオーダーにまで加速することが可能であることを示している。したがって、重イオンは、大振幅磁気音波によって非常に高エネルギーに加速され得る。

この重イオンの加速メカニズムを波の系でみると、磁場の急激な増加によって粒子の速度の方向が急激に変化するということになる。第2章の図2.3に示したように、波の静止系では場の量は磁場 $B_z(x)$ 、電位 $\phi(x)$ および一定な電場 $E_{yo}(= -Mv_h B_0/c)$ で表される。すると、 y 方向の運動方程式は

$$m_i \frac{dv_{iy}}{dt} = -\frac{q_i}{c}(Mv_h B_0 + v_{ix} B_z), \quad (4.18)$$

となる。

粒子は $-x$ 方向に移動する。上流での速度は $v_x \simeq -Mv_h$ であるが、パルス領域に入ると主成分の軽イオンは電位 ϕ によって減速させられる。すなわち $|v_x|$ が小さくなる。そのような粒子については(4.18)式の右辺は、 B_z の大きいパルス領域においても小さな値となっている。したがって、 y 方向の速度はほとんど変化しない。一方、重イオンは慣性が大きいため、 v_x がそれほど変化せずに、パルス領域に突入していく。そのため、(4.18)式の右辺は、ローレンツ力に相当する第2項が主要項となる。 $v_x \sim -Mv_h$ とみなし、加速の時間を Δt とすると、(4.18)式より(4.9)式が得られる。また、加速領域の x 軸に沿った長さを Δx とし、 $|\Delta x \sim Mv_h \Delta t|$ と見積もると、(4.18)式は

$$v_{bym} \sim [\Omega_b(B_m - B_0)/(2B_0)]\Delta x, \quad (4.19)$$

と書き換えることができる。

小振幅孤立波の場合、 Δx は(4.11)式を使って見積もることができる。そして、加速の強さ v_{bym} について(4.13)式を得る。

一方、大振幅の衝撃波型のパルスの場合、 Δx は x 方向の速度 Mv_h がローレンツ力によって y 方向の速度に変換されるのに要する距離、すなわち次のラーモア半径で与えられる。

$$\Delta x \sim Mv_h / \langle \Omega_b \rangle. \quad (4.20)$$

ここで、 $\langle \Omega_b \rangle$ は(4.15)式で与えられる重イオンの平均のサイクロトロン周波数である。加速領域の長さ、(4.20)式を(4.19)式に代入すると、加速の強さ v_{bym} について(4.17)式が得られる。振幅が大きい場合、 $v_{bym} \sim Mv_h$ となる。このように、衝撃波型パルスでは、上流での流れの速度 Mv_h がパルス領域で旋回運動の速度に変換されるとみなすことができる。

(4.20)式の大振幅衝撃波型パルスにおける加速領域の長さは、孤立波の幅の目安となる電子の慣性長 c/ω_{pe} よりもずっと大きい。したがって、大振幅衝撃波型のパルスの

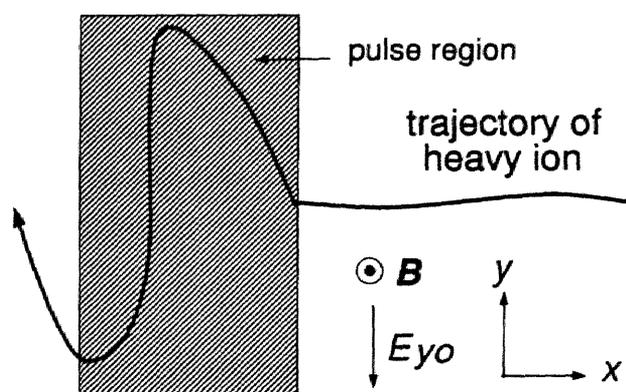


図 4.4: 波の系でみた (x, y) 平面での重イオンの軌道。斜線部に衝撃波型パルスが存在する。

方が、小振幅孤立波型のパルスに比べてずっと強く重イオンを加速することができる。図 4.4 に波の系での (x, y) 平面における重イオンの軌道の概観図を示した。ここでは、幅の広い衝撃波型のパルスを例にとった。第 2.3 節の図 2.5 に電位差によって反射される粒子の軌道を示したが、重イオンはそれとは全く異なった軌道を描いて加速される。

このように、主成分を軽イオン、副成分を重イオンとするプラズマ中を伝播する磁気音波は、全ての重イオン粒子を加速することができる。一方、主成分の軽イオン粒子は、磁気音波中に形成される電位差によって反射され加速を受けるが、それは第 2.3 節の図 2.4 に示したように少数の粒子に限られる。

4.2 シミュレーションモデル

粒子モデルに基づいた計算機シミュレーション [84][85] を使って、2種類のイオンが存在するプラズマ中の非線形磁気音波の伝播、およびそれに伴う重イオンの加速について議論する。本論文では、相対論的な効果を含めた電磁的粒子シミュレーションコードを使用する。粒子の種類は電子、軽イオン a および重イオン b の3種類とする。空間変化は x 方向のみの1次元であるが、粒子の速度は (v_x, v_y, v_z) の3成分を持つものとする。

粒子シミュレーションでは、実際のプラズマよりもずっと少ない粒子数で、プラズマ中の物理現象を再現することを可能にするため、粒子は超粒子 (finite size particle) として取り扱われている。超粒子とは、電荷 q と質量 m を実際の電子やイオンよりもずっと大きくしたものであり、図 4.5 に示すような空間的な広がりを持っている。 S は超粒子の形状因子で、本研究では粒子 j の位置 x_j とグリッド間隔 Δ_g を使って

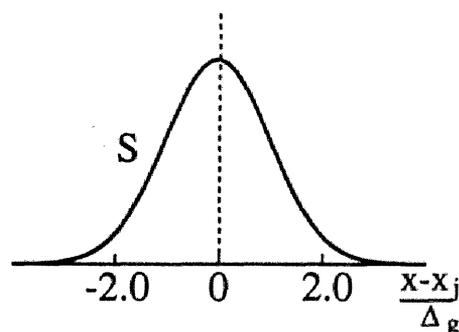


図 4.5: 超粒子の形状因子

$$S(x - x_j) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \Delta_g} \exp \left[-\frac{(x - x_j)^2}{2\Delta_g^2} \right] \quad (4.21)$$

と設定した。なお、 S は全空間にわたる積分が 1 になるように規格化されている。この空間的な広がりによって、粒子間の衝突数や極めて短波長のノイズは大幅に減少することになる [86]。

シミュレーション粒子 (電子、軽イオン a、重イオン b) は、次の相対論的な運動方程式にしたがって動く。

$$\frac{d\mathbf{p}_j}{dt} = q \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}_j \times \mathbf{B}}{m_j c (1 + \mathbf{p}_j^2 / m_j^2 c^2)^{1/2}} \right] \quad (4.22)$$

$$\frac{dx_j}{dt} = v_{jx} \quad (4.23)$$

ここで、 \mathbf{p}_j は相対論的な運動量

$$\mathbf{p}_j = m_j \mathbf{v}_j / (1 - v_j^2 / c^2)^{1/2} \quad (4.24)$$

である。電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{J} はシミュレーション粒子の位置と速度および (4.21) 式の形状因子を用いて、

$$\rho(x) = \sum_j q_j S(x - x_j) \quad (4.25)$$

$$\mathbf{J}(x) = \sum_j q_j \mathbf{v}_j S(x - x_j) \quad (4.26)$$

と決定される。これらの ρ と \mathbf{J} を使って、電磁場は Maxwell 方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (4.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (4.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.30)$$

より求められる。さらに、得られた電磁場を運動方程式 (4.22) に代入し、次の時間ステップでの粒子の速度と位置を決定する。以上の手順を繰り返して、プラズマ中の粒子の運動および場の非線形発展を追跡する。なお、時間微分に関しては中央差分スキームを用いた。

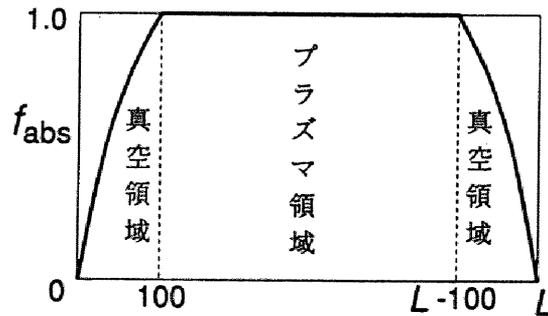


図 4.6: 電磁波の吸収関数 f_{abs} 。プラズマ領域から放射された電磁波は真空領域で吸収される。

システムの境界条件は次のように与えている。長さをグリッド間隔 Δ_g で規格化し、システムの全長を L で表す。シミュレーション粒子は $x = 100$ と $x = L - 100$ のところで弾性的に反射されて、それより外部には存在しない。すなわち、プラズマ領域は $100 < x < L - 100$ でその外側は真空領域となっている。また、プラズマ領域から放射

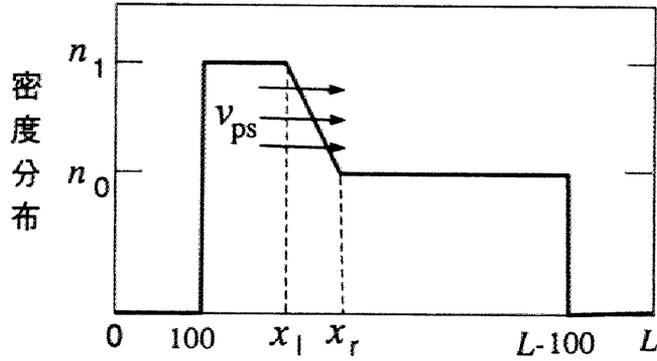


図 4.7: プラズマ密度の初期分布。高密度領域のプラズマは x 方向の速度 v_{ps} をもっている。

される電磁波については、図 4.6 の吸収関数 f_{abs} を重ねることによって、2 つの真空領域で急激に減衰するように設定している [87]。

一様な外部磁場を z 方向にかけて、 $+x$ 方向に伝播する磁気音波をピストンモデルによって励起する。初期のプラズマ密度のプロファイルは、図 4.7 に示したように

$$\begin{aligned}
 n &= n_1, & 100 < x < x_l \\
 n &= n_1 \exp[-(x - x_l)^2/2d^2], & x_l < x < x_r \\
 n &= n_0, & x_r < x < L - 100
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

と与える。ここでは $n_1/n_0 > 1$ として、 $100 < x < x_l$ の領域の密度が高くなるように設定する。また、 d および x_r は密度プロファイルが滑らかになるように選ばれる。

初期の運動量分布は、平均速度が 0 の等方的なマックスウエル分布とする。ただし、高密度領域の粒子については、 x 方向の平均速度が $v_{ps} (> 0)$ となるように与える。これらの粒子がピストンの役割を果たして、磁気音波を励起する。そして、 v_{ps} の大きさを変えることによって、波の振幅を変化させることができる。

本論文では、主に小振幅の場合と大振幅の場合の二つのシミュレーション結果について述べる。シミュレーションパラメータは次のように選んだ。軽イオン a と電子の質量比は $m_a/m_e = 100$ 、重イオン b と軽イオン a の質量比は $m_b/m_a = 4$ 、電荷比については $q_a/|q_e| = 1$ 、 $q_b/q_a = 2$ とした。イオン a とイオン b のサイクロトロン周波数の比は $\Omega_a/\Omega_b = 2$ である。シミュレーション粒子の総数は電子が $N_e = 131072$ 、軽イオンが $N_a = 109224$ 、重イオンが $N_b = 10924$ とした。イオンの密度比は $n_b/n_a = 0.1$ である。なお、初期の密度分布 (4.31) 式の n_1 と n_0 は (4.31) 式的全空間にわたる積分が粒子の総数に等しくなるように決定される。速度は $\omega_{pe} \Delta_g$ で規格化してパラメータ値を与える。ここで、 ω_{pe} は、空間的に平均化されたプラズマ周波数 $\omega_{pe} (= [4\pi q_e^2 (N_e/L)^2/m_e]^{1/2})$ である。光速は $c = 4$ とした。高密度領域のピストン速度 v_{ps} については電子と軽イオンが等しく、 $v_{psc} = v_{psa}$ 、重イオンについては $v_{psb} = v_{psc}/2$ と与えた。また、電子と

イオンの温度比は $T_e/T_i = 4$ とした。以上は、2つのシミュレーションで共通の値を取る。それ以外のパラメータについては小振幅の場合と大振幅の場合に分けて、表 4.1 に示した。 $|\Omega_e|/\omega_{pe}$ は外部磁場の強さを表す。 v_{Te} は電子の熱速度 $v_{Te} = (T_e/m_e)^{1/2}$ 、 ρ_e は電子の旋回半径 $\rho_e = v_{Te}/|\Omega_e|$ である。 v_h は高周波モードの特徴的な速度で、本シミュレーションパラメータではアルヴェン速度 v_A と $v_h = 1.03v_A$ の関係にある。 β はプラズマ圧と磁気圧の比である。本研究では、磁氣的圧力が熱的圧力に比べて大きい低 β プラズマを対象とする。

表 4.1: シミュレーションパラメータ

	L	$ \Omega_e /\omega_{pe}$	v_{Te}	ρ_e	v_h	β	x_l	d	x_r	n_1/n_0	v_{pse}
小振幅	2048	0.5	0.2	0.4	0.19	0.02	20	100	120	1.1	0.24
大振幅	4096	1.5	1.0	0.7	0.57	0.03	60	150	210	2.0	3.3

4.3 シミュレーション結果

4.3.1 小振幅の場合

本節では小振幅の磁気音波を励起させた場合のシミュレーション結果を示す。図 4.8 に4つの異なる時間での磁場のプロファイルのプロットした。小振幅孤立波がほとんど形を変えず、ほぼ定常的に伝播している。この孤立波のマッハ数はおよそ $M = 1.25$ である。

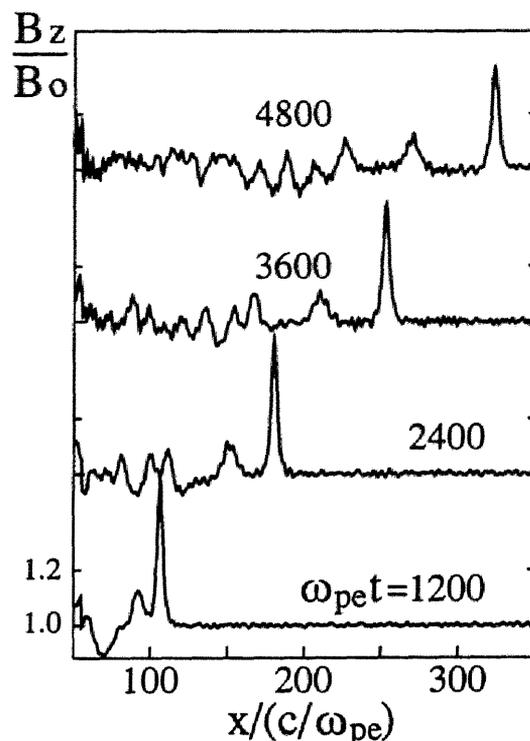


図 4.8: 小振幅孤立波型パルスを励起させた場合の、磁場のプロファイルの時間変化

図 4.9は時間 $\omega_{pe}t = 3610$ における磁場 B_z 、波の伝播方向の縦電場 E_x および横電場 E_y のプロファイルと、軽イオン a と重イオン b の位相空間 (x, v_x) と (x, v_y) におけるプロット、およびそれぞれのイオンの y 方向の速度の平均値 $u_{ay}(x)$ と $u_{by}(x)$ のプロファイルを示したものである。位相空間の図では、小さな点1個が粒子1個を表している。また、 $u_{ay}(x_0)$ は $x = x_0$ の極く付近に存在する a イオンについて、それらの y 方向の速度の平均を取ったものである。なお、図 4.9では磁場、電場および速度はそれぞれ B_0 、 $v_h B_0/c$ 、 v_h で規格化されている。

図 4.9の孤立波の構造は、高周波モードの KdV 方程式の孤立波解でほぼ説明することができる。表 4.2に観測値と $M = 1.25$ を代入した場合の理論値(付録 G の (G.7)-(G.10) 式に基づく)を示す。ここで添字 m は最大値を表す。観測値 D は最大値 $B_z(x) = B_m$

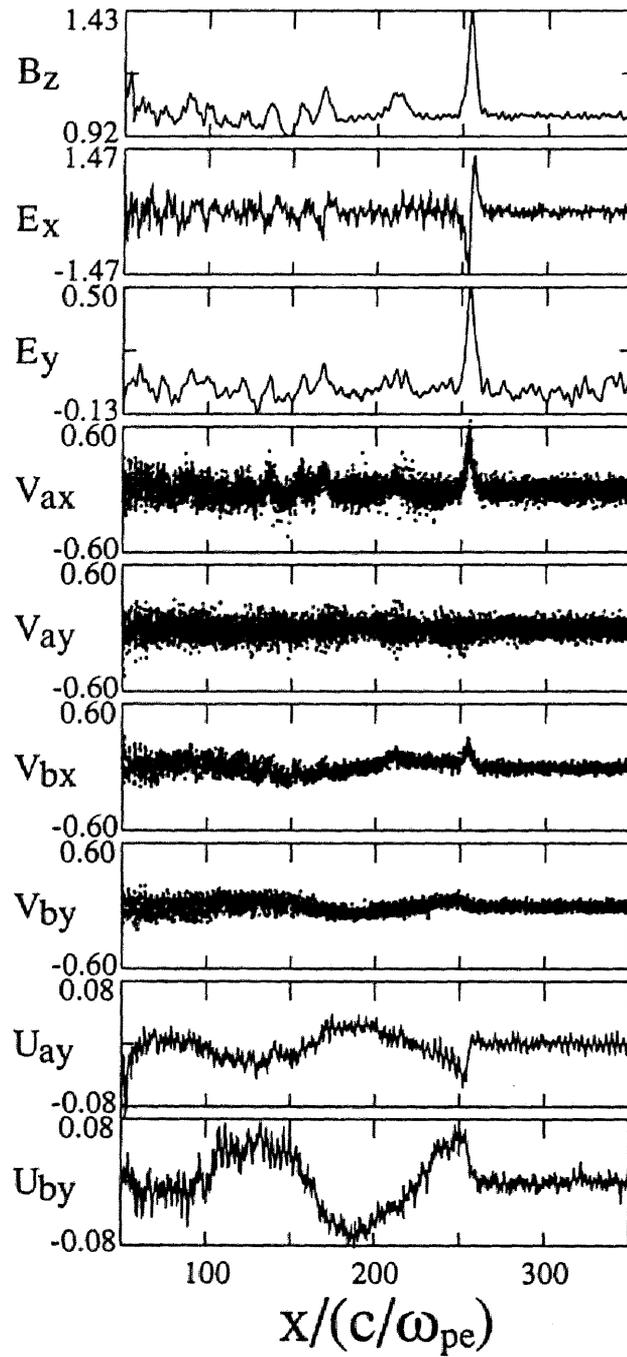


図 4.9: 時間 $\omega_{pe}t = 3610$ におけるスナップショット。上から磁場 B_z 、縦電場 E_x 、横電場 E_y のプロファイル、軽イオン a と重イオン b の位相空間 (x, v_x) と (x, v_y) におけるプロット、横方向の速度の平均値 u_{ay} と u_{by} のプロファイル。

となる点と $B_z(x) = 1 + (B_m - 1)\text{sech}^2(1)$ となる点の距離を測った。表 4.2にあるように観測値と理論値は良く一致している。

表 4.2: 孤立波における各物理量の最大値と特徴的な幅 D の観測値と理論値。

	B_m	E_{xm}	E_{ym}	v_{axm}	v_{bzm}	$D/(c/\omega_{pe})$
観測値	1.43	1.32	0.50	0.65	0.28	2.5
理論値	1.48	1.37	0.48	0.55	0.27	2.8

パルス領域では、重イオン b の x 方向の速度 v_{bx} は軽イオン a の速度 v_{ax} に比べてずっと小さい。このため、第 4.1 節で述べたように、重イオンについては横電場による力 $q_b E_y$ がローレンツ力 $q_b v_{bx} B_z / c$ よりも大きくなる。したがって、重イオンはパルスを通過する際に $+y$ 方向 (E_y の方向) の速度を得る。これは、位相空間 (x, v_{by}) のプロットと平均速度 u_{by} のプロファイルに現われている。平均速度の最大値はほぼ $u_{bym} \sim 0.058$ であるが、この観測値は付録 G の (G.16) 式で与えられる理論値 0.060 とほぼ一致している。

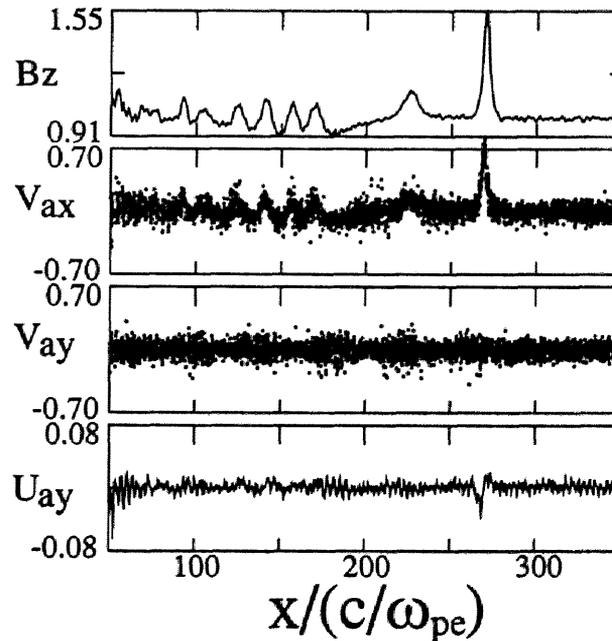


図 4.10: 1 種類イオンプラズマの場合のシミュレーション結果。図 4.9 と同様のパラメータを設定した。上から、時間 $\omega_{pet} = 3610$ における磁場 B_z 、イオンの位相空間 (x, v_x) と (x, v_y) におけるプロット、横方向の速度の平均値を表す。

u_{ay} と u_{by} のプロファイルからパルスの下流に長波長の波が存在しているのがわか

る。その波長はおよそ $\lambda \sim 120c/\omega_{pe}$ である。参考文献 [88][89] では 2 種類イオンプラズマ中の衝撃波を、電子を質量 0 の流体として取り扱うハイブリッドコードを用いたシミュレーションで調べ、衝撃波の下流に同様の波が励起されることを報告している。この長波長の波は 1 種類イオンプラズマの場合は励起されない。参考のため、イオンを 1 種類にした場合のシミュレーション結果を図 4.10 に示す。図 4.9 と図 4.10 の u_{ay} のプロファイルから、図 4.9 に見られる長波長の波は 2 種類イオンプラズマに特有のものであることがわかる。

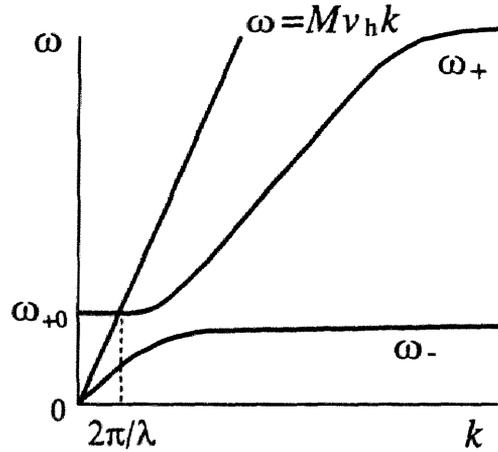


図 4.11: パルス下流に存在する長波長の波の特性を表す。曲線（2 種類のイオンが存在するプラズマ中の磁気音波の分散関係）と直線 $\omega = Mv_h k$ の交点がパルス下流の波の特徴を決定する。その波長を λ とする。交点は高周波モードの長波長領域に存在する。

このパルス下流の波は振幅が非常に小さく、ほぼ線形の波であるとみなすことができる。また、パルスのところで波の位相は固定されている。したがって、波の位相速度はパルスの速度 Mv_h に等しい。波の周波数および波数は、図 4.11 に示したように、2 種類イオンプラズマ中を磁場に直角に伝播する波の線形分散曲線 (ω_- , ω_+) と、直線 $\omega = Mv_h k$ の交点より決定される。 $M > 1$ の場合、交点は高周波モードの長波長領域に存在する。そこで、分散関係式 (3.10) に $\omega = Mv_h k$ を代入し、 $ck/\omega_{pe} \ll 1$ とみなして変形すると、交点の波長 λ について

$$\lambda = \frac{2\pi Mv_h}{\omega_{+0}} \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 - v_A^2/v_h^2} \right)^{1/2} \quad (4.32)$$

が得られる。(4.32) 式に $M = 1.25$ を代入すると $\lambda \simeq 119c/\omega_{pe}$ となり、この理論値は観測値 $\lambda \sim 120c/\omega_{pe}$ と良く一致している。また、図 4.11 と式 (4.32) は M が大きくなるほど波長が長くなることを表している。

このように高周波モードの孤立波型パルスは重イオンを加速し、パルス下流に長波長の波を励起する。このため、2種類のイオンが存在するプラズマ中の磁気音波パルスはゆっくりと減衰する。図 4.12 に磁気音波パルスの振幅の時間変化をプロットした。白丸が、2種類イオンプラズマの場合である。 $\omega_{pet} = 300$ から 4800 の間に磁場の振幅がおよそ 30% ほど減少している。一方、黒丸は1種類イオンプラズマの場合を表す。2種類イオンプラズマの場合と同様のパラメータでシミュレーションを行なったが、 $\omega_{pet} = 300$ から 4800 の間の振幅の減衰の割合は約 4% であった。

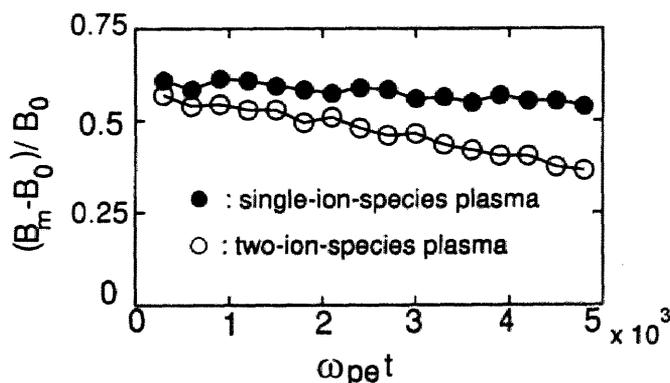


図 4.12: 小振幅孤立波型パルスの振幅の時間変化。白丸が2種類イオンプラズマの場合、黒丸が1種類イオンプラズマの場合を表す。

4.3.2 大振幅の場合

本節では2種類のイオンが存在するプラズマ中の大振幅磁気音波の伝播とそれに伴う粒子加速について、そのシミュレーション結果を示す。図 4.13に $\omega_{pet} = 150$ から 1500 までの、大振幅磁気音波の磁場のプロファイルの時間変化をプロットした。主パルスの平均のマッハ数はおおよそ $M = 2.6$ である。パルスの前面の幅は $10(c/\omega_{pe})$ のオーダーで、そこでは磁場は急激に増加している。そして、1番目のピークの後では、小さな振幅で振動しながらゆっくりと減少している。すなわち、パルスは左右非対称な衝撃波型である。図 4.8の小振幅パルスはあまりその形を変えずに伝播していたが、図 4.13の大振幅パルスは、第1のピークの高さやパルス前面の幅が時間的に少し変動する。この非定常性は、大振幅パルスによる少数のイオン粒子の反射と関連があるものと考えられている [40]。なお、矢印で示した第2のピークについては後で触れる。

図 4.14は、 $\omega_{pet} = 1410$ における磁場 B_z 、縦電場 E_x 、横電場 E_y のプロファイルと、軽イオン a と重イオン b の位相空間でのプロットを表す。この時間には主パルス

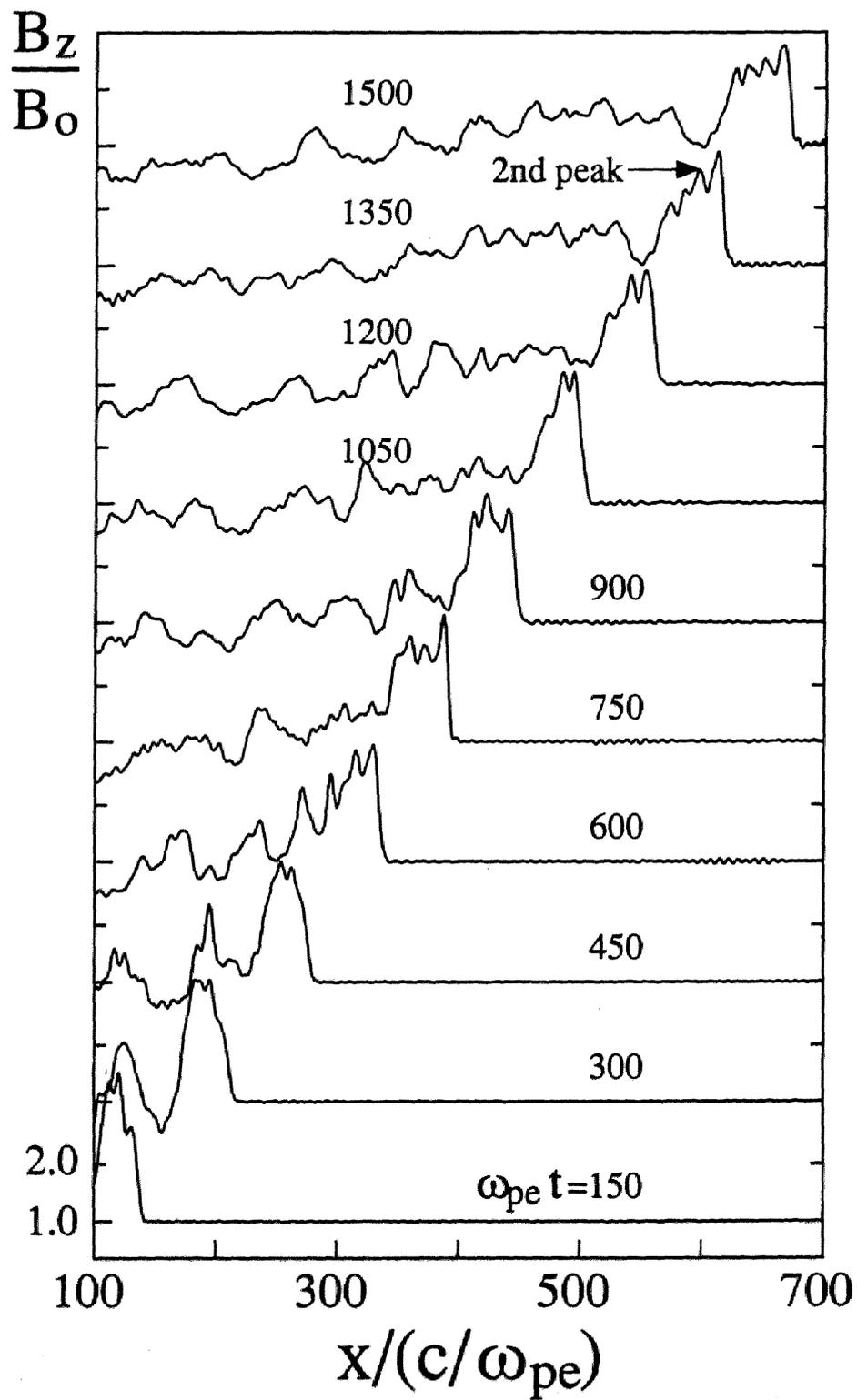


図 4.13: 大振幅衝撃波型パルスの時間変化。 $\omega_{pe} t = 150$ から 1500 までの磁場のプロファイルを示した。矢印で示した第 2 のピークについては後で触れる。

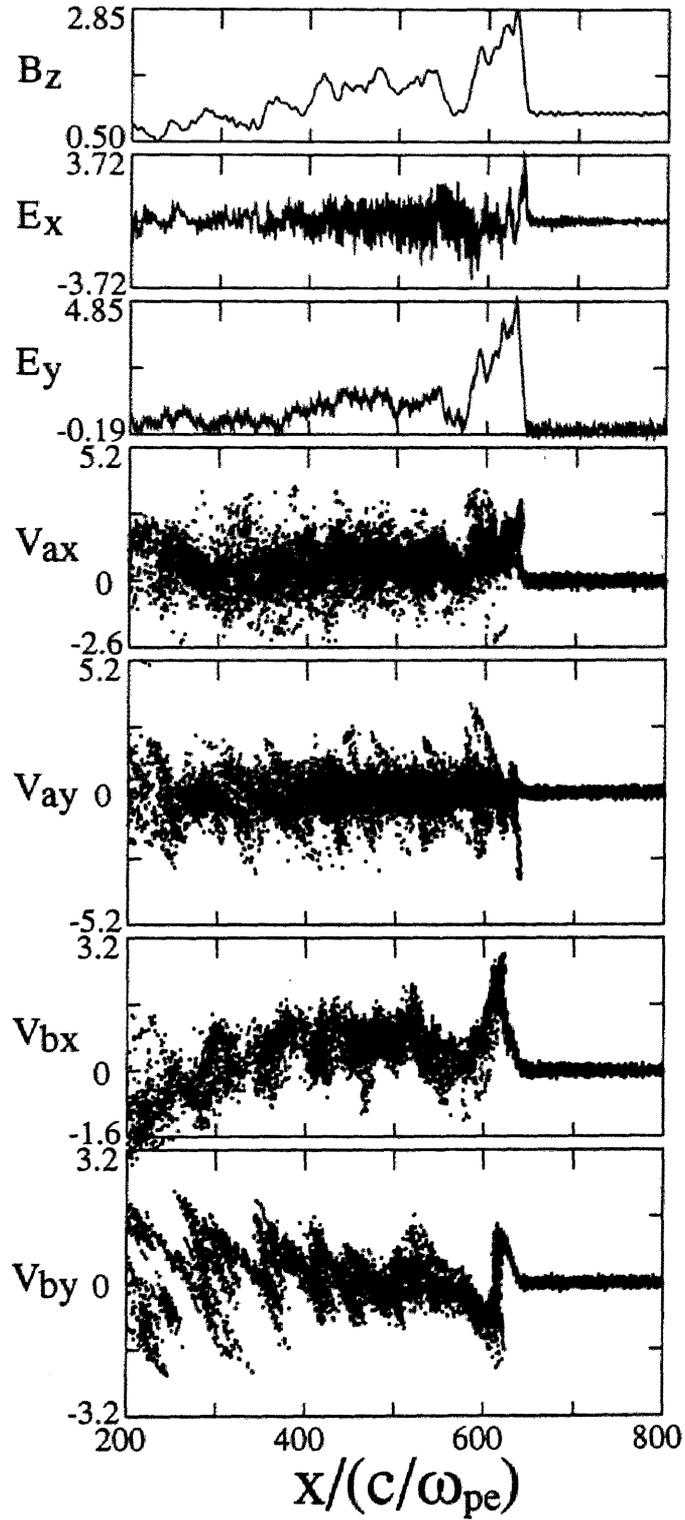


図 4.14: $\omega_{pe}t = 1410$ における、磁場 B_z 、縦電場 E_x 、横電場 E_y のプロファイルと、軽イオン a と重イオン b の位相空間 (x, v_x) 、 (x, v_y) でのプロット。

は $580 < x/(c/\omega_{pe}) < 650$ の領域に存在する。磁場 B_z と横電場 E_y は良く似たプロファイルを示し、ともに主パルスの領域全てにわたって正の値を取る。一方、縦電場 E_x が正の強い値を示すのはパルスの前面の狭い領域に限られている。

図 4.14 より、軽イオン a と重イオン b はともに主パルスによって急激に高エネルギーに加速されていることがわかる。これらのエネルギーは主パルスが通り過ぎた後でも高いままである。

軽イオンと重イオンはともに強い加速が起こっているが、それらの加速メカニズムは全く異なるものである。軽イオン a は縦電場 E_x によって加速されるが、重イオン b は横電場 E_y によって加速される。この違いは図 4.15 の主パルス領域の拡大図にはっきりと現われている。軽イオン a の x 方向の速度 v_{ax} は E_x が正の値となっているパルス前面 $634 < x/(c/\omega_{pe}) < 644$ の狭い領域で急激に増加している。そして、磁場 B_z が第 1 のピークとなるところ ($x \sim 634$) で、一部の粒子が反射されている。一方、パルス前面における重イオンの x 方向の速度 v_{bx} の変化は非常に小さい。このため、第 1 ピークで重イオンが反射されることはない。しかし、横電場 E_y が $619 < x/(c/\omega_{pe}) < 644$ の広い領域にわたって全ての重イオンの y 方向の速度 v_{by} を増加させている。この加速領域の長さは $\Delta x \sim 25(c/\omega_{pe})$ 、 v_{by} の最大値はおよそ $v_{bym} \sim 1.3v_h$ である。これらの観測値は、第 4.1 節で示した理論値、すなわち (4.20) (4.17) 式に $M = 2.6$ と $B_m = 2.85$ を代入して得られる値 $\Delta x \sim 26(c/\omega_{pe})$ 、 $v_{bym} \sim 1.2v_h$ と良く一致している。

v_{by} はローレンツ力によって v_{bx} に変換されるため、 v_{bx} はパルス領域で徐々に増加する。そして、 $\Delta x \sim Mv_h / \langle \Omega_b \rangle$ の距離だけパルスに侵入したところ ($x \sim 618$) で、最大値 $v_{bx} \sim Mv_h$ を取る。これは波の伝播速度に近い値である。したがって、波の系でみると重イオンは長時間その位置に滞在することになる。このため、そこでの重イオン密度が増加し、正の電位が形成されることが予想される。実際、図 4.15 の磁場 B_z のプロファイルには、その場所 ($x \sim 618$) に第 2 のピークが存在している。第 2 のピークでは、 $v_{bx} \simeq Mv_h$ および $E_x > 0$ であるため、重イオンの一部が反射されている。

図 4.16 に主パルス領域の磁場 B_z 、イオンの密度 n_a 、 n_b およびプラズマの x 方向の流体速度 $u_x (= \sum_j n_j m_j v_{jx} / \sum_j n_j m_j)$ のプロファイルをプロットした。 B_z の 2 番目のピークの位置と、 n_b のピークの位置がほぼ一致していることがわかる。また、パルスの後面での x 方向の流体速度 u_x は正の値となっている。これは、粒子の旋回運動の中心が v_x の正の方向にずれていることを示唆している。このため、図 4.15 の重イオンの位相空間のプロットに $v_{bx} > v_{by}$ となる領域 ($x \sim 620$) が存在している。

図 4.17 は、パルスの後面 $575 < x/(c/\omega_{pe}) < 625$ の領域に存在する粒子の (v_x, v_y) 平面でのプロットである。左図が軽イオン a を右図が重イオン b をそれぞれ表す。なお、速度は v_h で規格化している。軽イオン a は、ほぼ $(v_x, v_y) \simeq (1.3v_h, 0.0)$ の点を中心に分布している。この中心の値はこの領域の平均の流体速度にほぼ等しい。半径

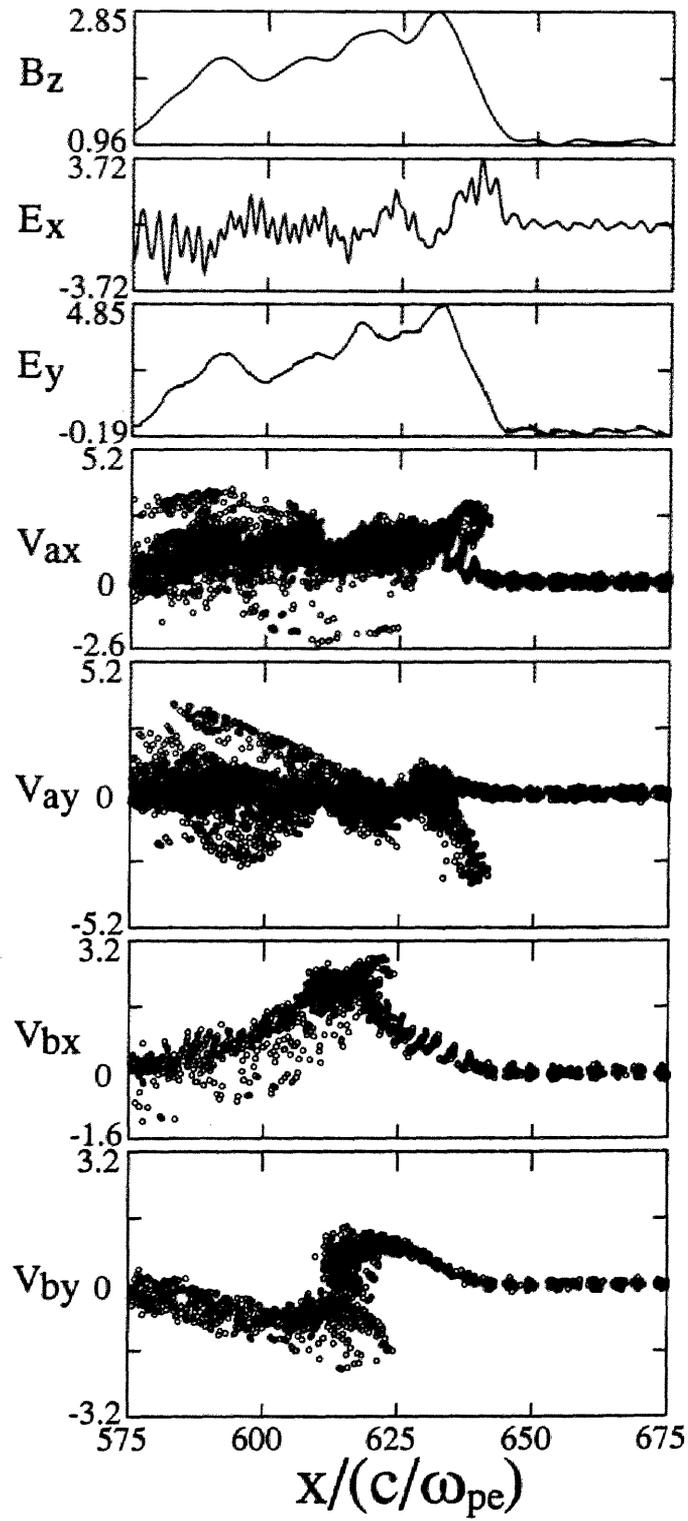


図 4.15: 図 4.14の主パルス領域の拡大図

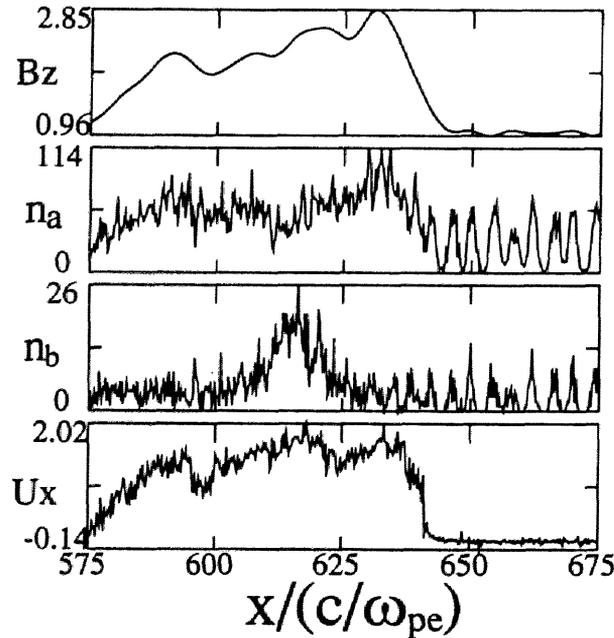


図 4.16: 主パルス領域の磁場 B_z 、軽イオンの密度 n_a 、重イオンの密度 n_b およびプラズマ流体の x 方向の速度 u_x のプロファイル。

が、およそ v_h 程度の円の内部に多数の粒子が存在しているが、これらはパルスに反射されることなく、そのまま通り過ぎたものである。その外側に大きな速さを持つ粒子が少数が存在しているが、それらはパルスによって反射されたものである。一方、重イオン b については、分布の中心の点は軽イオンとほぼ同じであるが、中心部分には全く粒子が存在していないことがわかる。すなわち、重イオン粒子は、ほぼリング状の速度分布を形成している。これは、全ての重イオン粒子が、 v_h 程度の速さで旋回運動をしていることを表している。より外側に存在する少数の粒子は、図 4.15 の磁場のプロファイルに見られる第 2 のピーク ($x \sim 618$) によって、反射されたものである。

図 4.17 の粒子の速度分布関数を示したものが、図 4.18 である。ただし、ここでは平均の流体の静止系に移って観測した。左図が軽イオン a 、右図が重イオン b の分布関数である。軽イオン a の分布のピークが最大となるは、 $v^2/v_h^2 \simeq 0$ のところである。 $v^2/v_h^2 \sim 4$ のところで、分布関数の勾配が急激に変化しているが、 $v^2/v_h^2 \geq 4$ の粒子はパルスの第 1 ピークによって反射されたものである。一方、重イオンの分布のピークは、 $v^2/v_h^2 \simeq 1$ のところにある。これは、全ての粒子がパルス通過時にエネルギーを得、加速されたことを表している。 $v^2/v_h^2 \geq 2$ の粒子は、パルスの第 2 ピークで反射されたものである。すなわち、第 2 ピークによる反射によって、重イオンの分布関数は少し広がっている。

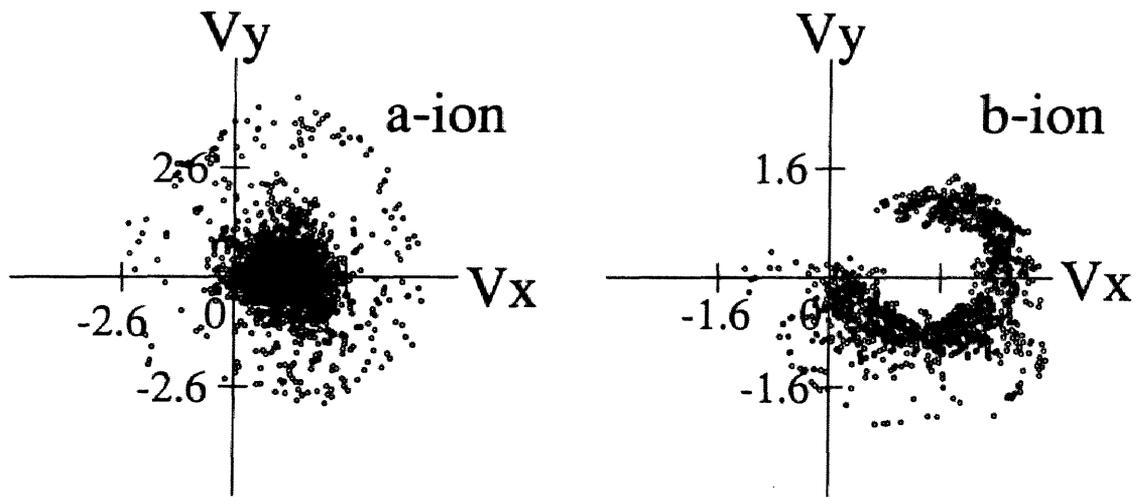


図 4.17: パルスの後面 $575 < x/(c/\omega_{pe}) < 625$ の領域に存在する粒子の (v_x, v_y) 平面におけるプロット。左が軽イオン a 粒子、右が重イオン b 粒子を表す。

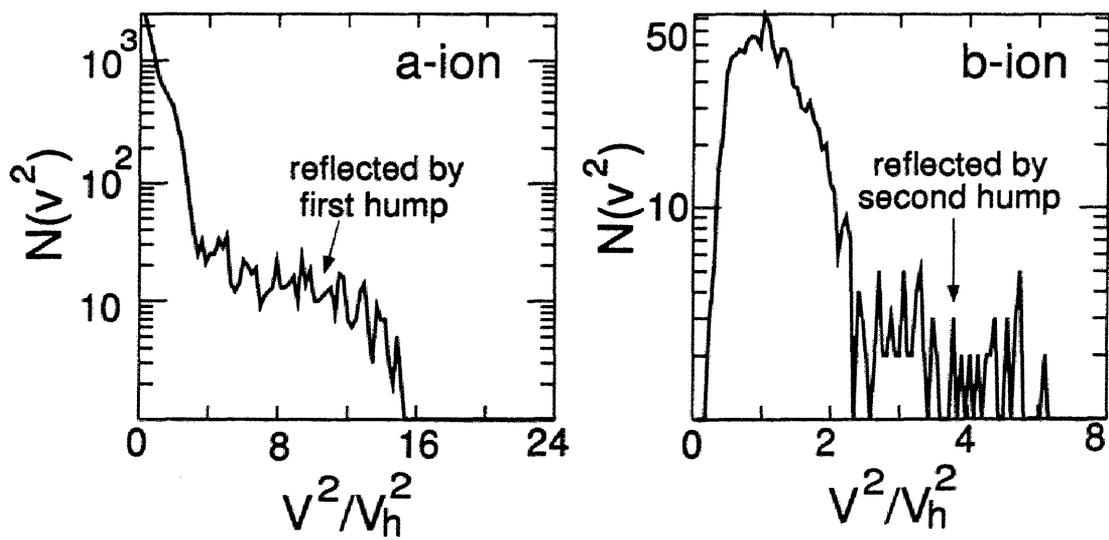


図 4.18: $575 < x/(c/\omega_{pe}) < 625$ の領域に存在する粒子の速度分布関数。左図が軽イオン a、右図が重イオン b の分布関数。速度は、平均の流体の静止系で観測した。

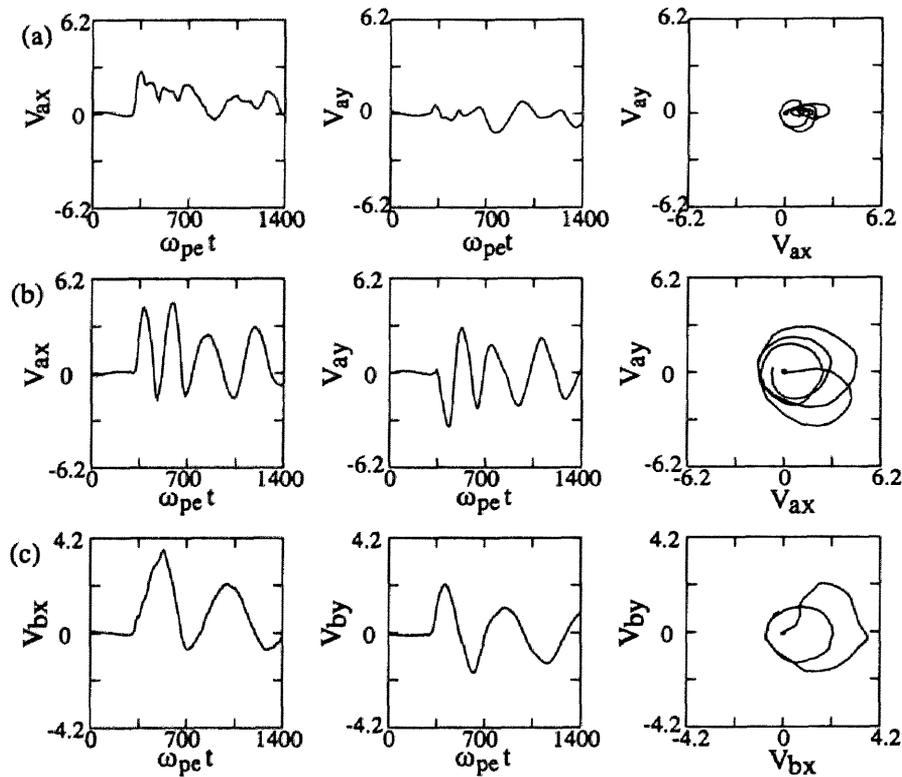


図 4.19: イオン粒子の v_x と v_y の時間変化、および (v_x, v_y) 平面における軌道。(a) は軽イオン a でパルスに反射されず通過した粒子、(b) は加速された軽イオン粒子、(c) は重イオン粒子 b についてそれぞれプロットした。

図 4.19 にイオン粒子の v_x と v_y の時間変化と、 (v_x, v_y) 平面における軌道を示した。上段 (a) は軽イオン a で、パルスに反射されることなくそのまま通過していった粒子の軌道である。これと同様の振る舞いを示す粒子は多数存在する。中段 (b) は、パルスによって反射された軽イオン a の典型的な軌道である。反射によって、 v_{ax} が急激に増加するが、その際の v_{ay} の変化は小さい ($v_{ay} \simeq 0$)。その後、旋回運動によって $|v_{ay}|$ が増加している。(b) と類似の軌道を描く粒子は (a) に比べてずっと少ない。下段 (c) は重イオン b の軌道である。ほぼ全ての重イオン粒子がこれと良く似た振る舞いを示す。 $\omega_{pet} \simeq 300$ でパルスに遭遇した後、 v_{bx} と v_{by} はともに増加するが、 v_{bx} の時間的変化は v_{ax} に比べて非常にゆっくりしている。一方、 v_{by} の増加は、 v_{ay} に比べてずっと大きい。加速が終わった後、粒子はパルス通過前よりもずっと大きなラーモア半径で旋回運動をする。なお、図 4.16 に示したように衝撃波型パルスの後面ではプラズマ流体の x 方向の速度は正の値となる。このため、パルス下流における軽イオン a と重イオン b の (v_x, v_y) 平面での旋回中心はシフトしている。

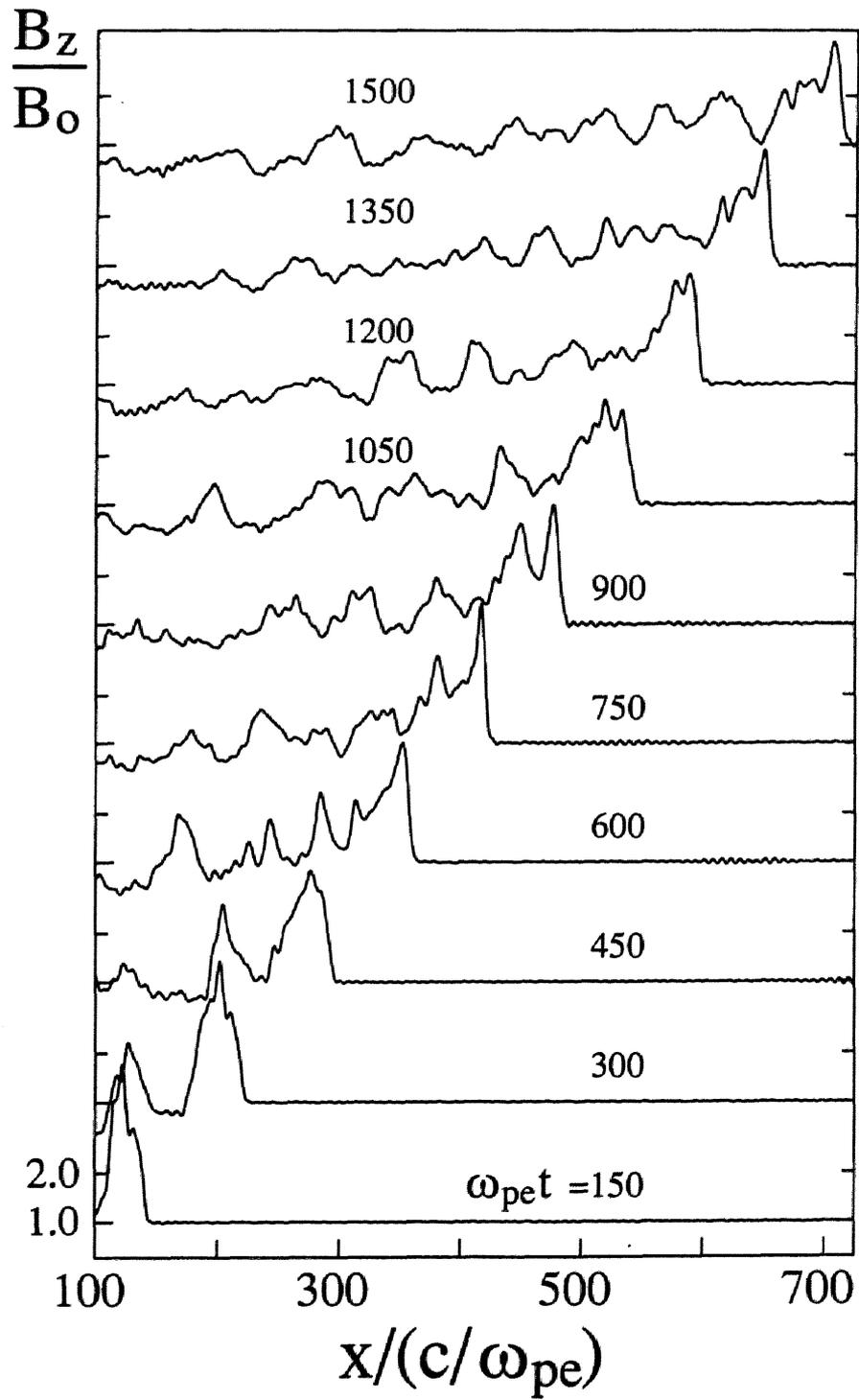


図 4.20: 1 種類イオンプラズマ中の大振幅磁気音波の時間変化。図 4.13 と同様のシミュレーションパラメータを設定

次に重イオンの存在が大振幅磁気音波に与える影響を調べておく。特に、図 4.16 に示した、重イオンが作っていると考えられる第 2 のピークに注目する。図 4.13 を見ると、ほぼ全ての時間に第 2 のピークが第 1 のピークからほぼ一定の距離のところにあることがわかる ($\omega_{pe}t = 1350$ の第 2 のピークを矢印で示した)。比較のため、図 4.20 に 1 種類イオンプラズマ (重イオンが存在しない) における大振幅磁気音波の磁場のプロファイルの時間変化をプロットした。ただし、図 4.13 と同様のパラメータを設定した。図 4.20 の $\omega_{pe}t = 600, 750, 1350$ 等のプロファイルには、2 種類イオンプラズマの場合にみられるような顕著な第 2 ピークは現われていない。さらに、図 4.13、4.20 の各時刻における主パルス領域を第 1 ピークの高さおよび位置をそろえて図 4.21 にプロットした。実線が 2 種類イオンプラズマの場合、点線が 1 種類イオンプラズマの場合である。矢印 s が第 2 ピークを表している。明らかに第 2 ピークは 2 種類のイオンが存在する場合に特有のものであることがわかる。 Δ_s はパルスの立ち上がりから第 2 ピークまでの距離 (c/ω_{pe} で規格化) を表す。その観測値と、重イオンの加速領域の長さ、すなわち (4.20) 式に M と B_m を代入した値を示した。後者は括弧の中の値である。全ての時刻で両者は良く一致している。すなわち、第 2 ピークの位置と重イオンの加速が終わる位置は、ほぼ一致しているとみなすことができる。

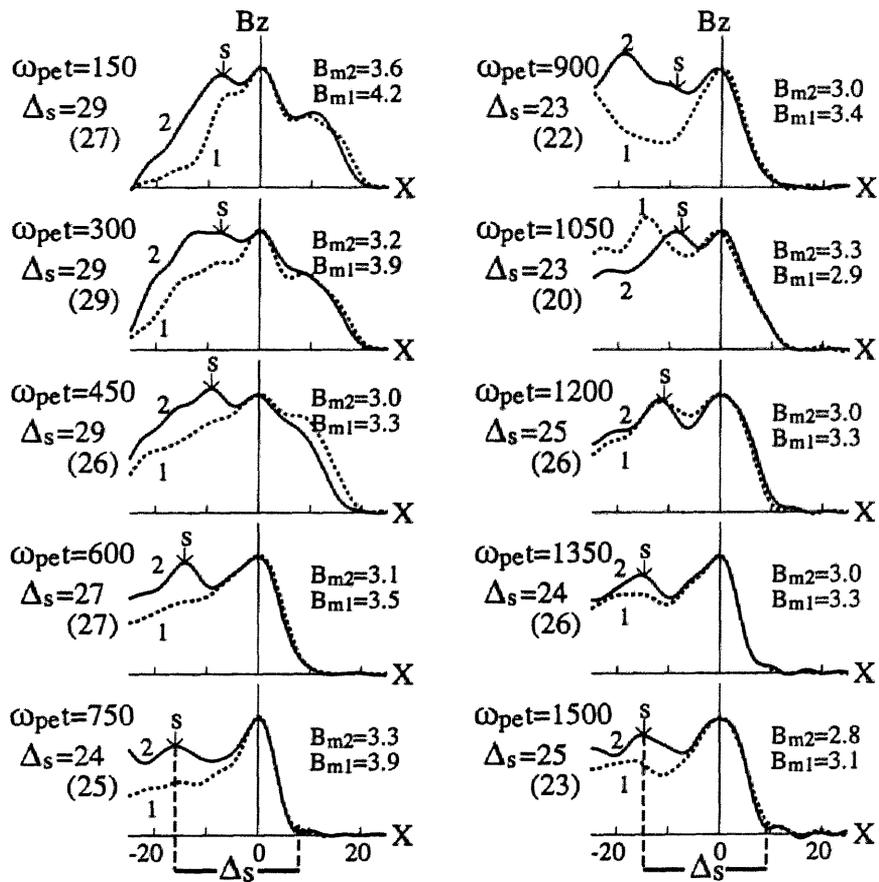


図 4.21: 主パルス領域の磁場プロファイル。実線が2種類イオンプラズマの場合、点線が1種類イオンプラズマの場合である。矢印 s は第2ピーク的位置を、 Δ_s はパルスの立ち上がりから第2ピークまでの距離を表す。 Δ_s の観測値と(4.20)式に基づいた値(括弧の中)を示した。

4.3.3 重イオン加速：理論との比較

4.3.1 節と 4.3.2 節では、マッハ数が $M \simeq 1.26$ と $M \simeq 2.6$ の非線形磁気音波による重イオンの加速について議論した。本節では加速された粒子の最大速度の、波の振幅に対する依存性を調べる。そこで、異なる振幅を持つ波について、いくつかのシミュレーションを行なった。なお、外部磁場の強さについては $|\Omega_e|/\omega_{pe} = 0.5$ と 1.5 の2つの値を選んだ。

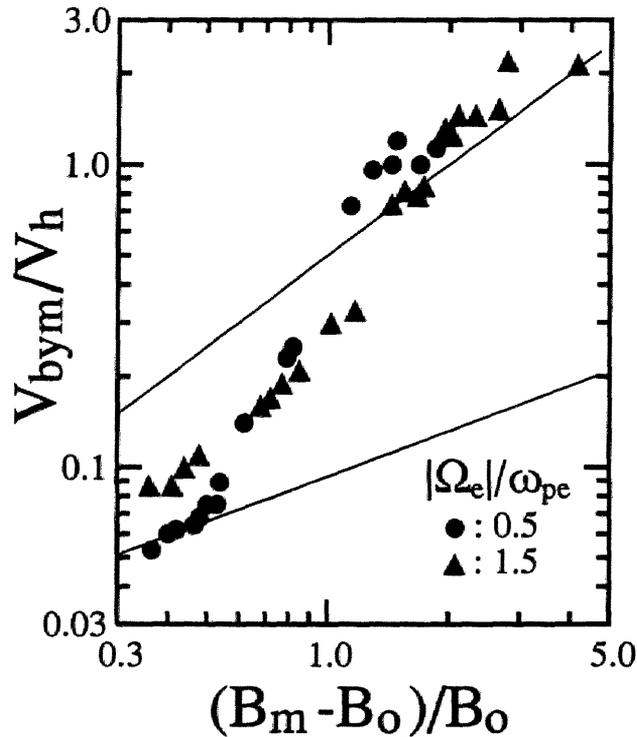


図 4.22: 加速された重イオンの最大速度 v_{bym}/v_h の波の振幅 $(B_m - B_0)/B_0$ に対する依存性。下側の直線は小振幅パルスの場合の理論値 (G.16) 式、上側の直線は大振幅パルスの場合の理論値 (4.17) 式を表す。円は 外部磁場の強さが $|\Omega_e|/\omega_{pe} = 0.5$ の時の観測値、三角形は $|\Omega_e|/\omega_{pe} = 1.5$ の時の観測値である。

図 4.22 に、加速された重イオンの最大速度 v_{bym}/v_h の磁気音波の振幅 $(B_m - B_0)/B_0$ に対する依存性を示した。下側の直線は小振幅パルスの場合の理論値 (G.16) 式、上側の直線は大振幅パルスの場合の理論値 (4.17) 式を表す。マッハ数 M の見積もりには、関係式 $M \sim (B_m/B_0 + 1)/2$ を使用した (ただし、これは厳密には $1 < M < 2$ の場合に成り立つ式である)。円は 外部磁場の強さが $|\Omega_e|/\omega_{pe} = 0.5$ の時の観測値、三角形は $|\Omega_e|/\omega_{pe} = 1.5$ の時の観測値を表している。 $(B_m - B_0)/B_0 < 0.6$ の小振幅の場合は、

(G.16) 式が、また、 $(B_m - B_0)/B_0 > 1.0$ の大振幅の場合は、(4.17) 式が、それぞれシミュレーション結果と良く一致している。なお、 $|\Omega_e|/\omega_{pe} = 1.5$ の小振幅の場合の観測結果が、 $|\Omega_e|/\omega_{pe} = 0.5$ の場合に比べて少し大きくなっている。この原因は $|\Omega_e|/\omega_{pe} \gtrsim 1$ の強磁場中では、相対論的な効果によってソリトンの幅が広がる傾向にあるからだと考えられる [90]。

5 まとめ

2種類のイオンと電子から構成されるプラズマ中を、磁場に直角方向に伝播する磁気音波の非線形の振る舞いを議論した。さらに、それを基に、非線形磁気音波によるイオンの加速について、理論と計算機シミュレーションによる解析を行なった。

最初に、2種類のイオンと電子の3流体の方程式系を出発点とし、磁気音波の線形分散関係を詳しく調べた。2種類のイオンが存在すると、磁気音波は低周波と高周波の二つのモードに分裂する。低周波モードは、長波長の極限 ($k \rightarrow 0$) で周波数がゼロ ($\omega \rightarrow 0$) であり、長波長領域で弱い分散を示す。一方、高周波モードは、有限なカットオフ周波数を持つが、 $k \sim 0$ の近傍を除くと、その分散関係は1種類イオンプラズマの場合とよく似ている。この線形分散関係を基にして、各モードの非線形の振る舞いがそれぞれ KdV 方程式で記述されることを示した。低周波モードの KdV 方程式のソリトン解の特徴的な幅はイオンの慣性長のオーダーであり、高周波モードのそれは電子の慣性長のオーダーである。低周波モードに対しては、従来の逓減摂動法を用いて KdV 方程式を導出した。ただし、その適用範囲は非常に小振幅の場合に限られている。一方、高周波モードに対しては、振幅に下限を設定して比較的短波長の領域に焦点をあてる展開法を開発し、 $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ でないにもかかわらず、KdV 方程式が導かれることを示した。しかも、その KdV 方程式の振幅に対する適用範囲は、低周波モードのそれよりもずっと広い。有限なカットオフ周波数を持つ高周波モードについて KdV 方程式が得られたということは、 $k \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ であることが、KdV 方程式導出のための必要条件ではなく、さらに多様な分散関係を持つ波に対して、KdV 方程式が導かれる可能性があることを表している。

次に、宇宙プラズマと同様の、主成分を軽イオン、副成分を重イオンとするプラズマを仮定し、高周波モードの非線形波におけるイオンの運動を解析した。そして、重イオンは、軽イオンとは全く異なったメカニズムで、強く加速されることを明らかにした。磁気音波中には、縦電場と横電場が形成されるが、主成分の軽イオンは1種類イオンプラズマの場合と同様、一部の粒子が縦電場によって反射されエネルギーを得る。それに対し、本論文では、重イオンは全ての粒子が横電場によって加速され得ることを示し、加速された重イオンの速さを定量的に求めた。その速さは波の振幅に依存するが、大振幅波の場合は、重イオンをおよそ波の伝播速度にまで加速することが可能である。さらに、計算機シミュレーションを使って、非線形磁気音波の伝播と、イオンの加速を調べた。シミュレーションコードは、粒子モデルに基づくもので、2種類のイオンと電子の運動を全て含んでいる。小振幅波を励起させた場合、孤立波の伝播が観測されたが、その構造は、高周波モードの KdV 方程式の孤立波解で説明されるものであった。大振幅波を励起させると衝撃波型のパルスが伝播し、それに伴って、軽

イオンと重イオンが、ともに強く加速されることが観測された。そして、そのシミュレーション結果は、加速機構が、軽イオンと重イオンとで全く異なったものであることを、はっきりと示すものであった。また、いろいろな振幅について、加速された重イオンの速さを測定したところ、理論的な予測とよく一致した。

謝辞

本論文をまとめるにあたり、本研究を行なう機会を与えてくださり、本研究を進めるうえでの有益な御助言を賜りました、寺嶋由之介名誉教授、杉原亮教授、大澤幸治助教授に、深く感謝いたします。特に、本論文の完成に至るまで、終始御親切な御指導をしていただきました、大澤助教授には、心からお礼を申し上げなければなりません。

また、水野幸雄 核融合科学研究所名誉教授からは、貴重な御助言と暖かい励ましを賜りました。核融合科学研究所の城之内忠正助手には、有益な議論と、懇切丁寧な御助言をいただきました。ここに、感謝の意を表します。

名古屋大学旧プラズマ科学センターの諸先生方からは、博士課程在籍中から現在に至るまで、常に暖かい御支援をいただきました。また、張天喜博士と辻勝啓氏には、貴重な時間をさいて、非常に有意義な議論をしていただきました。あらためて、お礼を申し上げます。

付録 A 分散式の導出

分散式 (3.10) の係数 (3.11)-(3.13) は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} A_2 &= \omega_{pe}^4 (1 + c^2 k^2 / \omega_{pe}^2), \\ A_1 &= \omega_{pe}^4 \omega_{+0}^2 (1 + k^2 / k_c^2), \\ A_0 &= \omega_{pe}^4 \omega_{+0}^4 (\omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) k^2 / k_c^2. \end{aligned} \quad (A.1)$$

ここで ω_{+0} は高周波モードのカットオフ周波数、 ω_{-r} は低周波モードの共鳴周波数、 k_c は (3.19) 式で定義される波数である。すると、低周波モードおよび高周波モードの分散関係式は

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_{+0}^2 (1 + k^2 / k_c^2 \pm \sqrt{D_{\omega}})}{2(1 + c^2 k^2 / \omega_{pe}^2)}, \quad (A.2)$$

と与えられる。ここで D_{ω} は

$$D_{\omega} = (1 + k^2 / k_c^2)^2 - 4(1 + c^2 k^2 / \omega_{pe}^2) (\omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) k^2 / k_c^2, \quad (A.3)$$

である。

まず、波数が $k \ll k_c$ の範囲にある極めて長波長の領域を考える。この時 D_{ω} は次のように変形できる。

$$D_{\omega} = [1 + (1 - 2\omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) k^2 / k_c^2]^2 + 4(1 - \omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) (\omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) k^4 / k_c^4, \quad (A.4)$$

したがって、 $\sqrt{D_{\omega}}$ は

$$\sqrt{D_{\omega}} \simeq 1 + (1 - 2\omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) k^2 / k_c^2 + 2(1 - \omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) (\omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) k^4 / k_c^4, \quad (A.5)$$

と近似することができる。よって、高周波モードは

$$\omega_{+}^2 = \omega_{+0}^2 [1 + r_{ab} k^2 / k_c^2 + r_{ab} (1 - r_{ab}) k^4 / k_c^4], \quad (A.6)$$

と与えられる。ここで、 r_{ab} は次のように定義される定数である。

$$r_{ab} = 1 - \omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2, \quad (A.7)$$

一方、低周波モードは

$$\begin{aligned} \omega_{-}^2 &= \omega_{+0}^2 [(\omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) k^2 / k_c^2 - (1 - \omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) (\omega_{-r}^2 / \omega_{+0}^2) k^4 / k_c^4] \\ &= v_A^2 k^2 (1 - r_{ab} k^2 / k_c^2), \end{aligned} \quad (A.8)$$

と表される。また、

$$d_1 \equiv r_{ab}^{1/2}/k_c, \quad (\text{A.9})$$

と定義される量を導入すると (A.8) 式は

$$\omega_- = v_A k (1 - d_1^2 k^2 / 2), \quad (\text{A.10})$$

と表すことができる。

次に $k \gg k_c$ の比較的短波長の領域を考える。この時 $\sqrt{D_\omega}$ は

$$\sqrt{D_\omega} \simeq 1 + k^2/k_c^2 - 2 \frac{(1 + c^2 k^2/\omega_{pe}^2)(\omega_{-r}^2/\omega_{+0}^2)k^2/k_c^2}{1 + k^2/k_c^2}, \quad (\text{A.11})$$

と近似することができる。したがって高周波モードは

$$\begin{aligned} \omega_+^2 &= \omega_{+0}^2 \left(\frac{1 + k^2/k_c^2}{1 + c^2 k^2/\omega_{pe}^2} - \frac{(\omega_{-r}^2/\omega_{+0}^2)k^2/k_c^2}{1 + k^2/k_c^2} \right) \\ &\simeq \omega_{+0}^2 (k^2/k_c^2) \left(\frac{1 + k_c^2/k^2}{1 + c^2 k^2/\omega_{pe}^2} - \frac{\omega_{-r}^2/\omega_{+0}^2}{k^2/k_c^2} \right) \\ &\simeq v_h^2 k^2 \left(\frac{1 + r_{ab} k_c^2/k^2}{1 + c^2 k^2/\omega_{pe}^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

と変形することができる。ここで、速度 v_h は次のように定義される。

$$v_h = \omega_+ / k_c. \quad (\text{A.13})$$

高周波モードには変曲点が存在し、その波数 k_{inf} は次のように与えられる。

$$k_{\text{inf}} = r_{ab}^{1/4} (k_c \omega_{pe} / c)^{1/2}. \quad (\text{A.14})$$

$k_c \ll k \ll k_{\text{inf}}$ の領域では (A.12) 式の分子の第2項が分母の第2項より大きいとみなすことができるので、分散関係式は

$$\omega_+^2 = v_h^2 k^2 (1 + r_{ab} k_c^2 / k^2), \quad (\text{A.15})$$

と近似することができる。そして、 $k \gg k_{\text{inf}}$ では、(A.12) 式の分母の第2項が重要になり、

$$\omega_+^2 = \frac{v_h^2 k^2}{1 + c^2 k^2 / \omega_{pe}^2}, \quad (\text{A.16})$$

という分散関係式が得られる。低周波モードについては、式 (A.2) (A.11) より $k \gg k_c$ の領域で

$$\omega_- = \omega_{-r}, \quad (\text{A.17})$$

となることがわかる。

付録 B 低周波モードの分散関係式

低周波モードの分散を温度の効果と電子の慣性の効果を含めて議論する。運動方程式に、 ∇p_j による力を加えることによって温度の効果を取り入れる。ここで、 p は温度による圧力である。さらに、状態方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \right) p_j = -\gamma_j p_j \nabla \cdot \mathbf{v}_j, \quad (\text{B.1})$$

を基本方程式形に加える。ここで、 γ_j は比熱比を表す。すると線形分散関係式は

$$\begin{aligned} & \left(\sum_j \frac{\Omega_j \omega_{pj}^2}{\omega^2 - \Omega_j^2 - k^2 u_j^2} \right)^2 \\ & - \left(c^2 k^2 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 (\omega^2 - k^2 u_j^2)}{\omega^2 - \Omega_j^2 - k^2 u_j^2} \right) \left(\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \Omega_j^2 - k^2 u_j^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

となる。速度 u_j は平衡状態における圧力 p_{j0} を使って次のように定義される。

$$u_j^2 = \gamma_j p_{j0} / (n_{j0} m_j). \quad (\text{B.3})$$

(B.2) 式より、長波長および低周波の極限 ($k \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$) での位相速度 v_{p0} は

$$v_{p0}^2 = v_\lambda^2 + c_s^2, \quad (\text{B.4})$$

と与えられる。ここで、 c_s は音速 $c_s = (\sum_j \gamma_j p_{j0} / \rho_0)^{1/2}$ である。有限の波数 k における位相速度 $v_p(k)$ は、分散の効果によって長波長の極限での位相速度 v_{p0} よりずれてくる。そのずれを $\delta v_p(k)$ とする。

$$v_p(k) = v_{p0}(1 + \delta v_p(k)). \quad (\text{B.5})$$

$\delta v_p(k)$ は 1 に比べてずっと小さいと仮定する。(B.2) 式を $\delta v_p(k)$ について線形化すると、次の関係式が得られる。

$$\delta v_p(k) = -d_1^2 k^2 / 2. \quad (\text{B.6})$$

ここで、 d_1 は次のように定義される。

$$\begin{aligned} d_1^2 = v_{p0}^2 & \left(\frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^2} + \frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^2} + \frac{\omega_{pc}^2}{\Omega_c^2} \right)^{-2} \left[\frac{\omega_{pa}^2 \omega_{pb}^2}{\Omega_a^2 \Omega_b^2} \left(\frac{1}{\Omega_a} - \frac{1}{\Omega_b} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\omega_{pb}^2 \omega_{pc}^2}{\Omega_b^2 \Omega_c^2} \left(\frac{1}{\Omega_b} - \frac{1}{\Omega_c} \right)^2 + \frac{\omega_{pc}^2 \omega_{pa}^2}{\Omega_c^2 \Omega_a^2} \left(\frac{1}{\Omega_c} - \frac{1}{\Omega_a} \right)^2 + f_T \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

ここで、 f_T は

$$\begin{aligned}
f_T = & 2 \frac{u_a^2}{v_{p0}^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^3} \left[\left(\frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^3} + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^3} \right) - \frac{1}{\Omega_a} \left(\frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \right) \right] \\
& + 2 \frac{u_b^2}{v_{p0}^2} \frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^3} \left[\left(\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^3} + \frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^3} \right) - \frac{1}{\Omega_b} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} + \frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^2} \right) \right] \\
& + 2 \frac{u_e^2}{v_{p0}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^3} \left[\left(\frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^3} + \frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^3} \right) - \frac{1}{\Omega_e} \left(\frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^2} + \frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{v_{p0}^4} \left[\frac{\omega_{pa}^2 \omega_{pb}^2}{\Omega_a^2 \Omega_b^2} \left(\frac{u_a^2}{\Omega_a} - \frac{u_b^2}{\Omega_b} \right)^2 + \frac{\omega_{pb}^2 \omega_{pe}^2}{\Omega_b^2 \Omega_e^2} \left(\frac{u_b^2}{\Omega_b} - \frac{u_e^2}{\Omega_e} \right)^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{pa}^2}{\Omega_e^2 \Omega_a^2} \left(\frac{u_e^2}{\Omega_e} - \frac{u_a^2}{\Omega_a} \right)^2 \right],
\end{aligned} \tag{B.8}$$

となる。 f_T は (B.7) 式の他の項に比べてずっと小さく、温度 0 の極限 ($T_j \rightarrow 0$) で消える項である。

付録 C 線形物理量

弱い分散を示す領域における、線形物理量 E_x と E_y の間の関係式を求めておく。
(3.6) 式より、

$$E_x = -i(C_n/C_d)E_y, \quad (\text{C.1})$$

$$C_n = \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \Omega_j}{(\omega^2 - \Omega_j^2)\omega}, \quad (\text{C.2})$$

$$C_d = \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \Omega_j^2}, \quad (\text{C.3})$$

が得られる。ただし、 ω は分散関係式 (3.9) を満たしている。

$\omega \ll |\Omega_e|$ を仮定すると、 C_n/C_d は次のように変形できる。

$$C_n/C_d = -\frac{\omega[\Omega_e\omega - (\omega_{pa}^2\Omega_b^2/\Omega_a + \omega_{pb}^2\Omega_a^2/\Omega_b)\Omega_e^2/\omega_{pe}^2]}{\omega^4 - \omega_{+r}\omega^2 + \omega_{+r}\omega_{-r}^2}. \quad (\text{C.4})$$

ここで、 ω_{+r} 、 ω_{-r} はそれぞれ高周波モードおよび低周波モードの共鳴周波数である。

低周波モードが弱い分散を示す領域、すなわち $k \ll k_c$ を考える。周波数 ω は $\omega \ll \omega_{-r}$ であり、 $\omega \simeq v_A k$ と見積ることができる。この時、(C.4) 式について、分子の主要項は第2項、分母の主要項は第3項となる。すると、次の関係式が得られる。

$$E_x \simeq -i\frac{kv_A^3}{c^2} \left(\frac{\omega_{pa}^2}{\Omega_a^3} + \frac{\omega_{pb}^2}{\Omega_b^3} \right) E_y. \quad (\text{C.5})$$

次に、高周波モードが弱い分散を示す領域、 $k_{inf} \ll k \ll \omega_{pe}/c$ を考える。この時、 $\omega_{-r} \ll \omega \ll \omega_{+r}$ であり、 $\omega \simeq v_h k$ と見積ることができる。すると、(C.4) 式の、分子の主要項は第1項、分母の主要項は第2項となり、線形物理量 E_x と E_y の間の関係式は

$$E_x \simeq i\frac{kc}{\omega_{pe}} \frac{\omega_{pe}}{(\omega_{pa}^2 + \omega_{pb}^2)^{1/2}} E_y, \quad (\text{C.6})$$

と与えられる。

付録 D 低周波モードの KdV 方程式の導出

長さを d_l 、速度を v_A 、時間を d_l/v_A 、数密度を n_{e0} 、電荷を e 、磁場を B_0 、電場を $v_A B_0/c$ で規格化した基礎方程式 (3.49)-(3.53) に、変数変換 (3.54)(3.55) を行い展開式 (3.60)-(3.65) を代入すると次の方程式系が得られる。

連続の式は

$$\epsilon^{3/2} \left(-\frac{\partial n_{j1}}{\partial \xi} + n_{j0} \frac{\partial v_{jx1}}{\partial \xi} \right) + \epsilon^{5/2} \left(-\frac{\partial n_{j2}}{\partial \xi} + n_{j0} \frac{\partial v_{jx2}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{j1}}{\partial \tau} + \frac{\partial n_{j1} v_{jx1}}{\partial \xi} \right) + \dots = 0. \quad (\text{D.1})$$

運動方程式の x 成分は

$$\begin{aligned} -\epsilon^{3/2} \left(\frac{\partial v_{jx1}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_j r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{x1} + v_{jy1}) \right) - \epsilon^{5/2} \left(\frac{\partial v_{jx2}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{jx1}}{\partial \tau} \right. \\ \left. - v_{ix1} \frac{\partial v_{ix1}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_i r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{x2} + v_{iy2} + B_1 v_{jy1}) \right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

ここで 添え字 j は電子 ($j=e$) あるいはイオン種 a ($j=a$)、イオン種 b ($j=b$) を表す。 y 成分は次のように書ける。

$$\epsilon \frac{\Omega_j r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{y1} - v_{jx1}) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial v_{jy1}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_j r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{y2} - v_{jx2} - v_{jx1} B_1) \right) + \dots = 0. \quad (\text{D.3})$$

ファラデーの法則は

$$\epsilon^{3/2} \left(-\frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{\partial E_{y1}}{\partial \xi} \right) + \epsilon^{5/2} \left(-\frac{\partial B_2}{\partial \xi} + \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{\partial E_{y2}}{\partial \xi} \right) + \dots = 0. \quad (\text{D.4})$$

アンペールの法則は

$$\begin{aligned} \epsilon^{3/2} \left(\frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{\Omega_a \Omega_b}{\omega_{+0} \omega_{-r}} r_{ab}^{1/2} \sum_j q_j n_{j0} v_{jy1} \right) \\ + \epsilon^{5/2} \left(\frac{\partial B_2}{\partial \xi} + \frac{\Omega_a \Omega_b}{\omega_{+0} \omega_{-r}} r_{ab}^{1/2} \sum_j q_j (n_{j0} v_{jy2} + n_{j1} v_{jy1}) \right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

準中性の式は

$$\sum_j q_j n_{j0} + \epsilon \sum_j q_j n_{j1} + \epsilon^2 \sum_j q_j n_{j2} + \dots = 0. \quad (\text{D.6})$$

となる。

ϵ の低い次数の項から関係式を設定する。準中性の式 (D.6) の $O(\epsilon^0)$ の項より

$$\sum_j q_j n_{j0} = 0, \quad (\text{D.7})$$

となる。

y 方向の運動方程式 (D.3)、ファラデーの法則の式 (D.4) の最低次の項から次の関係式が得られる。

$$v_{ax1} = v_{bx1} = v_{cx1} = E_{y1} = B_1. \quad (\text{D.8})$$

(D.8) 式は、 x 方向の速度は全ての粒子種について等しく、ほぼ $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトで記述されることを示している。

連続の式 (D.1) の最低次の項と (D.8) 式より

$$n_{j1} = n_{j0} B_1, \quad (\text{D.9})$$

が得られる。この時、(D.6) の $O(\epsilon)$ の項 $\sum_j q_j n_{j1}$ は (D.7) 式により 0 になることがわかる。

x 方向の運動方程式の最低次の項に、(D.8) 式を代入すると

$$v_{jy1} = -\frac{\omega_{-r}}{\Omega_j r_{ab}^{1/2}} \frac{\partial B_1}{\partial \xi} - E_{x1}, \quad (\text{D.10})$$

が得られる。アンペールの法則の最低次の項からは、

$$\frac{\partial B_1}{\partial \xi} = -\frac{\Omega_a \Omega_b}{\omega_{+0} \omega_{-r}} r_{ab}^{1/2} \sum_j q_j n_{j0} v_{jy1}, \quad (\text{D.11})$$

となる。(D.11) 式の右辺に (D.10) 式を代入し、(D.7) 式を使えば、左辺に等しくなる。

次に1つ上の次数の項を考える。連続の式 (D.1) の $O(\epsilon^{3/2})$ の項を粒子種 j について和を取った場合、(D.7)-(D.8) 式および、準中性の式 (D.6) の $O(\epsilon^2)$ の項 $\sum_j q_j n_{j2} = 0$ を使うと

$$\sum_j q_j n_{j0} v_{jx2} = 0, \quad (\text{D.12})$$

が得られる。また y 方向の運動方程式の ϵ^2 のオーダーの項からは

$$\frac{\partial v_{jy1}}{\partial \xi} = -\frac{\Omega_j r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{y2} - v_{jx1} B_1 - v_{jx2}), \quad (\text{D.13})$$

となる。この式に、 $n_{j0}m_j$ をかけて j について和をとると、式 (D.7)(D.8)、および (D.12) より、

$$\sum_j n_{j0}m_j v_{jy1} = 0, \quad (\text{D.14})$$

が得られる。(D.14) 式に (D.10) 式の v_{jy1} を代入すると、 E_{x1} は次のように与えられる。

$$E_{x1} = -\frac{v_A^2 \omega_{-r}}{c^2 r_{ab}^{1/2}} \left(\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\Omega_j^3} \right) \frac{\partial B_1}{\partial \xi}. \quad (\text{D.15})$$

これを (D.10) 式に代入すると、 v_{jy1} を B_1 を使って表すことができる。

$$\begin{aligned} v_{ay1} &= \frac{\omega_{-r}}{r_{ab}^{1/2} \rho_0} \left[n_{b0}m_b \left(\frac{1}{\Omega_b} - \frac{1}{\Omega_a} \right) + n_{e0}m_e \left(\frac{1}{\Omega_e} - \frac{1}{\Omega_a} \right) \right] \frac{\partial B_1}{\partial \xi}, \\ v_{by1} &= \frac{\omega_{-r}}{r_{ab}^{1/2} \rho_0} \left[n_{e0}m_e \left(\frac{1}{\Omega_e} - \frac{1}{\Omega_b} \right) + n_{a0}m_a \left(\frac{1}{\Omega_a} - \frac{1}{\Omega_b} \right) \right] \frac{\partial B_1}{\partial \xi}, \\ v_{cy1} &= \frac{\omega_{-r}}{r_{ab}^{1/2} \rho_0} \left[n_{a0}m_a \left(\frac{1}{\Omega_a} - \frac{1}{\Omega_e} \right) + n_{b0}m_b \left(\frac{1}{\Omega_b} - \frac{1}{\Omega_e} \right) \right] \frac{\partial B_1}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

y 方向の速度は、電場 E_x によるドリフトと磁場勾配ドリフト (gradient- B drift) の和として表される。(D.16) 式は、 $n_{a0} \sim n_{b0}$ の時 v_{iy} と v_{ey} は同じオーダーの大きさであることを示している。 v_{ay1} の主要項は $n_{b0}m_b$ に比例する項で、これは $n_{e0}m_e$ に比例する項よりずっと大きい。しかし、 b イオンの密度 n_{b0} が 0 になると、 v_{ay1} の主要項は 0 になる。したがって、1 種類イオンプラズマでは、電子の y 方向の速度の大きさ $|v_{ey}|$ はイオンのそれ $|v_{iy}|$ よりずっと大きい。

x 方向の運動方程式の $\epsilon^{5/2}$ のオーダーの項に $n_{j0}m_j$ をかけて j について和をとると、

$$-\sum_j n_{j0}m_j \frac{\partial v_{jx2}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \rho_0 B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} - \sum_j n_{j0}m_j \Omega_j \frac{r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} (E_{x2} + v_{jy2} + v_{jy1} B_1) = 0, \quad (\text{D.17})$$

となる。この式から v_{jx2} , v_{jy2} , E_{x2} 等の 2 次の量を消去する。(D.7) 式は $\sum_j n_{j0}m_j \Omega_j = 0$ と同値であるから、(D.17) 式の E_{x2} を含む項は消える。また、(D.13) 式は次のように書き換えることができる。

$$v_{jx2} = -\frac{\omega_{-r}}{\Omega_j r_{ab}^{1/2}} \frac{\partial v_{jy1}}{\partial \xi} + E_{y2} - B_1^2. \quad (\text{D.18})$$

アンペールの法則の $O(\epsilon^{5/2})$ の項から、

$$\sum_j n_{j0}m_j \Omega_j \frac{r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} v_{jy2} = -\rho_0 \frac{\partial B_2}{\partial \xi} - \sum_j n_{j0}m_j \Omega_j \frac{r_{ab}^{1/2}}{\omega_{-r}} v_{jy1} B_1. \quad (\text{D.19})$$

ファラデーの法則の $O(\epsilon^{5/2})$ の項より、

$$\frac{\partial B_2}{\partial \xi} = \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{\partial E_{y2}}{\partial \xi}. \quad (\text{D.20})$$

となる。(D.18)(D.19) 式を (D.17) 式に代入し、(D.20) 式および (D.16) 式を使うと、KdV 方程式

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 B_1}{\partial \xi^3} = 0, \quad (\text{D.21})$$

が導出される。

付録 E 高周波モードの KdV 方程式の導出

長さを c/ω_{pe} 、速度を v_h 、時間を $(c/\omega_{pe})/v_h$ 、数密度を n_{e0} 、電荷を e 、磁場を B_0 、電場を $v_h B_0/c$ で規格化した基礎方程式 (3.49)-(3.53) に、変数変換を行い展開式 (3.60)-(3.63)、(3.78) (3.79) を代入すると次のようになる。

連続の式は、

$$\epsilon^{3/2} \left(-\frac{\partial n_{j1}}{\partial \xi} + n_{j0} \frac{\partial v_{jx1}}{\partial \xi} \right) + \epsilon^{5/2} \left(-\frac{\partial n_{j2}}{\partial \xi} + n_{j0} \frac{\partial v_{jx2}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{j1}}{\partial \tau} + \frac{\partial n_{j1} v_{jx1}}{\partial \xi} \right) + \dots = 0. \quad (\text{E.1})$$

イオンの運動方程式の x 成分は

$$\begin{aligned} & -\epsilon^{3/2} \left(\frac{\partial v_{ix1}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_i}{|\Omega_e| \eta^2} (E_{x1} + v_{iy1}) \right) - \epsilon^{5/2} \left(\frac{\partial v_{ix2}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{ix1}}{\partial \tau} \right. \\ & \left. - v_{ix1} \frac{\partial v_{ix1}}{\partial \xi} + \frac{\Omega_i}{|\Omega_e| \eta^2} (E_{x2} + v_{iy2} + B_1 v_{iy1}) \right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

ここで、添え字 i はイオン種 a または b を表す。係数 $\Omega_i/(|\Omega_e| \eta^2)$ は 1 のオーダーである。 y 成分は

$$\begin{aligned} & -\epsilon^2 \frac{\partial v_{iy1}}{\partial \xi} + \epsilon^3 \left(-\frac{\partial v_{iy2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{iy1}}{\partial \tau} + v_{ix1} \frac{\partial v_{iy1}}{\partial \xi} \right) + \dots \\ & - \frac{\Omega_i}{|\Omega_e|} \epsilon (E_{y1} - v_{ix1}) - \frac{\Omega_i}{|\Omega_e|} \epsilon^2 (E_{y2} - v_{ix2} - B_1 v_{ix1}) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

電子の運動方程式の x 成分は

$$\begin{aligned} & \epsilon^{3/2} (E_{x1} + v_{ey1}) + \epsilon^{5/2} (E_{x2} + v_{ey2} + B_1 v_{ey1}) + \dots \\ & - \eta^2 \epsilon^{3/2} \frac{\partial v_{ex1}}{\partial \xi} + \eta^2 \epsilon^{5/2} \left(-\frac{\partial v_{ex2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{ex1}}{\partial \tau} + v_{ex1} \frac{\partial v_{ex1}}{\partial \xi} \right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

y 成分は

$$\epsilon (E_{y1} - v_{ex1}) + \epsilon^2 \left(E_{y2} - v_{ex2} - B_1 v_{ex1} - \frac{\partial v_{ey1}}{\partial \xi} \right) + \dots = 0. \quad (\text{E.5})$$

ファラデーの法則は

$$\epsilon^{3/2} \left(-\frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{\partial E_{y1}}{\partial \xi} \right) + \epsilon^{5/2} \left(-\frac{\partial B_2}{\partial \xi} + \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{\partial E_{y2}}{\partial \xi} \right) + \dots = 0. \quad (\text{E.6})$$

アンペールの法則は

$$\begin{aligned} & \epsilon^{3/2} \left(\frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \sum_j q_j n_{j0} v_{jy1} \right) \\ & + \epsilon^{5/2} \left(\frac{\partial B_2}{\partial \xi} + \sum_j q_j (n_{j0} v_{jy2} + n_{j1} v_{jy1}) \right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

準中性の式は

$$\sum_j q_j n_{j0} + \epsilon \sum_j q_j n_{j1} + \epsilon^2 \sum_j q_j n_{j2} + \dots = 0. \quad (\text{E.8})$$

となる。

長波長（すなわち小振幅）領域では分散が強いので、この領域を避けるよう、振幅に相当するパラメータ ϵ について、次の関係を仮定する。

$$\eta \ll \epsilon \ll 1. \quad (\text{E.9})$$

この時 (E.3) 式の $O(\epsilon^2)$ の第 1 列第 1 項および $O(\epsilon^3)$ の第 2 項は、 $O(\eta^2 \epsilon)$ の第 2 列第 1 項よりずっと大きいとみなすことができる。すると、

$$v_{iy1} = v_{iy2} = 0, \quad (\text{E.10})$$

が得られる。また、(E.4) 式の第 1 列第 1 項と第 2 項は、第 2 列第 1 項よりずっと大きい。

連続の式 (E.1) の電子成分の最低次の項、および、(E.5)(E.6) 式の最低次の項より 1 次のオーダーに関して次の関係式が得られる。

$$n_{e1} = v_{ex1} = E_{y1} = B_1. \quad (\text{E.11})$$

(E.4)(E.7) 式の最低次の項より、(E.10) 式を考慮に入れると

$$v_{ey1} = -E_{x1} = \partial B_1 / \partial \xi, \quad (\text{E.12})$$

が得られる。

(E.2) 式の最低次の項に、(E.10)(E.12) 式を使うと、次の関係式が導かれる。

$$v_{ix1} = \frac{\Omega_i}{\eta^2 |\Omega_e|} B_1. \quad (\text{E.13})$$

したがって、 x 方向の速度は粒子の種類に依存していることがわかる。この量は低周波モードでは、(D.8) 式にあるように、共通であった。この違いが生じるのは、高周波

モードと低周波モードで対象としている波数（周波数）領域が非常に異なっているからである。高周波モードの特徴的な長さは、電子の慣性長であり、また、 $\Omega_i \ll \omega \ll \omega_{\text{LH}}$ の周波数領域を考えている。このため、イオンは縦電場 E_x の影響を受けるが、(E.10)式にあるように、磁場によって曲げられることはほとんどない。電子については(E.11)式より、ほぼ $E \times B$ ドリフトで近似される。一方、低周波モードは特徴的な長さがイオンの慣性長のオーダーであり、また対象としている周波数領域もイオンのサイクロトロン周波数よりずっと小さい。

(E.1) 式のイオン成分の最低次の項から、(E.13) 式を使うと

$$n_{i1} = \frac{n_{i0}\Omega_i}{\eta^2|\Omega_e|} B_1, \quad (\text{E.14})$$

が得られる。ところで、準中性の式 (E.8) 式の $O(\epsilon)$ の項は、

$$\sum_j q_j n_{j1} = 0, \quad (\text{E.15})$$

となる。(E.11)(E.14) 式を (E.15) 式に代入し、 η の定義より

$$\sum_i \frac{q_i n_{i0} \Omega_i}{\eta^2 |\Omega_e|} - 1 = 0, \quad (\text{E.16})$$

となることを考慮に入れると、(E.15) 式は成り立つことがわかる。ただし、ここで \sum_i はイオン種に関してのみ和をとることを示し、 \sum_j は電子も含めた和を表す。

連続の式 (E.1) の $O(\epsilon^{5/2})$ の項に電荷 q_j をかけ、粒子種 j について和をとると、準中性の式から $\sum_j q_j n_{j2}$ と $\sum_j q_j n_{j1}$ は 0 になるため、次の関係式が得られる。

$$\sum_i q_i n_{i0} v_{ix2} = v_{ex2} - \sum_j q_j n_{j1} v_{jx1}. \quad (\text{E.17})$$

イオンの運動方程式の x 成分 (E.2) 式の $O(\epsilon^{5/2})$ の項に $q_i n_{i0}$ をかけ、イオン種 i について和をとる。その際、 v_{ix2} については (E.17) 式を使って消去し、(E.10) 式を考慮に入れると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} (v_{ex2} - \sum_j q_j n_{j1} v_{jx1}) - \frac{\partial \sum_i q_i n_{i0} v_{ix1}}{\partial \tau} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\sum_i q_i n_{i0} v_{ix1}^2) + \left(\sum_i \frac{q_i n_{i0} \Omega_i}{\eta^2 |\Omega_e|} \right) E_{x2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

が得られる。ここで、(E.16) 式より、 E_{x2} の係数は 1 に等しくなる。

(E.18) 式から、 E_{x2} 、 v_{ex2} の 2 次の量を消去する。(E.4) 式の $O(\epsilon^{5/2})$ の項より、

$$E_{x2} = -v_{ey2} - B_1 v_{ey1}. \quad (\text{E.19})$$

(E.5) 式の $O(\epsilon^2)$ の項より

$$v_{ex2} = E_{y2} - B_1 v_{ex1} - \frac{\partial v_{ey1}}{\partial \xi}. \quad (\text{E.20})$$

(E.6) 式の $O(\epsilon^{5/2})$ の項より、

$$\frac{\partial E_{y2}}{\partial \xi} = \frac{\partial B_2}{\partial \xi} - \frac{\partial B_1}{\partial \tau}. \quad (\text{E.21})$$

(E.7) 式の $O(\epsilon^{5/2})$ の項より、

$$v_{ey2} = \frac{\partial B_2}{\partial \xi} - n_{e1} v_{ey1}. \quad (\text{E.22})$$

(E.19)-(E.22) 式を使えば、(E.18) 式は次のように変形することができる。

$$\frac{\partial v_{ex2}}{\partial \xi} + E_{x2} = -\frac{\partial B_1}{\partial \tau} - \frac{\partial(B_1 v_{ey1})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v_{ey1}}{\partial \xi^2}. \quad (\text{E.23})$$

(E.23) 式を (E.18) 式に代入し、(E.11)-(E.13) 式を使うと、高周波モードに対する KdV 方程式

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \alpha B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 B_1}{\partial \xi^3} = 0, \quad (\text{E.24})$$

が得られる。ただし、 α は次のように定義される定数である。

$$\alpha = (3 \sum_i \omega_{pi} \Omega_i) / (2 \eta^2 \omega_{pe}^2 |\Omega_e|). \quad (\text{E.25})$$

次に仮定 (E.9) ではなく、

$$\epsilon \sim \eta, \quad (\text{E.26})$$

の場合を考える。この時 (E.3) 式の $O(\epsilon^{3/2})$ の第 2 項は、 $O(\eta^2 \epsilon)$ の第 2 列第 1 項とつり合うことになる。すると、 v_{iy2} は次のように与えられる。

$$v_{iy2} = \frac{\Omega_i}{\epsilon^2 |\Omega_e|} \left(1 - \frac{\Omega_i}{\eta^2 |\Omega_e|} \right) \int B_1 d\xi. \quad (\text{E.27})$$

そして、(E.18) 式の左辺に

$$\sum_i \frac{q_i n_{i0} \Omega_i}{\eta^2 |\Omega_e|} v_{iy2}, \quad (\text{E.28})$$

が加わることになり、 B_1 を記述する方程式は

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \alpha B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 B_1}{\partial \xi^3} + \frac{(\Omega_a + \Omega_b) c k_c}{\epsilon^2 \eta |\Omega_e| \omega_{pe}} r_{ab} \int B_1 d\xi = 0, \quad (\text{E.29})$$

となる。(E.29) 式の第 4 項の係数は $\eta^2 r_{ab} / \epsilon^2$ のオーダーである。

付録 F 流体シミュレーション

低周波モードおよび高周波モードの非線形の振る舞いは、それぞれ KdV 方程式で記述される。ただし、低周波モードについては (3.98) 式、高周波モードについては (3.100) 式の適用範囲が存在する。KdV 方程式が適用できない、すなわち (3.98)(3.100) 式を満たさないような波の非線形発展を、イオン 2 種類と電子の 3 流体モデルに基づいたシミュレーションによって調べる。基本方程式 (3.1)-(3.3) と

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \sum_j q_j n_j \mathbf{v}_j, \quad (\text{F.1})$$

を、two-step Lax-Wendroff 法を用いて数値的に解く [82][83]。磁場を z 方向とし、波は x 方向に伝播すると仮定する ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$)。 x 方向には周期的なシステムを考える。KdV 方程式の孤立波解

$$\tilde{B}_z \equiv B_z/B_0 = 1 + \delta \tilde{B} \text{sech}^2[(x - v_p t)/D], \quad (\text{F.2})$$

$$v_p = v_{p0}(1 + \tilde{\alpha} \delta \tilde{B}/2), \quad (\text{F.3})$$

$$D = 2\lambda/(\tilde{\alpha} \delta \tilde{B})^{1/2}, \quad (\text{F.4})$$

を初期値とし、それらの時間・空間発展を観察する。なお、(F.2)-(F.4) に含まれている定数は、低周波モードについては、 $v_{p0} = v_A$ 、 $\lambda = d_i$ (定義は (3.25) 式)、 $\tilde{\alpha} = 1$ 、高周波モードについては、 $v_{p0} = v_h$ 、 $\lambda = c/\omega_{pe}$ 、 $\tilde{\alpha} = \alpha$ (定義は (3.87) 式) と設定する。磁場以外の物理量についても KdV 方程式の孤立波解にしたがって初期値を与える。

シミュレーションパラメータは次のように設定した。質量比および電荷比は $m_a/m_e = 1000$ 、 $m_b/m_a = 4$ 、 $q_a/q_e = -1$ 、 $q_a/q_b = 2$ とする。2 種類のイオンの存在比は $n_b/n_a = 0.1$ 、磁場の強さについては $|\Omega_e|/\omega_{pe} = 0.5$ を選ぶ。この時、速度に関するパラメータは $c/v_A = 68.3$ 、 $v_A/v_h = 0.967$ となる。また、KdV 方程式の適用範囲については $\epsilon_{\max}^- \simeq 0.06$ 、 $\epsilon_{\min}^+ \simeq 0.005$ と見積ることができる。ここで、 ϵ_{\max}^- は低周波モードの振幅の上限値、 $\epsilon_{\min}^+ \simeq 0.005$ は高周波モードの振幅の下限値である。

まず最初に、(3.98) 式を満たさないような、低周波モードの大振幅孤立波の非線形発展を調べる。(F.2)-(F.4) 式において $\delta \tilde{B} = 0.2 (> \epsilon_{\max}^-)$ の低周波モードの孤立波解を初期値として与えた。第 3.2.5 節の図 3.9 に磁場のプロファイルの時間変化をプロットした。初期値が低周波モードの KdV 方程式の孤立波解であるにもかかわらず、急峻化が起こっている。そして、もとのパルスの波長 ($\sim c/\omega_{pi}$) よりもずっと短い波長をもつパルスが複数生成され、それらが前方に伝播している。短波長パルスの幅は、高周

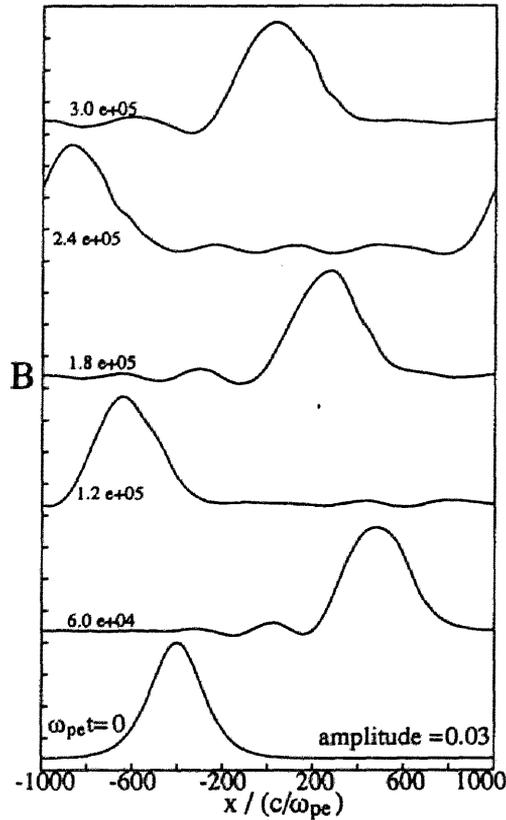


図 F.1: 低周波モードの小振幅孤立波の時間発展。初期の振幅を $\delta\tilde{B} = 0.03 (< \epsilon_{\max}^-)$ とした。パルスはその形を保ったまま、ほぼ定常に伝播する。

波モードの特徴的な幅 c/ω_{pe} のオーダーである。 $\omega_{pe}t = 5 \times 10^4$ から 7×10^4 の時間を例にとると、先頭の短波長パルスの振幅は $\delta\tilde{B} = 0.28$ 、伝播速度は $v_p = 1.16v_h$ であった。この伝播速度の観測値は、(F.3) 式に $\delta\tilde{B} = 0.28$ を代入して得られる値 $v_p = 1.15v_h$ と良い一致を示している。したがって、生成された短波長パルスは高周波モードの孤立波であるとみなすことができる。

もとのパルスの振幅は $\omega_{pe}t = 0$ の $\delta\tilde{B} = 0.2$ から $\omega_{pe}t = 6 \times 10^4$ の $\delta\tilde{B} = 0.12$ まで徐々に減少している。また、この時間の平均の伝播速度は $v_p = 1.02v_A$ と観測された。平均の振幅を $(0.2 + 0.12)/2 = 0.16$ と見積もると、低周波モードの孤立波の伝播速度は (F.3) 式より $v_p = 1.08v_A$ と理論的に予測される。したがって、観測値は理論値よりもずっと小さい。低周波モードの大振幅波は高周波モードに相当する短波長パルスを放射し、その反動で伝播速度が小さくなっているものと考えられる

一方、(3.98) 式を満たすような、低周波モードの小振幅孤立波を初期値として与えると、パルスはその形を保ったまま、ほぼ定常に伝播する。図 F.1 に、初期の振幅を $\delta\tilde{B} = 0.03 (< \epsilon_{\max}^-)$ とした場合の、磁場のプロファイルの時間変化を示す。波の急峻化

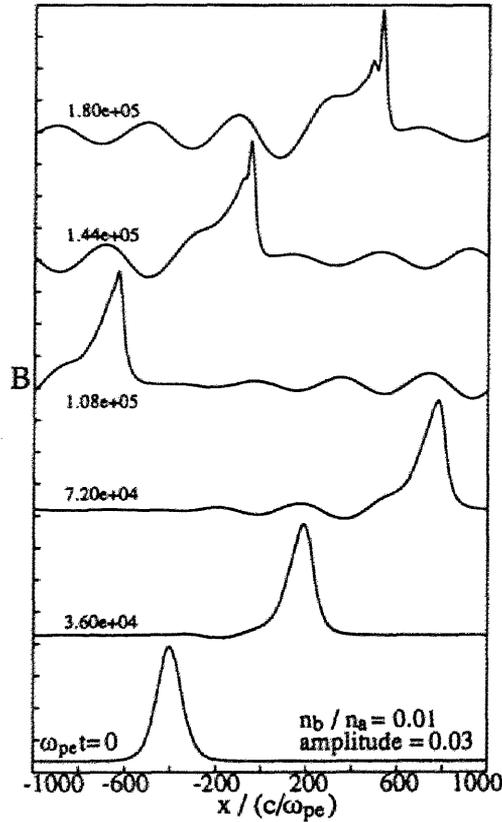


図 F.2: 重イオン b の存在量を非常に少なくし、ほぼ 1 種類イオンプラズマに近づけた場合の、低周波モードの小振幅孤立波の時間発展。初期の振幅は図 F.1 と同じ $\delta \tilde{B} = 0.03$ としたが、2 種類のイオンの存在比は $n_b/n_a = 0.01$ とした。短時間で短波長パルスが生成されている。

や、短波長パルスの形成は $\omega_{pet} = 3 \times 10^5$ の時間までは観測されなかった (図 3.9 に示した大振幅孤立波の場合は $\omega_{pet} \sim 2 \times 10^4$ の非常に短時間で短波長パルスが生成されている)。

低周波モードの小振幅孤立波が、ほぼ定常に伝播できるのは、プラズマが 2 種類のイオンをかなりの割合で含んでいるからである。これを確かめるために、一方のイオンの存在量を非常に小さくした場合のシミュレーション結果を図 F.2 に示す。重イオン b と軽イオン a の存在比を $n_b/n_a = 0.01$ とした。この時 $\epsilon_{\max}^- = 0.01$ となり、図 F.1 の場合に比べて小さくなる。初期の振幅は図 F.1 と同じ $\delta \tilde{B} = 0.03$ を選んだ。 $\omega_{pet} = 1 \times 10^5$ には、すでに波の急峻化が生じ、 $\omega_{pet} = 1.8 \times 10^5$ には、高周波モードに相当する短波長パルスが出現している。

次に、(3.100) 式を満たさない、高周波モードの小振幅孤立波の非線形発展を観察する。 $\delta \tilde{B} = 0.002 (< \epsilon_{\min}^+)$ の高周波モードの孤立波解を初期値として設定した場合の、磁場のプロファイルの時間変化を図 F.3 に示す。振幅が非常に小さいため、パルスは v_h

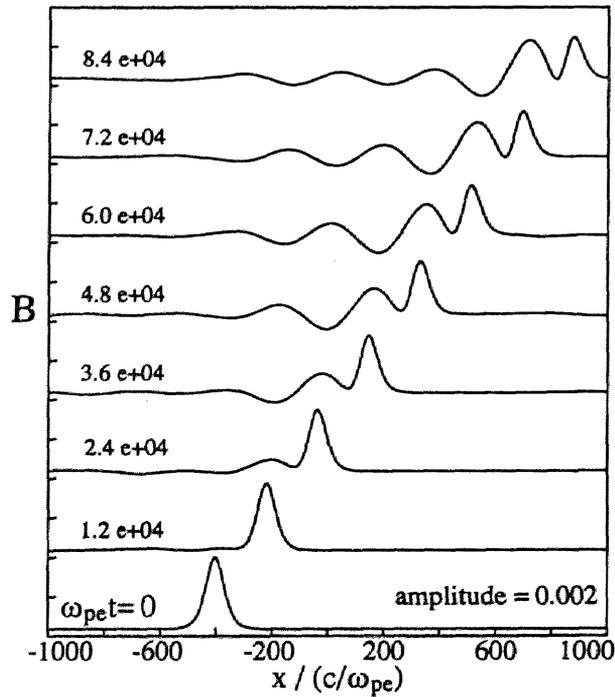


図 F.3: 高周波モードの小振幅孤立波の時間発展。初期の振幅を $\delta\tilde{B} = 0.002 (< \epsilon_{\min}^+)$ と設定した。パルス後ろに長い波長を持つ擾乱が生成され、もとのパルスは徐々に減衰している。

に近い速度で伝播する。 $\omega_{pet} = 1.2 \times 10^4$ から $\omega_{pet} = 8.4 \times 10^4$ の間に観測された平均の伝播速度は v_h より 0.5% ほど大きかった。また、パルス後ろに、長い波長をもつ擾乱が形成されている。 $\omega_{pet} = 8.4 \times 10^4$ では、この擾乱の波長はおよそ $\sim 330c/\omega_{pe}$ である。これは、 $2\pi/k_c (= 326c/\omega_{pe})$ で与えられる波長と近い値となっている。なお、 k_c は 3.1 節で示したように、分散曲線が急激に曲がる波数である。また、長波長擾乱の位相速度はパルスの伝播速度にほぼ等しい。このため擾乱の周波数は $\omega \simeq 2.9 \times 10^{-4}\omega_{pe}$ と見積ることができる。これは、高周波モードのカットオフ周波数 $\omega_{+0} = 2.92 \times 10^{-4}\omega_{pe}$ にほぼ等しい。このような擾乱を生成するため、もとの高周波モードの小振幅孤立波は徐々に減衰している。

付録 G 孤立波における物理量の最大値

高周波モードの KdV 方程式 (3.86) の孤立波解は

$$B_1 = (2/\alpha)\delta \operatorname{sech}^2[\delta(\xi - \delta\tau)/\sqrt{2}], \quad (\text{G.1})$$

となる。ここで、 δ は振幅に相当する定数、 α は (3.87) 式で定義される定数、 ξ 、 τ は空間的および時間的に引き伸ばされた変数で (3.54)(3.55) 式で定義される。展開式 (3.63) を考慮にいれ、変数の規格化を外し、波の伝播速度を Mv_h とすると、磁場 B_z は、

$$B_z/B_0 = 1 + (2/\alpha)(M - 1)\operatorname{sech}^2(s), \quad (\text{G.2})$$

と表すことができる。ここで、引数 s は、(4.11) 式で定義される D を使って、

$$s = (x - Mv_h t)/D, \quad (\text{G.3})$$

と与えられる。また関係式 (E.12)(E.11) より、孤立波における縦電場 E_x 、横電場 E_y は次のように表される。

$$E_x/(v_h B_0/c) = (2\sqrt{2}/\alpha\eta)(M - 1)^{3/2}\operatorname{sech}^2(s)\tanh(s), \quad (\text{G.4})$$

$$E_y/(v_h B_0/c) = (2/\alpha)(M - 1)\operatorname{sech}^2(s). \quad (\text{G.5})$$

ここで、 η は (3.74) 式で与えられる定数である。また、イオンの x 方向の速度は

$$v_{ix}/v_h = (2/\alpha)(\Omega_i/\eta^2|\Omega_c|)(M - 1)\operatorname{sech}^2(s), \quad (\text{G.6})$$

となる。(G.6) 式は q_i/m_i の小さい重イオンの x 方向の速度が、軽イオンに比べて小さくなることを示している。

B_z 、 E_y 、 v_{ix} は $\operatorname{sech}(s) = 1$ で最大値をとる。添字 m で最大値を表すと、それらは

$$B_m/B_0 = (2/\alpha)(M - 1) + 1, \quad (\text{G.7})$$

$$E_{ym}/(v_h B_0/c) = (2/\alpha)(M - 1), \quad (\text{G.8})$$

$$v_{ixm}/v_h = (2/\alpha)(\Omega_i/\eta^2|\Omega_c|)(M - 1), \quad (\text{G.9})$$

と与えられる。 E_x は $\operatorname{sech}^2(s) = 2/3$ 、 $\tanh^2(s) = 1/3$ のところで最大値

$$E_{xm}/(v_h B_0/c) = (4\sqrt{6}/9\alpha\eta)(M - 1)^{3/2}, \quad (\text{G.10})$$

をとる。

次にイオンの y 方向の速度を導出する。第 3.2.3 節に示したように、(3.74) 式で定義される微小量 η を導入し、仮定

$$\epsilon \gg \eta (\sim m_e/m_i), \quad (\text{G.11})$$

を設定して高周波モードの KdV 方程式を導出したが、その際イオンの y 方向の運動方程式で使わなかった項は (3.91) 式、すなわち

$$+\epsilon^4 \left(-\frac{\partial v_{iy3}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{iy2}}{\partial \tau} + v_{ix2} \frac{\partial v_{iy1}}{\partial \xi} + v_{ix1} \frac{\partial v_{iy2}}{\partial \xi} \right) + \dots$$

$$-\frac{\Omega_i}{|\Omega_e|} \epsilon (E_{y1} - v_{ix1}) - \frac{\Omega_i}{|\Omega_e|} \epsilon^2 (E_{y2} - v_{ix2} - B_1 v_{ix1}) + \dots = 0, \quad (\text{G.12})$$

であった。また第 3.2.4 節で高次の項で矛盾が生じないためには、 ϵ と η との間に

$$\epsilon^n \sim \eta^2 \quad (n = 3, 4, 5, \dots), \quad (\text{G.13})$$

の関係が必要であることを示した。(G.13) 式において $n = 3$ を例にとると、(G.12) 式の第 1 列の ϵ^4 のオーダーの項が、第 2 列第 1 項の $\epsilon \eta^2$ のオーダーの項とつり合うことになる。すると、 E_{y1} と v_{ix1} を B_1 を使って表した式 (E.12)(E.13) 式を使って次の関係式が得られる。

$$v_{iy3} = -\frac{\Omega_i}{\epsilon^4 |\Omega_e|} \left(1 - \frac{\Omega_i}{\eta^2 |\Omega_e|} \right) \int B_1 d\xi. \quad (\text{G.14})$$

B_1 に (G.1) 式を代入し、パルスのずっと上流 $\xi \rightarrow +\infty$ で v_{iy3} が 0 になることを仮定して (G.14) 式の積分を行なう。そして、展開式 (3.78) および (3.84) 式より、 $v_{iy} = \eta^{-1} \epsilon^{7/2} v_{iy3}$ となることを考慮にいれると

$$\frac{v_{iy}}{v_h} = \frac{2\sqrt{2}}{\alpha \eta} \frac{\Omega_i}{|\Omega_e|} \left(1 - \frac{\Omega_i}{\eta^2 |\Omega_e|} \right) (M - 1)^{1/2} [1 - \tanh(s)], \quad (\text{G.15})$$

が得られる。ただし、ここでは規格化を外した形で表している。なお、(G.13) 式において、異なる n の値を設定しても (G.15) 式は変わらない。

(G.15) 式は、 $s \gg 1$ の上流では v_{iy} が 0 であり、上流から下流に移るにつれて v_{iy} は、重イオンについては単調に増加し、軽イオンについては減少することを表している。そして、 $s \rightarrow -\infty$ で次の値に近づく。

$$\frac{v_{iym}}{v_h} = \frac{4}{\alpha^{1/2} \eta^3} \frac{\Omega_i}{\Omega_e} \left\{ \frac{\omega_{pa}^2}{\omega_{pe}^2} \left(1 - \frac{\Omega_i}{\Omega_a} \right) + \frac{\omega_{pb}^2}{\omega_{pe}^2} \left(1 - \frac{\Omega_i}{\Omega_b} \right) \right\} \left(\frac{B_m}{B_0} - 1 \right)^{1/2}. \quad (\text{G.16})$$

(G.16) 式の導出には (G.7) 式および η の定義式と準中性条件を使った。(G.16) 式は、副成分のイオンの方が大きな値となることを示している。

$\Omega_b/\Omega_a = 1/2$ 、 $\omega_{pb} \ll \omega_{pa}$ のプラズマでは重イオンの速度 v_{bym} は

$$v_{bym} \sim (m_e/m_i)^{1/2}(B_m/B_0 - 1)^{1/2}v_h, \quad (\text{G.17})$$

の大きさである。(G.17) 式は第 4.1 節の (4.13) 式と等価である。主成分の軽イオンの速度 v_{aym} は v_{bym} のおよそ $n_{b0}m_b/(n_{a0}m_a)$ 倍の大きさである。したがって、主成分軽イオンの y 方向の速度の変化は非常に小さい。

参考文献

- [1] T. H. Stix: *Waves in Plasmas* (American Institute of Physics, New York, 1992)
- [2] A. B. Mikhailovskii: *Theory of Plasma Instabilities* (Consultants Bureau, NY, 1974).
- [3] A. Hasegawa: *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1975).
- [4] D. J. Korteweg and G. de Vries: *Phil. Mag.* **39** (1895) 422.
- [5] H. Washimi and T. Taniuti: *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 996.
- [6] H. Ikezi, R. J. Taylor, and D. R. Baker: *Phys. Rev. Lett.* **25** 11 (1970).
- [7] C. S. Gardner and G. K. Morikawa, Rep. NYO-9082, Courant Inst. of Math. Sci., New York Univ, New York (1960)
- [8] T. Kakutani, H. Ono, T. Taniuti, and C. C. Wei: *J. Phys. Soc. Jpn.* **24**, (1968) 1159
- [9] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal: *Phys. Rev. Lett.* **15**, (1965) 240
- [10] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura: *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).
- [11] T. Taniuti and N. Yajima: *J. Math. Phys.* **10**, (1969) 1369.
- [12] K. Nishikawa, H. Hojo, K. Mima, and H. Ikeji: *Phys. Rev. Lett.* **33**, (1974), 148
- [13] K. Mio, T. Ogino, K. Minami, and S. Takeda: *J. Phys. Soc. Jpn* **41**, (1976) 265.
- [14] T. Taniuti and C. C. Wei: *J. Phys. Soc. Jpn.* **24** (1968) 941.
- [15] R.Z. Sagdeev: in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1966), Vol.4, p.23-91
- [16] D. A. Tidman and N. A. Krall: *Shock Waves in Collisionless Plasmas*, (Wiley-Interscience, New York, 1971).
- [17] D. Biskamp: *Nucl. Fusion* **13** (1973) 719.

- [18] K. Hirano and T. Yamamoto: *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987) 4361.
- [19] J. M. Dawson: *Physica Scripta*. **T52**, (1994) 7.
- [20] R. Blandford and D. Eichler: *Phys. Rep.* **154** (1987) 1
- [21] *Cosmic Ray Astrophysics*, ed. M. Oda, J. Nishimura, and K. Sakurai (Terra Sci. Publ. Tokyo 1988)
- [22] T. H. Stix: *Nucl. Fusion* **15** (1975) 737
- [23] T. Seki, R. Kumazawa, Y. Takase, A. Fukuyama, T. Watari *et al.*: *Nuclear Fusion* **31** (1991) 1369.
- [24] A. Nishida: *Geomagnetic Diagnosis of the Magnetosphere* (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1978)
- [25] M. B. Bavassano-Cattaneo, B. T. Tsurutani, E. J. Smith and R. P. Lin: *J. Geophys. Res.* **91** (1986) 11,929.
- [26] J. H. Adlam and J. E. Allen: *Philos. Mag.* **3** (1958) 448 .
- [27] L. Davis, R. Lüst and A. Schulüter: *Z. Naturforsch. Teil A***13** (1958) 916.
- [28] Yu. A. Berezin and V. I. Karpman: *Soviet Phys. JETP* **46**, (1964) 1880
- [29] T. Kakutani and H. Ono: *J. Phys. Soc. Jpn.* **26**, (1969) 1305
- [30] Y. Ohsawa: *Phys. Fluids* **29** (1986) 1844.
- [31] C. S. Morawetz: *Phys. Fluid* **4**, (1961) 988
- [32] D. Biskamp and H. Welter: *Nuclear Fusion* **12** (1972) 663.
- [33] M. M. Leory, D. Winske, C. C. Goodrich, C. S. Wu, and K. Papadopoulos: *J. Geophys. Res.* **87**, (1982) 5081
- [34] D. W. Forslund, K. B. Quest, J. U. Brackbill and K. Lee: *J. Geophys. Res.* **89** (1984) 2142
- [35] Y. Ohsawa: *Phys. Fluids* **28** (1985) 2130.
- [36] B. Lembege and J. M. Dawson: *Phys. Fluids* **29** (1986) 821.

- [37] R. L. Tokar, S. P. Gary and K. B. Quest: *Phys. Fluids* **30** (1987) 2569.
- [38] D. Burgess, W. P. Wilkinson, and S. J. Schwartz: *J. Geophys. Res.* **94** (1989) 8783.
- [39] B. Lembège and J. M. Dawson: *Phys. Fluids B* **1** (1989) 1001.
- [40] B. Lembège and P. Savoini: *Phys. Fluids B* **4** (1992) 3533.
- [41] N. Sckopke, G. Paschmann, S. J. Bame, J. T. Gosling and C. T. Russell: *J. Geophys. Res.* **88** (1983) 6121.
- [42] Y. Ohsawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** (1986) 1047.
- [43] Y. Ohsawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987) 4367.
- [44] P. A. Sturrock: *Solar Flares* ed. Sturrock, (Colorado University Press, Boulder 1980).
- [45] M. A. Forman, R. Ramaty and E. G. Zweibel: in *The Physics of the Sun*, ed. P. A. Sturrock (D. Reidel Publ. Dordrecht 1986) vol. 2 Chap. 13.
- [46] H. Nakajima, T. Kosugi, K. Kai and S. Enome: *Nature* **305** (1983) 292.
- [47] S. R. Kane, E. L. Chupp, D. J. Forrest, G. H. Share and E. Rieger: *Astrophys. J.* **300** (1986) L95.
- [48] D. Forrest, W. Vestrand, E. Chupp, E. Rieger, J. Cooper and G. Share: *Adv. in Space Sci.* **6** (1986) 115.
- [49] J.-I. Sakai and Y. Ohsawa: *Space Sci. Rev.* **46** (1987) 113.
- [50] Y. Ohsawa and Y. Terashima: *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **42** (1990) 551.
- [51] D. G. Swanson: *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 316.
- [52] H. Takahashi: *J. de. Phys. (Paris), Colloq. C6* **38** (1977) 171.
- [53] J. Jacquinet, B. D. Mcvey, and J. E. Scharer: *Phys, Rev, Lett.* **39** (1977) 88.
- [54] S. Riyopoulos and T. Tajima: *Phys. Fluids* **29**(1986) 4161.
- [55] Y. Ogawa, K. Masai, T. Watari, *et al.*: *Nuclear Fusion* **29** (1989) 1873.

- [56] J. D. Anglin: *Astrophys. J.* **198** (1975) 733
- [57] D. V. Reames: *Astrophys. J.* **73** (1990) 235.
- [58] D. V. Reames, J. P. Meyer, and T. T. von Rosenvinge: *Astrophys. J. Suppl.* **90** (1994) 649.
- [59] L. A. Fisk: *Astrophys. J.* **224**, (1978) 1048.
- [60] M. Temerin and I. Roth: *Astrophys. J. Let.* **391** (1992) 105.
- [61] T. X. Zhang, M. Toida and Y. Ohsawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (1993) 2545.
- [62] T. X. Zhang and Y. Ohsawa: to be published in *Solar Phys.*
- [63] J. P. Meyer: *Astrophys. J. Suppl.* **57** (1985) 151.
- [64] J. P. Meyer: *Astrophys. J. Suppl.* **57** (1985) 173.
- [65] H. H. Breneman and E. C. Stone: *Astrophys. J.* **299** (1985) L57.
- [66] J. P. Meyer: *Adv. Space Res.* **11** (1991) 269
- [67] E. T. Sarris and S. M. Krimigis: *Astrophys. J.* **298** (1985) 676.
- [68] M. Toida, T. X. Zhang, and Y. Ohsawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** (1992) 3587.
- [69] S. A. Fuselier and W. K. H. Schmidt: *J. Geophys. Res.* **99** (1994) 11539.
- [70] 樋田美栄子, 大澤幸治: *プラズマ・核融合学会誌* **69** (1993) 1341.
- [71] M. Toida and Y. Ohsawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994) 573.
- [72] M. Toida and Y. Ohsawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **64** (1995) 2038.
- [73] S. J. Buchsbaum, *Phys. Fluids* **3** (1960) 418.
- [74] A. B. Mikhailovskii and A. I. Smolyakov: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **88** (1985) 189.
translation: *Sov. Phys.-JETP* **61** (1985) 109
- [75] R. L. Smith and N. Brice: *J. Geophys. Res.* **69** (1964) 5029.
- [76] Y. Ohsawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** (1990) 2782.
- [77] M. Toida, T. X. Zhang, and Y. Ohsawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** (1992) 3038.

- [78] M. Tanaka: *J. Geophys. Res.* **90** (1985) 6459.
- [79] K. G. McClements, R. Bingham, J. J. Su, J. M. Dawson and D. S. Spicer: *Astrophys. J.* **409** (1993) 465.
- [80] R. Bingham, J. J. Su, V. D. Shapiro, V. Shevchenko, S. Ma, J. M. Dawson and V. N. Tsytovich: *Physica Scripta* **52** (1994) 20.
- [81] M. Toida, Y. Ohsawa and T. Jyounouti: to be published in *Phys. of Plasmas*.
- [82] R. D. Richtmyer and K. W. Morton: *Difference Methods for Initial-Value Problems*, (John, Wiley & Sons, New York, 1967), Chap. 12.
- [83] T. Ogino and S. Takeda: *J. Phys. Soc. Jpn.* **38** (1975) 568.
- [84] T. Tajima: *Computational Plasma Physics: With Applications to Fusion and Astrophysics* (Addison Wesley, 1989).
- [85] C. K. Birdsall and A. B. Langton: *Plasma Physics via Computer Simultaion* (Adams Hilger, 1991).
- [86] H. Okuda and C. K. Birdsall: *Phys. of Fluids* **13** (1970) 2123.
- [87] P. C. Liewer, A. T. Lin, J. M. Dawson, and M. Z. Caponi: *Phys. Fluids* **24** (1981) 1364
- [88] U. Motschmann, K. Sauer, T. Roatsch, and J.F. Mckenzie: *J. Geophys. Res.* **96** (1991) 13841.
- [89] U. Motschmann and J. Raeder: *Geophys. Res. Lett.* **19** (1992) 1619.
- [90] Y. Ohsawa, *Phys. Fluids* **29**, (1986) 2474.