# 消散システム理論に基づく
# 制御系設計

穂高 一条

# Contents

CHAPTER 1

# 序論

## 1. はじめに

実在のシステムを制御しようとする場合，まずシステムを記述する数学的モデルが必要となる．この数学的モデルが実在のシステムを十分正確に表現するものであれば，モデルをもとに構成された制御システムにはよい性能を期待できる．しかしいかなる数学的モデルも実在のシステムを正確に記述することはできず，そこには必ずモデル化誤差がある．したがって数学的モデルに基づいて設計した制御システムは，数学的モデルと実際のシステムの相違に対してロバストでなければならない．このような要求に対して，近年の制御理論はロバスト制御理論を中心として発展してきた．

制御理論では，ある与えられた数学的システム（通常，フィードバックシステム）のある不確かさに対する安定性を調べることをロバスト安定解析とよび，不確かさに対して制御システムがロバスト安定となるようなコントローラを設計することをロバスト安定化とよんでいる．フィードバックシステムのロバスト安定解析における古典的な結果に，スモールゲイン定理と受動定理がある．あるシステムに関して，出力のノルムが入力のノルムより小さいときに，システムは有界実であるといい，入力と出力の内積が正であるときに，システムは受動であるという．スモールゲイン定理とは，二つの有界実システムからなるフィードバックシステムが安定となることをいったもので，一方受動定理とは，二つの受動システムからなる負のフィードバックシステムが安定となることを示すものである．しかしこれらの結果は，有界実性と受動性というシステムをある特定の尺度で評価したときに成り立つものである．したがってシステムが与えられたとき，そのシステムをこれらの尺度で評価することが妥当かどうかを判断しなければならない．もしそれが妥当なものでないのならば，システムを評価する別の方法を考えるべきである．

J. C. Willems[**37**, **38**] が導入したシステムの消散性の概念は，非常に柔軟なシステムの評価基準であり，その特別な場合として，前述の有界実性や受動性を含むものである．消散性は，システムの内部エネルギの概念を一般化した蓄積関数と，システムに流入する単位時間あたりのエネルギの概念を一般化した供給率という二つ

の量の関係で定義される．したがって，物理的なシステムの性質を記述することに非常に適している．また消散性は，フィードバックシステムの安定解析において，スモールゲイン定理や受動定理よりも柔軟な結果を導くものであり，現在知られている様々なロバスト安定条件 [**3**] は，これの特別な場合であるか，その延長上にあるといっても過言ではない．

このようにシステムの消散性は，制御システムのロバスト安定性やロバスト安定化において強力な概念であって，研究対象とする価値が十分ある．

## 2. 本研究の目的と概要

本研究の目的は，大別して二つある．一つは，システムの消散性に関連するフィードバックシステムのロバスト安定解析の新しい結果を示すことである．二つ目は，システムの消散性に基づくロバスト安定化の新しい枠組みを提案することである．

以下に本研究の概要を述べる．

第２章ではまず簡単な力学モデルを通して，システムの消散性が自然に定義されることを説明する．そしてフィードバックシステムの安定解析における消散性の意義を論じ，従来知られている結果をまとめる．

第３章では，第一の目的であったシステムの消散性に関するロバスト安定解析の結果を示す．消散システムの概念が導入されるもととなった受動システムに関する結果に受動定理がある．これは,「受動システムと強受動システムからなる負のフィードバックシステムは安定である」というものである．ここで強受動システムは，線形時不変システムではその伝達関数の強正実性に対応する．ところがこの強正実性には，微妙に異なる三つの定義があり，このうちもっとも弱い条件を持つものを weakly strictly positive realness (WSPR 性) とよぶ．一般に知られている受動定理は，この WSPR 性よりも強い条件を持つ強正実性に関するもので，WSPR 性が同様に受動定理を成り立たせるかどうかは未解決問題である．これに対してここでは，この WSPR 性に関する受動定理が実際に成り立つことを示す．その際，正実性をより次元の小さなシステムの正実性に等価変換するアルゴリズムを提案する．このアルゴリズムは，受動定理を証明する際の基礎となる線形行列不等式の解を，低次元の Riccati 方程式の解で表現することを可能にする．その結果，ここでいう新しい受動定理を導くだけでなく，微妙に異なる三種類の強正実性の違いを判定する条件を与えることが可能となる．

第４章では，第二の目的であるシステムの消散性に基づくロバスト安定化の新しい手法を述べる．これは，制御対象とコントローラの直列結合である開ループシステムを消散的にすること（消散化）によるロバスト制御のことである．開ループシ

ステムの不確かさに関するロバスト性の尺度に，古典的なゲイン余裕と位相余裕があり，これらの安定余裕は特に応用面で重要視される．ところがこれらの安定余裕を系統的に確保する方法は知られていなかった．この一つの原因は，$H_\infty$ 制御に代表される現代的なロバスト制御が，一般に閉ループシステムに注目し，それを整形することで不確かさに対するロバスト性を確保しており，開ループシステムの性質が見落とされる点にあると考えられる．そこでここでは，開ループシステムのロバスト性に注目し，これを消散化することを提案する．その際，ノミナルフィードバックシステムの安定性が，開ループシステムの消散性と等価であることを示す．このことは，安定なフィードバックシステムを構成したい場合，コントローラは開ループシステムを消散化するものでなければならないことを意味し，開ループシステムを消散化することによるロバスト制御の正当性を示すものである．そして開ループシステムを消散化したときに，どのようなロバスト安定性が保証されるかを明らかにする．その応用例として，ゲイン余裕と位相余裕を確保する系統的な方法を示す．最後に，開ループシステムを消散化するコントローラの設計問題は，ある $H_\infty$ 制御問題と等価であることを示す．これは，提案するロバスト制御のコントローラの設計法を与えるだけでなく，ゲイン特性のみに注目した $H_\infty$ 制御であっても，評価する閉ループシステムを工夫することで，開ループシステムのゲインと位相特性の整形が可能であることを示すものである．

最後に第５章で結論と今後の研究の方向を述べる．

## 3. 記法

本論文で使用する記号を以下にまとめておく．

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$: 実数及び複素数全体の集合
$\mathbb{R}_+$: 0 以上の実数全体の集合
$\Re(s)$: 複素数 $s$ の実部
rank $A$: 行列 $A$ のランク
rank $G(\cdot)$: 伝達関数 $G$ のノーマルランク
$\det A$: 行列 $A$ の行列式
$A^T$, $A^*$: 行列 $A$ の転置行列及び複素共役転置行列
$A^{-1}$: 正則行列 $A$ の逆行列
$A^{-T}$, $A^{-*}$: 正則行列 $A$ の $(A^T)^{-1}, (A^*)^{-1}$
$A^{1/2}$: 準正定対称行列 $A$ の平方根行列
$I$: 単位行列
$\mathbf{FB}(\Sigma_1, \Sigma_2)$: システム $\Sigma_1$ と $\Sigma_2$ からなるフィードバックシステム

$\|G\|_\infty$: 伝達関数 $G$ の $H_\infty$ ノルム

また，エルミート行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ に関して

$$x^* A x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

が成り立つとき，$A$ は準正定であるといい，$A \geq 0$ と記し，

$$x^* A x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x \neq 0$$

が成り立つとき，$A$ は正定であるといい，$A > 0$ と記す.

## 4. 微分方程式の安定性に関する基礎事項

ここでは，微分方程式の安定性に関する基礎事項を述べる．これらは後の章で用いる．

時不変微分方程式

$$\Sigma : \quad \dot{x} = f(x), \quad x(0) = x^0 \tag{1}$$

を考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は連続，$f(0) = 0$ とする．したがって，$x = 0$ はシステム $\Sigma$ の平衡点である．また，$x^0$ を初期値とする $\Sigma$ の解を $x(t, x^0)$ と記す.

このようなシステム $\Sigma$ の安定性に関して次の Lyapunov の定理が知られている．

**定理** 1. [**17**] $C^1$ 級の関数 $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が，$V(0) = 0$, $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ と

$$\dot{V}(x) := \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

を満たすとき，システム $\Sigma$ は安定である．さらに

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0$$

を満たすとき，システム $\Sigma$ は漸近安定である．これに加えて，

$$\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$$

を満たすとき，$V$ は radially unbounded であるといい，このときシステム $\Sigma$ は大域的漸近安定である.

**定義** 1. [**40**] $E \subset \mathbb{R}^n$ とシステム $\Sigma$ に関して

$$x^0 \in E \Rightarrow x(t, x^0) \in E, \forall t \in \mathbb{R}_+$$

が成り立つとき，$E$ は $\Sigma$ の**不変集合**であるという.

**定義** 2. [**40**] $\Sigma$ の解 $x(t, x^0)$ が $t \in [0, \infty)$ で定義されているとき，

$$\Omega(x^0) := \left\{\theta \in \mathbb{R}^n : \exists\{t_i\} \subset \mathbb{R}^n, t_i \to \infty (i \to \infty) \Rightarrow x(t_i, x^0) \to \theta\right\}$$

を $\omega$-**極限集合**という．

**補題** 1. [**40**] $\Sigma$ の解 $x(t, x^0)$ が $t \in [0, \infty)$ で定義され，有界であるとする．このとき，$\omega$-極限集合 $\Omega(x^0)$ は空でないコンパクトな $\Sigma$ の不変集合であり，さらに

$$x(t, x^0) \to \Omega(x^0) \text{ as } t \to \infty$$

となる．

これを用いてつぎの LaSalle の定理が導かれる．

**定理** 2. [**40**] $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $C^1$ 級正定関数であり，$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ を満たすとする．このとき

$$\dot{V}(x(t, x^0)) \equiv 0 \Rightarrow x^0 = 0$$

ならば，$\Sigma$ は漸近安定である．さらに $V$ が radially unbounded ならば，$\Sigma$ は大域的漸近安定である．

CHAPTER 2

# 消散システム理論の概要

本章では，簡単な力学モデルを通して，システムの消散性が自然に定義されることを説明する．そしてフィードバックシステムの安定解析における消散性の意義を論じ，従来知られているロバスト安定定理などをまとめる．

## 1. 消散システムの定義

**図 1** のようなバネ $K > 0$, 質量 $M > 0$, ダンパ $D > 0$ からなる機械システムを考える．

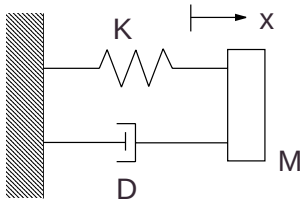


FIGURE 1. 質量・バネ・ダンパ系

平衡状態からの質量 $M$ の位置を $x$ とおくと，運動方程式は

$$M\ddot{x} = -Kx - D\dot{x}$$

である．ここで $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ とおくと

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K}{M}x_1 - \dfrac{D}{K}x_2 \end{cases}$$

となる．このシステム $\Sigma_0$ の運動エネルギと位置エネルギの和を

$$V(x_1, x_2) := \frac{1}{2}Mx_2^2 + \frac{1}{2}Kx_1^2 > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \tag{2}$$

とおくと，システム $\Sigma_0$ の解に沿った $V$ の導関数は

$$\dot{V} = Mx_2\dot{x}_2 + Kx_1\dot{x}_1 = -Dx_2^2 \leq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

となる．したがって，Lyapunov の定理からシステム $\Sigma_0$ は安定である．また，$\dot{V} \equiv 0$ ならば，$x_2 \equiv 0$ であり，これを満たす $\Sigma_0$ の解は，$x_1 = x_2 \equiv 0$ しかないから，LaSalle の定理より $\Sigma_0$ は漸近安定である．注目すべき点は，Lyapunov の定理では Lyapunov 関数を上で用いたシステムのエネルギにとることは必ずしも必要でないことである．それ故，機械システムや電気回路などのエネルギが定義されるシステムだけでなく，一般に

$$\dot{x} = f(x)$$

のような微分方程式の解の安定性を扱うことができる．

しかしながら一般に制御システムでは，入力と出力があるようなシステムを考える必要がある．そこで $\Sigma_0$ において，質量 $M$ に外部から力 $u$ がかかる場合を考え，さらに質量 $M$ の速度 $x_2$ を観測したとしよう．(**図 2**)

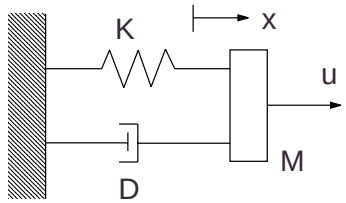


FIGURE 2. 入力をもつ質量・バネ・ダンパ系

このようなシステムに対して，入力・出力がない場合の上で述べた議論を拡張し，その際自然にシステムの消散性が導入されることを以下で説明する．$u$ を入力，$y = x_2$ を出力としてもつシステムは

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K}{M}x_1 - \dfrac{D}{K}x_2 + \dfrac{1}{M}u \\ y = x_2 \end{cases}$$

となる．ここで，(2) 式 のエネルギ $V$ を考え，同様にシステム $\Sigma$ の解に沿って微分すると，

$$\dot{V} = Mx_2\dot{x}_2 + Kx_1\dot{x}_1 = -Dx_2^2 + ux_2 = -Dy^2 + uy \leq uy$$

となる．これを時間に関して積分すると不等式：

$$\begin{aligned} V(x_1(T), x_2(T)) - V(x_1(0), x_2(0)) &= -\int_0^T Dy(t)^2 dt + \int_0^T u(t)y(t)dt \\ &\leq \int_0^T u(t)y(t)dt \end{aligned}$$

が得られる．この不等式の左辺は，時刻 0 から $T$ におけるシステムのエネルギの増分を表しており，右辺の最後の項は外部からシステムに入るエネルギである．したがってこの不等式は，

$$\text{システムの力学的エネルギの増分} \leq \text{外部からのエネルギ}$$

を表しており，さらにその損失エネルギは，$Dy^2$ の項であることを意味する．すなわち，このシステムはエネルギを消散する．

このことを一般化した概念が次のシステムの消散性である．状態 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 入力 $u(t) \in \mathbb{R}^m$, 出力 $y(t) \in \mathbb{R}^l$ をもつ次のようなシステムを考える．

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{3}$$

ただし，入力 $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ は区分的連続関数とし，その集合を $\mathcal{U}$ と記す．また，$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ と $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ は共に連続関数とし，$f(0,0) = 0$, $h(0,0) = 0$ とする．さらに，初期条件 $x(0) = x^0$, 入力 $u \in \mathcal{U}$ に関するシステム $\Sigma$ の解を $x(t, x^0, u)$ とかく．

**定義** 3. [**37**, **38**] システム $\Sigma$ に対して，$w(0,0) = 0$ を満たす $w : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ が与えられていて，$\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall u \in \mathcal{U}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ に対して，**消散不等式** (dissipation inequality)：

$$V(x(t, x^0, u)) - V(x^0) \leq \int_0^t w(u(\tau), y(\tau)) d\tau, \ y(\tau) := h(x(\tau, x^0, u), u(\tau)) \tag{4}$$

と $V(0) = 0$ を満たすような $\mathrm{C}^1$ 級正定値関数 $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在するとき，システム $\Sigma$ は**供給率** (supply rate) $w$ に関して**消散的** (dissipative) であるという．またこのときの $V$ を**蓄積関数** (storage function) と呼ぶ．また，(4) 式 のかわりに，正定値関数 $\epsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ が存在して

$$V(x(t, x^0, u)) - V(x^0) \leq \int_0^t w(u(\tau), y(\tau)) d\tau - \int_0^t \epsilon(x(\tau), u(\tau)) d\tau \tag{5}$$

が成り立つとき，システム $\Sigma$ は**供給率** $w$ に関して**強消散的** (strictly dissipative) であるという．

蓄積関数は，ちょうどエネルギ関数の一般化である Lyapunov 関数の役割をもち，一方供給率は，外部からの単位時間あたりのエネルギの一般化である．

## 2. 消散システムとフィードバックシステムの安定性

入力・出力をもたないシステム $\Sigma_0$ の安定性を調べるには，Lyapunov の定理や LaSalle の定理を適用すればよい．ここでは,（3）式 のような入力・出力をもつシステムに対して，消散性の概念がどのように安定解析に結びつくかを述べるものとする．

（3）式 のシステム $\Sigma$ と出力フィードバック則：

$$u = k(y), \quad k : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m, \quad k(0) = 0$$

からなるフィードバックシステムを考える．ただし，関数 $k$ は連続であるとし，フィードバックシステムは

$$\Lambda : \dot{x} = \lambda(x), \quad \lambda(0) = 0$$

の形に一意にかけるものとする．

いま，システム $\Sigma$ は供給率 $w$ に関して消散的であるとしよう．このとき，定義より正定な蓄積関数 $V$ が存在して，消散不等式（4）式 が成り立つ．これをシステム $\Sigma$ に沿って時間微分すると

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x(t, x^0, u), u(t)) \leq w(u(t), y(t)), \ \forall x^0 \in \mathbb{R}^n, \ \forall u \in \mathcal{U}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+$$

となる．したがって，フィードバックシステム $\Lambda$ に沿った $V$ の時間微分は,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \lambda(x) \leq w(k(y), y)$$

となる．ここでもし

$$w(k(y), y) \leq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^l \tag{6}$$

が成り立てば，Lyapunov の定理により，システム $\Lambda$ は安定となる．

また同様に，システム $\Sigma$ が強消散的であれば，フィードバックシステム $\Lambda$ に沿った $V$ の時間微分は,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \lambda(x) \leq w(k(y), y) - \epsilon(x, k(y))$$

となり，$\epsilon$ の正定性から $\dot{V}$ は負定となる．よってシステム $\Lambda$ は漸近安定となる．

すなわち,（6）式 を満たす任意の $k$ は $\Lambda$ を安定化するフィードバック則である．あるいは換言すれば，フィードバックシステム $\Lambda$ は（6）式 を満たすすべての $k$ に関してロバスト安定であるといえる．このことは，供給率 $w$ を具体的に決定すれば，より明確となる．

たとえば，$\Sigma$ が供給率

$$w(u, y) = u^T y$$

に関して消散的であることがわかっているとしよう．このとき，システム $\Sigma$ は**受動的 (passive)** [**38**] であるといい，(6) 式 は，

$$k(y)^T y \leq 0$$

となる．これを満たす $k$ としてはたとえば $k(y) = ay, (a \leq 0)$ などがある．上の議論からこの不等式を満たす任意の $k$ によるフィードバックシステムは常に安定となる．特にこの事実は，**受動定理**[**7**, **17**, **4**] とよばれている．

また別の例では，$\Sigma$ が供給率

$$w(u, y) = u^T u - y^T y$$

に関して消散的であるとき，このシステムは**有界実 (bounded real)**[**7**, **17**, **4**] であるという．(6) 式 は

$$k(y)^T k(y) - y^T y \leq 0$$

であり，たとえば $k(y) = by, (-1 \leq b \leq 1)$ などがこれを満たす．したがって，このような $k$ に対してフィードバックシステム $\Lambda$ は常に安定となる．このことは，**スモールゲイン定理**[**7**, **17**, **4**] とよばれている．

このようにシステムの消散性は，フィードバックシステムの安定性と密接に関係しており，安定化フィードバック則あるいはロバスト安定性の情報が，供給率という形で埋め込まれていると考えることができる．

## 3．線形時不変システムにおける消散性

前節で述べたように，システムが消散的であることがいえれば，フィードバックシステムを安定化する制御則を求めたり，どのような変動に対してロバスト安定となるかを知ることができる．したがって，あるシステムが与えられたとき，そのシステムが消散的であるかどうかを調べることは重要である．本節では，線形時不変システムを対象とし，システムの消散性を判定するための結果をまとめる．

有限次元線形時不変システム

$$\Sigma : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \tag{7}$$

を考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ とし，$A, B, C, D$ は適切なサイズの実定数行列である．また，システム $\Sigma$ の伝達関数を

$$L(s) := D + C(sI - A)^{-1}B$$

と記す．

（7）式 のシステム $\Sigma$ に対する消散性を考えたいが，ここではとくに供給率を次のような入力と出力に関する二次形式：

$$w(u,y) := \begin{bmatrix} y^T & u^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \tag{8}$$

の形をしたものを仮定する．ただし，上で用いた $\Pi$ は実定数対称行列であり，

$$\Pi = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+m)\times(p+m)} \tag{9}$$

であるとする．

**定義** 4. （9）式 の実対称行列 $\Pi$ が与えられているとする．（7）式 のシステム $\Sigma$ に対して正定対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} ZA + A^T Z & ZB \\ B^T Z & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{10}$$

が成り立つとき，$\Sigma$ は**行列 $\Pi$ に関して消散的**であるという．また正定対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，（10）式 の不等号 ‘$\leq$’ を厳しい意味での不等号 ‘$<$’ に置き換えた

$$\begin{bmatrix} ZA + A^T Z & ZB \\ B^T Z & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

が成り立つとき，$\Sigma$ は**行列 $\Pi$ に関して強消散的**であるという．

上で定義した行列 $\Pi$ に関する消散性は，**定義 3** の消散性の特別な場合である．いま，$\Sigma$ が行列 $\Pi$ に関して消散的であれば，（10）式 が成り立つ．そこで（10）式 に左右からそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

をかけると，

$$x^T Z(Ax + Bu) + (Ax + Bu)^T Zx - \begin{bmatrix} y^T & u^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \leq 0$$

を得る．ここで，

$$V(x) := x^T Zx, \quad w(u,y) := \begin{bmatrix} y^T & u^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

とおくと，

$$\dot{V} - w(u,y) \leq 0$$

となり，これを時間に関して積分すると消散不等式（4）式 を得る．したがってここで定義した行列 $\Pi$ に関する消散性は，上のような蓄積関数 $V$ と供給率 $w$ に関する消散性を意味する．

同様に，$\Sigma$ が行列 $\Pi$ に関して強消散的であるとき，実定数 $\epsilon > 0$ が存在して

$$x^T Z(Ax + Bu) + (Ax + Bu)^T Zx - \begin{bmatrix} y^T & u^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq 0$$

を得る．よって

$$V(x(t, x^0, u)) - V(x^0) \leq \int_0^t w(u(\tau), y(\tau)) d\tau - \epsilon \int_0^t (x^T x + u^T u) d\tau$$

となって，やはり**定義 3** の強消散性を意味する．

したがって，システムが消散的であるかどうかを調べるには，不等式（10）式 あるいは（11）式 を満たす正定対称行列 $Z$ が存在するかどうかを調べればよい．これは，$Z$ を未知とする線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality; LMI) [**37**] を解く問題であり，計算機上で容易に実行可能である [**3**].

一方，システムの消散性は，その伝達関数の性質で述べることもできる．その際，Kalman-Yakubovic-Popov Lemma とよばれている次の事実が役に立つ．

**定理** 3. [**37**, **25**] $A$ は虚軸上に固有値をもたないとする．

(a) $(A, B)$ は可制御とする．このとき対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して（10）式 が成り立つための必要十分条件は，

$$\begin{bmatrix} L(j\omega)^* & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} L(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{12}$$

が成り立つことである．

(b) 対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して（11）式 が成り立つための必要十分条件は，

$$\begin{bmatrix} L(j\omega)^* & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} L(j\omega) \\ I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \tag{13}$$

が成り立つことである．

上の定理は，消散性の定義式（10）式 または（11）式 が成り立つための条件を周波数領域で表しているが，$Z$ は対称行列としており，一方消散性の定義では，$Z$ の正定性をも要求している点に注意する．したがって，消散性と等価な周波数領域での条件は,（12）式 あるいは（13）式 に何らかの条件を加えたものである．

たとえば $\Pi$ の $(1, 1)$ ブロック行列 $Q$ が準負定である場合を考えよう．いま，システム $\Sigma$ が行列 $\Pi$ に関して強消散的ならば，消散不等式（11）式 を満たす $Z > 0$

が存在する．この不等式の $(1,1)$ ブロックから

$$ZA + A^T Z - C^T Q C < 0 \tag{14}$$

となる．$Q \leq 0$ であるから，$A$ は安定行列となる．また**定理 3** から,（13）式 が成り立つ．逆に,（13）式 が成り立ち，$A$ が安定行列であるとしよう．**定理 3** から,（11）式 を満たす $Z = Z^T$ が存在するが,（14）式 に注意すると，$Z > 0$ となり，システム $\Sigma$ は強消散的となる．

したがって，次のことが成り立つ．

**系** 1. （9）式 の行列 $\Pi$ が与えられていて，$Q \leq 0$ とする．このとき，システム $\Sigma$ が行列 $\Pi$ に関して強消散的であるための必要十分条件は，$A$ が安定行列であり，かつ（13）式 が成り立つことである．

さらに行列 $\Pi$ を

$$\Pi = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{15}$$

と限定すると，直ちに有界実補題が得られる．

**系** 2. [**43**] （7）式 のシステム $\Sigma$ とその伝達関数 $L(s)$ を考える．このとき，$A$ が安定行列であり,

$$\|L\|_\infty < 1$$

が成り立つための必要十分条件は，$\Sigma$ が（15）式 の $\Pi$ に関して強消散的である，すなわち正定対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} ZA + A^T Z + C^T C & ZB + C^T D \\ B^T Z + D^T C & I - D^T D \end{bmatrix} < 0$$

が成り立つことである．

これは，$H_\infty$ 制御 [**8**] の状態空間モデルに基づく理論展開の基礎式となっている．

CHAPTER 3

# 消散システムの安定解析

本章は，消散システムの概念が導入されるもととなった受動システムに関する新しい結果を示すことを目的とする．受動システムに関するフィードバックシステムの安定解析の結果に，受動定理というものがあるが，これは「受動システムと強受動システムからなるフィードバックシステムは安定である」というものである．この事実は，スモールゲイン定理と並んでフィードバックシステムの安定解析の基本となるもので，非常に広い応用範囲をもつ．

有限次元線形時不変システムにおいては，システムの受動性は，その伝達関数の正実性と一致する [**38**]．しかしながら，強受動システムに対応する強正実性にはいくつかの微妙に異なる定義があり，その定義と呼び方が統一されていない [**36**]．そこでこれらの異なる定義をもつ強正実性に関するいくつかの研究が成されており，それぞれの強正実性に関する様々な必要十分条件が示されている [**22**, **17**, **36**, **34**].

本章では，そのうち三つの異なる強正実性を採りあげ，strong positive realness (strong PR 性), strict positive realness (SPR 性), weakly strictly positive realness (WSPR 性) とよぶことにする．一般に strongly PR 性がもっとも強い条件で，WSPR 性 がもっとも弱い条件である．Strongly PR 性は，通常の受動定理で用いられているものである．また，SPR 性 は，絶対安定論 [**17**] や Popov の超安定定理 [**17**] で用いられている．一方，WSPR 性 は,「強正実性」の定義としてしばしば用いられているものの [**33**, **10**, **42**]，安定解析に用いられることはほとんどない．実際，WSPR なシステムと一般的な受動システムからなるフィードバックシステムが安定となるかどうかは，未解決問題であることが指摘されている [**19**, **20**].

最近になって，WSPR なシステムと正実システムからなるフィードバックシステムは漸近安定であることが示されたが [**10**, **14**]，これは線形システムに限られる結果である．また，非線形受動システムに関しては，ある条件を満たす受動システムと WSPR なシステムのフィードバックシステムは漸近安定であることが示された [**16**]．しかし，一般的な非線形受動システムに関する結果は得られていない．

本章の第一の目的は，一般的な非線形受動システムと WSPR なシステムからなるフィードバックシステムが漸近安定となることを示すことである．このことは,

従来知られていたものより弱い条件で受動定理が成り立つことを意味する．そしてこの新しい受動定理を異なる二つの方法で証明する．

最初の方法は，Silverman のアルゴリズム [**31**] を用いるものである．このアルゴリズムは，線形時不変システムの逆システムを求める一つの手順である．次の方法は，Silverman のアルゴリズムのかわりに，本論文で提案される正実システムに対するアルゴリズムを用いるものである．ここでいうアルゴリズムとは，あるシステムの正実性をより次元の小さな別のシステムの正実性に等価変換していくものであり，受動定理を示す際に基礎となるある線形行列不等式の解を，次元の小さな Riccati 方程式の解を用いて表すことを可能にする．その結果，正実システムや強正実システムの概念の相違点を，状態実現の言葉で述べることができる．

## 1．受動性と正実性の定義と正実補題

状態 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 入力 $u(t) \in \mathbb{R}^m$, 出力 $y(t) \in \mathbb{R}^m$ をもつ次のようなシステムを考える．

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{16}$$

ただし，$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ と $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は共に連続関数とし，$f(0,0) = 0$, $h(0,0) = 0$ とする．さらに，初期条件 $x(0) = x^0$, 入力 $u \in \mathcal{U}$ に関するシステム $\Sigma$ の解を $x(t, x^0, u)$ とかく．

**定義** 5. [**38, 4**] （16）式 のシステム $\Sigma$ は供給率

$$w(u, y) := u^T y$$

に関して消散的であるとき，$\Sigma$ は**受動的**であるという．

次に（16）式 の特別な形である線形時不変システム

$$\Sigma : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad x(0) = x^0 \tag{17}$$

を考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ とし，$A$, $B$, $C$, $D$ は適切なサイズの実定数行列である．また，システム $\Sigma$ の伝達関数を

$$G(s) := D + C(sI - A)^{-1}B$$

と記す.（17）式 のようなシステム $\Sigma$ の受動性は，その伝達関数 $G$ の正実性と等価であることが知られている．しかしながら，伝達関数 $G$ の強正実性にはいくつかの異なる定義があり，文献によってまちまちである．そこで本研究で用いる強正実性を定義しておく．

**定義** 6. [**1**] 伝達関数 $G$ に関して

(a) $G$ の極はすべて $\Re(s) \leq 0$ にあり，

(b) $G$ の虚軸上の極はすべて単極であり，その留数行列は準正定対称であり，さらに

(c) $G$ の虚軸上の極以外で

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

が成り立つ

ときに，$G$ は **positive real (PR)** であるという．

**定義** 7. [**10**] $G$ の極はすべて $\Re(s) < 0$ にあり，

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

が成り立つとき，$G$ は **weakly strictly positive real (WSPR)** であるという．

**定義** 8. [**17**] 実定数 $\epsilon > 0$ が存在して，$G(s-\epsilon)$ が PR となるとき，$G$ は **strictly positive real (SPR)** であるという．

**定義** 9. [**10**] $G$ が WSPR であり，さらに

$$G(\infty) + G^T(\infty) > 0$$

が成り立つとき，$G$ は **strongly positive real (strongly PR)** であるという．

これらの定義のうち混同されることがあるのが，SPR 性 と WSPR 性 である．しかし，WSPR であるが SPR でないものは

$$\frac{s+1}{s^2+s+1}, \quad \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

など，いくらでも作ることができる．

正実性や強正実性は，周波数領域で定義されるが，これらの条件はその状態実現を用いて表現することができることが知られており，このことは正実補題とよばれている．以下の補題では，$(A, B)$ は可制御，$(C, A)$ は可観測であるとする．

**補題** 2. [**1**] $G$ が PR であるための必要十分条件は，正定対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と行列 $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} ZA + A^TZ & ZB - C^T \\ B^TZ - C & -D - D^T \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L^TL & L^TW \\ W^TL & W^TW \end{bmatrix} =: -\begin{bmatrix} * & * \\ * & R \end{bmatrix} \tag{18}$$

が成り立つことである．ただし，'$*$' は任意の行列である．

**補題** 3. [**22**, **19**] $G$ が WSPR であるための必要十分条件は，正定対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と行列 $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ が存在して（18）式 が成り立ち，さらに $(L, A)$ が可観測であり，

$$\det H(j\omega) \neq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

が成り立つことである．ただし

$$H(s) := W + L(sI - A)^{-1}B$$

である．

**補題** 4. [**22**, **33**] $G$ が strongly PR であるための必要十分条件は，正定対称行列 $Z, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と行列 $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} ZA + A^T Z & ZB - C^T \\ B^T Z - C & -D - D^T \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L^T L + Q & L^T W \\ W^T L & W^T W \end{bmatrix} =: -\begin{bmatrix} * & * \\ * & R \end{bmatrix}, \quad R > 0 \tag{19}$$

が成り立つことである．

なお，SPR 性 に関する正実補題は，定義より直ちに**補題 4** の条件のうち $R > 0$ をのぞいたものとなる．

## 2．従来の受動定理

ここでは従来知られていた受動定理を述べる．受動定理とは，受動システムと強受動システムからなるフィードバックシステムが安定であることをいったものであるが，この安定性には，入力が有界ならば出力も有界となるという入出力安定性 [**7**] と，Lyapunov の意味での内部状態の安定性 [**17**] がある．ここでは後者の Lyapunov 安定の意味での受動定理を採りあげる．

いま，非線形時不変システム

$$\Xi : \begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi, e) \\ z = h(\xi, e) \end{cases}, \quad \xi(0) = \xi^0 \tag{20}$$

を考えよう．ただし，$f : \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\nu$ と $h : \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は共に連続関数とし，$f(0, 0) = 0$, $h(0, 0) = 0$ とする．システム $\Xi$ と（17）式 のシステム $\Sigma$ を考え，負フィードバック結合：

$$e = -y, \quad u = z \tag{21}$$

による図のようなフィードバックシステムを考える．

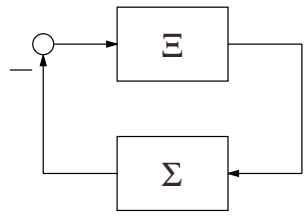


FIGURE 1. Feedback system of $\Xi$ and $\Sigma$

ただしこのフィードバックシステムは

$$\Lambda : \dot{\zeta} = \lambda(\zeta), \quad \zeta := \begin{bmatrix} \xi \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho}, \quad \zeta^0 := \begin{bmatrix} \xi^0 \\ x^0 \end{bmatrix}, \quad \rho := \nu + n \tag{22}$$

の形に一意にかけるものとし，$\lambda(0) = 0$, すなわち原点は平衡点であるとする．

いま，システム $\Xi$ は $C^1$ 級蓄積関数 $V_{\Xi}$ に関して受動的であるとしよう．このとき定義より，$V_{\Xi}$ は正定関数であり，システム $\Xi$ に沿った導関数は

$$\dot{V}_{\Xi} \leq e^T(t)z(t), \quad \forall e \in \mathcal{U}, \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^{\nu}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

を満たす．一方，システム $\Sigma$ の伝達関数 $G$ は正実であるとする．**補題 2** より, (18) 式 が成り立つ．そこで $V_{\Sigma} := x^T Z x$ とおくと，これは正定関数であり，システム $\Sigma$ に沿った導関数は

$$\dot{V}_{\Sigma} = 2u(t)^T y(t) - \eta(t)^T \eta(t), \quad \eta := Lx + Wu, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

となることが容易に確かめられる．したがって，システム $\Lambda$ に対する Lyapunov 関数の候補として

$$V(\zeta) := 2V_{\Xi}(\xi) + V_{\Sigma}(x)$$

を考えると，

$$\dot{V} \leq -\eta^T(t)\eta(t) \leq 0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^{\rho}$$

となる．したがって，Lyapunov の定理からシステム $\Lambda$ は安定である．

漸近安定性をいうには，$\Sigma$ に対する正実性の条件を強めなければならない．いま $\Sigma$ は strongly PR であるとしよう．このとき，**補題 4** を用いることで，正定行列 $Q$ が存在して

$$\dot{V} \leq -\eta^T(t)\eta(t) - x(t)^T Q x(t) \leq 0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^{\rho}$$

となることがわかる．したがって，$\dot{V} \equiv 0$ とすると $\eta \equiv 0$, $x \equiv 0$ となる．さらに $R = W^T W > 0$ であるから，結局 $u \equiv 0$, $y \equiv 0$ となることがわかる．このことと フィードバック結合則を併せると $e \equiv 0$, $z \equiv 0$ となる．もし，システム $\Xi$ が内部

状態をもたないならば，これでフィードバックシステム $\Lambda$ の漸近安定性がいえたことになるが，$\Xi$ は内部状態 $\xi$ をもつので $\xi \equiv 0$ がいえるような条件を課さなければならない．そこでシステム $\Xi$ に可観測性を仮定しよう．

**定義** 10. [**4**] システム $\Xi$ の解に関して，

$$h(\xi(t, \xi^0, 0), 0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_+$$

ならば，$\xi^0 = 0$ となるとき，$\Xi$ は**可観測**であるという．

これは，システム $\Xi$ の入力と出力が共に恒等的に 0 であるならば，初期値は 0 であることをいったものである．いま，原点は平衡点であるから，$e \equiv 0$ と $z \equiv 0$ から，$\xi \equiv 0$ が導かれる．したがって LaSalle の定理より，フィードバックシステム $\Lambda$ は漸近安定となる．

これが従来知られていた受動定理であり，下のようにまとめられる．

**定理** 4. [**17**] （20）式 のシステム $\Xi$ と（7）式 のシステム $\Sigma$ を考え，

(a) $\Xi$ は $C^1$ 級蓄積関数に関して受動的であり，可観測である．

(b) $\Sigma$ は strongly PR であり，$(A, B)$ は可制御， $(C, A)$ は可観測である．

を仮定する．また $\Xi$ と $\Sigma$ の（21）式 による負フィードバック結合は,（22）式 のシステム $\Lambda$ の形に一意にかけるものとする．このとき，システム $\Lambda$ は漸近安定である．

次に strongly PR 性 を弱めて，$\Sigma$ は SPR であるとした場合を考えよう．この場合も全く同様にして，実定数 $\epsilon > 0$ が存在して

$$\dot{V} \leq -\eta^T(t)\eta(t) - \epsilon x(t)^T x(t) \leq 0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^\rho$$

がいえ，$\dot{V} \equiv 0$ ならば $x \equiv 0$ がいえるが，strongly PR 性のときに成り立っていた $R = W^T W > 0$ が SPR 性 に対しては一般に成り立たない．したがって，$\Xi$ に可観測性を仮定したとしても，上の議論からは $\xi \equiv 0$ を示すことができない．そこで $\Xi$ の代わりに内部状態を考えない場合の受動性を考えよう．

**定義** 11. [**17**] 連続関数 $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ が,

$$\psi(t, 0) = 0, \quad e^T \psi(t, e) \geq 0, \quad \forall e \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

を満たすとき，$\psi$ は**セクタ** $[0, \infty)$ に属するという．

これにより入力 $e$, 出力 $z$ をもつ静的なシステム

$$z = \psi(t, e) \tag{23}$$

を考える．これが内部状態をもたない静的な受動性であり，絶対安定論 [**7**, **17**] で用いられているものである．このとき次のことが成り立つ．

**定理** 5. [**17**] （23）式 と（17）式 のシステム $\Sigma$ を考え，

(a) $\psi$ はセクタ $[0,\infty)$ に属する．

(b) $\Sigma$ は SPR であり，$(A,B)$ は可制御， $(C,A)$ は可観測である．

を仮定する．また （23）式 と $\Sigma$ の（21）式 による負フィードバック結合は,（22）式 のシステム $\Lambda$ の形に一意にかけるものとする．このとき，システム $\Lambda$ は大域的漸近安定である．

最後に，強正実性の内，もっとも弱い条件である WSPR 性を $\Sigma$ が満たす場合を考えよう．**補題 3** より

$$\dot{V} \leq -\eta^T(t)\eta(t) \leq 0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^\rho$$

となる．したがって，システム $\Lambda$ は安定となるが，漸近安定性をいうために，これまでの議論と同様に $\dot{V} \equiv 0$ としてみる．しかしながら，$\eta \equiv 0$ がいえるだけである．すなわち，単に Lyapunov の定理や LaSalle の定理を適用するだけでは，漸近安定性がいえるかどうかは不明であることがわかる．これは，WSPR 性 の必要十分条件である**補題 3** の $(L,A)$ の可観測性と $\det H(j\omega) \neq 0$ の条件が，strongly PR 性 や SPR 性 のときのように単に代数的な操作では生かされないことに原因があると考えられる．次節以降ではこの問題を解決する．

## 3. 新しい受動定理 – Silverman のアルゴリズムを用いた証明

本節では，従来知られていたよりも弱い条件で受動定理が成り立つことを示す．すわわち，WSPR なシステムと非線形時不変受動システムからなるフィードバックシステムが，漸近安定であることを示す．その際，線形時不変システムの逆システムに関連する結果である Silverman のアルゴリズム [**31**] が重要な役割を果たす．

まずこのアルゴリズムを簡単に説明する．次の $m$ 入力 $m$ 出力の線形時不変システム

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \eta &= Lx + Wu \end{aligned} \tag{24}$$

を考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^m$ $n \geq m$ とし，その伝達関数を $H(s)$ とする．$x(t)$ を任意の解とし，ここでは特に $\eta \equiv 0$ を満たすものに限定する．

まず，$r_0 := \mathrm{rank}\ W$ とおいて，$r_0 = m$ ならば直ちに

$$u = -W^{-1}Lx$$

となる．もしそうでなく，$r_0 < m$ の場合，適当な正則行列 $U_0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ を（24）式の左からかけて

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{L}_0 x + \bar{W}_0 u \\
0 &= \tilde{L}_0 x
\end{aligned}
\tag{25}
$$

とできる．ただし，$\bar{W}_0 \in \mathbb{R}^{q_0\times m}$, rank $\bar{W}_0 = q_0$ である．そこで（25）式 を微分すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{L}_0 x + \bar{W}_0 u \\
0 &= \tilde{L}_0 A x + \tilde{L}_0 B u
\end{aligned}
$$

を得る．これは

$$
L_1 := \begin{bmatrix} \bar{L}_0 \\ \tilde{L}_0 A \end{bmatrix}, \quad W_1 := \begin{bmatrix} \bar{W}_0 \\ \tilde{L}_0 B \end{bmatrix}
$$

とおくと，

$$
0 = L_1 x + W_1 u
$$

と書き直すことができ，$q_1 :=$ rank $W_1$ とおいて，$q_1 = m$ ならば

$$
u = -W_1^{-1} L x
$$

となり，アルゴリズムを終了する．$q_1 < m$ ならば，再び適当な行列 $U_1$ を左からかけて，以下同様な操作を繰り返す．Silverman はこのアルゴリズムが

$$
\text{rank } H(\cdot) = m
$$

ならば，適当な整数 $\alpha \le n$ が存在してちょうど $\alpha$ 回で終了することを示した．したがってこのとき，正則な行列 $W_\alpha \in \mathbb{R}^{m\times m}$ と行列 $L_\alpha$ が存在して

$$
u = -W_\alpha^{-1} L_\alpha x
$$

となる．

以上が Silverman のアルゴリズムの概要である．この結果を利用して，次の従来知られていたよりも弱い条件で成り立つ新しい受動定理を与えることができる．

**定理** 6. （20）式 のシステム $\Xi$ と（7）式 のシステム $\Sigma$ を考え，

(a) $\Xi$ は $C^1$ 級蓄積関数に関して受動的であり，可観測である．
(b) $\Sigma$ は WSPR であり，$(A, B)$ は可制御， $(C, A)$ は可観測である．

を仮定する．また $\Xi$ と $\Sigma$ の（21）式 による負フィードバック結合は,（22）式 のシステム $\Lambda$ の形に一意にかけるものとする．このとき，システム $\Lambda$ は漸近安定である．さらに上の条件に加えて，$\Xi$ が radially unbounded な蓄積関数に関して受動的であるとき，システム $\Lambda$ は大域的漸近安定である．

Proof. 仮定 (a) より，正定関数 $V_\Xi(\xi)$ が存在して，システム $\Xi$ に沿った導関数は

$$\dot{V}_\Xi \leq e^T(t)z(t), \quad \forall e \in \mathcal{U}, \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^\nu, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

を満たす．一方仮定 (b) と**補題 3** より $V_\Sigma(x) := x^T Z x$ とおくと，これは正定関数であり，システム $\Sigma$ に沿った導関数は

$$\dot{V}_\Sigma = 2u(t)^T y(t) - \eta(t)^T \eta(t), \quad \eta := Lx + Wu, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

となることが容易に確かめられる．したがって，システム $\Lambda$ に対して

$$V(\zeta) := 2V_\Xi(\xi) + V_\Sigma(x)$$

を用いると，

$$\dot{V} \leq -\eta^T(t)\eta(t) \leq 0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^\rho$$

となる．したがって，Lyapunov の定理からシステム $\Lambda$ は安定である．このとき $\delta > 0$ が存在して，$\|\zeta^0\| < \delta$ ならば $\zeta(t, \zeta^0)$ は有界となり，あるいは $V_\Xi$ が radially unbounded ならば，任意の $\zeta^0$ に対して $\zeta(t, \zeta^0)$ は有界である．以下ではこのような有界な解を考える．

ステップ１：$\eta \equiv 0$ を満たす任意の解 $\zeta(t, \zeta^0)$ は原点に漸近することを示す．rank $L = m = n$ のときは直ちに $x(t, \zeta^0) \equiv 0$ となるので，

$$\dot{\xi} = f(\xi, 0), \quad 0 = h(\xi, 0)$$

であるが，可観測性より $\xi(t, \zeta^0) \equiv 0$ である．したがって，$\zeta(t, \zeta^0) \equiv 0$ である．rank $L = m < n$ のときを考えよう．$\eta \equiv 0$ で，$G$ のスペクトル因子 $H$ は rank $H(\cdot) = m$ であるから，Silverman のアルゴリズムより，適当な行列 $K$ が存在して

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = -Kx$$

となる．したがって，$\eta \equiv 0$ を満たす任意の解は

$$\dot{x} = \bar{A}x, \quad \bar{A} := A - BK$$

を満たす．ここで，$(L, \bar{A})$ が可検出であることを示すために，

$$\bar{A}v = \mu v, \quad Lv = 0, \quad \Re(\mu) \geq 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad v \in \mathbb{C}^n$$

と仮定すると，

$$(\mu I - A)v = -BKv$$

が成り立つ．$A$ は安定行列であるから

$$v = -(\mu I - A)^{-1}BKv$$

とできる．これを $\eta \equiv 0$ に代入すると $H(\mu)Kv = 0$ を得るが，$\det H(\mu) \neq 0$ であるから，$Kv = 0$ となり，結局 $v = 0$ となる．したがって，$(L, \bar{A})$ は可検出である．すなわち，$\dot{x} = \bar{A}x$, $\eta \equiv 0$ ならば

$$x(t, \zeta^0) \to 0 \text{ as } t \to \infty \tag{26}$$

が成り立つ．またここまでの議論より，システム $\Lambda$ の任意の解 $\zeta(t, \zeta^0)$ は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{A}x \\ \dot{\xi} &= f(\xi, -(C + DK)x) \\ Kx &= h(\xi, -(C + DK)x) \end{aligned} \tag{27}$$

を満たすことがわかる．ここで，$\zeta(t, \zeta^0)$ のうち（26）式 を満たすものの $\omega$ 極限集合を $\Omega(\zeta^0)$ と記す．ただし，前に述べたようにここで考えている解は有界なものであることに注意する．すると**補題 1** よりこの $\Omega(\zeta^0)$ が $\{0\}$ であることを次のように示すことができる．まず,（26）式 より

$$\theta \in \Omega(\zeta^0), \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \theta_1 \in \mathbb{R}^n, \quad \theta_2 \in \mathbb{R}^\nu$$

ならば，$\theta_1 = 0$ となる．$\Omega(\zeta^0)$ は（27）式 の不変集合だから，

$$\zeta(t, \theta) \in \Omega(\zeta^0), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

である．いま，$\theta_1 = 0$ であるから，$x(t, \theta) \equiv 0$. したがって，これを（26）式 に代入すると

$$\dot{\xi} = f(\xi, 0), \quad 0 = h(\xi, 0)$$

が得られ, 再び可観測性から $\xi = 0$ となり, 結局 $\theta = 0$ となる．すなわち $\Omega(\zeta^0) = \{0\}$ である．ここで考えている解は有界だから，$\forall \zeta^0$ に対して

$$\zeta(t, \zeta^0) \to 0 \text{ as } t \to \infty \tag{28}$$

となる．

ステップ２：$\dot{V} \equiv 0$ を満たす $\Lambda$ の任意の解を考える．このとき $\eta \equiv 0$ であるから，ステップ１より（28）式 が成り立つ．一方，

$$V(\zeta(t, \zeta^0)) \equiv V(\zeta^0)$$

であるから，$V(\zeta^0)=0$ となり，$V$ は正定値関数だから $\zeta^0=0$ となる．すなわち，$\zeta(t,\zeta^0)\equiv 0$. 以上で，LaSalle の定理から証明が完了する． □

## 4. 正実補題と Riccati 方程式

本節では，正実補題における LMI の解 $Z$ を求める解析的なアルゴリズムを提案する．正実補題における LMI は等号付きの不等式であるので，通常これを厳しい意味での不等式とし解を求める．しかしここでは，等号付きの不等式が成り立つことが本質的であるような場合，すなわち WSPR なシステムに対する正実補題を扱い，その解を数値的ではなく，解析的な意味で吟味することを目的とする．

具体的には，$D+D^T\geq 0$ であるが， $D+D^T>0$ でない場合の正実補題の解を考え，ここで提案するアルゴリズムによりその解が，ある低次元の Riccati 方程式の解を用いて表されることがわかる．

一般的な方法を述べる前に，簡単な例でこのアルゴリズムの本質的なところを説明しておく．$\alpha$ をパラメータとしてもつ一入力一出力の伝達関数：

$$G_0(s):=\frac{s+\alpha}{(s+1)(s+2)},\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

を考える．この伝達関数は安定であり，$\alpha$ の値により次の各々の正実性を満たす．

$$G\text{ は}\begin{cases}\text{PR} & (0\leq\alpha\leq 3)\\ \text{WSPR} & (0<\alpha\leq 3)\\ \text{SPR} & (0<\alpha<3)\end{cases}$$

ここで $G$ は厳密にプロパーであるので，strongly PR とはなりえない．$0\leq\alpha\leq 3$ のとき，$G$ は PR であるから，スペクトル分解が可能である．

$$\Phi_0(s):=G_0(s)+G_0(-s)=H_0(-s)H_0(s),\quad H_0(s):=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3-\alpha}s+\sqrt{2\alpha})}{(s+1)(s+2)}$$

$G_0$ が PR であれば，$1/G_0$ もまた PR であることはよく知られているが，$G_0$ は厳密にプロパーであるので，$1/G_0$ はプロパーでなくなる．そこでここではとくに $1/G_0$ のプロパーな部分：

$$G_1(s):=\frac{(3-\alpha)s+2}{s+\alpha}$$

もまた，PR になっていることに注意する．より正確には，

$$G_1\text{は}\begin{cases}\text{PR} & (0\leq\alpha\leq 3)\\ \text{SPR} & (0<\alpha\leq 3)\\ \text{strongly PR} & (0<\alpha<3)\end{cases}$$

である．したがって，$G_1$ もまたスペクトル分解可能で

$$\Phi_1(s) := G_1(s) + G_1(-s) = H_1(-s)H_1(s), \quad H_1(s) := \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3-\alpha}s + \sqrt{2\alpha})}{s+\alpha}$$

となる．ここで注目すべき点は，スペクトル因子 $H_0$ の相対次数を $k$ とすると，すべての $\alpha \in [0,3]$ に対して，$H_1$ の相対次数は $k-1$ となっていることである．この結果，$0 < \alpha \leq 3$ のとき，$G_0$ が WSPR であるのに対して $G_1$ は SPR となり，$0 < \alpha < 3$ のときは，$G_0$ が SPR であるのに対して $G_1$ は strongly PR となっている．

以下で述べるアルゴリズムは，このような $G_0$ から $G_1$ を求める手順を繰り返すものであり，$H_i$ の相対次数が 0 になるまでこれを続ける．したがって，$H_0$ の相対次数の回数だけこの手順を繰り返せばよい．多入出力の伝達関数に関しては，一入出力における相対次数に対応する inherent integration[**28**] を用いる．また，このアルゴリズムは伝達関数の状態実現を用いて行われるので，正実補題における LMI の解を $D + D^T \not> 0$ の場合でも，ある低次元 Riccati 方程式の解で表すことが可能になる．

アルゴリズムの説明にはいる前に，一入出力における相対次数に対応する inherent integration を定義しておく．これは，上の一入出力の例で相対次数がアルゴリズムの終了条件を与えるものであったように，多入出力の場合のアルゴリズムの終了条件を与えるものである．

$m \times m$ の伝達関数 $H$ を考え，$H$ は

$$H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$$

で与えられるものとする．ただし，$(A, B)$ は可制御，$(C, A)$ は可観測であるとする．

**定義** 12. [**28**] $H$ に対して $m \times m$ の伝達関数 $\hat{H}$ と 0 以上の整数 $l$ が存在して

$$\hat{H}(s)H(s) = \frac{1}{s^l}I$$

となるとき，$H$ は**可逆**であるという．また，可逆な $H$ に関して上式を満たす最小の整数 $l$ を $H$ の **inherent integration** という．

スカラー伝達関数 $H$ に関しては，可逆性は $H = 0$ でないことを意味し，inherent integration は相対次数に対応することは明らかであろう．また $m \times m$ の伝達関数 $H$ が可逆であることと，rank $H(\cdot) = m$ となることは等価である [**28**]．$H$ が可逆かどうかを判定したり，その inherent integration の計算は，次のように状態実現を用いて行うことができる．

**補題** 5. [**28**] $H$ の inherent integration が $k$ であるための必要十分条件は,

(29) $\quad \text{rank } J_i(A,B,C,D) - \text{rank } J_{i-1}(A,B,C,D) < m \text{ for } i = 0,1,\ldots,k-1$

(30) $\quad \text{rank } J_k(A,B,C,D) - \text{rank } J_{k-1}(A,B,C,D) = m$

が成り立つことである．ただし,

$$J_0(A,B,C,D) := D$$

$$J_i(A,B,C,D) := \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CD & D & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ CA^{i-1}B & CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \cdots & D \end{bmatrix} \text{ for } i = 1,2,\ldots$$

とし，さらに rank $J_{-1}(A,B,C,D) := 0$ とする．

一般の場合のアルゴリズムに議論を進める．$m \times m$ のプロパーな伝達関数 $G(s)$ を考え，$G$ は PR であり，rank $\Phi(\cdot) = m$ と仮定する．ただし，$\Phi(s) := G(s) + G^T(-s)$ である．

まず，アルゴリズムを初期化するために，$G_0 := G$ とし，$G_0$ の最小実現を

$$\Sigma_0 : \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

とする．ただし，$x_0(t) \in \mathbb{R}^{n_0}$, $n_0 \geq 1$, $u_0(t), y_0(t) \in \mathbb{R}^m$ とする．以下，このシステムをもとにして帰納的にシステム $\Sigma_i$ $(i = 1,2,\ldots)$ を定義していく．そこで $i$ 番目のシステムを

$$\Sigma_i : \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \end{bmatrix}$$

で表すことにする．ただし，$x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $u_i(t), y_i(t) \in \mathbb{R}^m$ であり，その伝達関数を

$$G_i(s) := D_i + C_i(sI - A_i)^{-1}B_i$$

と記す．また,

$$\Phi_i(s) := G_i(s) + G_i^T(-s)$$

とおく．

いま，$(A_i, B_i)$ は可制御，$(C_i, A_i)$ は可観測，$G_i$ は PR であり，さらに rank $\Phi_i(\cdot) = m$ であるとする．すなわち，**補題 2** より,

**条件** $\Omega_i$: (a) $(A_i, B_i)$ は可制御，$(C_i, A_i)$ は可観測

(b) 実行列 $Z_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $L_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$, $W_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ が存在して

$$Z_i = Z_i^T > 0$$

$$\begin{bmatrix} Z_i A_i + A_i^T & Z_i B_i - C_i^T \\ B_i^T Z_i - C_i & -D_i - D_i^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_i^T L_i & L_i^T W_i \\ W_i^T L_i & W_i^T W_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} * & * \\ * & R_i \end{bmatrix} \tag{31}$$

が成り立つ．

(c) $\mathrm{rank}\ \Phi_i(\cdot) = m$

を仮定する．

ここで

$$H_i(s) := W_i + L_i(sI - A_i)^{-1} B_i$$

とおくと，条件 $\Omega_i - (b)$ から $\Phi_i(s) = H_i^T(-s) H_i(s)$ となることがわかる．したがって，条件 $\Omega_i - (c)$ は

$$\mathrm{rank}\ H_i(\cdot) = m \tag{32}$$

で置き換えることができることに注意する．

いま，$r_i := \mathrm{rank}\ R_i$ とおく．$r_i = m$ ならば，アルゴリズムを終了する．もし，$r_i < m$ ならば，次のステップへ進む．

$R_i$ は準正定対称行列であるから，直交行列 $U_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ が存在して

$$U_i^T R_i U_i = \begin{bmatrix} \bar{R}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

となる．ただし，$\bar{R}_i \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}$ は正定行列である．また，(33) 式 の右辺にあわせて $U_i$ を

$$U_i = \begin{bmatrix} U_{i1} & U_{i2} \end{bmatrix}, \quad U_{i1} \in \mathbb{R}^{m \times r_i}, \quad U_{i2} \in \mathbb{R}^{m \times (m - r_i)}$$

と分割しておく．この正則な行列 $U_i$ を用いて次の行列を導入する．

$$\begin{bmatrix} B_{i1} & B_{i2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} B_i U_{i1} & B_i U_{i2} \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\begin{bmatrix} W_{i1} & W_{i2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} W_i U_{i1} & W_i U_{i2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} U_{i1}^T C_i \\ U_{i2}^T C_i \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix} D_{i1} & D_{i2} \\ D_{i3} & D_{i4} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} U_{i1}^T D_i U_{i1} & U_{i1}^T D_i U_{i2} \\ U_{i2}^T D_i U_{i1} & U_{i2}^T D_i U_{i2} \end{bmatrix} \tag{36}$$

このとき次のことが成り立つ．

**補題** 6. 条件 $\Omega_i$ が成り立つとき，

(a) $W_{i2} = 0$, $Z_i B_{i2} = C_{i2}$ が成り立ち，

(b) $B_{i2}$ は列フルランク，$C_{i2}$ は行フルランクであり，$n_i \geq m - r_i$ である．

Proof. (a) （31）式 に左右からそれぞれ

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U_i^T \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U^T \end{bmatrix}$$

をかけると，

$$\begin{bmatrix} Z_iA_i + A_i^TZ_i & Z_iB_{i1} - C_{i1}^T & Z_iB_{i2} - C_{i2}^T \\ B_{i1}^TZ_i - C_{i1} & -D_{i1} - D_{i1}^T & -D_{i2} - D_{i3}^T \\ B_{i2}^TZ_i - C_{i2} & -D_{i3} - D_{i2}^T & -D_{i4} - D_{i4}^T \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L_i^TL_i & L_i^TW_{i1} & L_i^TW_{i2} \\ W_{i1}^TL_i & W_{i1}^TW_{i1} & W_{i1}^TW_{i2} \\ W_{i2}^TL_i & W_{i2}^TW_{i1} & W_{i2}^TW_{i2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & \bar{R}_i & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

を得る．上式の $(3,3)$ ブロックより $W_{i2} = 0$ となり，したがって $(1,3)$ ブロックから $Z_iB_{i2} = C_{i2}$ が成り立つ．

(b) $H_i$ に右から $U_i$ をかけた

$$H_i(s)U_i = \begin{bmatrix} W_{i1} + L_i(sI - A_i)^{-1}B_{i1} & W_{i2} + L_i(sI - A_i)^{-1}B_{i2} \end{bmatrix}$$

において，(a) より $W_{i2} = 0$ であるから，(32）式 が成り立つには，$B_{i2}$ が列フルランクである必要がある．$B_{i2}$ のサイズは $n_i \times (m - r_i)$ であるから，$n_i \geq m - r_i$ である．また，(a) の $Z_iB_{i2} = C_{i2}$ において，$Z_i$ は正則だから，$C_{i2}$ は行フルランクである． □

ここで，$E_i := C_{i2}B_{i2}$ とおくと，**補題 6** より $E_i = B_{i2}^TZ_iB_{i2}$ であり，$Z_i > 0$ と $B_{i2}$ が列フルランクであることに注意すると，$E_i = E_i^T > 0$ である．したがって，$\Delta_i := E_i^{1/2}$ が定義できて $\Delta_i = \Delta_i^T > 0$ である．

また，$B_{i2}, C_{i2}$ はフルランクであることから，$N_i \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i}$, $M_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_{i+1}}$ が存在して

$$\text{rank } N_i = \text{rank } M_i = n_{i+1} \tag{38}$$

$$N_iB_{i2} = 0, \quad C_{i2}M_i = 0, \quad N_iM_i = I \tag{39}$$

となる．ただし，$n_{i+1} := n_i - m + r_i$ である．これは，次のように示すことができる．

**補題** 7. $F_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ $(r < m)$ が与えられていて，$F_2F_1$ は正則であるとする．このとき $K_1F_1 = 0$, $F_2K_2 = 0$, $K_1K_2 = I$ を満たす $K_1 \in \mathbb{R}^{(m-r) \times m}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$ が存在する．

Proof. まず，$F_1, F_2$ の特異値分解から $K_3F_1 = 0, F_2K_4 = 0$ および $\mathrm{rank}\ K_3 = \mathrm{rank}\ K_4 = m - r$ を満たす $K_3 \in \mathbb{R}^{(m-r)\times m}, K_4 \in \mathbb{R}^{m\times(m-r)}$ が存在することを示すのは容易である．つぎに $K_3K_4v = 0, v \in \mathbb{R}^{m-r}$ としたとき，$v = 0$ となることを示そう．いま，

$$\begin{bmatrix} F_1^T \\ K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & K_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^TF_1 & 0 \\ 0 & K_3K_3^T \end{bmatrix} > 0$$

であるから，行列 $\begin{bmatrix} F_1 & K_3^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ は正則である．したがって，$K_4v \in \mathbb{R}^m$ について，$w_1 \in \mathbb{R}^r, w_2 \in \mathbb{R}^{m-r}$ が存在して

$$K_4v = \begin{bmatrix} F_1 & K_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = F_1w_1 + K_3^Tw_2$$

となる．ここで

$$0 = K_3K_4v = K_3(F_1w_1 + K_3^Tw_2) = K_3K_3^Tw_2$$

であるから，$w_2 = 0$ となる．したがって，$K_4v = F_1w_1$ となるが，左から $F_2$ をかけると $F_2F_1w_1 = 0$ となることがわかる．仮定より，$F_2F_1$ は正則であるから，$w_1 = 0$ となり，$K_4v = 0$ を得る．$K_4$ は列フルランクであるから，結局 $v = 0$ となる．したがって，$K_3K_4$ は正則である．最後に $K_1 := (K_3K_4)^{-1}K_3, K_2 := K_4$ とおけば，$K_1K_2 = I$ となることがわかる． □

この補題を用いれば直ちに，$E_i$ が正則であることから，前述の条件を満たす $N_i$, $M_i$ を作ることができる．これらを用いて正則な行列

$$T_i := \begin{bmatrix} N_i \\ \Delta_i^{-1}C_{i2} \end{bmatrix}, \quad T_i^{-1} := \begin{bmatrix} M_i & B_{i2}\Delta_i^{-1} \end{bmatrix}$$

を作っておく．

そこで正則な行列 $U_i, T_i$ を用いて，入力，出力，状態変数の変換を考える：

$$u_i = U_i\tilde{u}_i, \quad y_i = U_i\tilde{y}_i, \quad \tilde{x}_i = T_ix_i$$

ここで，$\tilde{u}_i, \tilde{y}_i, \tilde{x}_i$ はそれぞれ新しい入力，出力，状態の変数である．これらの変数を $U_i, T_i$ にあわせて分割しておく．

$$\tilde{u}_i = \begin{bmatrix} S_{i1}^Tu_i \\ S_{i2}^Tu_i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{y}_i = \begin{bmatrix} S_{i1}^Ty_i \\ S_{i2}^Ty_i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_i = \begin{bmatrix} N_ix_i \\ \Delta_i^{-1}C_{i2}x_i \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \tilde{x}_i \end{bmatrix}$$

さらに次の行列を定義する．

$$A_{i+1} := N_i A_i M_i, \quad B_{i+1} := \begin{bmatrix} N_i A_i B_{i2} \Delta_i^{-1} & N_i B_{i1} \end{bmatrix}, \quad C_{i+1} := \begin{bmatrix} -\Delta_i^{-1} C_{i2} A_i M_i \end{bmatrix}$$

(40)

$$D_{i+1} := \begin{bmatrix} -\Delta_i^{-1} C_{i2} A_i B_{i2} \Delta_i^{-1} & -\Delta_i^{-1} C_{i2} B_{i1} \\ C_{i1} B_{i2} \Delta_i^{-1} & D_{i1} \end{bmatrix}, \quad Z_{i+1} := M_i^T Z_i M_i, \quad L_{i+1} := L_i M_i$$

$$W_{i+1} := \begin{bmatrix} L_i B_{i2} \Delta_i^{-1} & W_{i1} \end{bmatrix}, \quad R_{i+1} := D_{i+1} + D_{i+1}^T$$

以上を用いて $\Sigma_i$ の次のシステム $\Sigma_{i+1}$ を次のように定義する．

$$\Sigma_{i+1} : \begin{bmatrix} \dot{x}_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{i+1} & B_{i+1} \\ C_{i+1} & D_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

ただし

$$u_{i+1} := \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ u_{i1} \end{bmatrix}$$

である．このとき次のことが成り立つ．

**補題** 8. システム $\Sigma_i$ に対して条件 $\Omega_i$ が成り立つならば，システム $\Sigma_{i+1}$ に対して条件 $\Omega_{i+1}$ が成り立つ．ここで条件 $\Omega_{i+1}$ とは，$\Omega_i$ の定義で用いられている添え字 $i$ をもつすべての記号を $i+1$ に置き換えたときの条件である．さらに，システム $\Sigma_i$ は，連立微分方程式

$$\begin{cases} \Sigma_i \\ \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ -y_{i1} \end{bmatrix} = -y_{i+1} + \begin{bmatrix} \Delta_i \\ -D_{i2} \end{bmatrix} u_{i2} \\ -y_{i2} = \begin{bmatrix} -\Delta_i & -D_{i2} \end{bmatrix} u_{i+1} - D_{i4} u_{i2} \end{cases} \tag{41}$$

における，入力を $u_i$, 出力を $y_i$ としたシステムである．

Proof. $(A_i, B_i)$ の可制御性は，$\begin{bmatrix} A_i - sI & B_i \end{bmatrix}$ が $\forall s \in \mathbb{C}$ で行フルランクであることを意味する．そこで

$$\begin{aligned} T_i \begin{bmatrix} A_i - sI & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{-1} & 0 \\ 0 & U_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_i A_i T_i^{-1} - sI & T_i B_i U_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{i+1} - sI & N_i A_i B_{i2} \Delta_i^{-1} & N_i B_{i1} & 0 \\ \Delta_i^{-1} C_{i2} A_i M_i & \Delta_i^{-1} C_{i2} A_i B_{i2} \Delta_i^{-1} - sI & \Delta_i^{-1} C_{i2} B_{i1} & \Delta_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

において，$\Delta_i$ が正則であることから，

$$\begin{bmatrix} A_{i+1} - sI & N_i A_i B_{i2} \Delta_i^{-1} & N_i B_{i1} \end{bmatrix}$$

は行フルランクとなるが，これは $(A_{i+1}, B_{i+1})$ が可制御であることを意味する．全く同様にして $(C_i, A_i)$ の可観測性から $(C_{i+1}, A_{i+1})$ が可観測であることがいえる．したがって，$\Omega_{i+1} - (a)$ が成り立つ．$M_i$ は列フルランクであるから，$Z_i > 0$ ならば，$Z_{i+1} > 0$ である．また，(37) 式 に左右からそれぞれ

$$\begin{bmatrix} T_i^{-T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

をかけて整理すると，(31) 式 の添え字 $i$ をすべて $i+1$ に置き換えたものが成り立つことが単純な計算によって確かめられる．したがって，$\Omega_{i+1} - (b)$ が成り立つ．また，$\Omega_{i+1} - (c)$ についても $\Delta_i$ の正則性に注意すれば容易に示すことができる． □

この補題は，いま考えているアルゴリズムが正実性を保存することを意味している．すなわち，$\Sigma_i$ が PR ならば，$\Sigma_{i+1}$ もまた PR である．しかしながら，これだけではアルゴリズムが終了するための条件：$r_i = m$ に関する情報が一切得られない．そこで $\Sigma_i$ の伝達関数 $G_i$ のスペクトル因子 $H_i$ の inherent integration を調べる．

**補題** 9. システム $\Sigma_i$ に対して条件 $\Omega_i$ が成り立つとし，アルゴリズム中で定義される伝達関数 $H_i, H_{i+1}$ を考え，$k_i, k_{i+1}$ をそれぞれ $H_i, H_{i+1}$ の inherent integration とする．このとき

$$k_{i+1} = k_i - 1$$

が成り立つ．

Proof. ここでは，**補題 5** の記法を用いるものとする．$l = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\text{rank } J_l(A_i, B_i, L_i, W_i) = r_i + \text{rank } J_{l-1}(A_{i+1}, B_{i+1}, L_{i+1}, W_{i+1}) \tag{42}$$

が成り立つならば，$l = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned} &\text{rank } J_{l-1}(A_{i+1}, B_{i+1}, L_{i+1}, W_{i+1}) - \text{rank } J_{l-2}(A_{i+1}, B_{i+1}, L_{i+1}, W_{i+1}) \\ &\qquad = \text{rank } J_l(A_i, B_i, L_i, W_i) - \text{rank } J_{l-1}(A_i, B_i, L_i, W_i) \end{aligned}$$

が成り立ち，**補題 5** より直ちに $k_{i+1} = k_i - 1$ が成り立つことがわかる．したがって，(42) 式 を示せばよい．定義より，

$$W_{i+1} = \begin{bmatrix} L_i B_{i2} \Delta_i^{-1} & W_{i1} \end{bmatrix}$$
$$L_{i+1} A_{i+1}^l B_{i+1} = L_i M_i (N_i A_i M_i)^l N_i \begin{bmatrix} A_i B_{i2} \Delta_i^{-1} & B_{i1} \end{bmatrix}$$

が $l = 0, 1, 2, \ldots$ に対して成り立つ．このことと，

$$M_i N_i = I - B_{i2} E_i^{-1} C_{i2}$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rank}\ J_{l-1}(A_{i+1}, B_{i+1}, L_{i+1}, W_{i+1}) \\
&\quad = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} L_iB_{i2} & W_{i1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_iA_iB_{i2} & L_iB_{i1} & L_iB_{i2} & W_{i1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_iA_i^{l-1}B_{i2} & L_iA^{l-2}B_{i1} & L_iA^{l-2}B_{i2} & L_iA^{l-3}B_{i2} & \cdots & L_iB_{i2} & W_{i1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが計算によってわかる．一方，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rank}\ J_{l}(A_{i}, B_{i}, L_{i}, W_{i}) \\
&\quad = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} W_{i1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_iB_{i1} & L_iB_{i2} & W_{i1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_iA_i^{l-1}B_{i1} & L_iA_i^{l-1}B_{i2} & L_iA_i^{l-2}B_{i1} & L_iA_i^{l-2}B_{i2} & \cdots & W_{i1} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

であるから，これらを比較すると

$$
\mathrm{rank}\ J_l(A_i, B_i, L_i, W_i) = r_i + \mathrm{rank}\ J_{l-1}(A_{i+1}, B_{i+1}, L_{i+1}, W_{i+1})
$$

となることがわかる．したがって，(42) 式 が成り立つ． □

**補題 8** と**補題 9** を用いて，本節の主要結果を得ることができる．

**定理** 7. $m \times m$ の伝達関数 $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ が与えられていて，$(A, B)$ は可制御，$(C, A)$ は可観測であるとする．また，$\Phi(s) := G(s) + G^T(-s)$ とし，上で示したアルゴリズムを $G$ に適用したとき，$i$ 回目で得られるものを $G_i(s) = D_i + C_i(sI - A_i)^{-1}B_i$ とする．このとき，$G$ が PR であり，$\mathrm{rank}\ \Phi(\cdot) = m$ が成り立つならば，$\Phi$ の inherent integration は $2k$ となり，さらに $R_k := D_k + D_k^T > 0$ となる．また $G$ に関する（18）式 の任意の解 $Z$ は

$$
Z = \mathcal{N}_k^T \mathcal{Z}_k \mathcal{N}_k \tag{43}
$$

で与えられる．ただし，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_k &:= \mathrm{diag}(Z_k, E_{k-1}^{-1}, \ldots, E_1^{-1}, E_0^{-1}) \\
\mathcal{N}_k &:= \begin{bmatrix} N_{k-1}N_{k-2}\ldots N_1N_0 \\ C_{k-1,2}N_{k-2}\ldots N_1N_0 \\ \cdots \\ C_{12}N_0 \\ C_{02} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

であり，$Z_k$ は Riccati 方程式：

$$Z_k A_k + A_k^T Z_k + (C_k^T - Z_k B_k) R_k^{-1} (C_k - B_k^T Z_k) = 0 \tag{44}$$

の正定対称解である．さらに，$G$ が WSPR ならば,（44）式 は，唯一の正定対称安定化解 $Z_k$ をもつ.

Proof. **補題 2** より,

$$\Phi(s) = H^T(-s)H(s), \quad H(s) := W + L(sI - A)^{-1}B$$

が成り立つ．$\Phi$ は可逆であるから，$H$ もまた可逆である．したがって，整数 $k \geq 0$ が存在して $H$ の inherent integration は $k$ となり，また $\Phi$ のそれは $2k$ となる．したがって**補題 9** より，$H_k$ の inherent integration は 0 である．これは $\det W_k \neq 0$ および $R_k := D_k + D_k^T > 0$ を意味する．よって，条件 $\Omega_k - (b)$ から

$$L_k = W_k^{-T}(C_k - B^T Z_k)$$

と（44）式 が成り立つことがわかる．一方,

$$\tilde{Z}_i := T_i^{-T} Z_i T_i^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

より,

$$Z_i = T_i^T \begin{bmatrix} Z_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T_i = \begin{bmatrix} N_i^T & C_{i2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{i+1} & 0 \\ 0 & E_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i \\ C_{i2} \end{bmatrix}$$

が成り立つ．これを繰り返し用いると,（43）式 が得られる．さらに，$G$ が WSPR である場合には，$R_k > 0$ から $G_k$ は strongly PR である．したがって,（44）式 は唯一の安定化解をもつ [**42**]. □

ここでアルゴリズムの手順を以下にまとめておく．$m \times m$ の伝達関数 $G$ が与えられていて，$G$ の最小実現 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ がわかっているとする．$G$ は PR であり，rank $\Phi(\cdot) = m$ と仮定する．ただし，$\Phi(s) = G(s) + G^T(-s)$ である.

ステップ１：アルゴリズムを初期化する：

$$i := 0, \quad G_0 := G, \quad A_0 := A, \quad B_0 := B, \quad C_0 := C, \quad D_0 := D, \quad n_0 := n$$

ここで仮定より，条件 $\Omega_0$ が成り立つ.

ステップ２：$R_i := D_i + D_i^T$, $r_i :=$ rank $R_i$ として，$r_i = m$ ならばアルゴリズムを終了する．$r_i < m$ ならば，ステップ３に進む.

ステップ３：（33）式 を満たす行列 $U_i \in \mathbb{R}^{m\times m}$ を計算し,（34）式 ,（35）式 ,（36）式 の行列を求め，$n_{i+1} := n_i - m + r_i$ とおいて $E_i$, $\Delta_i$, $N_i$, $M_i$ を（38）式 ,

(39) 式 を満たすものを求める．そして，$A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}, D_{i+1}$ を (40) 式 によって計算する．$i$ を 1 だけ大きくし，ステップ 2 に戻る．

アルゴリズムが終了したとき，$k := i$ とする．**定理 7** より，このアルゴリズムはちょうど $\Phi$ の inherent integration の半分の回数で終了することが保証される．さらに，$G$ に対する**補題 2** の解 $Z$ は (43) 式 で与えられる．すなわち，$D + D^T \not> 0$ のときであっても，$Z$ は次元の小さな Riccati 方程式の解を用いて表すことができる．

また，WSPR 性 と strongly PR 性 の違いは，$\Phi$ の inherent integration で特徴づけられる．すなわち，WSPR な $G$ に対する $\Phi$ の inherent integration は $2n$ 以下の任意の偶数であるのに対して，strongly PR な $G$ のそれは，ちょうど 0 である．一方，SPR な $G$ に関する $\Phi$ の inherent integration は，0 または 2 であることが，次のように示される．

**定理** 8. $m \times m$ の伝達関数 $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ が与えられていて，$(A, B)$ は可制御，$(C, A)$ は可観測であるとする．また，$\Phi(s) := G(s) + G^T(-s)$ とし，rank $\Phi(\cdot) = m$ とする．このとき，$G$ が SPR であるための必要十分条件は，$G$ が WSPR であり，かつ $\Phi$ の inherent integration が 0 または 2 ，すなわち

(45)
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ CB - (CB)^T & R & 0 \\ CAB + (CAB)^T & CB - (CB)^T & R \end{bmatrix} - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} R & 0 \\ CB - (CB)^T & R \end{bmatrix} = m$$

が成り立つことである．

Proof. 必要性：SPR 性 の定義により，$G$ が SPR ならば，実定数 $\epsilon > 0$ と正定対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と行列 $L \in \mathbb{R}^{m\times n}, W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} ZA_\epsilon + A_\epsilon^T Z & ZB - C^T \\ B^T Z - C & -D - D^T \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L^T L & L^T W \\ W^T L & W^T W \end{bmatrix} =: -\begin{bmatrix} * & * \\ * & R \end{bmatrix} \tag{46}$$

が成り立つ．ただし，$A_\epsilon := A + \epsilon I$ であり，$(A_\epsilon, B)$ は可制御，$(C, A_\epsilon)$ は可観測であるとする．簡単な計算により，

$$\Phi(j\omega) = H^T(-j\omega)H(j\omega) + 2\epsilon B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}Z(j\omega I - A)^{-1}B \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

が成り立つことがわかる．ここで $u^*\Phi(j\omega)u = 0$ とおくと，これは

$$(W + L(j\omega I - A)^{-1}B)u = 0, \quad Z(j\omega I - A)^{-1}Bu = 0$$

となる．$Z > 0$ と $\det(j\omega I - A) \neq 0$ に注意すると，

$$u^T \begin{bmatrix} B^T & W^T \end{bmatrix} = 0$$

を得る．ここで rank $\Phi(\cdot)=m$ から $\begin{bmatrix} B^T & W^T \end{bmatrix}$ が行フルランクであることがわかるので，$u=0$ である．したがって，$\Phi(j\omega)>0, \forall\omega\in\mathbb{R}$ である．すなわち，$G$ は WSPR である．$G_\epsilon(s):=D+C(sI-A_\epsilon)^{-1}B$ は正実であり，$\Phi_\epsilon(s):=G_\epsilon(s)+G_\epsilon^T(-s)$ とおくと rank $\Phi_\epsilon(\cdot)=m$ であるから，$G_\epsilon$ に対してアルゴリズムを適用できる．

$$(A_0,B_0,C_0,D_0):=(A_\epsilon,B,C,D)$$

として，アルゴリズムを開始すると，一回目で

$$D_1=\hat{D}_1+\begin{bmatrix} -\epsilon I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得る．ただし，

$$\hat{D}_1:=\begin{bmatrix} -\Delta_0^{-1}C_{02}AB_{02}\Delta_0^{-1} & -\Delta_0^{-1}C_{02}B_{01} \\ C_{01}B_{02}\Delta_0^{-1} & D_{01} \end{bmatrix}$$

である．条件 $\Omega_1$ は $D_1+D_1^T\geq 0$ を含むので，

$$\hat{D}_1+\hat{D}_1^T\geq\begin{bmatrix} \epsilon I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．これと $D_{01}+D_{01}^T>0$ を併せると，$\hat{D}_1+\hat{D}_1^T>0$ が得られる．このことと，(45) 式 の左辺は，rank $(\hat{D}_1+\hat{D}_1^T)$ と等しいことをあわせると，(45) 式 が成り立つ．

十分性：$\Phi$ の inherent integration が 0 の場合，$G$ は strongly PR である．したがって，$G$ は SPR である．$\Phi$ の inherent integration が 2 の場合を考える．

$$(A_0,B_0,C_0,D_0):=(A,B,C,D)$$

として，アルゴリズムを実行する．すると**定理 7** より，$G_1$ は strongly PR であり，$(A_1,B_1)$ は可制御，$(C_1,A_1)$ は可観測である．**補題 4** より，正定対称行列 $X_1,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ と行列 $\hat{L}_1\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{W}_1\in\mathbb{R}^{m\times m}$ が存在して

(47)
$$\begin{bmatrix} X_1A_1+A_1^TX_1 & X_1B_1-C_1^T \\ B_1^TX_1-C_1 & -D_1-D_1^T \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} \hat{L}_1^T\hat{L}_1+Q & \hat{L}_1^T\hat{W}_1 \\ \hat{W}_1^T\hat{L}_1 & \hat{W}_1^T\hat{W}_1 \end{bmatrix}=:-\begin{bmatrix} * & * \\ * & R_1 \end{bmatrix},\quad R>0$$

が成り立つ．したがって，実定数 $\epsilon>0$ が存在して

$$-Q+2\epsilon X_1<0,\quad -R_1+\begin{bmatrix} 2\epsilon I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}<0$$

と，$(A_\epsilon,B_0)$, $(C_0,A_\epsilon)$ の可制御・可観測が成り立つ．このとき $D_{02}+D_{03}^T=0$, $D_{04}+D_{04}^T=0$ に注意し，さらに $X_0:=N_0^TX_1+C_{02}^TE_{02}^{-1}C_{02}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} X_0A_\epsilon+A_\epsilon^T & X_0B_0-C_0^T \\ B_0^TX_0-C_0 & -D_0-D_0^T \end{bmatrix}\leq 0$$

を得ることができる．ゆえに，$G_\epsilon(s) := D_0 + C_0(sI - A_\epsilon)^{-1}B_0$ は PR である．すなわち，$G_0$ は SPR である． □

## 5. 新しい受動定理 – 低次元 Riccati 方程式を用いた証明

本節では，前節で示した結果（**定理 7** ）を用いて WSPR なシステムと受動システムからなるフィードバックシステムが漸近安定であることを示す**定理 6** を証明する．ただし，前に述べた**定理 6** の証明と重複を避けるため，ステップ 1 から始める．

Proof. **定理 7** より，整数 $k \leq 0$ が存在して，$\Phi$ の inherent integration は $2k$ となり，また，

$$\eta = L_i x_i + W_i u_i = L_{i+1} x_{i+1} W_{i+1} u_{i+1}, \quad \forall i$$

となる．また，

$$R_k = D_k + D_k^T = W_k^T W_k > 0$$

であるから，$\det W_k \neq 0$ となり，$\eta \equiv 0$ は $u_k = -W_k^{-T} L_k x_k$ を意味する．一方，（44）式 を満たす正定対称解 $Z_k$ が存在して，これは安定化解である．すなわち

$$\hat{A}_k := A_k - B_k R_k^{-1}(C_k - B_k^T Z_k) = A_k - B_k W_k^{-1} L_k$$

は安定行列である．$u_k = -W_k^{-T} L_k x_k$ であったから，$\eta \equiv 0$ を満たす任意の解は，

$$\dot{x}_k = \hat{A}_k x_k$$

の解であり，$\hat{A}_k$ は安定行列であるから，

$$x_k \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

である．このとき，$u_k = -W_k^{-T} L_k x_k$ と $y_k = C_k x_k + D_k u_k$ から，

$$x_k \to 0,\ u_k \to 0, y_k \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

となる．さらに（41）式 に注意すれば，結局

$$\eta \equiv 0 \Rightarrow x \to 0, u \to 0, y \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

となる．残りの部分は前に述べたものと同様である． □

## 6. まとめ

受動定理において，従来知られていた漸近安定性を保証する条件は SPR 性あるいは strongly PR 性であり，それより弱い条件である WSPR 性が，受動定理を成り立たせるかどうかは明らかにされていなかった．これに対し本章では，WSPR 性が一般的な非線形時不変受動システムに対して漸近安定性を保証することを示した．したがって，従来の結果よりも条件を緩めることが可能である．また，受動定理を証明する際の基礎となる正実補題における線形行列不等式を解析するアルゴリズムを提案した．これにより正実性に関する行列不等式の任意の解が，ある低次元 Riccati 方程式の解を用いて表されることが明らかとなり，さらに三つの強正実性の相違点を状態空間実現を用いて特徴づけた．

CHAPTER 4

# システムの消散化

ゲイン余裕と位相余裕は，フィードバックシステムのロバスト性を表す尺度として古くから用いられてきた．とくにこれらは応用面で盛んに使われている．たとえば JIS 規格 [**23**] では，航空機の制御系設計で一定のゲイン余裕と位相余裕を確保することを規定している．しかしこれらの安定余裕で保証されるロバスト性は，とくに動的な摂動に対して貧弱であることが知られている [**42**]．ロバスト制御理論は，このようなゲイン・位相変動にかわるものとしてノルム有界型の不確かさを想定し，設計には $H_\infty$ 制御 [**42**] を用いることを基本として発展してきた．にもかかわらず，Keel ら [**15**] は $H_\infty$ 制御を含む現代的な制御を用いて設計されたいくつかのシステムが，極めて小さなゲイン余裕あるいは位相余裕しかもたないことを指摘している．このようなことが生じる理由は，ゲイン変動や位相変動のようなループに直接入る変動が，不確かさのモデルにうまく取り込まれていなかったためであると考えられる．またゲイン余裕や位相余裕が本質的に開ループ伝達関数の特性であることを考えると，閉ループ伝達関数を評価する $H_\infty$ 制御は，これらの安定余裕を確保することに対して設計の見通しがよくない．したがって応用面だけでなく，現代的なロバスト制御を考える場合にも，ゲイン余裕と位相余裕を確保できる制御系設計を考えることは重要である．

一方，システムの消散性 [**37**，**38**] は，有界実性や受動性（正実性）を一般化した概念として，フィードバックシステムの安定解析および設計に広く用いられている．線形時不変システムにおいては，有界実性と正実性はそれぞれゲインと位相に関する性質であることを考えれば，消散性はある意味でシステムのゲインと位相のかねあいを表現できる柔軟な概念であり，スモールゲイン定理や受動定理よりも保守的でないロバスト安定定理を導くものである．この観点から，ある特定の消散システムに注目して，その性質を考察する研究がなされている．Sakamoto ら [**29**] は $\gamma$-passive system を定義し，これにより位相曲線を整形することを提案している．また Gupta[**9**] は，$\beta$-bounded system を用いてパラメータ変動をとらえることで，よりタイトなロバスト安定条件を得ることを提案している．一方，周波数領域におけるシステムの消散性とも考えられる円板条件 [**41**] あるいはその拡張である Integral Quadratic Constraint[**21**] によって，従来個別に考えられてきた様々な制御問題が

統一的に表現できることが明らかになった．さらに Iwasaki ら [**12**] は任意の線形時不変のフィードバックシステムを考えた場合，そのロバスト性はフィードバックシステムを構成する二つのシステムをある意味で分離する Quadratic Separator とよばれる行列値関数が存在することと等価であることを示し，とくに構造化特異値の計算に応用している．

本章では，システムの消散性がゲインと位相のかねあいを表現できることに注目し，開ループシステムを消散的にすること（消散化）によるロバスト制御を提案する．開ループシステムに注目するのは，ゲイン余裕や位相余裕が開ループシステムの変動に対するロバスト性であると見るのが自然であると考えるからである．また，消散性に関連する研究の多く [**9**, **13**, **27**, **29**, **39**] は，閉ループシステムの消散性あるいは安定なシステムの消散性に注目しており（$H_\infty$ 制御や正実制御 [**33**] もそうである），これに対しここで提案する方法では，一般に不安定である開ループシステムの消散性を考える点に特徴がある．まず，ロバスト安定性の必要条件であるノミナルフィードバックシステムの安定性が，開ループシステムの消散性と等価であることを示す．このことは，安定なフィードバックシステムを構成したい場合，コントローラは，プラントとコントローラの直列結合である開ループシステムが消散的となるように設計しなければならないことを意味する．そして開ループシステムを消散化することで，どのようなロバスト性が確保されるかを示し，とくにゲイン余裕と位相余裕の確保に適していることを示す．つぎに開ループシステムを消散化するコントローラの設計問題は，ある閉ループ伝達関数を評価する $H_\infty$ 制御問題と等価であることを示す．このことは，ゲイン特性のみに注目した $H_\infty$ 制御であっても，評価する伝達関数を工夫することにより，開ループシステムの消散性に基づくゲインと位相特性の整形，とくにゲイン余裕と位相余裕の確保が可能であることを示すものである．

## 1．消散性と定数出力フィードバックによる可安定性

**図 1** のようなプラント $P(s)$ とコントローラ $K(s)$ からなるフィードバックシステムを考える．

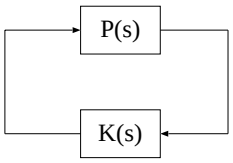


FIGURE 1. Nominal feedback system of $P(s)$ and $K(s)$

このようなシステムのロバスト安定性を扱う場合，システムにどのような不確かさを想定するかが重要である．いま，システムのゲイン余裕や位相余裕を考えたいとしよう．そこで**図 2** のような $\Sigma$ と $\delta$ からなるフィードバックシステムを考える．

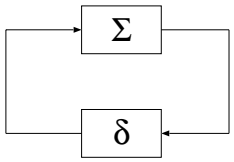


FIGURE 2. Perturbed feedback system of $\Sigma$ and $\delta$

$\Sigma$ はプラント $P(s)$ とコントローラ $K(s)$ の積である開ループ伝達関数 $L(s) = K(s)P(s)$ または $L(s) = P(s)K(s)$ の状態空間表現であり，

$$\Sigma : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \tag{48}$$

で与えられるとする．一方，$\delta$ はある複素行列の集合 $\Delta \subset \mathbb{C}^{m\times p}$ に属するものとし，ゲイン余裕や位相余裕において想定されるゲイン変動や位相変動を一般化したものである．そして $\Delta$ に属する任意の $\delta$ に対して，フィードバックシステムがロバスト安定となるようなコントローラの設計を考える．

このためにはまず，ノミナルフィードバックシステムの安定性，すなわち変動 $\delta$ のノミナル値 $\gamma \in \Delta$ に対するシステムの安定性が必要となる．このことは，開ループシステム $\Sigma$ が定数出力フィードバック則 $u = \gamma y$ により安定化されると解釈できる．そこでまず，与えられたシステム $\Sigma$ と定数行列 $\gamma$ に対して $\mathrm{FB}(\Sigma, \gamma)$ が安定となる条件を考え，そしてこの条件を $\Sigma$ の消散性を用いて表すことができることを示す．

**定理** 9. （48）式 のシステム $\Sigma$ と実定数行列 $\gamma \in \mathbb{R}^{m\times p}$ を考える．このときシステム $\mathrm{FB}(\Sigma, \gamma)$ が内部安定であるための必要十分条件は，次の (a), (b) を満たす（9）式 の実対称行列 $\Pi \in \mathbb{R}^{(p+m)\times(p+m)}$ が存在することである．

(a) $\Sigma$ は行列 $\Pi$ に関して強消散的である．

(b) $\gamma$ は，次の集合 $\Gamma, \Gamma_0, \Gamma_1$ のいずれかの元である．

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^{m\times p} : \begin{bmatrix} I & \gamma^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} < 0 \right\} \tag{49}$$

$$\Gamma_0 := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^{m\times p} : \begin{bmatrix} I & \gamma^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \right\} \tag{50}$$

$$\Gamma_1 := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^{m\times p} : \begin{bmatrix} I & \gamma^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} \le 0 \right\} \tag{51}$$

Proof. （必要性）$I-\gamma D$ は正則であり，かつ $A+B(I-\gamma D)^{-1}\gamma C$ は安定行列であるから，任意の実数 $k \ge 0$ に対して，正定対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して

$$\begin{aligned} &Z\left\{A+B(I-\gamma D)^{-1}\gamma C\right\} + \left\{A+B(I-\gamma D)^{-1}\gamma C\right\}^T Z \\ &\qquad\qquad + kC^T(I-D\gamma)^{-T}(I-D\gamma)^{-1}C \\ &= \begin{bmatrix} I & C^T\gamma^T(I-\gamma D)^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ZA+A^TZ+kC^T(I-D\gamma)^{-T}(I-D\gamma)^{-1}C & ZB \\ B^TZ & 0 \end{bmatrix} \\ &\qquad\qquad \times \begin{bmatrix} I \\ (I-\gamma D)^{-1}\gamma C \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，Finsler の定理 [**32**] より，実定数 $\epsilon > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} ZA+A^TZ+kC^T(I-D\gamma)^{-T}(I-D\gamma)^{-1}C & ZB \\ B^TZ & 0 \end{bmatrix} \\ &\qquad - \epsilon \begin{bmatrix} C^T\gamma^T(I-\gamma D)^{-T} \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-\gamma D)^{-1}\gamma C & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{52}$$

となる．ここで

$$\begin{bmatrix} (I-\gamma D)^{-1}\gamma C & -I \end{bmatrix} = (I-\gamma D)^{-1} \begin{bmatrix} \gamma & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$(I-D\gamma)^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} = (I-D\gamma)^{-1} \begin{bmatrix} I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

となることに注意し，

$$\begin{aligned} \Pi := \epsilon &\begin{bmatrix} \gamma^T \\ -I \end{bmatrix} (I-\gamma D)^{-T}(I-\gamma D)^{-1} \begin{bmatrix} \gamma & -I \end{bmatrix} \\ &\qquad - k \begin{bmatrix} I \\ -D^T \end{bmatrix} (I-D\gamma)^{-T}(I-D\gamma)^{-1} \begin{bmatrix} I & -D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とおくと，(52) 式 は

$$\begin{bmatrix} ZA+A^TZ & ZB \\ B^TZ & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{53}$$

となり，(a) が成り立ち，また

$$\begin{bmatrix} I & \gamma^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} = -k \begin{bmatrix} I & \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -D^T \end{bmatrix} (I - D\gamma)^{-T} (I - D\gamma)^{-1} \begin{bmatrix} I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} = -kI$$

となる．上式は，$k = 1$ とすると $\gamma \in \Gamma$ であり，$k = 0$ とすると $\gamma \in \Gamma_0 \subset \Gamma_1$ となるので，(b) が成り立つ．

（十分性）(a) より，正定対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して（53）式 が成り立つ．（53）式 の (2,2) ブロックより

$$\begin{bmatrix} D^T & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} D \\ I \end{bmatrix} > 0$$

が成り立つので，Finsler の定理より，実定数 $\epsilon > 0$ が存在して

$$\begin{bmatrix} I \\ -D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -D \end{bmatrix} > -\epsilon \Pi$$

となる．このとき

$$\begin{aligned} (I - D\gamma)^T (I - D\gamma) &= \begin{bmatrix} I & \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} \\ &> -\epsilon \begin{bmatrix} I & \gamma^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．上式の最後の項は (b) より準正定であるので，

$$\det(I - \gamma D) = \det(I - D\gamma) \neq 0$$

となり，$\mathrm{FB}(\Sigma, \gamma)$ は well-posed となる．そこで

$$\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ (I - \gamma D)^{-1} \gamma C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} (I - D\gamma)^{-1} C$$

に注意し，（53）式 に左右からそれぞれ

$$\begin{bmatrix} I & C^T \gamma^T (I - \gamma D)^{-T} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I \\ (I - \gamma D)^{-1} \gamma C \end{bmatrix}$$

をかけると

$$\begin{aligned} &Z \left\{ A + B(I - \gamma D)^{-1} \gamma C \right\} + \left\{ A + B(I - \gamma D)^{-1} \gamma C \right\}^T Z \\ &\qquad - C^T (I - D\gamma)^{-T} \begin{bmatrix} I & \gamma^T \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix} (I - D\gamma)^{-1} C < 0 \end{aligned}$$

となる．結局，(b) より

$$Z \left\{ A + B(I - \gamma D)^{-1} \gamma C \right\} + \left\{ A + B(I - \gamma D)^{-1} \gamma C \right\}^T Z < 0$$

となり，$Z > 0$ であるから，$A + B(I - \gamma D)^{-1} \gamma C$ は安定行列となる． □

**注意** 1. 条件 (b) の $\Gamma, \Gamma_0, \Gamma_1$ は行列 $\Pi$ の選択の範囲を限定する．このうち用途にあったものを用いるとよい．文献 [**12**] の Theorem 1 ではこの $\Pi$ の選択の範囲をさらに周波数依存型まで許し，ロバスト安定性の必要十分条件が示されている．しかしそこでは $0 \in \Gamma$ と仮定されているため $\Sigma$ 自身が安定でなければならない．これに対し**定理 9** では $\Sigma$ は不安定であってもよく，一般に不安定である開ループシステムとしての $\Sigma$ を直接扱うことができる．

**定理 9** は，ノミナルフィードバックシステムの安定性が開ループシステムの消散性により表すことができることを示している．たとえば，ノミナルフィードバックシステムが**図 1** である場合，**図 2** において $\delta$ のノミナル値が $\gamma = I$ であると考えることができる．このノミナルフィードバックシステムが安定であるための必要十分条件は，**定理 9** で $\gamma = I$ とおいて，(b) の $\Gamma$ を用いると

$$R > 0,\ Q + S + S^T + R < 0$$

となる適当な $\Pi$ に関して $\Sigma$ が強消散的となることである．すなわち**図 1** のシステムを安定化するようなコントローラは，その開ループシステム $\Sigma$ がこの行列 $\Pi$ に関して強消散的になるものから選ばなければならない．

このことを一般化して，$\gamma$ を固定しない場合，すなわちシステム $\Sigma$ が定数行列による出力フィードバックにより安定化できるための条件を求める．以下では簡単化のため，$D = 0$ とする．また，**定理 9** の条件 (b) に関しては，$\Gamma$ を用いるものとする．いま，$\gamma \in \mathbb{R}^{m \times p}$ が存在して $\mathrm{FB}(\Sigma, \gamma)$ が安定であるとすると，**定理 9** の条件 (a), (b) を満たす $\Pi$ が存在する．このとき $D = 0$ と (a) より $R > 0$ であり，(b) の $\gamma \in \Gamma$ は

$$Q - SR^{-1}S^T + (\gamma^T + SR^{-1})R(\gamma + R^{-1}S^T) < 0$$

となるので，これを満たす $\gamma$ が存在するためには，

$$Q - SR^{-1}S^T < 0$$

が必要となる．逆に，上式と $R > 0$ を満たす $\Pi$ に対して $\Sigma$ が行列 $\Pi$ に関して強消散的であれば $\gamma_0 := -R^{-1}S^T$ は**定理 9** の条件 (b) を満たす．したがって，$\mathrm{FB}(\Sigma, \gamma_0)$ は安定となる．ゆえにつぎのことが成り立つ．

**系** 3. （48）式 のシステム $\Sigma$ $(D = 0)$ が実数定数行列により出力フィードバック安定化可能であるための必要十分条件は，つぎの (a), (b) を満たす（9）式 の実対称行列 $\Pi \in \mathbb{R}^{(p+m)\times(p+m)}$ が存在することである．

(a) $\Sigma$ は行列 $\Pi$ に関して強消散的である．

(b) $R > 0, Q - SR^{-1}S^T < 0.$

またこれらの条件が成り立つとき，$\mathrm{FB}(\Sigma, -R^{-1}S^T)$ は内部安定，すなわち $\gamma_0 := -R^{-1}S^T$ は安定化ゲインである．

**注意** 2. **定理 9** の条件 (b) における $\Gamma_0, \Gamma_1$ を用いると，上の (b) の条件の二つ目は，それぞれ

$$Q - SR^{-1}S^T = 0, \quad Q - SR^{-1}S^T \leq 0$$

となる．

**注意** 3. Cao ら [**6**] は Riccati 不等式を用いて，$\Sigma$ が定数出力フィードバックにより安定化可能であるための必要十分条件を与えている．その条件は，正定対称行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ と行列 $N \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して

$$PA + A^TP + L^TM^{-1}L - C^+C(PB + N^T)M^{-1}(B^TP + N)C^+C < 0$$

が成り立つことである．ただし，

$$L = NC^+C - B^{\mathrm{T}}P(I - C^+C)$$

である．この結果と**系 3** が等価であることは

$$Z = P, \quad R = M, \quad S = C^{+T}(PB + N^T), \quad Q = SR^{-1}S^T$$

とおくことにより容易に示すことができる．

**定理 9** により，フィードバックシステムが安定となるような開ループシステム $\Sigma$ の条件としての消散性は，**定理 9** の条件 (b) を満たすもののみが意味をもつ．したがって，以下ではこのような消散性のみを考え，

**仮定** 1.

$$R > 0, \quad Q - SR^{-1}S^T < 0$$

とする．

## 2. 消散システムのロバスト性

開ループシステム $\Sigma$ が**仮定 1** を満たす行列 $\Pi$ に関して強消散的となるとき，不確かさ $\delta$ に対してフィードバックシステムはつぎのようなロバスト性をもつ．

**定理** 10. （48）式 のシステム $\Sigma$ $(D = 0)$ と（9）式 の行列 $\Pi$ が与えられているとする．ただし，$A$ は虚軸上に固有値をもたないとし，$\Pi$ は**仮定 1** を満たすものとする．このとき次の (a), (b), (c) は等価である．

(a) $\Sigma$ は行列 $\Pi$ に関して強消散的である．

(b) $\Sigma$ の伝達関数 $L$ は

$$\begin{bmatrix} L(j\omega)^* & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} L(j\omega) \\ I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \tag{54}$$

を満たし，かつ $\gamma \in \Gamma$ が存在して $\mathrm{FB}(\Sigma, \gamma)$ は内部安定となる．

(c) 複素行列の集合

$$\Delta := \left\{ \delta \in \mathbb{C}^{m \times p} : \begin{bmatrix} I & \delta^* \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I \\ \delta \end{bmatrix} \leq 0 \right\} \tag{55}$$

の任意の元 $\delta \in \Delta$ に対して，$\mathrm{FB}(\Sigma, \delta)$ は内部安定である．

Proof. (c) $\Rightarrow$ (b):

まず，

$$\Phi(j\omega) := \begin{bmatrix} L(j\omega)^* & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} L(j\omega) \\ I \end{bmatrix}$$

とおいたとき，$\det \Phi(j\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ となることを示す．いま，ある $\omega_0 \in \mathbb{R}$ に対して $\det \Phi(j\omega_0) = 0$ となると仮定すると，$u_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \neq 0$ が存在して $u_0^* \Phi(j\omega_0) u_0 = 0$ となる．これは，

$$u_0^* \left\{ L_0^*(Q - SR^{-1}S^T)L_0 + (I + L_0^* SR^{-1})R(I + R^{-1}S^T L_0) \right\} u_0 = 0$$

と変形できる．ただし，$L_0 := L(j\omega_0)$ とおいた．したがって，

$$\|(SR^{-1}S^T - Q)^{1/2} L_0 u_0\| = \|R^{1/2}(I + R^{-1}S^T L_0)u_0\|$$

となる．このとき，$U^*U = I$ となる $U \in \mathbf{C}^{r \times m}$ が存在して [**32**]

$$(SR^{-1}S^T - Q)^{1/2} L_0 u_0 = U R^{1/2}(I + R^{-1}S^T L_0)u_0$$

となる．ここで

$$\delta_0 := R^{-1/2} U^* (SR^{-1}S^T - Q)^{1/2} - R^{-1}S^T$$

を導入すると，

$$(I - \delta_0 L_0)u_0 = u_0 - R^{-1/2}U^*(SR^{-1}S^T - Q)^{1/2} L_0 u_0 - R^{-1}S^T L_0 u_0 = 0$$

が成り立ち，一方簡単な計算により

$$\begin{bmatrix} I & \delta_0^* \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I \\ \delta_0 \end{bmatrix} = -(SR^{-1}S^T - Q)^{1/2}(I - UU^*)(SR^{-1}S^T - Q)^{1/2} \leq 0$$

となることが確認できる．しかしこのことは，$\mathrm{FB}(\Sigma,\delta)$ が $\forall\delta\in\Delta$ に対して内部安定となるための必要条件である

$$\det(I-\delta L(j\omega))\neq 0,\quad \forall\omega\in\mathbb{R},\quad \forall\delta\in\Delta$$

に矛盾する．よって，$\det\Phi(j\omega)\neq 0,\forall\omega\in\mathbb{R}$ が成り立つ．いま，$A$ は虚軸上に固有値をもたないから，$\Phi(j\omega)$ の最小固有値は $\omega$ に関して連続であり，$\Phi(j\infty)=R>0$ であるから，(54) 式 が成り立つ．一方，**系 3** より $\gamma_0:=R^{-1}S^T\in\Gamma\subset\Delta$ ととると， $\mathrm{FB}(\Sigma,\gamma_0)$ は安定である．

(b) $\Rightarrow$ (a):

**定理 3** より対称行列 $Z\in\mathbf{R}^{n\times n}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} ZA+A^TZ & ZB \\ B^TZ & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\Pi\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}<0 \tag{56}$$

が成り立ち，これに左右から

$$\begin{bmatrix} I & C^T\gamma^T \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} I \\ \gamma C \end{bmatrix}$$

をかけることで，

$$Z(A+B\gamma C)+(A+B\gamma C)^TZ-C^T\begin{bmatrix} I & \gamma^T \end{bmatrix}\Pi\begin{bmatrix} I \\ \gamma \end{bmatrix}C<0$$

を得る．$A+B\gamma C$ は安定行列となる $\gamma\in\Gamma$ が存在するので，$Z>0$ である．したがって， $\Sigma$ は行列 $Q$ に関して強消散的である．

(a) $\Rightarrow$ (c):

強消散性より正定対称行列 $Z\in\mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，(56) 式 が成り立つ．これに左右から

$$\begin{bmatrix} I & C^T\delta^* \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} I \\ \delta C \end{bmatrix}$$

をかけることで，

$$Z(A+B\delta C)+(A+B\delta C)^TZ-C^T\begin{bmatrix} I & \delta^* \end{bmatrix}\Pi\begin{bmatrix} I \\ \delta \end{bmatrix}C<0$$

が成り立つ．よって $\delta\in\Delta$ ならば，

$$Z(A+B\delta C)+(A+B\delta C)^TZ<0$$

が成り立ち，$Z>0$ だから $A+B\delta C$ は安定行列である．すなわち，$\mathrm{FB}(\Sigma,\delta)$ は内部安定である． □

**注意** 4. **定理 10** において，$A$ が虚軸上に固有値をもつ場合でも，(a) $\Rightarrow$ (b) と (a) $\Rightarrow$ (c) は成り立つ．ただしその際，（54）式 は $A$ の虚軸上の固有値以外で成り立つとする．しかしこの場合，一般に (b) $\Rightarrow$ (a), (c) $\Rightarrow$ (a) は成り立たない．たとえば，$A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $Q = 0$, $S = 1$, $R = \epsilon > 0$ の場合，(b), (c) が成り立つことが容易に確認できる．しかし，（56）式 の左辺の $(1, 1)$ 要素は $0$ となり，(a) は決して成り立たない．

## 3. 消散性を利用した変動の見積もり

**定理 10** は有界実性に関する結果である [**26**] の Theorem 2.1 の消散性への拡張である．実際，$A$ を安定行列とし，$Q = -I$, $S = 0$, $R = I$, $\gamma = 0$ とすればこの結果と一致する．しかしこの場合，（55）式 は

$$\Delta = \left\{\delta \in \mathbb{C}^{m\times p} : \delta^*\delta \leq I\right\}$$

となり，ゲイン特性だけを評価したものとなる．このため $\delta$ の位相特性は生かされず，変動の見積りとしての $\Delta$ は一般に保守的となる．これに対して**定理 10** では，行列 $\Pi$ を**仮定 1** の範囲で変えることができる．そこでこの $\Pi$ の選択の自由度を，よりタイトな変動の見積りに役立てることを考える．

いま，有界な変動の集合 $\tilde{\Delta} \subset \mathbb{C}^{m\times p}$ が与えられているとし，$\mathrm{FB}(\Sigma, \tilde{\Delta})$ が安定となるようなコントローラを設計することを考える．もし（55）式 の $\Delta$ に関して，$\tilde{\Delta} \subset \Delta$ となるような行列 $\Pi$ を求めることができたならば，**定理 10** より，$\Sigma$ をこの行列 $\Pi$ に関して強消散化するコントローラにより $\mathrm{FB}(\Sigma, \tilde{\Delta})$ は内部安定となる．しかし $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ とする $\Pi$ は一般に無数に存在する．たとえば，$Q = -I$, $S = 0$, $R = \epsilon I$ として，$\epsilon$ を十分小さくとることで，常に $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ とでき，このとき $\Delta$ は保守的となってしまう．さらにこの場合，$0 \in \Delta$ であるため $\Sigma$ 自身が安定とならなければならず，不安定なプラントに対しては，安定化コントローラは存在しない．したがって，$\Delta$ は何らかの意味で小さくなるように決めなければならない．そこで，$\Delta$ の大きさとして，集合の直径：

$$\mathrm{diam}(\Delta) = \max\left\{\|\delta_1 - \delta_2\| : \ \delta_1, \ \delta_2 \in \Delta\right\}$$

を採用することを考える．ただし，$\|\bullet\|$ は行列の最大特異値とする．このとき

$$\mathrm{diam}(\Delta) = 2\left\|R^{-1/2}\right\| \left\|(SR^{-1}S^T - Q)^{1/2}\right\|$$

となることが容易に示されるので，$\tilde{\Delta} \subset \Delta$ のもとで上式を最小にするような $\Pi$ を求めることができれば，そのときの $\Delta$ は与えられた変動の集合 $\tilde{\Delta}$ のタイトな見積りといえよう．

つぎにこの方法の具体例として，$m = p = 1$ のときについて，ゲイン余裕と位相余裕を確保する問題を考える．ゲインおよび位相変動のノミナル値を $\gamma = 1$ として，確保したいゲイン余裕を減少側で $g_{m1}(0 < g_{m1} < 1)$, 増加側で $g_{m2}(1 < g_{m2} < \infty)$, 位相余裕を $\phi_m$ 度（$0^\circ < \phi_m < 180^\circ$）としよう．これは変動の集合

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} = &\{\delta \in \mathbf{R} : g_{m1} \le \delta \le g_{m2}\} \\ &\cup \{\delta \in \mathbf{C} : \delta = \exp(j\phi),\ -\phi_m \le \phi \le \phi_m\}\end{aligned}$$

に対して，$\mathrm{FB}(\Sigma, \tilde{\Delta})$ を安定化する問題である．**図 3** はこのような $\delta \in \tilde{\Delta}$ の変動の範囲（太線部分）を複素平面上に描いたものである．

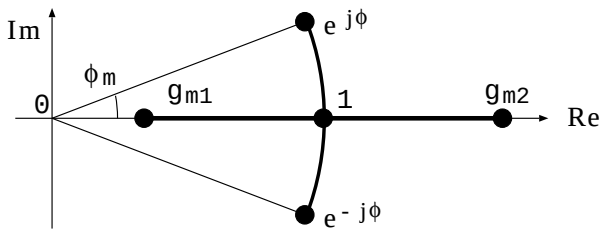


FIGURE 3. Gain and phase perturbations

そこで $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ となる $\Delta, \Pi$ を考える．ただし $\Pi$ は**仮定 1** を満たすものから選ぶが，この場合明らかに $R = 1$ として一般性を失わない．このとき $\Delta$ は

$$|\delta + S|^2 \le S^2 - Q$$

を満たす $\delta \in \mathbb{C}$ の集合であり，複素平面上における中心 $-S$, 半径 $(S^2 - Q)^{1/2}$ の円の内部と境界を指す．明らかに $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ となるための条件は，$g_{m1}, g_{m2}, \exp(j\phi_m) \in \Delta$, すなわち

$$\begin{aligned} Q + 2g_{m1}S + g_{m1}^2 &\le 0 \\ Q + 2g_{m2}S + g_{m2}^2 &\le 0 \\ Q + 2(\cos\phi_m)S + 1 &\le 0 \end{aligned} \tag{57}$$

が成り立つことである．また $\mathrm{diam}(\Delta) = 2(S^2 - Q)^{1/2}$ となり，問題は

$$\text{minimize } S^2 - Q \text{ subject to（57）式}$$

となる．これは二次凸計画問題であり，解析的にも数値的にも容易に解くことができる．このように決定された行列 $\Pi$ は**定理 10** の仮定を満たし，したがって開ループシステム $\Sigma$ がこの行列 $Q$ に関して強消散的であれば，単位フィードバックシステムのゲイン余裕は減少側で $g_{m1}$, 増加側で $g_{m2}$, 位相余裕は $\phi_m$ 度が確保されるこ

とになる．したがって問題は，開ループシステム $\Sigma$ を強消散化するコントローラを求めることであり，次節ではこのようなコントローラの設計法を与える．

## 4．消散化問題と $H_\infty$ 制御問題

前節で，ノミナルフィードバックシステムが安定となるための必要十分条件は，開ループシステムが仮定 **仮定 1** を満たす行列 $\Pi$ に関して強消散的となることであることを示し，その際，**定理 10** に基づくロバスト性が成り立つことを示した．そこで本節ではこの開ループシステムが強消散的となるようなコントローラの設計問題を考え，これが $H_\infty$ 制御問題として表すことができることを示す．なお，Safonov ら [**27**]，Xie ら [**39**] と Jacobson ら [**13**] は，このような消散性と有界実性の関係を述べているが，安定な消散システムに対してのみ考察している．これに対してつぎの結果は，一般に不安定であるシステムの消散性を扱うことができる．

**定理** 11. （48）式 のシステム $\Sigma$ $(D=0)$ と（9）式 の $\Pi$, および $\gamma \in \Gamma$ が与えられているとし，**仮定 1** が成り立つとする．また

$$\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & R \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} I & \gamma^{\mathrm{T}} \\ 0 & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma & I \end{bmatrix}$$

とおく．このときつぎの (a), (b) は等価である．

(a) $\Sigma$ は行列 $\Pi$ に関して強消散的である．

(b) $A + B\gamma C$ は安定行列であり，かつ

$$\| J_1^{-T} \tilde{L} J_3^{-1} \|_\infty < 1 \tag{58}$$

が成り立つ．ただし，行列 $J_1$, $J_3$ はそれぞれ

$$0 < -\tilde{Q} = J_1^{\mathrm{T}} J_1,\ 0 < R - \tilde{S}^{\mathrm{T}} \tilde{Q}^{-1} \tilde{S} = J_3^{\mathrm{T}} J_3$$

を満たす適当な行列であり，伝達関数 $\tilde{L}$ は

$$\tilde{L}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A + B\gamma C & B \\ \hline \tilde{Q}C & \tilde{S} \end{array}\right]$$

で定義されるものとする．また $\tilde{L}$ は $\Sigma$ の伝達関数 $L$ を用いて次のように表すことができる．

$$\tilde{L} = (\alpha + \beta L)(I - \gamma L)^{-1},\ \begin{bmatrix} \beta & \alpha \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} I & \gamma^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \Pi$$

Proof. $\Sigma$ が行列 $\Pi$ に関して強消散的であるとは，正定対称行列 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して（56）式 が成り立つことである．（56）式 は，左右から

$$\begin{bmatrix} I & C^{\mathrm{T}}\gamma^{\mathrm{T}} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & 0 \\ \gamma C & I \end{bmatrix}$$

をかけることにより

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} Z(A+B\gamma C)+(A+B\gamma C)^{\mathrm{T}}Z & ZB \\ B^{\mathrm{T}}Z & 0 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{\Pi} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{59}$$

と等価変形できる．ここで

$$\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{S}^{\mathrm{T}}\tilde{Q}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -J_1^{\mathrm{T}}J_1 & 0 \\ 0 & J_3^{\mathrm{T}}J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \tilde{Q}^{-1}\tilde{S} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

となることを用いると（59）式 は

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} Z(A+B\gamma C)+(A+B\gamma C)^{\mathrm{T}}Z & ZBJ_3^{-1} \\ J_3^{-T}B^{\mathrm{T}}Z & 0 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} -C^{\mathrm{T}}J_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ -J_3^{-T}\tilde{S}^{\mathrm{T}}\tilde{Q}^{-1}J_1^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} -J_1C & -J_1\tilde{Q}^{-1}\tilde{S}J_3^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

と等価であることが確認できる．このことは有界実補題より $A+B\gamma C$ が安定であり，かつ

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A+B\gamma C & BJ_3^{-1} \\ \hline -J_1C & -J_1\tilde{Q}^{-1}\tilde{S}J_3^{-1} \end{array} \right] \right\|_\infty < 1$$

となることと等価であり，上式の $H_\infty$ ノルムの中の伝達関数が $J_1^{T+}\tilde{L}J_3^{-1}$ となることは容易に確認できる． □

**注意** 5. **仮定 1** が成り立つとき，$\gamma = -R^{-1}S^{\mathrm{T}}$ とすると $\tilde{S}=0$ となり，この $\gamma$ に対して (a) と (b) は等価である．しかしここでは $\gamma$ はとくに固定していない．このことは一般に，(a) と等価であるが評価する伝達関数が相異なる $H_\infty$ 制御問題が複数存在することを意味する．たとえば，**仮定 1** を満たす条件 $Q<0, R>0$ が成り立つとしよう．これは [**9**, **27**, **29**, **39**] で扱われている消散性である．この場合，少なくとも $\gamma=0$ と $\gamma=-R^{-1}S^{\mathrm{T}}$ は**定理 11** の仮定を満たし，したがってそれぞれに対応する等価な $H_\infty$ 制御問題が導かれる．

**定理 11** から，開ループシステム $\Sigma$ を強消散化する内部安定化コントローラの設計問題は，つぎのように $H_\infty$ 制御問題となる．プラントは $P(s)=C_p(sI-A_p)^{-1}B_p$ で与えられるとし，コントローラを $K(s)$ とする．ここでは $\Sigma$ の伝達関数 $L(s)$ は $K(s)P(s)$ となる場合を考える.（$L(s)=P(s)K(s)$ である場合も同様である.）する

と（58）式 の伝達関数は**図 4** の $w$ から $z$ への伝達関数であり，いま考えている $H_\infty$ 制御問題は一般化プラント

$$\begin{bmatrix} z \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A_p & B_p J_3^{-1} & B_p\gamma \\ \hline 0 & J_1^{T+}\alpha J_3^{-1} & -J_1 \\ C_p & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} w \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$$

と制御則 $\tilde{u} = K(s)\tilde{y}$ からなる閉ループ伝達関数の $H_\infty$ ノルムを 1 未満にする問題となることがわかる．したがって，たとえば [**11**, **30**] の結果を使ってコントローラを得ることができる．

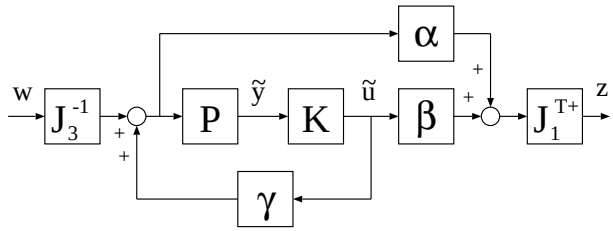


FIGURE 4. The block diagram of $H_\infty$ control problem

（58）式 を評価する $H_\infty$ 制御問題は，つぎのように通常考えられる問題を含む一般的なものである．感度関数を $M_\gamma = (I-\gamma L)^{-1}$, 補感度関数を $T_\gamma = L(I-\gamma L)^{-1}$ とおくと $\tilde{L} = \alpha M_\gamma + \beta T_\gamma$ となっており，$M_\gamma$ と $T_\gamma$ の行列に関する線形結合となっていて，もちろん $M_\gamma$ または $T_\gamma$ といった閉ループ伝達関数を評価する標準的な問題を含んでいる．さらにつぎのように，定数重み $W_1, W_2$ に関する混合感度問題

$$\left\| \begin{matrix} W_1 T_1 \\ W_2 M_1 \end{matrix} \right\|_\infty < 1 \tag{60}$$

も（58）式 の形に書ける．ただし $T_1 = L(I-L)^{-1}$, $M_1 = (I-L)^{-1}$ とする．$L(j\infty) = 0$ とし，簡単化のため $L$ は虚軸上に極をもたないとする．まず（60）式から

$$\Pi = \begin{bmatrix} I - W_1^{\mathrm{T}} W_1 & -I \\ -I & I - W_2^{\mathrm{T}} W_2 \end{bmatrix}$$

に対して（54）式 が成り立つことが容易にわかる．ここで，$L(j\infty) = 0$ から $R = I - W_2^{\mathrm{T}} W_2 > 0$ が必要である．$\mathrm{FB}(\Sigma, I)$ は安定であることに注意して**定理 10** を用いると，$\Sigma$ はこの行列 $\Pi$ に関して消散的である．そこで**定理 11** において $\gamma = (I - W_2^{\mathrm{T}} W_2)^{-1}$ とすると

$$\tilde{L} = -(W_1^{\mathrm{T}} W_1 + W_2^{\mathrm{T}} (I - W_2 W_2^{\mathrm{T}})^{-1} W_2) T_1$$

となる．$J_1$, $J_3$ を

$$\begin{aligned} J_1^{\mathrm{T}} J_1 &= W_1^{\mathrm{T}} W_1 + W_2^{\mathrm{T}} (I - W_2 W_2^{\mathrm{T}})^{-1} W_2 \\ J_3^{\mathrm{T}} J_3 &= I - W_2^{\mathrm{T}} W_2 \end{aligned}$$

を満たすものとすると，（60）式 は（58）式 と等価となる．

このように閉ループ伝達関数のゲイン特性のみに注目した $H_\infty$ 制御でも，評価する関数を（58）式 のように工夫することにより，ゲイン余裕や位相余裕の確保といった開ループシステムのゲインと位相の情報を考慮したロバスト制御が可能となる．

## 5．まとめ

本章ではまず，フィードバックシステムの安定性が開ループシステムの消散性と等価であることを示した．このことは，安定なフィードバックシステムを構成したい場合，コントローラは，プラントとコントローラの直列結合である開ループシステムが消散的となるように設計しなければならないことを意味する．そして開ループシステムを消散化するコントローラによるロバスト制御を提案した．その際，どのようなロバスト安定性が確保されるかを明らかにし，$H_\infty$ 制御に代表される閉ループ伝達関数の整形からは見通しのよくないゲイン余裕と位相余裕の確保に有用であることを示した．また開ループシステムを消散化する問題は，ある $H_\infty$ 制御問題と等価であることを示し，評価する閉ループ伝達関数を工夫することで，開ループシステムの消散性に基づくものと等価なロバスト制御が $H_\infty$ 制御により可能であることを示した．

CHAPTER 5

# 結論

## 1. 研究結果のまとめ

本論文では，消散システム理論に関する制御問題を考察し，以下の結果を得た．

第３章では，消散システム理論においてもっとも基本的な結果である受動定理が，従来知られていたよりも弱い条件で成り立つことを示し，新たな受動定理を確立した．その際，ある正実システムをより次元の小さな正実システムに等価的に変換するアルゴリズムを提案した．そしてこのアルゴリズムが終了したときに得られる正実システムは，そのスペクトル因子の相対次数が 0 になることを示した．このアルゴリズムを用いて，受動定理を証明するための正実補題における線形行列不等式の解を解析的な意味で調べ，その任意の解がある低次元化された Riccati 方程式の解で表現されることを明らかにした．さらに，このアルゴリズムによって，微妙に異なる三つの強正実性の相違点を，そのスペクトル因子の相対次数によって特徴づけ，従来知られていなかったこれらの強正実性の判定条件を示した．

第４章では，開ループシステムに消散性をもたせることによる新しい枠組みのロバスト制御の手法を確立した．まずはじめに，フィードバックシステムがロバスト安定となるための必要条件である，ノミナルフィードバックシステムの安定性が，その開ループシステムの消散性と等価であることを示した．このことは，安定なフィードバックシステムを構成したい場合，コントローラは開ループシステムを消散化するものでなければならないことを意味し，開ループシステムを消散化することによるロバスト制御の正当性を示すものである．そして，開ループシステムを消散化するような制御システムを設計したとき，そのシステムがどのようなロバスト安定性をもつかを示した．その際，$H_\infty$ 制御などの従来のロバスト制御の方法では設計が困難であった，ゲイン余裕や位相余裕といった本質的に開ループシステムのロバスト性の保証に有効であることを示した．最後に開ループシステムを消散化するコントローラの設計法を，$H_\infty$ 制御問題に帰着させた．このことは，消散化コントローラの設計が，従来の知られている方法で容易に実行できることを示しているだけでなく，実は $H_\infty$ 制御にはゲインだけを評価するという欠点を補うような評価関数の取り方があることを示していることが明らかとなった．

## 2. 今後の研究の方向について

ここでは，本研究の成果に基づき，今後の研究対象とすべき問題を述べる．

まず，第３章の結果に関連した問題を述べる．第４節で示したアルゴリズムは，正実システムに限られるものであった．正実システムは消散システムの特別な場合であるから，このアルゴリズムはより一般的な消散システムに対するものに拡張できると思われる．もしこれができると，受動定理より一般的な消散システムに関するロバスト安定定理が得られることになる．またこれは，特異スペクトル分解とよばれている研究分野である．特異スペクトル分解を研究したものとしては [**2**, **5**] など多くの研究がある．しかしいずれの研究も，本研究で示したように，特異スペクトル分解とスペクトル因子の相対次数の関係に言及していない．しかし，第５節で見たように，この関係は受動定理を示す際に重要な働きをしている．したがって，他の研究が提案している特異スペクトル分解の方法と，本研究の方法の関係は明確ではなく，今後これを調べる必要がある．

第４章に関連する問題を述べる．本章では，消散システムの供給率を決定する行列 $\Pi$ が重要な働きをしていた．そしてこの $\Pi$ が定数行列であることが本質的に影響して，定数出力フィードバックによる可安定性と開ループシステムの消散性が等価であることがいえた．この $\Pi$ を周波数依存型へと一般化したものが，IQC[**21**] とよばれているもので，最近ロバスト安定性に関する非常に一般的な結果 [**12**] が得られている．これは，フィードバックシステムがロバスト安定であるための必要十分条件は，それを構成する二つのシステムが IQC を満たすことであるという事実である．これに基づく安定解析に関しては成果が上がっているが，これを利用した制御系設計の研究はまだ少ないようである．しかし，$H_\infty$ 制御が評価する関数に周波数重みをかけることで，柔軟な制御を可能にしている点を考えると，IQC が周波数依存型の評価基準であることは自然なことであり，この特性を利用すれば非常に一般的な制御系設計の理論を展開できると予想される．

# Bibliography


[1] B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd: *Network Analysis and Synthesis*; Prentice Hall (1973)

[2] H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek and P. V. Dooren: Factorizations of transfer functions; *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 18, No. 6, pp. 675–696 (1980)

[3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*; SIAM Philadelphia (1994)

[4] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems: Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, No. 11, pp. 1228-1240 (1991)

[5] D. J. Clements and K. Glover: Spectral factorization via Hermitian pencils: *Linear Algebra and Its Applications*, pp. 797–846 (1989)

[6] Y. Cao, Y. Sun and W. Mao: A new necessary and sufficient condition for static output feedback stabilizability and comments on "stabilization via static output feedback"; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 43, No. 8, pp. 1110–1111 (1998)

[7] C. A. Desoer and M. Vidyasagar: Feedback Systems: *Input-Output Properties*; Academic Press (1975)

[8] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State-space solutions to standard $H_2$ and $H_\infty$ control problems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, No. 8, pp. 831–847 (1989)

[9] S. Gupta: Robust stability analysis using LMIs: Beyond small gain and passivity; *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, pp. 953–968 (1996)

[10] W. M. Haddad and D. S. Bernstein: Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and Popov theorems and their application to robust stability. Part I: Continuous-time theory; *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, Vol. 3, pp. 313-339 (1993)

[11] T. Iwasaki and R. E. Skelton: All controllers for the general $H_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas; *Automatica*, Vol. 30, No. 8, pp. 1307–1317 (1994)

[12] T. Iwasaki and S. Hara: Well-posedness of feedback systems: Insights into exact robustness analysis and approximate computations; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 43, No. 5, pp. 619–630 (1998)

[13] C. A. Jacobson, A. M. Stanković and G. Tadmor: On the reduction of certain frequency-shaped linear quadratic dissipative design problem to an $H_\infty$ formulation; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 41, No. 1, pp. 121–125 (1996)

[14] S. M. Joshi and S. Gupta: On a class of marginally stable positive-real systems; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 41, No. 1, pp. 152-155 (1996)

[15] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya: Robust, fragile, or optimal?; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 42, No. 8, pp. 1098–1105 (1997)

[16] A. Kelkar and S. Joshi: *Control of Nonlinear Multibody Flexible Space Structures*; Lecture Notes in Control and Information Sciences 221, Springer (1996)
[17] H. K. Khalil: *Nonlinear Systems 2nd Edition*, Prentice Hall (1996)
[18] R. Lozano-Leal and S. M. Joshi: Strictly positive real transfer functions revisited; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 35, No. 11, pp. 1243-1245 (1990)
[19] R. Lozano-Leal and S. M. Joshi: Reply to "Comments on 'Strictly positive real transfer functions revisited;"' *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, No. 10, pp. 1799-1800 (1995)
[20] H. J. Marquez and C.J. Damaren: Comments on 'Strictly positive real transfer functions revisited;' *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, No. 3, pp. 478-479 (1995)
[21] A. Megretski and A. Rantzer: System analysis via integral quadratic constraints; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 42, No. 6, pp. 819–830 (1997)
[22] 美多, 千田, 王：強正実条件と疑似強正実条件, 計測自動制御学会論文集, Vol. 25, No. 7, 751–757 (1989)
[23] 日本規格協会：航空機操縦系統–設計, 装備及び試験通則 JIS W 701 (1992)
[24] I. R. Petersen: A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems; *Systems & Control Letters*, Vol. 8, pp. 351–357 (1987)
[25] A. Rantzer: On the Kalman - Yakubovich - Popov lemma; *Systems & Control Letters*, Vol. 28, pp. 7–10 (1996)
[26] M. A. Rotea, M. Corless, D. Da and I. R. Petersen: Systems with structured uncertainty: Relations between quadratic and robust stability; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 38, No. 5, pp. 799–803 (1993)
[27] M. G. Safonov, E. A. Jonckheere, M. Verma and D. J. N. Limebeer: Synthesis of positive real multivariable feedback systems; *Int. J. Control*, Vol. 45, No. 3, pp. 817–842 (1987)
[28] M. K. Sain and J. L. Massey: Invertibility of linear time-invariant dynamical systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 14, No. 4, pp. 141-149 (1969)
[29] N. Sakamoto and M. Suzuki: $\gamma$-Passive systems and its phase property and synthesis; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 41, No. 6, pp. 859–865 (1996)
[30] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali: Multiobjective output-feedback control via LMI optimization; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 42, No. 7, pp. 896–911 (1997)
[31] L. M. Silverman: Inversion of multivariable linear systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 14, No. 3, pp. 270–276 (1969)
[32] R. E. Skelton, T. Iwasaki and K. Grigoriadis: *A unified algebraic approach to linear control design*, Taylor & Francis (1998)
[33] W. Sun, P. P. Khargonekar and D. Shim: Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 39, No. 10, pp. 2034–2046 (1994)
[34] G. Tao and P. A. Ioannou: Strictly positive real matrices and the Lefschetz-Kalman-Yakubovich lemma; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 33, No. 12, pp. 1183-1185 (1988)
[35] H. Weiss, Q. Wang and J. L. Speyer: System characterization of positive real conditions; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39, No. 3, pp. 540-544 (1994)
[36] J. T. Wen: Time domain and frequency domain conditions for strict positive realness; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 33, No. 10, pp. 988-992 (1988)
[37] J. C. Willems: Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 621–634 (1971)
[38] J. C. Willems: Dissipative dynamical systems–Part I and Part II; *Arch. Rational Mech. Anal.* , Vol. 45, pp. 321–393 (1972)
[39] S. Xie, L. Xie and C. E. D. Souza: Robust dissipative control for linear systems with dissipative uncertainty; *Int. J. Control*, Vol. 70, No. 2, pp. 169–191 (1998)
[40] 山本 稔：常微分方程式の安定性; 実教出版 (1979)

[41] G. Zames: On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems–Part I and Part II; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 11, No. 2, pp. 228–238 and Vol. 11, No. 3, pp. 465–476 (1966)

[42] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover: *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall (1996)

[43] K. Zhou and P. P. Khargonekar: An algebraic Riccati equation approach to $H^\infty$ optimization; *Systems & Control Letters*, Vol. 11, pp. 85–91 (1988)

# 発表論文及び国際会議

A. 発表論文

1 穂高・鈴木：疑似強正実条件による受動定理；計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 8, pp. 1183–1189 (1996)

2 穂高・鈴木・坂本：指定されたゲイン余裕と位相余裕を確保するコントローラの設計；計測自動制御学会論文集，Vol. 35, No. 4, pp. 577–579 (1999)

3 穂高・鈴木・坂本：開ループシステムの消散性に基づくロバスト制御；システム制御情報学会論文誌，Vol. 12, No. 9, pp. 549–557 (1999)

4 佐藤・穂高・杉本：安定余裕を指定した部分極配置 – 多項式 ILQ 法の拡張；システム制御情報学会論文誌，Vol. 13, No. 1 (2000) 掲載予定

5 I. Hodaka, N. Sakamoto and M. Suzuki: New Results for Strict Positive Realness and Feedback Stability; *IEEE Transaction on Automatic Control*, to appear

B. 国際会議

1 I. Hodaka, M. Suzuki and N. Sakamoto: Loopshaping by Quadratic Constraints on Open-Loop Transfer Functions; *Learning, Control and Hybrid Systems*, Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 241, pp. 416–431 (1999)

2 I. Hodaka, N. Sakamoto and M. Suzuki: Output Feedback Control with Specified Gain and Phase Margins; *Proceedings of the IEEE Singapore International Symposium on Control Theory and Applications*, pp. 152–155 (1997)

3 I. Hodaka, M. Suzuki and M. Itoh: Robust Control Design with Specified Gain and Phase Margins and Its Applications; *Proceedings of the Mathematical Theory of Networks and Systems Symposium*, pp. 189–192 (1998)

4 A. Satoh, I. Hodaka and K. Sugimoto: Partial Pole Placement with Specified Stability Margins; *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* (1999) to appear

# 発表論文及び国際会議と本論文の関係

**第 3．3 項**: A-1
**第 3．4 項，第 3．5 項**: A-5
**第 4．1 項**: A-3, B-3
**第 4．2 項**: A-2, A-3, B-1, B-3
**第 4．3 項**: A-2, A-3, A-4, B-1, B-2, B-3
**第 4．4 項**: A-3, B-3

# 謝辞

本論文をまとめるにあたり，多大なるご指導を頂きました名古屋大学大学院工学研究科鈴木正之教授に心から感謝の意を表します．また，本論文に関して，有益なご助言，ご教示を頂きました名古屋大学大学院工学研究科松崎雄嗣教授，名古屋大学大学院工学研究科杉本謙二助教授に感謝いたします．

また日頃，研究に関する助言，議論を頂いております名古屋大学大学院工学研究科坂本登講師，名古屋大学大学院工学研究科安藤嘉則講師，岐阜大学大学院工学研究科濱田和恭助教授に深く感謝いたします．