報告番号	※ ~~甲~~ 乙 第1035 号

主論文の要旨

題名 Some results in the theory of vector bundles

ベクトル束の理論におけるいくつかの結果

氏名 梅村 浩

主論文の要旨

報告番号	※ 乙第1035号	氏名	梅村浩

代数的多様体上の vector bundle が ample とはどう定義されるべきかを考察する。簡単のため考察される代数的多様体はすべて射影的かつ特異点をもたないと仮定する。さらに微分幾何学的な定義とも比較検討するので代数的多様体は $\mathbb{C}$ 上定義されているものとする。vector bundle の rank が 1 のとき，つまり line bundle の場合については万人が適当と考えることのできる定義がある。実際次の主張は同値，主張をのべる前に記号を定めておく。X を代数的多様体，L を X 上の line bundle とする。

1° L のエルミート計量で，接続formの曲率が各点で正定となるものが存在する。

2° X 上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対し $i \geq 1$ ならば，十分大きな整

数 m について $H^i(X, L^{\otimes m}\otimes F)=0$.

3°(中井の判定法) L の第1 Chern 類が正。

1°を解析的定義，2°を代数幾何学的定義，3°を位相幾何学的定義ということにする。ample line bundle の理論は古典的な代数幾何学において大切な部分をなしている，それだけに多くのことが知られている。一方 vector bundle となると，これは極めて自然な概念であるにもかかわらず闇につつまれている。体系的な理論としては Mumford と Seshadri による曲線上の stable bundle の理論があるのみである。

本論文の第一の目的は vector bundle の ampleness について考察することである。上の line bundle に関する定義を vector bundle に拡張することを考える。解析的定義1°は vector bundle へ2つの異った拡張をもつ：positive および中野の positive である。

代数幾何学的定義2°はそのまま自然にvector bundleへ拡張される。代数幾何学的に定義される概念をampleとよぶことにする。位相幾何学的定義3°は種々の拡張が可能であろう。適当な位相幾何学的定義をあたえるのは未解決の問題である。その一つの答としてGriffithsによる位相幾何学的positiveがある。以上の定義の関係は次のようである。

中野のpositive ⇒ positive ⇒ 代数幾何学的定義 (ample)

?⇗

(?⇒は予想されているが未解決)　Griffithsによる位相幾何学的定義

主論文においては曲線上ではすべての定義が一致すること，したがって定義は適当であることを示す。曲線の種数によって異った証明をあたえる。種数0，1の場合は分類論による証明をする。0の場合は何も問題にならない。1の場合は副論文1°で証明された。主論文では種数が2以上の時を扱

う。この場合は stable bundle の unitary 表現の理論を使う。証明自身は stable bundle の理論を使って比較的簡単に行れるが，stable bundle の unitary 表現の理論はそれ自体かなり深い結果であると考えられる。

曲面上の H-stable bundle の理論は現在建設されつつあるが，曲面上の vector bundle の stability を二つの立場から考察するのが才二の目的である。

才一の立場は ample vector bundle を研究する視点からである，つまり H-stable bundle には ample になるための簡単な Chern 類による判定法が存在するか。

才二の立場はアーベル曲面上の H-stable bundle を研究する視点からである，つまりアーベル曲面上の H-stable bundle を群論的に，テーター関数の場合のように，とらえるこ

とは可能か。

二つの立場に立つ理由は次の通りである：
1° 曲線上においては次数が正である stable bundle は ample である。ただし種数が正になるとこの主張は正しくないことは注意を要する。
2° 楕円曲線上の stable bundle の理論は群論的にとらえることができる。実際，古典的なテーター関数の理論に含まれてしまう。

第一の立場からは，E が rank 2 の H-stable bundle で，$c_1 > 0$, $c_1^2 - 4c_2 \geq 0$ ならば E が広野の positive，したがってとくに ample であることを示す。ただし残念ながら曲面に制限がついて射影曲面，アーベル曲面，ruled surface，超楕円曲面のうちの一つでなければならない。この制限は不用であろうが証明には上記曲面上の vector bundle の細かい性質を使う。

第二の立場に立ってしらべる

にあたって，テーター関数の理論の場合のように $\mathfrak{g}(E)$，$H(E)$ を定義する。もしEがH-stableで $c_1^2-4c_2\geq 0$ ならばEは群論的にとらえることができる。このようなvector bundleは古典的なテーター関数の理論に含れてしまう。vector bundleを研究する視点からはこの種のbundleはconnectionをもつbundleとならんでよく解っておりあまり興味をひかない。しかし残念なことにH-stableであっても $c_1^2-4c_2<0$ となると一般にはH-stable bundleの性質は $\mathfrak{g}(E)$ にあまり反映されない。なぜかというとこの場合常にためかというとそうでもない。一般論をつくるには到っていない。ただ興味ある一例をあげるのにとどまる。アーベル多様体上のよりvector bundleの族を見つけることが問題として残る。なお標数 $p>0$ の場合，$\mathfrak{g}(E)$，$H(E)$ を群概型としてみた時その研究がEの微分的性質をしらべる

上でいかに有力であるかは~~参考~~副論文2°を参照されたい。そこではstratificationをもつこととhomogeneousであることが同値であることがg(E), H(E)を用いて証明されている。

主論文では第三の問題として消滅定理を論ずる。アーベル多様体上のline bundleの消滅定理の調和積分を使った証明およびGriffithsの消滅定理の証明のDe Rhamコホモロジーを使った簡略化が与えられる。アーベル多様体上のline bundleの消滅定理自体はよく知られたものである。将来アーベル多様体上のvector bundleにも消滅定理を拡張したいため調和積分を使った証明を与えておく。この種の議論には解析的方法—調和積分が非常に強力であると思われるからである。

Griffithsによる証明はMorse理論によって$\mathbb{Z}$-係数の"vector bundleに関す

る Lefschetz の定理"というべきものを証明し、それを使って消滅定理を導く。$\mathbb{Z}$-係数のコホモロジー自体重要であろう、しかし消滅定理の証明には $\mathbb{C}$-係数のコホモロジーで十分である。De Rham コホモロジーを使う証明には次の特色がある。まず証明が簡単なことそれに代数的であることである。したがって標数が正の場合に l-adic または crystaline コホモロジーに上の vector bundle に関する Lefschetz の定理を拡張したくなる。

　さらに次の定理が証明される:

定理. X を代数的多様体、L を X 上の line bundle とする。ある $m>0$ に対して $L^{\otimes m}$ が global sections で生成され、それらによる X の射影空間への埋めこみを考える。X の像の次元を s とすれば $H^i(X, L^{-1})=0$, $i \leq s-1$

　L が ample ならば小平の定理である。したがってこの定理は

その一般化である。3次元以上の多様体論に応用できる定理だと思われる。