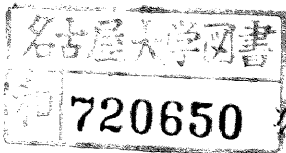


報告書 乙 1×64

非線形最適化法によるトカマクプラズマ解析
に関する研究

昭和52年7月

東 井 和 夫



目次 720650 次

第 1 章 序 論 1~8

§ 1-1 トカマクプラズマ研究の現状 1

§ 1-2 本研究の目的と意義 3

参考文献 6

第 2 章 非線形最適化法の概要と応用における問題点 9~18

§ 2-1 最適化法の歴史と現状 9

§ 2-2 非線形最適化法の応用について 10

§ 2-3 非線形最適化法のための数値計算アルゴリズム 13

参考文献 17

第 3 章 測定データ処理によるプラズマ諸量の導出 19~75

§ 3-1 緒言 19

§ 3-2 プラズマ電流およびループ電圧の波形分析によるプラズマの交流インダクタンスおよび有効半径の評価 23

3. 2. 1	交流インダクタンスの測定方法	23
3. 2. 2	非線形最小2乗法による波形分析	31
3. 2. 3	プラズマ有効半径の評価方法	36
3. 2. 4	JFT-2 プラズマに対する実験結果	38
§ 3-3	プラズマ導電率の空間分布測定	43
3. 3. 1	各種導電率分布に対するプラズマの交流インダクタンスおよび交流抵抗	43
3. 3. 2	非線形最適化法の導入とテスト計算	56
3. 3. 3	JFT-2 プラズマの導電率分布の決定	67
3. 3. 4	非線形最適化法によるプラズマ導電率分布決定に関する今後の課題	70
§ 3-4	非線形最適化法による測定データ処理法の展望	70
§ 3-5	結 言	72
	参考文献	73

第 4 章	非線形境界値問題の解析	76~96
§ 4-1	緒言	76
§ 4-2	ダイナミックリミターを使用した実験に おけるイオン温度	76
§ 4-3	イオン温度の定常分布	81
4.3.1	イオンのエネルギーバランス	81
4.3.2	非線形境界値問題の最適化問題 への変換	81
4.3.3	計算結果	87
§ 4-4	ダイナミックリミターを使用した実験 結果に対する解釈	91
§ 4-5	定常状態解析への非線形最適化 法の応用	92
§ 4-6	結言	94
	参考文献	96
第 5 章	外部磁場コイルの最適設計	97~118
§ 5-1	緒言	97
§ 5-2	制御磁場コイルの最適配位	97

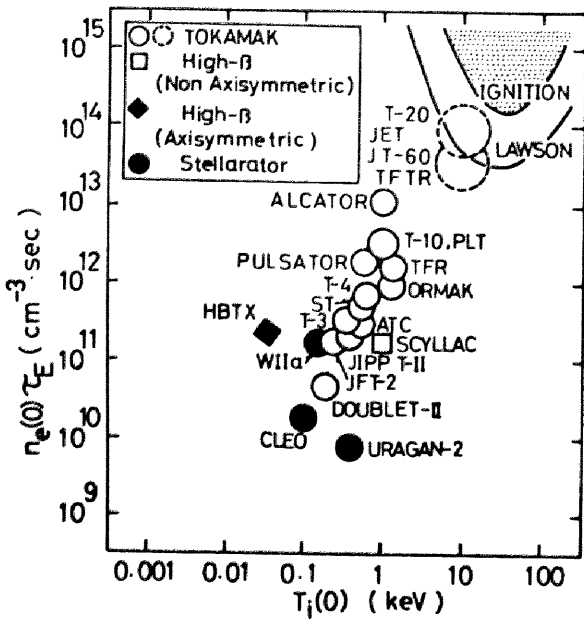
5. 2. 1	制御磁場コイル	97
5. 2. 2	非線形最適化法による最適配位の 決定方法	100
5. 2. 3	円筒面上に置かれた直線電流群による 一様垂直磁場の発生	105
5. 2. 4	制御磁場コイルの最適設計	108
§ 5-3	空心変流器1次コイルの最適設計	112
§ 5-4	制御磁場コイルおよび空心変流器 1次コイルの最適設計における問 題点	114
§ 5-5	トランス装置における最適設計	116
§ 5-6	結 言	117
	参考文献	118
第 6 章	結 論	120
	謝 辞	122
	本論文に関して発表した論文リスト	123

第 1 章 序 論

§ 1-1 トカマクプラズマ研究の現状

トカマク装置の開発研究はソ連の Kurchatov 研究所で各国に先がけて 1960 年代初期に着手され、約 10 年間で数台のトカマク装置が建設された。1969 年の Dubna 会議を契機としてトカマク装置は高温で比較的高密度の安定なプラズマを発生するのに非常に有望であるとの一般的評価が得られた。その後数年間、トカマクプラズマの研究は Kurchatov 研究所のみならず世界各国で精力的に進められてきた。MHD 平衡および安定性、粒子およびエネルギーバランス等に関する多くの実験データの蓄積と詳細な理論的解析とが相まってその核融合炉心プラズマとしての有利な性質がさらに明らかとなった^{1)~3)}。現在得られているトカマクプラズマのパラメータは炉心プラズマのそれに最も近い位置を占めており、これを第 1-1 図の $T_i(0) - n_e(0)\tau_E$ 線図 ($T_i(0)$: プラズマ中心でのイオン温度, $n_e(0)$: プラズマ中心での電子密度および τ_E : エネルギー閉じ込め時間) 上に示す。

同時に、核融合達成のための新たな問題点も指摘されるようになり⁴⁾、研究は新しい段階に入ったといえる。すなわち、プラズマ物理中心の研究から工学および技術に重点を置いた研究に移行すべき時期に達しているといえる。このような情勢を背景にかなり技術的な面に重点を置いた研究が行なわれるようになった。たとえば真空系の改良による極めて清浄な真空条件の実現 (TFR⁵⁾, ALCATOR⁶⁾, JIPP T-Ⅱ⁷⁾), 抵抗加熱に続く新しいプラズマ加熱法の研究 (ORMAK⁸⁾, TFR⁹⁾, ATC^{10, 11)}), プラズ



第1-1図

主なトーラス型核融合実験装置のプラズマパラメータの $n_e(0) \cdot \tau_E - T_i(0)$ 線図上で占める位置。

$n_e(0), T_i(0)$ および τ_E はそれぞれプラズマ中心での電子密度, イオン温度およびエネルギー閉じ込め時間である。この図のデータは1977年4月現在までに公開された文献等に基づいて作成したものである。

マの平衡位置のフィードバック制御 (CLEO¹²⁾, TO-1¹³⁾, JIPP T-II⁷⁾, DITE¹⁴⁾, 不純物の除去法の開発 (JFT-2 a¹⁵⁾, ATC¹⁶⁾, DITE¹⁴⁾) 等をあげることができる。

さらに、多くのトカマク装置で得られたデータにより組立てられたエネルギー閉じ込め時間, イオン温度等に関する比例法則に基きトカマク装置の大型化が進められた (T-10¹⁷⁾ および PLT¹⁸⁾)。これらの大型トカマク装置での実験結果は同比例法則の適用範囲をさらに広げ得ることを示した点において注目に値する。T-10 および PLT に続き、臨界炉心プラズマの生成を狙う超大型装置の設計も実験データを最大の根拠とし、新しい試みを加味しながら米、ヨーロッパ連合、ソ連および日本の各国で準備的検討あるいは詳細設計に入っている¹⁹⁾。さらには一部製作を開始している。これらの実験結果は早ければ1981年には発表されるであろう。

§ 1-2 本研究の意義と目的

トカマク装置による核融合研究においては、上に述べたようにそれまでに蓄積された実験結果から次期世代の装置の規模や形式を決定していく方法をとっている。このため、多種多様の大量のデータをできるだけ短時間にしかも精度よく処理するとともに、データに含まれる情報を最大限に引き出し装置設計に十分反映していくことが以前にもまして必要となってきた。この観点から主要なトカマク装置では専用のデータ処理装置を実験装置の一部として持つのが一般的となってきた²⁰⁾。これらの処理装置は大量のデータを手際よく実験中に処理することを主要な目的としており精度はそれ程高くない。また、計算時間を要するようさらさら複雑な処理、たとえば測定データにある種の積分変換を必要とするような処理は目的としていないのが普通である。しかし、今後はさらに高精度でしかもデータを最大限に活用し含まれる情報を引き出すよう処理方法に特別の工夫が必要である。

上のような目的に対し最小 2 乗法が最も自然で直観的な手段といえる。最小 2 乗法は測定データ群と予め設定された物理的モデルにより算定される計算データ群との「距離」を目的関数とし、これが最小となるようモデルのパラメータを決めることで問題の解が得られる。このような目的関数の最小化、すなわち最適化の手法は数理計画法ともいわれる。一般に、目的関数は未知パラメータに関して非線形な依存性を有しているか非線形な制約条件をもつことが多く、目的関数の最小化を行うには非線形最適化法²¹⁾によらなければならない。このような最適化法はその発展の経過から自然科学の幅広い基礎をなす古典変分問題の直接解法として、また線形および非線形の各種方程式の数値解法として注目され、一方、最小 2 乗法に代表される回帰分析

に応用されるなど「総合」から「分析」までの広範な適用範囲をもつものである。

本論文においてトカマクプラズマに関連した測定データの処理、非線形境界値問題の解析および磁場設計への非線形最適化法への応用を試み、非常に良い結果が得られることを示す。

本論文の内容はおよそ次の通りである。

まず第2章で非線形最適化法の概要と応用面での問題点について述べる。また非線形最適化法の基本的な2種類のアルゴリズムについて述べる。ひとつは目的関数の微分を使用するアルゴリズムに属するもので、目的関数のヘシアン行列の性質に応じて最大傾斜法、変形Newton-Raphson法およびNewton-Raphson法を使い分ける最適化計算法²²⁾である。いまひとつは目的関数の微分を必要としない代表的なアルゴリズムのシンプレックス法²³⁾である。

第3章においては、筆者が従事したJFT-2トカマク(日本原子力研究所)²⁴⁾におけるプラズマ閉じ込め実験で得られた測定データを最小2乗法により最適化問題に変換して処理しプラズマに関する情報を引き出す。すなわち、プラズマの有効半径の評価およびプラズマ導電率分布の測定によく用いられる交流インダクタンスの測定結果の解析への応用を試みる。まず、§3-2で交流インダクタンス測定に際し得られる減衰振動波形の波形分析が非線形最適化法により「曲線のあてはめ問題」として扱うことにより精度よく行うことができることを示す。このようにしてJFT-2プラズマの交流インダクタンスの周波数依存性が得られた。また、固体リミター⁽¹⁾のトカマクプラズマの閉じ込めに与える影響の研究とプラズマ電流密度分布制御への応用を目的として行われたダイナミックリミターを使用した実験で、交流インダ

クタンスの時間変化からプラズマ有効半径の時間変化を導出し、この半径がリミターの動きとともに増大することを明らかとした^{25, 26)}。 § 3-3 では、 § 3-2 で得た交流インダクタンスの周波数依存性からプラズマ導電率の半径方向分布を非線形最適化法によって能率よく決定できることを示し、 JFT-2 プラズマの導電率分布を推定する²⁷⁾。 § 3-4 において非線形最適化法がその他の重要な測定データの処理において非常に強力な手段となることを例をあげて指摘する。

第4章では、ダイナミックリミターを使用した実験で得られたイオン温度の特徴的な時間変化についての解釈を加えるため、イオン温度の定常分布の導出を行う。この場合、非線形境界値問題を解く必要があり、それを変分形式に変換し、非線形最適化法を適用し、良好な結果が得られることを示す²⁸⁾。さらに、非線形最適化法はトカマクプラズマの各種定常状態の解析に対しても強力な手法となることも述べる。

第5章においては、非線形最適化法の磁場設計への応用として、トカマクプラズマの平衡維持のための制御磁場コイルおよび空心変流器1次コイルの最適配位の具体例を示す²⁹⁾。トカマク型装置の設計における非線形最適化法のその他の応用の可能性についても記述する。

最後に、結論と今後の発展についてまとめる。

なお、本論文では特別な記述のないかぎり MKSA 単位系を使用するものとする。

(注) トカマクプラズマの副半径を規定するとともにプラズマによる真空容器の損傷を防ぐために使用される金属板(通常、モリブデン製)であり、円形の口径を有する円板型とレール型がよく使用される。ダイナミックリミターは後者の型で、上下のモリブデン板を上下方向に高速で引き抜くことができるような構造となっている(後述の第3-10図)。

参 考 文 献

- 1) L. A. Artsimovich, Nucl. Fusion 12 (1972)215.
- 2) J. F. Clarke, ORNL-TM-4585(1974).
- 3) H. P. Furth, Nucl. Fusion 15 (1975)487.
- 4) B. B. Kadomtsev and G. N. Popkov, in Nucl. Fusion Special Supplement (Proc. of an IAEA Workshop, Culham, 1974), IAEA(1974)243.
- 5) C. Breton, et al., in Controlled Fusion and Plasma Phys. (Proc. 6th Europ. Conf. Moscow, 1973) 1, 9.
- 6) R. Parker, et al., in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 5th Int. Conf. Tokyo, 1974) Paper A8-4.
- 7) S. Itoh, et al., in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden, 1976) Paper D-3.
- 8) L. A. Berry, et al., in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 5th Int. Conf. Tokyo, 1974) Paper A5-2.
- 9) T. F. R. Group, in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden, 1976) Paper A4-2.
- 10) K. Bol, et al., in Symposium on Toroidal Plasma Confinement (Proc. 3rd. Int. Symp. Garching, 1973) B-12.

- 11) K. Bol, et al., Phys. Rev. Letters **32** (1974)661.
- 12) J. Hugill and A. Gibson, Nucl. Fusion **14** (1974)611.
- 13) L.I. Artemenkov, P.I. Koslov, P.I. Melikhov and V.S. Svishev, in Controlled Fusion and Plasma Phys. (Proc. 6th Europ. Conf., Moscow, 1973)153.
- 14) J.W.M. Paul, et al., in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden, 1976) Paper A17.
- 15) T. Tazima, et al., in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 5th Int. Conf. Tokyo, 1974) Paper A1-2.
- 16) P.E. Stott, C.C. Daughney and R.A. Ellis, Jr., Nucl. Fusion, **15** (1975)431.
- 17) A.B. Berlizov, et al., in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden, 1976) Paper A-1.
- 18) D. Grove, et al., in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden, 1976) Paper A-2.
- 19) Report on the IAEA Technical Committee Meeting, Dubna (1975), Nucl. Fusion **15** (1975)909.
- 20) P.A. Thompson, et al., MATP-1032(1974).
- 21) J. Kowalik and M.R. Osborne, Methods for Unconstrained Optimization Problems (Elsevier, 1968).

- 22) E. Van Der Voort and B. Dorpema, Report of the Joint Nuclear Research Center, EUR 4777e(1972).
- 23) J.A. Nelder and R. Mead, Computer J. 7 (1965)308.
- 24) Nuclear Fusion Lab., JAERI-memo 4084(公開)(1970).
S. Itoh, et al., JAERI-M 5385(1973).
- 25) S. Itoh, T. Sugawara, N. Suzuki, T. Takeda and K. Toi, Nucl. Fusion 14 (1974)581.
- 26) K. Toi, T. Takeda, N. Suzuki, T. Sugawara, S. Itoh, H. Shirakata, K. Takahashi and S. Yano, Nucl. Fusion 15 (1975)637.
- 27) K. Toi, T. Takeda and S. Itoh, Submitted to Japan. J. appl. Phys.
- 28) K. Toi and T. Takeda, Nucl. Fusion 14 (1974)577.
- 29) K. Toi and T. Takeda, Japan. J. appl. Phys. 16 (1977)325.

第 2 章 非線形最適化法の概要と応用における問題点

§ 2-1 最適化法の歴史と現状

最適化を行うということは人類が長い間追求し続けてきた重要な課題である。最適化問題として数学的基礎づけがなされたのはかなり古く、微分学の発展時期にまでさかのぼる。最適化問題は、さらに一般的に言えば極値問題の 1 種であり、物理的には平衡状態あるいは定常状態を決めるという基本的な問題と等価である。したがって、最適化という操作は非常に多くの分野と密接な関係をもっている。たとえば、データ処理に関連して最小 2 乗法や最尤推定、定常問題に関連した境界値問題や変分問題の解法としての有限要素法や重みつき残差法、種々のシステムの設計に関連して最適設計および自動設計、さらには動的計画法や最適制御など重要な関連分野をあげることは容易である。このように最適化という課題は技術の発展とともに近年ますます注目されるようになり、多くの最適化計算法が提案された。しかし、手計算のみが可能な時代に提案された手法は際立った成果を上げるに致らなかった。電子計算機の出現は最適化問題の計算法を一変させてしまうほど大きな影響をもたらした。1960 年頃から関数の線形性を特に必要としない非線形最適化法の数々の手法が電子計算機の利用を前提として開発された。新しい非線形最適化計算法の開発は今後も続けられるであろうが、基本的な手法はほぼ出尽した観がある。

制約条件のない非線形最適化問題に対し目的関数の微分を必要としない直接探索法やそれを必要とする傾斜法のいろいろの手法^{1,2)}の応用はかなりの

成功をおさめている。また、制約条件付きの非線形最適化問題の解法に対してはSUMT法³⁾(注)が有望な方法として注目されている。今後は、これからの手法の数学的体系化と一方ではこれらを駆使し多くの実際的な問題を処理していくことが主な関心事となるであろう。

§ 2-2 非線形最適化法の応用について

本論文では第1章でも述べたように非線形最適化法の応用を主要の目的とし数学的証明等には一切ふれないものとする。

実際の応用に関して必要な事項について要約する。

種々の問題を最適化問題として扱うためには最適性の評価尺度である目的関数を準備する必要がある。このような意味で評価関数とも呼ばれるが、本論文では「目的関数」と呼ぶことにする。目的関数は対象とする問題を最も適確に記述し、しかも評価規準として最も妥当なものを選ぶ必要がある。たとえば、「測定データとモデル計算値との残差の2乗和」、「ポテンシャルエネルギー」、「コイルが指定領域内につくる磁場エネルギー」等である。前2者については未知パラメータに関して最小化することにより、最後の例では最小化あるいは最大にすることにより最適化問題が解かれる。目的関数については第8章以降において具体的な例をもって詳しく述べる。

最適化問題は制約条件を有する場合と有しない場合とに大別される。制約

(注) SUMTは Sequential Unconstrained Minimization

Technique (逐次制約条件なし最小化手法)の略である。制約条件付きの最適化問題を制約条件なしの最適化問題に変換して最適化計算を実行するために開発された手法である。

条件とは目的関数に含まれる未知パラメータの各々が取りうる値の範囲を意味している。制約条件の扱い方としては現在、それらを陽な形で処理する有効な手法はないといってよく、目的関数に制約条件を「罰則項」として加えることにより制約条件なしの最適化問題に変換して最適解を得るSUMT法³⁾が最も一般的である。これについては第5章において例をあげて詳しく論ずる。

次に線形問題と非線形問題の区別を簡単に要約する。一般に、目的関数または制約条件のいずれかあるいは両方とも未知パラメータに関して非線形の場合、非線形最適化問題といわれる。これに対し両方とも線形の場合が線形最適化問題である。ただし、線形とは目的関数が線形ということだけでなく解が線形方程式の組を解くことによって得られる場合を意味している。

非線形最適化問題の場合、求められた解が唯一の最適解であるという保証はない。このような最適化問題の多峰性に関しては、現在知能機械の研究とともに盛んに検討がなされている⁴⁾。しかし、筆者はこの点について最適化計算上特別な手法の導入は行なわなかった。その理由は、本論文で扱う非線形最適化問題においてはその最適解が物理的考察によりある程度まで推定できるからであり、特別な困難なしに不適格な解を捨て去ることが可能であるからである。また、初期推定値を物理的考察で考えられる可能な範囲内でいくつか変更することにより同一結果に収束することも同時に確認し、それを最適解として判定する。収束判定は反復計算の回数に対する目的関数の減少の割合、あるいは未知パラメータの変化の様子、さらには目的関数の勾配ベクトルの大きさの減少の様子等に注目して行ない、その判定規準があまり弱すぎて仮の最小点で計算が打切られないよう注意すべきである。計算停止規準について、Powell⁵⁾の提案がある。それは仮の最小点が計算されたとき、

この点に適当な擾乱を与えて近傍の点に移し、その新しい点から計算を再び始めるといふものである。このようにして得られた最小点がはじめのものと一致すればそれを最適解とし、もし異った場合には両者を結ぶ直線に沿って最小化し、このようにして得られた最小点から再び計算を始めるといふものである。

上記のような多峰性という問題が解決されたとしても、測定データ処理においては新たな問題が生じる。設定したモデルの未知パラメータの数を変えることにより、その各々の場合について最適解が得られる。通常、未知パラメータの数を増せば増すほど測定データによく合う結果が得られるが、次第に測定データに含まれる各種の誤差やばらつきに引きずられすぎ、真の物理構造からかけ離れてくる。このため未知パラメータの数をいくつに選んだ場合の最適解を真の解として採用するかは十分注意を要することである。従来、この判定は種々の角度からの物理的考察によってなされ、一応の成果をあげてきた。しかし、このような考察でも最適解の取捨選択が困難な場合が少なくない。このような場合には、最近提案された情報量規準 AIC ⁶⁾ を導入し、 AIC が最小のものを最も実験データに合った最適解として採用する方法である。§ 3-3 でトカマクプラズマの交流インダクタンスの周波数依存性より導電率分布を求める場合に具体的に述べる。そこでは、この AIC 最小化規準は我々の物理的直観と非常によく一致するものであることが示される。

最適化問題における未知パラメータ間の尺度変更(スケーリング)は非常に重要であり、現在までに開発されている非線形最適化アルゴリズムの機能を十分発揮させるために決定的な役割を持っている。良い尺度変更を行えばどの未知パラメータの変化に対しても目的関数に同程度の変化をもたらすことになり、このとき目的関数の等高線は同心円に近いものとなり最大傾斜法

によっても満足な結果が得られることになる。しかしながら、上記のような良い尺度変更を行うことは容易ではない。大域的な尺度変更は殆んど無理であるが、最小点の近傍では関数が2次形式で表わされるという仮定のもとで局所的な尺度変更が可能である。しかし、反復計算の途中でこのような局所的な尺度変更が可能な領域に未知パラメータが入ってくればよほど特異な性質の関数でないかぎり最適解に近いことになり、このような尺度変更なしでも最適化計算を成功させることは可能である。本論文の扱っている問題に関するかぎりでは、このような尺度変更は意識的には行なっていない。ただし、未知パラメータ間の数値的不均衡ができるだけ小さくなるようそれらを適当に規格化し、未知パラメータの選択に注意を払った。このことについて第3章以降で具体的な例によって示す。

§ 2-3 非線形最適化法のための数値計算アルゴリズム

§ 2-2 で述べたように、目的関数が設定されれば適当な最適化計算アルゴリズムにより最小化を行えばよい。目的関数の最小点を求めるため多くの異なった数値計算アルゴリズムが提案されている。しかし、あらゆる最適化問題に対して常に効率の良いアルゴリズムはないといってよい。このため対象とする問題の性質に応じてアルゴリズムを使いわけの必要がある。最適化計算のためのアルゴリズムは直接探索法と傾斜法の2種類のタイプに大別できる。

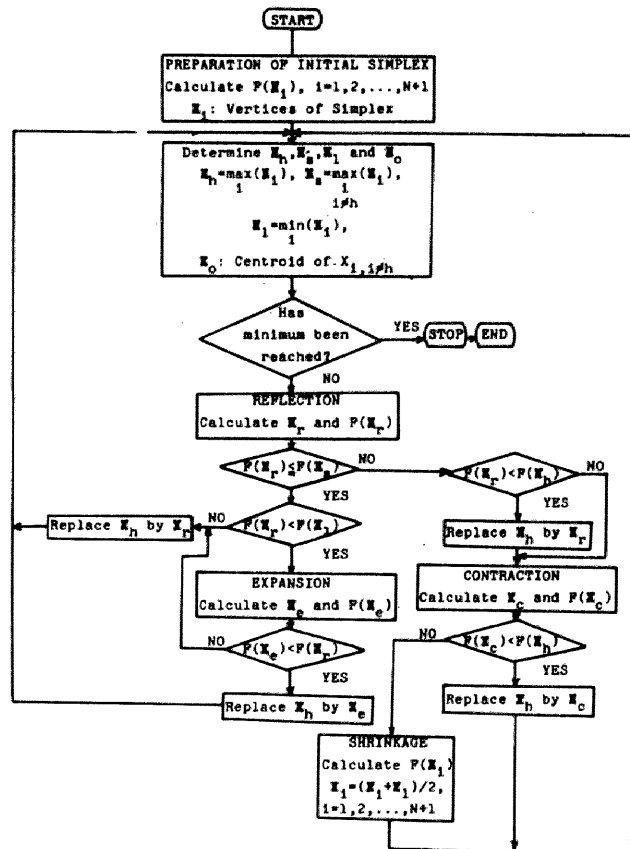
直接探索法は試行解を繰り返し検査することに基礎をおいたもので、それらを簡単な方法で比較することによって次の探索の実行基準を与える方法である。この方法は目的関数値が計算できれば連続関数の一般に対し適用可能

である。逆にいえば、関数値のみを単純な設問に対して「YES」か「NO」の答を出すためだけにしか使用しないため、最小値の存在する領域を大きくばに決めるときには有効であるが、最終的な収束率は悪く最小値を正確に決定する必要がある問題に対してはあまり効果的でないといえる。ただし、目的関数が測定誤差を含むような測定データから構成されているような場合は正確な最小点を求めること自体あまり意味がない。そのような場合に対する直接探索法の応用は特に有効である。直接探索法のうちで種々の数値計算テストでも良好な成果をあげている代表的なアルゴリズムはNelderとMeadによるシプレックス法⁷⁾である。シプレックス法は目的関数が勾配の不連続点または線形区間を含んでいる場合でも適用可能である。

一方、傾斜法は目的関数に関する情報を関数値のみでなく、勾配に関する情報をも用いようとする方法である。この方法では一般に探索の方向を決定する場合に目的関数の偏微分すなわち勾配ベクトルあるいはヘシアン行列を用いて探索方向を与える降下ベクトルを決める。目的関数が最小値の近傍で正値二次形式で十分良く近似できる場合、傾斜法のなかで特にDavidon-Fletcher-Powellの共役傾斜法⁸⁾と目的関数の偏微分を陽な形で計算する必要のないPowellの共役傾斜法⁹⁾が特に有望である。特に前者は、目的関数の微分が解析的形で容易に計算できる場合は最も効率がよいと報告されている^{1, 2)}。Davidon-Fletcher-Powellの方法はNewton-Raphson法の変形と見なすことができる。

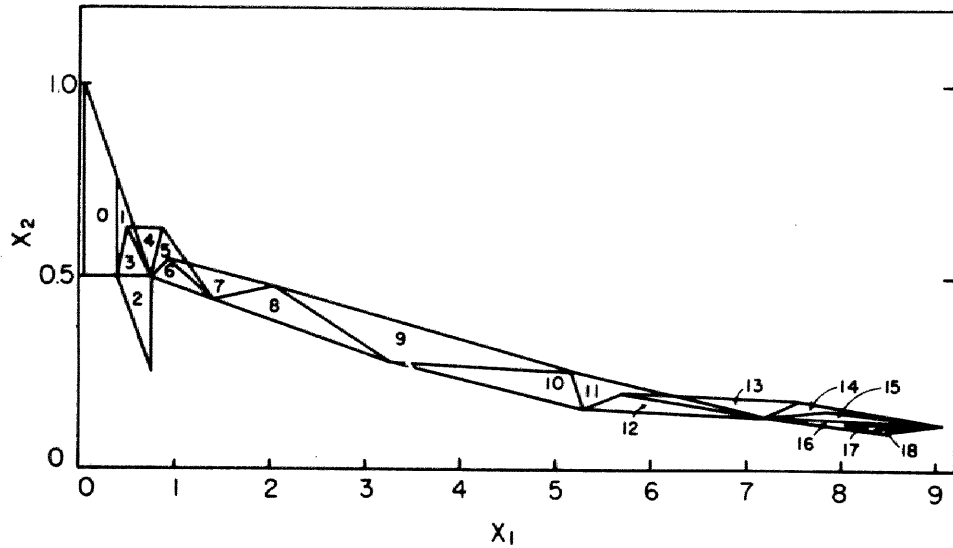
本論文では直接探策法に属するアルゴリズムと傾斜法に属するアルゴリズムを使いわけ良好な結果を得ることができた。前者としてはシプレックス法を用い、目的関数の微分計算が簡単に行なえない場合に適用した。このような場合には微分計算を必要としないPowellの共役傾斜法も試みたが、一

次元探索のステップ幅の選び方が簡単でなくこの方法を用いる特別な利点を見い出せなかったので具体的解析には使用しなかった。シンプレックス法では、 N 次元の場合($N+1$)個の点で形成される幾何学的図形の「シンプレックス(単体)」が主な役割を果す。この方法では鏡像、拡張、収縮および縮小の4種類の基本操作を繰り返すことによりシンプレックスがこのような4種類の基本操作を経て最小点へ向って運動する⁷⁾。この運動は第2-1図に示したフローチャート¹⁾に従って行われる。第2-2図はシンプレックス法によって最小値を見出す様子の1例を示したものである。



第2-1図 シンプレックス法の計算フローチャート, $F(\mathbf{X})$

は未知パラメータを \mathbf{X} とする目的関数の値である。



第 2-2 図 シンプレックス法による最小点探策の様子。X₁ および X₂ は最適化計算によって決定されるべき未知パラメータである。三角形のシンプレックス内に示した数字は反復計算回数を示している。X₁ - X₂ 平面上の目的関数値の細長い谷に沿ってシンプレックスが最小点 (8.2 , 0.11) に向けて運動している。

一方、目的関数の微分が解析的な形で得られる場合には、傾斜法に属する最大傾斜法、Fiacco と McCormick による変形 Newton-Raphson 法³⁾ および Newton-Raphson 法を目的関数のヘシアン行列が正定値性を有するか否かで使いわける計算法¹⁰⁾ を使用した。この計算法では、ヘシアン行列が正定値であるときにのみ Newton-Raphson 法を用い、それ以外の場合は他の二者を用い、特に反復計算のごく初期のみ最大傾斜法を用いるようになっている。また、最大傾斜法と Newton-Raphson 法の橋渡しを変形

Newton-Raphson 法で行ない、最適化計算が円滑に進められるよう配慮されている。

これら二種類の最適化計算法において制約条件がどのように取り入れられているかを簡単に記述する。まずシンプレックス法では制約条件からはずれた領域にシンプレックスの任意の頂点がいり込んだとき、その頂点での目的関数が十分大きな値を取るよう適当に大きな正の値を乗ずることにより制約条件を考慮した。一方、傾斜法に属する文献¹⁰⁾に与えられている方法においては制約条件つき最適化問題を SUMT 法³⁾により制約条件なしの最適化問題に変換して処理する方法をとった。なお、制約条件が簡単な不等式である場合未知パラメータを制約されない新しい変数に変換することにより最適化¹¹⁾を実行できる場合があるが、本論文ではこのような手法を具体的に用いた例は示していない。

参 考 文 献

- 1) J. Kowalik and M.R. Osborne, **Methods for Unconstrained Optimization Problems** (Elsevier, 1968).
- 2) L.C.W. Dixon, **Nonlinear Optimization** (The English Universities Press Ltd., 1972).
- 3) A.V. Fiacco and G.P. McCormick, **Non-Linear Programming : Sequential Unconstrained Minimization Techniques** (John Wiley, 1968).
- 4) 中村嘉平, 数理科学 *№* 159(1976)19.
- 5) M.J.D. Powell, **Computer J.** 7(1964)155.

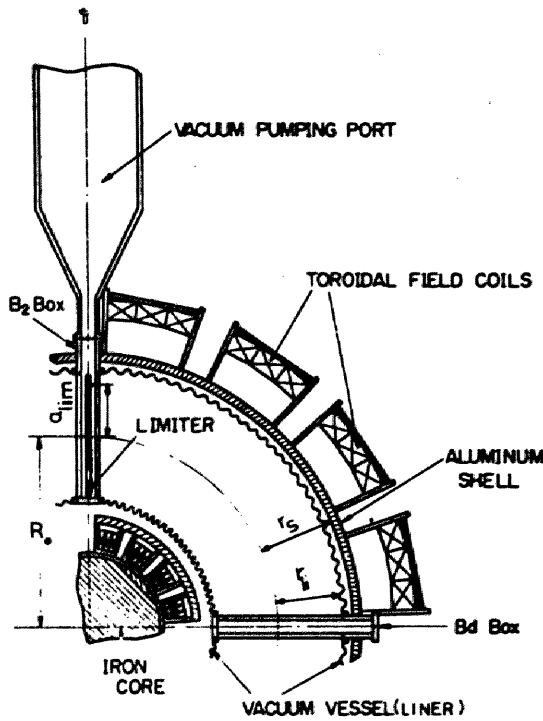
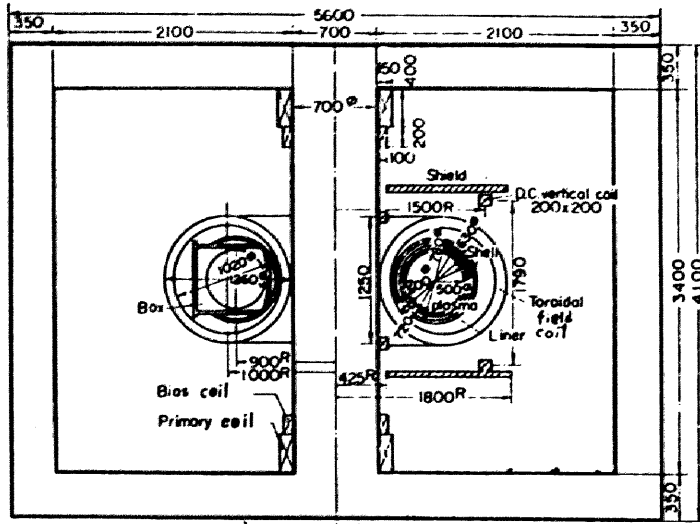
- 6) 赤池弘次, 数理科学 153(1976)5.
- 7) J.A. Nelder and R. Mead, Computer J. 7(1965)308.
- 8) W.C. Davidon, A.E.C. Research and Development Report,
ANL-5990(rev)(1959).
R. Fletcher and M.J.D. Powell, Computer J. 6(1963)163.
- 9) M.J.D. Powell, Computer J. 7(1964)155.
- 10) E. Van Der Voort and B. Dorpema, Report of the Joint
Nuclear Research Center, EUR 4777e(1972).
- 11) M.J. Box, Computer J. 9(1966)67.

第 3 章 測定データ処理によるプラズマ諸量の導出

§ 3-1 諸 言

実験的に得られるデータには測定系の雑音等により生ずる測定誤差や測定対象の再現性に関連した統計誤差が常に重畳される。このように誤差を含む測定データに最もよく適合した物理的モデルを作り上げるための方法として最小 2 乗法が最も効果的である。最小 2 乗法によるデータの処理は広い意味での曲線のあてはめ問題と見なすことができる。§ 3-2 で典型的な「曲線のあてはめ問題」として、減衰振動波形の波形分析を行う。この場合、非線形最小 2 乗法となり、非線形最適化法により未知パラメータが決定される。この波形分析により、JFT-2 トカマクプラズマの交流インダクタンスおよび有効プラズマ半径が導出された。特に後者の結果は、ダイナミックリミターを使用した実験で重要な情報をもたらした。§ 3-3 においては、前節で得られたプラズマの交流インダクタンスの周波数依存性より導電率の空間分布の導出を試みる。ここでは、非線形最適化法が非常に重要な役割を演ずる。このような非線形最適化法による解析方法がトカマクプラズマの閉じ込め実験で得られる種々のデータの処理に非常に有効と考えられるいくつかの例を § 3-4 で示す。

ここで、以後の議論に関係する JFT-2 トカマク装置およびその諸元と実験条件を第 3-1 図および第 3-1 表にまとめて示す¹⁾。



第3-1図 JFT-2トカマク装置の断面図(上側)および $\frac{1}{4}$ 分割部の平面図(下側) 寸法単位はmm。

(a)

Major Radius (R_0)	900 mm
Minor Radius	
Vacuum Chamber (r_{1i})	300 mm
(Liner)	
Shell (Aluminum) (r_s)	360 mm
Thickness	
Liner	0.6 mm
Shell (t_s)	30 mm
Fixed Limiter (Molybdenum)	
Radius of L (a_{lim})	250 mm
M (a_{lim})	200 mm
S (a_{lim})	168 mm
Dynamic Limiter (Molybdenum)	
Minimum Distance (L_d)	250 mm
Maximum Distance (L_d)	500 mm
Maximum Speed	9 m/sec
Maximum Toroidal Magnetic Field (B_t)	1.0 Wb/m [*]
Maximum Vertical Magnetic Field (B_v)	
DC	0.02 Wb/m [*]
Pulsed	-0.02 Wb/m [*]
Flux of the Iron Core (Without Bias)	0.58 V·sec

* 1.8 Wb/m^{*} from Dec., 1974

第3-1表

(a) JFT-2 トカマクの諸元

(b)

Toroidal Magnetic Field (B_t)	1.0 Wb/m ²
Vertical Magnetic Field (B_v)	0.004— 0.015 Wb/m ²
Filling Pressure	6×10^{-5} — 6×10^{-4} Torr.H ₂
Stored Energy of the Ohmic Heating Banks	60 — 172 kJ
Preheating Frequency Power Duration	30 GHz 1 kW 2 msec
The Radius of Limiter Fixed Limiter Dynamic Limiter	250 mm 125 — 250 mm
Maximum Plasma Current	175 kA

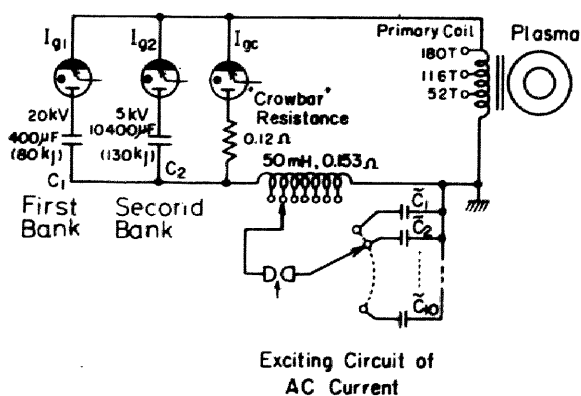
第3—1表

(b) JFT-2 における実験条件

§ 3-2 プラズマ電流およびループ電圧の波形分析によるプラズマの交流インダクタンスおよび有効半径の評価

3.2.1 交流インダクタンスの測定方法

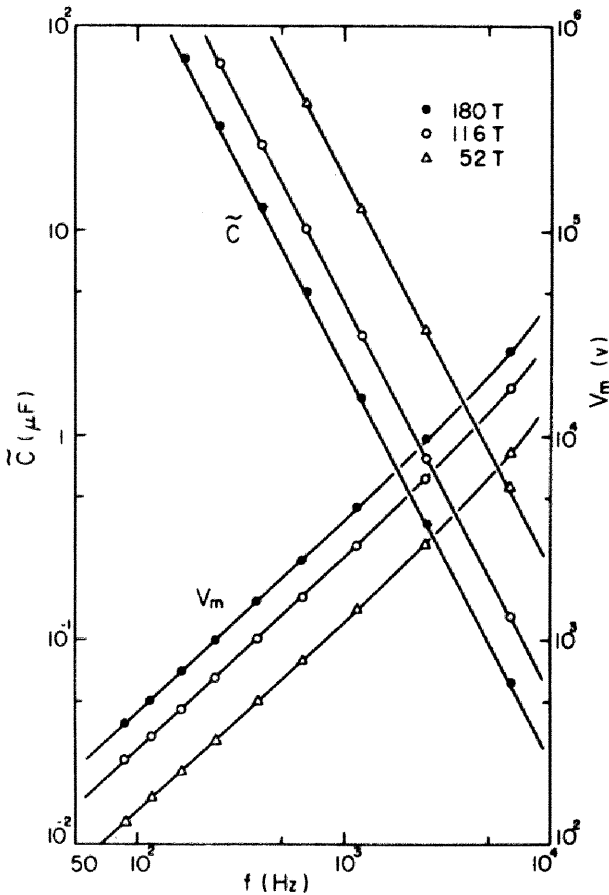
トカマクプラズマの交流インダクタンス測定はプラズマの有効半径の算定あるいは導電率の半径方向分布の導出とに関連し、簡単でしかも有用なトカマクプラズマ計測の独特な手法の一つになりつつある^{2~5)}。この測定法はプラズマ電流に小振幅の交流電流を重畳することにより、その周波数成分に対するループ電圧とプラズマ電流の関係よりプラズマの交流インダクタンスを求めようとするものである。同時に交流抵抗も評価できる。しかし、以下で述べるように周波数が1 kHz程度以下の交流電流に対し通常のトカマクプラズマはほとんど誘導的であり、交流抵抗は小さく満足な精度で測定することは困難である^(注)。したがって、以後主として交流インダクタンスに注目して議論を進める。第3-2図はJFT-2の変流器1次回路と小振幅の交流電



第3-2図 JFT-2の変流器1次回路と交流電流重畳回路

(注) 本論文で扱うJFT-2プラズマに対しても、後述の第3-4図の波形からわかるようにこのことは成立しているといえる。

流重畳回路を示している。交流電流重畳回路は静電容量の異なる10種類のコンデンサおよび気中ギャップスイッチより構成されている。これらのコンデンサの静電容量(\tilde{C})は周波数(f)が約50 Hzから10 kHzとなるように、また充電電圧(V_m)はプラズマ電流値に対する交流電流のピーク値の比が1%以下となるように等価回路に従って算定された(第3-3図)。



第3-3図

交流電流の周波数に対する交流電流重畳回路のコンデンサの必要な静電容量およびプラズマ電流に対する交流電流のピーク値の比を1%以下に抑えるのに要求されるコンデンサの最大充電電圧。変流器1次コイルの3種類の巻数に対する計算結果を示してある。

上記のように電流値に上限を設けた理由は交流電流によるプラズマの付加的加熱やその他の擾乱を十分小さく抑えるためである。第3-3図の \tilde{C} および V_m を求める際、プラズマを交流に対し単なる導体とみなし、しかも導電率がプラズマ中心から表面に向かって減少しているとし、表皮深さ δ が

$f = 20 \text{ kHz}$ で 10 mm , $f = 90 \text{ Hz}$ で 100 mm となるような導電率分布を仮定した。この仮定は、プラズマ表面から中心に向かって厚み δ の環状領域の平均導電率をそれぞれ $\bar{\sigma}_p = 1.27 \times 10^5 \text{ mho/m}$ および $2.81 \times 10^5 \text{ mho/m}$ としたことになる。なお、これらの交流に対するプラズマのインダクタンスおよび抵抗を、簡単のため $\delta < a$ と仮定して

$$\tilde{L}_p = \mu_0 R \frac{\delta}{2a} \quad (3.1)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_p = \frac{R}{a} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}_p \delta} = \omega \tilde{L}_p \quad (3.2)$$

によって評価した。ここで、 R および a はプラズマの主半径および副半径であり、 $\omega = 2\pi f$ である。実験結果では、コンデンサの第1および第2バンク（第3-2図）のきょう体とアース間の浮遊容量のため最大周波数が約 1.2 kHz となった。しかし、周波数が 1 kHz 程度でもトカマクプラズマのような準定常の高温プラズマの交流インダクタンス測定は十分可能である。通常は、プラズマ電流がピーク値に達した後、交流電流重量回路をトリガした。重畳された交流成分 \tilde{V}_{loop} および \tilde{I}_t ^(注) はそれぞれワンターンループおよびロゴキーコイルで測定した。 \tilde{V}_{loop} および \tilde{I}_t の必要な周波数成分のみを適当な帯域幅のバンドパスフィルタを通して取り出した。プラズマ電流に重畳される上記の波形は正弦波ではなく、交流電流重畳回路の静電容量 \tilde{C}_j ($j=1, 2, \dots, 10$) とプラズマインダクタンス、抵抗およびライナー抵抗でその波形がほぼきまるような減衰波

(注) ログスキーコイルがライナーの外側に取付けられているため \tilde{I}_t はライナー電流およびプラズマ電流の交流成分の和となる。

形と減衰振動波形の合成となる。この減衰振動波形が、変流器1次回路に加えられた微小交流電流に対する最も直接的なプラズマからの応答とみなせる。第3-4図はこのようにして得られた典型的な \tilde{V}_{loop} および \tilde{I}_t 波形である。本来は \tilde{I}_t を測定すべきであるが積分器を通すことにより著しく小さな信号となるためその時間微分 \tilde{I}_t を測定するものとした。導電性シェルを有するトカマク装置の交流電流に対する2次側(プラズマ側)の等価回路(第3-5図)を考慮すれば(注), \tilde{V}_{loop} および \tilde{I}_t は次の回路方程式,

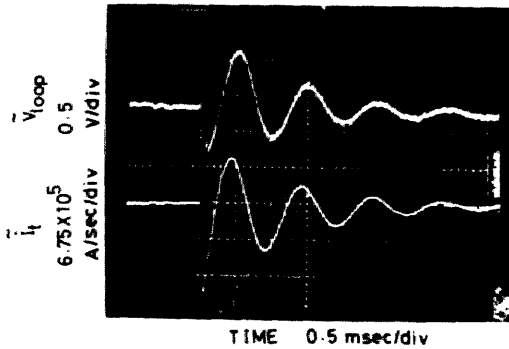
$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}_{loop} &= L_{s1} \tilde{I}_t + \mathcal{R}_{li} \tilde{I}_{li} \\ \mathcal{R}_{li} \tilde{I}_{li} &= \tilde{\mathcal{R}}_p \tilde{I}_p + \tilde{L}_p \tilde{I}_p \\ \tilde{I}_t &= \tilde{I}_{li} + \tilde{I}_p \\ L_{s1} &= \mu_0 R_0 \ln \frac{r_s}{r_{li}} \end{aligned} \right\} (3.8)$$

を満足する。

ここで、 \tilde{I}_{li} , \tilde{I}_p , \tilde{L}_p , $\tilde{\mathcal{R}}_p$ および \mathcal{R}_{li} はそれぞれライナー電流およびプラズマ電流の交流成分(減衰振動波形成分), 交流電流に対するプラズマのインダクタンスと抵抗, そしてライナーのトロイダル方向の一周抵抗

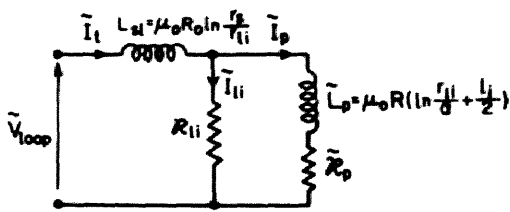
(注) 50Hz 以上の交流電流に対しては, JFT-2のシェルはほとんど完全導体シェルとみなせる。

である。(3.3)式において、交流電流が流れている間は \tilde{L}_p と $\tilde{\mathcal{E}}_p$ は時間的に変化しない、すなわちプラズマの導電率がこの時間の間ほとんど変化しないと仮定する。この仮定の妥当性については \tilde{V}_{loop} 、 \tilde{I}_t の波形パラメータと \tilde{L}_p 、 $\tilde{\mathcal{E}}_p$ との関係を導いたあとで議論する。第3-4図に示した波形の減衰振動成分と \tilde{L}_p 、 $\tilde{\mathcal{E}}_p$ との関係を導くために \tilde{V}_{loop} および \tilde{I}_t を次の



第3-4図

ループ電圧(上段)および2次電流の時間微分(下段)の代表的な交流成分波形。



第3-5図

トカマク装置の交流電流に対する2次側等価回路。 \tilde{I}_t はライナーの外側に設置したロゴスキーコイルにより、 \tilde{V}_{loop} はシエルの内面に設置したワンターンループにより測定される。 \mathcal{E}_{li} はライナー抵抗、 L_{s1} は \tilde{I}_t がシエルとライナーの間に発生する磁束に関連したインダクタンス、および \tilde{L}_p と $\tilde{\mathcal{E}}_p$ はそれぞれプラズマの交流インダクタンスと交流抵抗である。

形に仮定して考える。すなわち、

$$\tilde{I}_t = I_m^* e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi_i) ,$$

(3.4)

$$\tilde{V}_{loop} = V_m^* e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi_v) .$$

(8.3) 式に \tilde{I}_t を代入すれば

$$\tilde{V}_{1\text{oop}} = \tilde{I}_m^* \sqrt{R_1^2(\gamma, \omega) + X_1^2(\gamma, \omega)} e^{-\gamma t} \cdot \sin(\omega t + \phi_i + \varphi) + A'_0 e^{-\alpha t} \quad (3.5)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} R_1(\gamma, \omega) &= -\gamma L_{s1} + \mathcal{R}_{1i} \frac{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma) + \omega^2}{(\alpha - \gamma)^2 + \omega^2} \\ X_1(\gamma, \omega) &= \omega L_{s1} + \mathcal{X}_{1i} \frac{\omega(\alpha - \beta)}{(\alpha - \gamma)^2 + \omega^2} \\ \tan \varphi &= \frac{X_1(\gamma, \omega)}{R_1(\gamma, \omega)} \\ \alpha &= \frac{\mathcal{R}_p + \mathcal{R}_{1i}}{\tilde{L}_p} \\ \beta &= \frac{\tilde{\mathcal{R}}_p}{\tilde{L}_p} \end{aligned} \right\} (3.6)$$

である。(3.5) 式の第 2 項 $A'_0 e^{-\alpha t}$ は以下の議論では無視し、第 1 項の減衰振動項にのみ注目する。このことは、外部電源の励振による回路系の過渡状態で生ずる固有振動を無視し、励振に対する応答のみに注目することを意味している。観測波形から外部励振による応答を精度よく分離できれば、微小交流電流に対する上記のような過渡応答を無視することができる。(3.5) 式と (3.4) 式の $\tilde{V}_{1\text{oop}}$ とを比較すれば \tilde{L}_p および $\tilde{\mathcal{R}}_p$ を未知数とする方程式、

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{R_1^2(\gamma, \omega) + X_1^2(\gamma, \omega)} &= \frac{V_m^*}{I_m^*} \\ \frac{X_1(\gamma, \omega)}{R_1(\gamma, \omega)} &= \tan(\phi_v - \phi_i) \end{aligned} \right\} (3.7)$$

が得られる。 V_m^* , I_m^* , ϕ_v , ϕ_i , γ および ω は第 3-4 図の波形分析により求められるので、(3.6)式と(3.7)式から \tilde{L}_p および $\tilde{\mathcal{R}}_p$ が算出できる。すなわち、(3.6)式において

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha} &= a - \gamma \\ \tilde{\beta} &= \beta - \gamma \\ A &= \frac{R_1(\gamma, \omega) + \gamma L_{s1}}{\mathcal{R}_{1i}} \\ B &= \frac{X_1(\gamma, \omega) - \omega L_{s1}}{\mathcal{R}_{1i}} \end{aligned} \right\} (3.8)$$

とおけば、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}^3 + \frac{A-1}{B} \omega \tilde{\alpha}^2 + \omega^2 \tilde{\alpha} + \frac{A-1}{B} \omega^3 &= 0 \\ \tilde{\beta} &= -\frac{B}{\omega} \tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha} - \omega B \end{aligned} \right\} (3.9)$$

が得られる。これより、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \frac{1-A}{B} \omega \\ \tilde{\beta} &= \frac{A(1-A) - B^2}{B} \omega \end{aligned} \right\} (3.10)$$

が求められる。ただし、ライナー抵抗 \mathcal{R}_{li} およびシュルとライナー間の磁束により規定されるインダクタンス L_{s1} は既知量であるので、(3.7)式を使うことにより A および B は算出できる。このようにして交流電流に対するプラズマのインダクタンスおよび抵抗が

$$\left. \begin{aligned} \tilde{L}_p &= \frac{\mathcal{R}_{li}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} \\ \tilde{\mathcal{R}}_p &= \frac{\tilde{\beta} + \gamma}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} \mathcal{R}_{li} \end{aligned} \right\} (3.11)$$

で算出できる。(3.11)式を導出するとき、 \tilde{L}_p および $\tilde{\mathcal{R}}_p$ は交流電流が存在する間その時間的変化を無視できるとした。この仮定は、プラズマ電流の立ち上がり以外の準定常状態に近い時間に交流インダクタンス測定を行うかぎり十分妥当なものである。JFT-2においても、プラズマ電流がピーク値に達した後交流電流を重畳し、交流インダクタンス測定を行ったので上記の仮定は十分成立すると考えてよい。(3.6)、(3.7)および(3.11)式からわかるように \tilde{L}_p や $\tilde{\mathcal{R}}_p$ は $V_{\text{磁}}$ 等の波形を特徴づけるパラメータに複雑に依存しており、それらのパラメータが精度よく評価されなければ \tilde{L}_p および $\tilde{\mathcal{R}}_p$ に大きな誤差を含むことになる。しかしながら、第8-4図から図式的に減衰振動を特徴づけるパラメータを精度よく求めることは非常に困難である。

3.2.2 非線形最小2乗法による波形分析

3.2.1 で述べたようにトカマクプラズマの交流インダクタンスの精度は電流、電圧の波形分析の精度で大きく左右される。このような理由から、波形分析を精度よく行うため最小2乗法により目的関数

$$F = \sum_{j=1}^J w_j [\hat{f}(t_j) - f(t_j)]^2 \quad (3.12)$$

を設定し、 F を最小にするように波形のパラメータを決める必要がある。ここで、 $f(t_j)$ 、 $\hat{f}(t_j)$ および w_j はそれぞれ j 番目の時刻 t_j での観測波形の値、最適化計算により得られる波形の値および観測波形の測定精度に関連した重み係数である。 $\hat{f}(t)$ の関数形としては第3-4図から判断し最も単純なものを採用し、

$$\hat{f}(t) = f_0 + f_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\omega t + \phi) + f_2 e^{-\gamma_2 t} \quad (3.18)$$

とする。交流インダクタンス測定において対象とする波形成分はこの式の第2項である。第1項は観測波形を離散化して読み取るときに読み取り操作を便利にするための適当なバイアス値である。目的関数 F を7個の未知パラメータ(f_0 、 f_1 、 γ_1 、 ω 、 ϕ 、 f_2 および γ_2)に関して最小化することにより観測波形に最もよく一致する波形を合成できるパラメータの値を決めることができる。 F は未知パラメータに関して非線形であるが、非線形最適化法に基づく手法により上記の最適化操作を能率よく行うことができる。第2章で述べたように非線形最適化法の手法としてはいくつかのアルゴリズムがありそれぞれ長所と短所を有しており問題に応じて使いわける必要がある。

上記の目的関数については勾配ベクトルおよびヘシアン行列が比較的簡単な関数形で求められる。未知パラメータベクトルを

$$(x_i ; i=1, 2, \dots, 7) = (f_0, f_1, \gamma_1, \omega, \phi, f_2, \gamma_2) \quad (3.14)$$

とすれば、勾配ベクトルは

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{\partial F}{\partial x_k} \\ &= \sum_{j=1}^J 2w_j [\hat{f}(t_j) - f(t_j)] \cdot [\delta_{1k} + (\delta_{2k} - \delta_{3k} t_j x_2) \cdot e^{-x_3 t_j} \sin(x_4 t_j + x_5) + (\delta_{5k} + \delta_{4k} t_j) \cdot x_2 e^{-x_3 t_j} \cos(x_4 t_j + x_5) + (\delta_{6k} - \delta_{7k} t_j x_6) \cdot e^{-x_7 t_j}] \\ &= \sum_{j=1}^J 2w_j [\hat{f}(t_j) - f(t_j)] \cdot g_k, \quad k=1, 2, \dots, 7 \end{aligned} \quad (3.15)$$

と表わされる。ここで、

$$\begin{aligned} g_k &= \delta_{1k} + (\delta_{2k} - \delta_{3k} t_j x_2) \cdot e^{-x_3 t_j} \sin(x_4 t_j + x_5) \\ &\quad + (\delta_{5k} - \delta_{4k} t_j) \cdot x_2 e^{-x_3 t_j} \cos(x_4 t_j + x_5) \\ &\quad + (\delta_{6k} - \delta_{7k} t_j x_6) \cdot e^{-x_7 t_j} \end{aligned} \quad (3.16)$$

である。またヘシアン行列は、

$$\begin{aligned}
H_{kl} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_k} = H_{lk} \\
&= \sum_{j=1}^M 2w_j \left\{ g_k g_l + [\hat{f}(t_j) - f(t_j)] \frac{\partial g_k}{\partial x_l} \right\} \\
&\qquad\qquad\qquad k, l = 1, 2, \dots, 7
\end{aligned}
\tag{8.17}$$

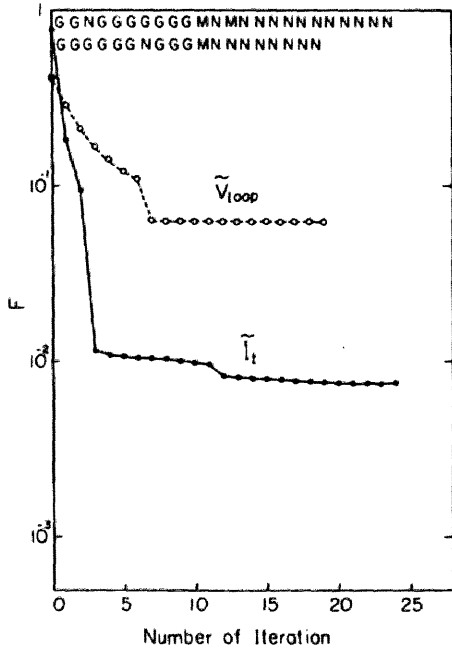
となり、 $\frac{\partial g_k}{\partial x_l}$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_k}{\partial x_l} &= - \left[\delta_{3k} \delta_{2l} t_j + (\delta_{2k} - \delta_{3k} t_j x_2) \delta_{3l} t_j \right. \\
&\quad \left. + (\delta_{5k} + \delta_{4k} t_j) (\delta_{5l} + \delta_{4l} t_j) x_2 \right] e^{-x_3 t_j} \\
&\quad \cdot \sin(x_4 t_j + x_5) + [(\delta_{2k} - \delta_{3k} t_j x_2) (\delta_{5l} + \delta_{4l} t_j) \\
&\quad \left. + (\delta_{5k} + \delta_{4k} t_j) (\delta_{2l} - \delta_{3l} t_j x_2) \right] e^{-x_3 t_j} \\
&\quad \cdot \cos(x_4 t_j + x_5) - [\delta_{7k} \delta_{6l} t_j + (\delta_{6k} - \delta_{7k} t_j x_6) \\
&\quad \cdot \delta_{7l} t_j] e^{-x_7 t_j} \quad , \quad k, l = 1, 2, \dots, 7
\end{aligned}
\tag{8.18}$$

それ故、目的関数の微分を用いる収束率の大きい Van der Voort と Dorpema の最適化計算法⁶⁾を用いる。この計算法はヘシアン行列の正値性を判定しながら最大傾斜法、変形 Newton-Raphson 法および Newton-Raphson 法を使いわけるものであることは第 2 章ですでに述べた通りである。

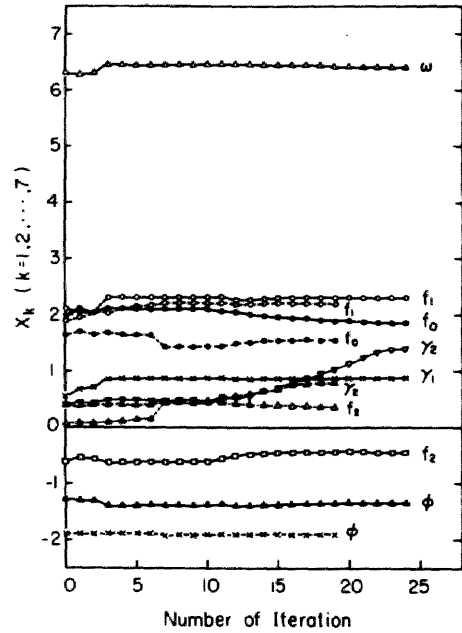
第 3-4 図の波形を非線形最適化法で分析した結果を以下に示す。第 3-6 図および第 3-7 図はそれぞれ反復計算回数に対する目的関数の減少の様子と未知パラメータの収束状態を示している。この場合、電流微分波形 \tilde{i}_t

の未知パラメータとして $(f_0, f_1, \gamma_1, \omega, \phi, f_2, \gamma_2)$, 電圧波形 \tilde{V}_{loop} に対しては $(f_0, f_1, \phi, f_2, \gamma_2)$ を選んだ。



第 3-6 図

\tilde{I}_t および \tilde{V}_{loop} の各波形に対する目的関数値と反復計算回数との関係。図中の G, M および N はそれぞれ最大傾斜法, 変形 Newton-Raphson 法および Newton-Raphson 法が使用されたことを示している。



第 3-7 図

第 3-6 図に対応した未知パラメータの収束状態。 \tilde{I}_t については 7 変数で 24 回の反復計算 (実線) で, \tilde{V}_{loop} については 5 変数で 19 回の反復計算 (破線) で収束している。なお, \tilde{V}_{loop} の γ_1 および ω は \tilde{I}_t で得られたものと同一であるとしてある。

これは, \tilde{I}_t および \tilde{V}_{loop} をそれぞれ独立に (328) 式の形で与えられるとして 7 次元の最適化計算を実行したとき γ_1 と ω はそれぞれの波形について同一の値をもつはずであるが若干の差異が生ずることがたびたびあるため, 波形の雑音レベルや歪の比較的小さい \tilde{I}_t についてまず 7 次元の最適化を実行

し、この結果得られた γ_1 および ω は \tilde{V}_{loop} についても同一の値をもつとして
 予め与えることとしたことによる。そして、7個の未知パラメータからこの2個を除いて、
 5次元の最適化によって \tilde{V}_{loop} 波形の他のパラメータの最適値を求めるという
 方法をとった。また、§2-2に述べたように未知パラメータの大きさがほぼ
 そろそろように f_0, f_1 および f_2 については [div.] (シンクロスコープ
 波形の縦軸目盛), γ_1, ω および γ_2 については [msec^{-1}], また ϕ につ
 いては [rad.] という単位を採用した。第3-2表に計算機出力形式で以
 上の最適化計算の結果をまとめて示す。この表には初期推定値と最適値、第
 3-4図の波形を離散化したときの値および各パラメータを最適値とした場
 合の波形の値を示している。これらの波形の値には直流バイアス値が含まれ
 ている。さらにこれらの波形の平均的な偏差もこの表の最下段に示してある。

 * BEST FITTED RESULTS BY NONLINER PROGRAMMING *

I	I	VOLTAGE		II	CURRENT DERIV.	
		INITIAL GUESS	BEST ESTIMATE		INITIAL GUESS	BEST ESTIMATE
1	I	0.165000E 01	0.156518E 01	II	0.200000E 01	0.185829E 01
2	I	0.190000E 01	0.221947E 01	II	0.210000E 01	0.231752E 01
3	I	0.500000E 00	0.877692E 00	II	0.500000E 00	0.877692E 00
4	I	0.630000E 01	0.840949E 01	II	0.630000E 01	0.640849E 01
5	I	-0.188000E 01	-0.190251E 01	II	-0.126000E 01	-0.134437E 01
6	I	0.500000E-01	0.372367E 00	II	-0.600000E 00	-0.452446E 00
7	I	0.400000E 00	0.801644E 00	II	0.400000E 00	0.140771E 01

TIME(MSEC)	EXP. DATA	VOLTAGE(DIV)		DIFFERENCE	EXP. DATA	CURRENT DERIV. (DIV)		DIFFERENCE
		FIT-VALUE	DIFFERENCE			FIT-VALUE	DIFFERENCE	
0.200000E 00	0.900000E 00	0.799172E 00	0.100828E 00	0.140000E 01	0.139509E 01	0.491118E-02		
0.300000E 00	0.180000E 01	0.149211E 01	-0.921122E-01	0.250000E 01	0.253503E 01	-0.150261E-01		
0.400000E 00	0.270000E 01	0.279438E 01	-0.943838E-01	0.315000E 01	0.313212E 01	0.178837E-01		
0.500000E 00	0.326000E 01	0.319416E 01	0.658435E-01	0.305000E 01	0.306676E 01	-0.167612E-01		
0.600000E 00	0.300000E 01	0.301663E 01	-0.166317E-01	0.250000E 01	0.248221E 01	0.177863E-01		
0.700000E 00	0.247000E 01	0.241355E 01	0.564533E-01	0.169000E 01	0.168942E 01	0.583214E-03		
0.800000E 00	0.170000E 01	0.167043E 01	0.295654E-01	0.100000E 01	0.102501E 01	-0.250054E-01		
0.900000E 00	0.100000E 01	0.107924E 01	-0.792417E-01	0.730000E 00	0.722619E 00	0.738115E-02		
0.100000E 01	0.760000E 00	0.829078E 00	-0.690784E-01	0.860000E 00	0.843071E 00	0.169287E-01		
0.110000E 01	0.100000E 01	0.952668E 00	0.473323E-01	0.120000E 01	0.127978E 01	0.218267E-03		
0.120000E 01	0.135000E 01	0.153936E 01	0.106352E-01	0.182000E 01	0.182534E 01	-0.533758E-02		
0.130000E 01	0.185000E 01	0.179921E 01	0.507934E-01	0.224000E 01	0.226469E 01	-0.246864E-01		
0.140000E 01	0.218000E 01	0.214604E 01	0.339571E-01	0.250000E 01	0.245615E 01	0.438483E-01		
0.150000E 01	0.230000E 01	0.226587E 01	0.341276E-01	0.230000E 01	0.237218E 01	-0.421801E-01		
0.160000E 01	0.213000E 01	0.219745E 01	-0.174460E-01	0.212000E 01	0.209126E 01	0.287377E-01		
0.170000E 01	0.180000E 01	0.186887E 01	-0.688700E-01	0.175000E 01	0.175183E 01	-0.182931E-02		
0.180000E 01	0.160000E 01	0.155873E 01	0.412722E-01	0.148000E 01	0.149136E 01	-0.113618E-01		
0.190000E 01	0.130000E 01	0.133204E 01	-0.320447E-01	0.140000E 01	0.139563E 01	0.435328E-02		

SAMPLE VARIANCE OF VL(J)= 0.606102E-01 (DIV) SAMPLE VARIANCE OF DI(J)= 0.209353E-01 (DIV)

第3-2表

非線形最適化法による減衰振動波形分析結果の計算機出力。 \tilde{V}_{loop}
 (VOLTAGE)および \tilde{I}_t (CURRENT DERIV.) の波形パラメータ
 は、1から7まで順番に(8.14)式における $f_0, f_1, \gamma_1, \omega, \phi, f_2,$
 γ_2 を表わしている。

(3.13)式を(3.4)式と比較すればわかるように交流インダクタンス (\tilde{L}_p)や交流抵抗 ($\tilde{\mathcal{R}}_p$) の評価に必要なパラメータである f_1 , γ_1 , ω , および ϕ については注意深く初期推定値を選んだにもかかわらず, それらは最適値から約10%以上もずれている。したがって, かりに図式的に波形分析を行ったとすれば(3.6)式から(3.11)式までの計算式からわかるように \tilde{L}_p および $\tilde{\mathcal{R}}_p$ への誤差が100%以上となる可能性が十分考えられる。

3.2.3 プラズマ有効半径の評価方法

トカマクプラズマの高温領域の大きさを特徴づける有効半径 a_σ は交流インダクタンスから容易に求められる。

シェルが交流電流に対し完全導体と見なせる場合, 交流電流がシェル内面と, 等価的に完全導体とみなせるプラズマで満たされた主半径 R , 副半径 a_σ のトロイダルプラズマとの間につくる磁束によって定義されるインダクタンス \tilde{L}_{sp} は

$$\tilde{L}_{sp} = \mu_0 R \ln \frac{r_s}{a_\sigma} \quad (8.19)$$

で十分精度よく近似できる。上式より \tilde{L}_{sp} がわかれば, a_σ を求めることができる。しかし交流インダクタンス導出の過程で $L_{s1} = \mu_0 R_0 \ln \frac{r_s}{r_{li}}$ が考慮されているので, 実際に a_σ を求めるとき使用するべき式は $R \approx R_0$ としてこれを差し引いた次式

$$\tilde{L}_p = \mu_0 R \ln \frac{r_{li}}{a_\sigma} \quad (8.20)$$

である。また、 a_{σ} は次のように表皮の深さ δ と関係づけることができる。
すなわち \tilde{L}_p は δ を用いて近似的に

$$\tilde{L}_p = \mu_0 R \left(\ln \frac{r_{li}}{a} + \frac{\delta}{2a} \right) \quad (3.21)$$

と表わすことができるので (2.20) 式および (2.21) 式より

$$\delta = 2a \cdot \ln \frac{a}{a_{\sigma}} \quad (3.22)$$

となる。ここで a はリミターで規定されるプラズマ半径^(注1)である。さらに $a - a_{\sigma} = \epsilon$ ($\epsilon/a \ll 1$) とすれば、

$$\delta = 2\epsilon \quad (3.23)$$

となる。交流電流の周波数 f が電子とイオンの衝突周波数 $\langle \nu_{ei} \rangle$ に比べ十分小さければ^(注2)、 δ は f および平均半径 a_{σ} で幅 δ の円環状領域の平均導電率と関係づけられるので、プラズマの有効半径 a_{σ} の位置の平均導電率温度が評価できる。

(注1) 半径 a_{lim} の口径を有するリミターの場合、 a はプラズマの水平および垂直変位 (Δ_h および Δ_v) によって $a = a_{lim} - \sqrt{\Delta_h^2 + \Delta_v^2}$ と表わされる。通常、JFT-2 ではこの型式のリミターが用いられているが、ダイナミックリミターを使用する実験ではレール型のリミターが用いられた。このとき a は普通 $|\Delta_v|$ のみで規定される。

(注2) 本論文で述べる JFT-2 プラズマに対し、 $f \lesssim 1 \text{ kHz}$ ではこの仮定は十分満足される。

3.2.4 JFT-2 プラズマに対する実験結果

3.2.1, 3.2.2 および 3.2.3 において詳しく述べた方法により JFT-2 プラズマに対して得られた結果をまとめて述べる。

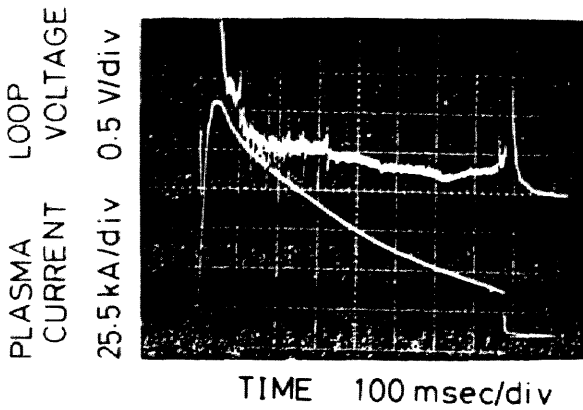
2 種類の異なった実験条件のもとで得られた特徴的な結果を示す。ひとつは開孔半径 250 mm の固定リミターを用いた実験で、放電持続時間約 700 msec で電流値が 180 kA から 80 kA までかなり減少するような放電であり、いまひとつはトカマク実験における新しい試みであるダイナミックリミター⁷⁾を用いた実験でプラズマ有効半径の顕著な変化を期待できる実験である。

前者の実験では、第 8-2 図の交流電流重畳回路のコンデンサの静電容量を変えて、周波数が約 100 Hz から 1 kHz までの微小流電流をプラズマ電流に重畳した。この周波数範囲においては JFT-2 プラズマのパラメータでは実験的に $0.08 \lesssim \frac{\gamma_1}{\omega} \lesssim 0.1$ となった。波形の減衰性については交流インダクタンス導出の過程では考慮したが(たとえば(3.6)式)、得られたインダクタンスの周波数依存性は γ_1 を無視し f のみでさまるものとした。したがって、以後の議論では周波数 f での通常の交流インダクタンスとして扱うこととする。第 8-8 図はこの実験条件での代表的なループ電圧およびプラズマ電流波形である。放電開始後 170 msec で交流電流重畳回路がトリガされ、トリガから最大 15 msec までの間に得られた JFT-2 プラズマの交流インダクタンスの周波数依存性を第 8-9 図に示す。

次に、後者のダイナミックリミターを使用する実験で得られた結果を示す。この実験はトカマクプラズマの副半径を規定する固体リミターを放電の途中で急速に引き抜くことにより行なわれた。

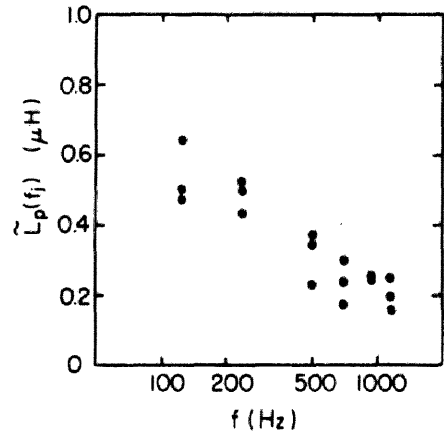
固体リミターは、高温プラズマに対し重イオン不純物の大きな発生源となるため核融合達成の過程で除去され、それなしでプラズマ境界が規定されね

ばならない。たとえば、ダイバータ磁場^{8,9)} やヘリカル磁場¹⁰⁾ による磁気リミター等が考えられるが、まだほとんど研究が進んでいない。このような状況から、トカマクプラズマの平衡、MHD 安定性、粒子およびエネルギーバランス等に固体リミターがいかなる役割を持っているかを研究しておくことが必要である。しかし、従来のトカマクでは断熱圧縮^{11,12)} や特別に設計



第3-8図

交流インダクタンスの周波数依存性の測定を行なったときのループ電圧（上段）およびプラズマ電流波形（下段）。トロイダル磁場 $B_t = 1.0 \text{ Wb/m}^2$ 、リミター半径 $a_{lim} = 250 \text{ mm}$ 、および充てんガス圧 $P_f = 1.6 \times 10^{-4} \text{ Torr} \cdot \text{H}_2$



第3-9図

第3-8図の放電開始後 170 msec から 185 msec までの間で得られた交流インダクタンスの周波数依存性。

されたダイバータ等を使用しないかぎり，固体リミターなしでプラズマ生成過程から真空容器との強い相互作用なしにプラズマを保持することができない。したがって，まず固体リミターを用いてトカマクプラズマを生成し，放電形成後リミターを急速に引き抜くという実験方法をとった。リミターを急速に引き抜いたときプラズマの平衡や安定性がどのように変化するかを研究することを目的として，ダイナミックリミターを用いた実験を行ない，プラズマがどのように振舞うかを調べた^{13~15)}。また，ダイナミックリミターの速度を時間的に制御することによりプラズマ電流の立ち上がり段階でのプラズマ電流密度分布の表皮効果を抑えることができる可能性もあり¹⁶⁾，その実験的研究をも目的とした¹⁴⁾。

本実験でのダイナミックリミターの動作状態を以下に簡単に述べる。ダイナミックリミターは第 8 - 10 図 (a) に示すように JFT-2 装置に取付けられ圧縮空気により駆動される。上下のリミター板間の距離 (L_d) の $\frac{1}{2}$ の時間変化は第 8 - 10 図 (b) のようになり，最大スピードは 9 m/sec ，平均スピードは 5 m/sec である⁷⁾。実験はダイナミックリミターに関して次の 3 種類の動作モードについて行なった。すなわち，

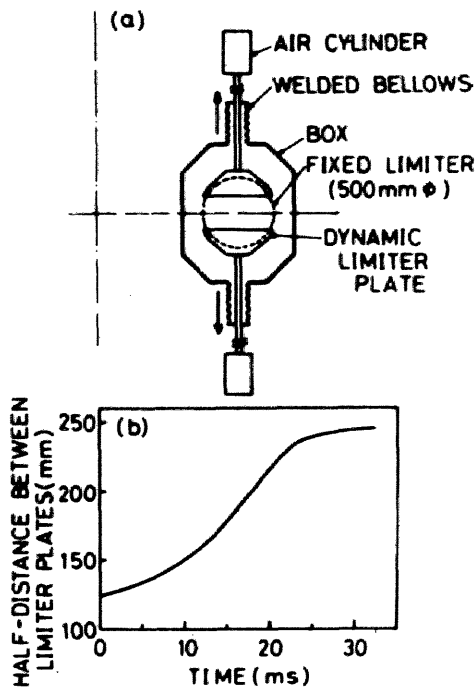
1. 閉位置運転モード：ダイナミックリミターは閉位置 ($L_d = 250 \text{ mm}$) に保持されている。
2. リミター作動モード：ダイナミックリミターは放電の途中で作動され，約 20 msec で閉位置から開位置に達し停止する。
3. 開位置運転モード：ダイナミックリミターは開位置 ($L_d = 500 \text{ mm}$) に保持されている。

の 3 種類である。

ダイナミックリミターを用いた実験においてプラズマの高温領域の端がど

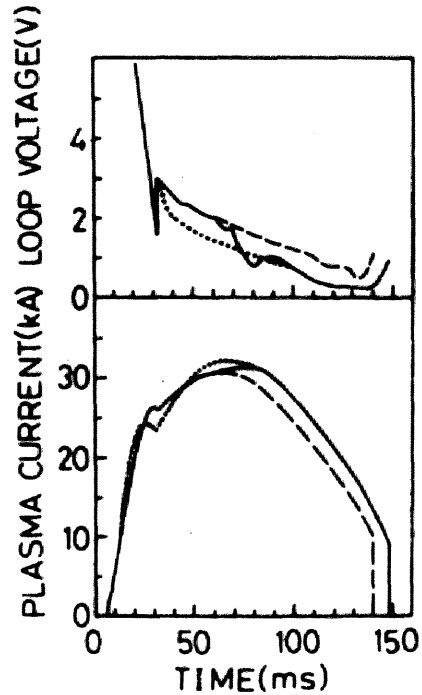
のように振舞うかを3.2.3 で述べたように、プラズマの交流インダクタンス測定により導出される実効的なプラズマ半径の時間変化から調べた。

前述したダイナミックリミターの各運転モードに対する実験結果について述べる。各運転モードにおける代表的な放電特性を第3-11図に示す。これらの放電に対するプラズマ有効半径の時間的变化を第3-12図に示す。



第3-10図

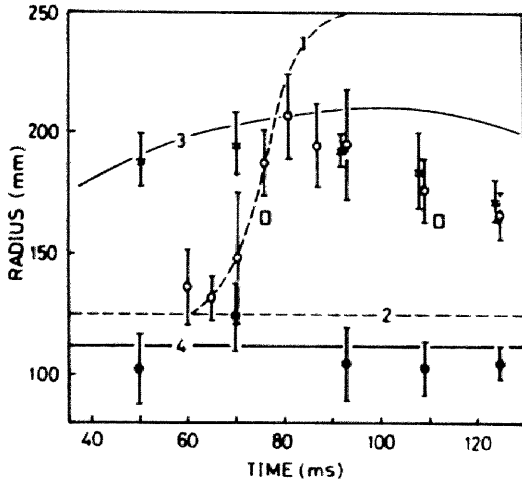
- (a) ダイナミックリミターのJFT-2装置への取付状態。
- (b) リミター作動時の上下リミター板間の距離 (L_d) の $\frac{1}{2}$ の変化の様子。



第3-11図

ダイナミックリミターを用いた実験における閉位置運転モード(破線)、リミター作動モード(実線)および開位置運転モード(点線)の3種類の場合に対する代表的な放電波形。

第3-12図



周波数約1 kHzにおける交流インダクタンス測定より得られたプラズマの有効半径の時間変化。ダイナミックリミターの動き（破線の曲線）とともにこの半径は拡がることを示している(O)。□はフォトトランジスタによる発光領域の測定データから求めたりミター作動時のプラズマ半径。閉位置および開位置運転モードにおける結果は●および×で示してある。

この実験では交流電流の周波数を約1 kHzに選んだ。第3-12図からわかるようにプラズマ有効半径はリミター板間の距離の増加とともに増大している。プラズマの有効半径の位置での平均導電率温度はプラズマの実効電荷数 $Z = 1$ として、20 eVないし100 eV程度となり、プラズマの高温領域の端はリミターとともに拡がることわかる。また、放電の80 m sec以降の有効プラズマ半径の減少の原因のひとつはプラズマがトラスの内側へ向って変位し、口径500 mmの固定リミターによって削り取られるためである。もうひとつの原因はプラズマ電流が減少する時間での電子温度分布の尖鋭化と考えられる。同図には、フォトトランジスタによる発光領域の測定¹⁵⁾から得たプラズマの有効半径も示した。これは、交流インダクタンス測定から得た結果と非常によく一致している。第4章ではダイナミックリミターを使用した実験におけるプラズマの挙動を本節で示したプラズマ有効半径の時間変化と

関係づけて述べる。なお、交流インダクタンス測定によりプラズマ有効半径の時間変化がTO-1 トカマク装置でも調べられていることを追記しておく¹⁷⁾。

§ 3-3 プラズマ導電率の空間分布測定

§ 3-2で述べたようにして得られたトカマクプラズマの交流インダクタンスの周波数依存性からプラズマ導電率の空間分布の導出を試みる¹⁸⁾。交流インダクタンス測定により導出される導電率分布はトカマクプラズマの電流密度分布の間接的測定および不純物の効果も含めた導電率の異常係数の空間分布の推定という重要な意味をもっている^{3,4)}。本節ではまずプラズマ導電率を実数量として扱える場合についての交流インダクタンスおよび交流抵抗を算定する。特に、交流インダクタンスの周波数依存性と導電率の空間分布との関係について詳しく述べる。次にプラズマ導電率を複素量とした場合、上述のように近似的に求めたプラズマの交流インダクタンスとどの程度差異があるかについて記述する。最後に、交流インダクタンスの周波数依存性から、非線形最適化法によりプラズマ導電率の空間分布を決定する問題について述べる。

3.3.1 各種導電率分布に対するプラズマの交流インダクタンスおよび交流抵抗

トカマクプラズマのように電子とイオンの衝突周波数が比較的低い高温のプラズマはトロイダル方向の交流電流あるいは電場に対し次式で表わされるような複素導電率^{19,20)}を有する媒質として振舞う。

$$\sigma = \sigma_{DC} \frac{1}{\alpha(\xi) + j\beta(\xi) \cdot \xi} \quad (8.24)$$

$$\xi = 2\pi f / \langle \nu_{ei} \rangle = \omega / \langle \nu_{ei} \rangle \quad (3.25)$$

$$\alpha(\xi) = g(\xi, Z) / g(0, Z) \quad (3.26)$$

$$\beta(\xi) = h(\xi, Z) / g(0, Z) \quad (3.27)$$

$$\sigma_{DC} = \frac{n_e e^2}{m_e \langle \nu_{ei} \rangle g(0, Z)} \quad (3.28)$$

ここに、 $g(\xi, Z)$ および $h(\xi, Z)$ は電子とイオンの衝突周波数 ν_{ei} の粒子速度に対する依存性で定まる導電率の補正係数である。また、 f および $\langle \nu_{ei} \rangle$ はそれぞれ外部から印加した交流電磁場の周波数および電子とイオンの平均衝突周波数である。 Z はプラズマの実効的電荷数である。 σ_{DC} は直流に対するプラズマ導電率であり、Spitzer と Härm²¹⁾ によって導出されたものである。また、 e および m_e は電子の電荷量および質量である。なお、(3.24) ~ (3.28) 式は電子とイオンおよび電子同志の衝突を考慮した完全電離プラズマに対して導かれたものである。

(3.24) 式からわかるように外部印加の交流電磁場の周波数 f が $\langle \nu_{ei} \rangle$ に比べ十分小さければ、プラズマはそのような交流電磁場に対し実数導電率 σ_{DC} を有する通常の導体と等価なものとなる。まず、このような場合について種々の導電率分布に対する交流インダクタンスおよび交流抵抗を周波数の関数として求める。

トロイダル効果を見れば、円筒プラズマへの交流電場の浸み込みは

円筒座標系 (r, θ, z) において

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} = \mu_0 \sigma(r) \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial t} \quad (3.29)$$

で決定される。交流電場の正弦的定常状態を対象として $(\omega = 2\pi f)$

$$\tilde{E}_z = \tilde{E} e^{j\omega t} \quad (3.30)$$

とおき、 $x = r/a$ (a : プラズマ半径) とすれば

$$\frac{d^2 \tilde{E}}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\tilde{E}}{dx} - j\omega\mu_0 a^2 \sigma(x) \tilde{E} = 0 \quad (3.31)$$

と書ける。プラズマを N 層の円管殻に分割し各層で導電率が一定であるとして導電率分布を多段ステップ状分布で近似すれば、各層内の電場は上式より解析的な形で得られる。すなわち、 A および C を未定係数とすれば、変形ベッセル関数により、

$$\tilde{E} = A [I_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p x) + C \cdot K_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p x)] \quad (3.32)$$

で与えられる。ここで

$$p = \sqrt{\mu_0 a^2 \sigma} \quad (3.33)$$

である。各円管殻の規格化された厚みを d_i ($i=1, 2, \dots, N$) とすると、各

円管殻の外側の半径は $x_i = \sum_{\ell=1}^i d_{\ell}$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) および $x_N = 1.0$ となる。また各層での定数 C , 導電率および電場をそれぞれ C_i, σ_i , および \tilde{E}_i ($i=1, 2, \dots, N$) とする。定数 C_i は各層間の電磁場の連続性

$$\tilde{E}_i \Big|_{x=x_i} = \tilde{E}_{i+1} \Big|_{x=x_i}, \quad i=1, 2, \dots, N-1 \quad (3.34)$$

$$\frac{d\tilde{E}_i}{dx} \Big|_{x=x_i} = \frac{d\tilde{E}_{i+1}}{dx} \Big|_{x=x_i}, \quad i=1, 2, \dots, N-1 \quad (3.35)$$

より決定される。上記の条件式は $\Lambda(x) = \tilde{E}(x) / \left(\frac{d\tilde{E}}{dx} \right)$ とおけば,

$$\Lambda_i(x_i) = \Lambda_{i+1}(x_i), \quad i=1, 2, \dots, N-1 \quad (3.36)$$

と書き変えられ、次式が導かれる。

$$C_{i+1} = \frac{T_i I_0'(T_i) I_0(S_i) - S_i I_0(T_i) I_0'(S_i) + C_i \{ T_i I_0'(T_i) K_0(S_i) - S_i I_0(T_i) K_0'(S_i) \}}{S_i K_0(T_i) I_0'(S_i) - T_i K_0'(T_i) I_0(S_i) + C_i \{ S_i K_0(T_i) K_0'(S_i) - T_i K_0'(T_i) K_0(S_i) \}}, \quad i=1, 2, \dots, N-1 \quad (3.37)$$

ここに,

$$S_i = j^{1/2} \omega^{1/2} p_i x_i = (j \mu_0 a^2 x_i^2 \omega \sigma_i)^{1/2} \quad (3.38)$$

$$T_i = j^{1/2} \omega^{1/2} p_{i+1} x_i = (j \mu_0 a^2 x_i^2 \omega \sigma_{i+1})^{1/2} \quad (3.39)$$

であり、 $x = 0$ で電磁場が有限であることより

$$C_1 = 0. \quad (3.40)$$

(3.32)~(3.40) 式により各層の電磁場が決定される。長さ $2\pi R$ (R : プラズマの主半径) の円筒プラズマの交流インピーダンス $\tilde{Z}(\omega)$ は交流電流の実効値を \tilde{I} とすれば、

$$\tilde{Z}(\omega) = \tilde{\mathcal{E}}_P + j\omega \tilde{L}_P = \frac{2\pi R \tilde{E}(a)}{\tilde{I}} = j\omega \mu_0 R \Lambda_N(x=1) \quad (3.41)$$

で与えられる。したがって、交流インダクタンス \tilde{L}_P および交流抵抗 $\tilde{\mathcal{E}}_P$ は

$$\tilde{L}_P = \mu_0 R \Re \left[\Lambda_N(x=1) \right] \quad (3.42)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_P = -\omega \mu_0 R \Im \left[\Lambda_N(x=1) \right] \quad (3.43)$$

で表わされる。 $\Lambda_N(x=1)$ を具体的に示せば

$$\Lambda_N(x=1) = \frac{I_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p_N) + C_N K_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p_N)}{j^{1/2} \omega^{1/2} v_N \left[I_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p_N) + C_N K_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p_N) \right]} \quad (3.44)$$

となる。導電率を実数量とすれば p_N は実数量となるので、このことを考慮し数値計算を容易にするため C_{i+1} および $\Lambda_N(x=1)$ を実数部と虚数部に分離し、変形ベッセル関数 I_0, K_0 等をケルビン関数⁽²²⁾を使って書きかえる。しかし、ケルビン関数を含む数値計算では特別な注意を要する。第1種ケルビン関数($ber_n w$ および $bei_n w$)は変数 w の増大とともに振動しながら指数関数的に発散し、第2種ケルビン関数($ker_n w$ および $kei_n w$)は変数の増大とともに振動しながら指数関数的に零へ向って減少する。したがって、数値計算において変数を170程度にすると数値計算上のオーバーフローがこり計算実行が不可能となる^(注)。このような現象を防止するためケルビン関数を適当な量で規格化を行う。すなわち、 $\zeta = \sqrt{\omega p_i x_i}$ として

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{I}_0(j^{1/2}\zeta) &= I_0(j^{1/2}\zeta) e^{-\zeta/\sqrt{2}} = (ber_0 \zeta + j bei_0 \zeta) e^{-\zeta/\sqrt{2}} \\
 \tilde{I}'_0(j^{1/2}\zeta) &= I'_0(j^{1/2}\zeta) e^{-\zeta/\sqrt{2}} = (ber'_0 \zeta + j bei'_0 \zeta) e^{-\zeta/\sqrt{2}} \\
 \tilde{K}_0(j^{1/2}\zeta) &= K_0(j^{1/2}\zeta) e^{\zeta/\sqrt{2}} = (ker_0 \zeta + j kei_0 \zeta) e^{\zeta/\sqrt{2}} \\
 \tilde{K}'_0(j^{1/2}\zeta) &= K'_0(j^{1/2}\zeta) e^{\zeta/\sqrt{2}} = (ker'_0 \zeta + j kei'_0 \zeta) e^{\zeta/\sqrt{2}}
 \end{aligned} \right\} (845)$$

および

(注) 通常の大型電子計算機、たとえば FACOM 230/60 や M-160 において扱える最大の数値は約 $e^{170} \approx 6.76 \times 10^{73}$ であり、これ以上の値が計算実行中に発生すればオーバーフローとなり計算が停止する。

$$\tilde{C}_i = C_i e^{-\sqrt{2} \zeta} \quad (3.46)$$

とおけば、(3.37)式および(3.44)式は \tilde{I}_0 、 \tilde{K}_0 、 \tilde{C}_i 等の規格化された量により次のように書き換えられる、

$$\tilde{C}_{i+1} = \frac{T_i \tilde{I}'_0(T_i) \tilde{I}_0(S_i) - S_i \tilde{I}_0(T_i) \tilde{I}'_0(S_i) + \tilde{C}_i [T_i \tilde{I}'_0(T_i) \tilde{K}_0(S_i) - S_i \tilde{I}_0(T_i) \tilde{K}'_0(S_i)]}{G_i \{S_i \tilde{K}_0(T_i) \tilde{I}'_0(S_i) - T_i \tilde{K}'_0(T_i) \tilde{I}_0(S_i) + \tilde{C}_i [S_i \tilde{K}_0(T_i) \tilde{K}'_0(S_i) - T_i \tilde{K}'_0(T_i) \tilde{K}_0(S_i)]\}} \quad (3.47)$$

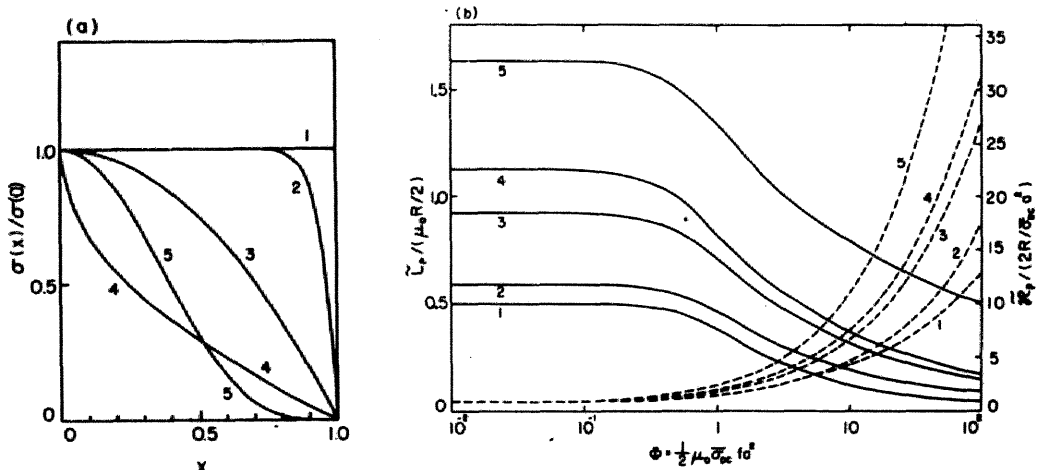
$$G_i = e^{\sqrt{2\omega} p_{i+1} (x_{i+1} - x_i)} = e^{\sqrt{2\omega} p_{i+1} d_{i+1}}, \quad i=1, 2, \dots, N-1 \quad (3.48)$$

$$\Lambda_N(x=1) = \frac{\tilde{I}_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p_N) + \tilde{C}_N \tilde{K}_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p_N)}{j^{1/2} \omega^{1/2} p_N [\tilde{I}'_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p_N) + \tilde{C}_N \tilde{K}'_0(j^{1/2} \omega^{1/2} p_N)]} \quad (3.49)$$

このような規格化操作は非線形最適化の過程で特に不可欠である。この理由は、最適解へ収束する計算途中で(3.45)式における変数 ζ がしばしば大きな値に跳び移ることがあり、その位置で数値計算上のオーバーフローを起して計算が停止されてしまうからである。

第3-13(b)図は層数200として、トカマクプラズマの電子温度分布から予想して妥当と考えられる分布を含む代表的な分布(第3-13(a)図)に対して得られた交流インダクタンスおよび交流抵抗の周波数依存性を示している。

ただし、交流インダクタスは規格化内部インダクタンスで示してある。また、交流抵抗は直流抵抗で、周波数は交流電磁場の「プラズマ導体」への浸み込み時間の逆数で規格化して示してある。ここで、以後の議論で特に必要な交流インダクタンスの特徴的な周波数依存性に注目する。周波数の増大とともに交流インダクタンスは減少する。これは表皮効果のため電磁場がプラズマ表面上に集中することによる。表皮効果が強く電磁界のプラズマへの浸み込みの深さ δ がプラズマ半径 a に比べて十分小さければ、交流インダクタンスは (3.1) 式で与えられる。したがって、交流インダクタンスはプラズマ表面から表皮の深さ δ にわたる表面部の導電率の平均値できまり、中心部の導電率の影響をうけない。逆に、表皮効果が無視できるような低周波領域では電流密度分布が導電率分布と一致する。この場合、交流インダクタンスは導電率の値そのものには依



第 3-13 図

(a)
 プラズマ中心での導電率で規格化した導電率分布。 1. $\sigma(x)/\sigma(0)=1.0$,
 2. $\sigma(x)/\sigma(0)=1-x^{20}$, 8. $\sigma(x)/\sigma(0)=1-x^2$
 4. $\sigma(x)/\sigma(0)=1-\sqrt{x}$, および 5. $\sigma(x)/\sigma(0)=(1-x^2)^4$ 。

(b)
 第 3-13 (a) 図の各導電率分布に対する交流インダクタンス (実線) および交流抵抗 (破線)。

存せず導電率分布の形のみできまる。上の吟味からプラズマ導電率分布は両方の周波数領域にまたがるデータがあれば導電率分布を正確に決定することが可能である。トカマクプラズマに対する計測法の立場からみると、高周波領域の交流インダクタンスは § 3-2 で述べた測定法により求めることができるが、導電率分布を直接反映した低周波領域での交流インダクタンスを測定する方法はない。しかし、プラズマ断面で平均した導電率を低周波領域でのデータとして代用できる。この平均導電率はプラズマ電流、ループ電圧等の測定データから得られる。

交流電磁場の角周波数 ω の電子とイオンの衝突周波数 $\langle \nu_{ei} \rangle$ に対する比が増大するとともに、(8.24)式からわかるようにプラズマ導電率は複素量となってくる。以下で導電率の虚数部が増加するとともに交流インダクタンスが実数導電率として得られた結果からどのようにずれていくかを調べる。(8.24)式において α_{DC} は一様分布とし、 ξ も空間的に一定とし $\xi = 1 \times 10^{-8}$ (注1) ないし 1.0 までの数種類の場合について交流インダクタンスを計算する。この場合(8.32)式よりプラズマ中の交流電界は第1種変形ベッセル関数のみで表わされる。ただし、(8.38)式の p は複素数であるためケルビン関数(注2)を用いることはできない。またプラズマの実効的電荷数を $Z = 1$ とする。

(注1) 本論文で扱う JFT-2 プラズマ(電子温度 $T_e \approx 500 \text{ eV}$, 電子密度 $n_e \approx 1 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$) を考慮すると、 $\langle \nu_{ei} \rangle \approx 10^5 \text{ sec}^{-1}$ となる。このようなプラズマに最高 1 kHz 程度の交流電場を印加する場合を考えて、そのときの ξ より上限を大きめに 1.0 とし、下限は導電率が実数量とみなせるほどに小さく選んだ ($\xi = 1 \times 10^{-8}$)。

$Z = 1$ という仮定は上で述べた議論の一般性をそこなわない。導電率の補正係数 $g(\xi, Z)$ および $h(\xi, Z)$ は $Z = 1$ の場合と電子同志の衝突の効果を見捨てた場合 ($Z = \infty$) の各々の場合、第 3-14 図のようになる^{19, 20}。以上のようなデータを用いて複素導電率を有するプラズマの交流インダクタンスを計算した結果を ξ をパラメータとして第 3-15 図に示す。この図において実曲線は $\xi = 1 \times 10^{-8}$ で得られたもので、実数導電率として求めた曲線 (第 3-13 (a) 図の曲線 1) と一致する。

第 3-15 図に示した一様複素導電率を有するプラズマの交流インダクタンスは、低周波極限と表皮効果の顕著な高周波極限においては簡単な近似式で表わすことができる。低周波極限では (3.44) 式で $|\omega^{1/2} p_N| < 1$ として、

$$\tilde{L}_P \simeq \frac{\mu_0 R}{2} \left[\frac{\beta \xi}{\pi \Phi} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\beta \xi}{\alpha^2 + \beta^2 \xi^2} \Phi \right] \quad (3.50)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu_0 \bar{\sigma}_{DC} a^2 f \quad (3.51)$$

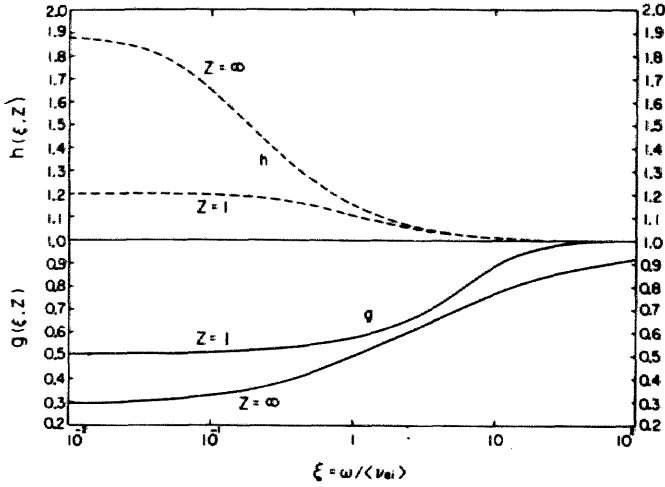
となる。ここで、 $\Phi < 1$ となっている。 $\tilde{L}_P / (\mu_0 R / 2)$ について $\sigma = \sigma_{DC}$ として得た値に対する比率は、

(注2) 実際の数値計算においては、ベッセル関数の加法定理、

$$\mathcal{E}_\nu(u+v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_{\nu-k}(u) J_k(v), \quad |u| > |v|$$

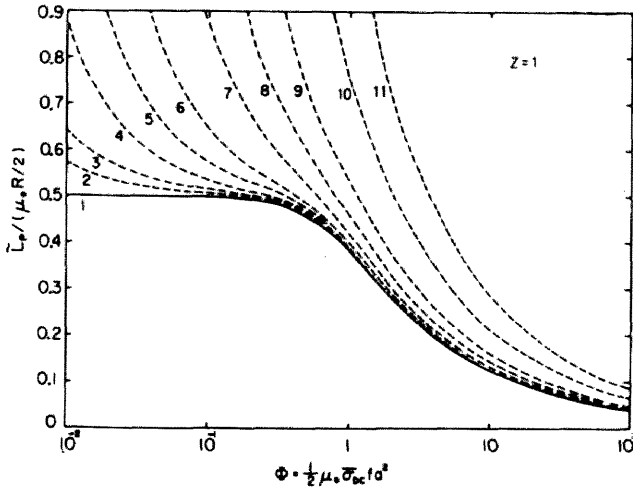
により変数を実数部と虚数部に分離して計算を行なった。ただし、

\mathcal{E}_ν が整数次の第 1 種ベッセル関数のとき $|u| > |v|$ という制約条件は不要である。



第3-14図

$Z = 1$ および $Z = \infty$ のときの導電率の補正係数 $h(\xi, Z)$ および $g(\xi, Z)$ の ξ 依存性



第3-15図

プラズマの導電率を複素量とした場合の交流インダクタンス ($Z = 1$)。導電率分布は空間的に一様とし、1～11の曲線は ξ がそれぞれ、 1×10^{-8} , 1×10^{-3} , 2×10^{-3} , 5×10^{-3} , 1×10^{-2} , 2×10^{-2} , 5×10^{-2} , 0.1, 0.2, 0.5 および 1.0 の場合に対応している。1の曲線は実数導電率の結果と一致する。

$$\gamma_{LFL} \approx 1 + \frac{2\beta\xi}{\pi\Phi} - \frac{\pi}{6} \frac{\beta\xi}{\alpha^2 + \beta^2\xi^2} \Phi > 1 \quad (3.52)$$

となり Φ の減少とともに急増する。一方、高周波極限では $|\omega^{1/2} p_N| > 1$ とし

て ($\xi = \text{一定}$), 次のようになる^(注)。

$$\tilde{L}_P \simeq \frac{\mu_0 R}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi \Phi}} \left(1 + \frac{\beta^2 \xi^2}{\alpha^2}\right)^{1/4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) \quad (3.53)$$

$$\psi = \tan^{-1}(\beta \xi / \alpha) \quad (3.54)$$

この極限での $\tilde{L}_P / (\mu_0 R / 2)$ に関する (3.52) 式と同様の比率は

$$\gamma_{\text{HFL}} \simeq (\alpha^2 + \beta^2 \xi^2)^{1/4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) / \cos\frac{\pi}{4} > 1 \quad (3.55)$$

となり, Φ に関係なく一定となる。たとえば, $Z = 1$ の場合 $\xi \leq 0.1$ であれば $\gamma_{\text{HFL}} \leq 1.128$, すなわち 12.8% 以内の増加となる。実数導電率として評加した交流インダクタンスに対する複素導電率の場合のその増加率が 5% 以内及び 10% 以内の領域を第 8-16 図の $\Phi - \xi$ 平面に示す。

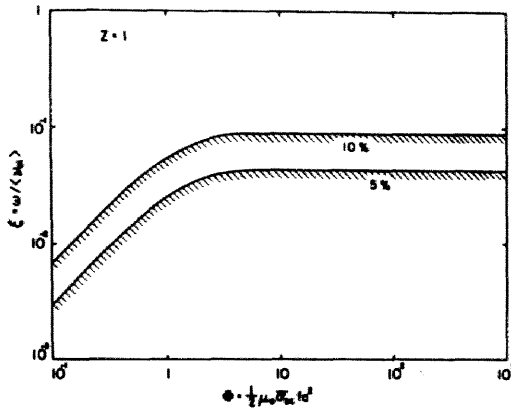
実験的に平均直流導電率 $\bar{\sigma}_{\text{DC}}$ と平均電子密度 \bar{n}_e が得られ, Z が適当に推定できれば, 電子とイオンのプラズマ断面で平均した衝突周波数 $\overline{\langle \nu_{ei} \rangle}$ は,

$$\overline{\langle \nu_{ei} \rangle} = \frac{e^2 \bar{n}_e}{m_e g(0, Z) \bar{\sigma}_{\text{DC}}} \quad (3.56)$$

(注) 交流抵抗についても低周波極限および高周波極限で簡単な近似式でそ

$$\text{れぞれ } \tilde{\mathcal{R}}_P \simeq \frac{2R}{\bar{\sigma}_{\text{DC}} a^2} \left(\alpha + \frac{\pi^2}{12} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 \xi^2} \Phi^2 \right) \text{ および}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_P = \frac{2R}{\bar{\sigma}_{\text{DC}} a^2} \sqrt{\frac{\pi}{4} a \Phi} \left(1 + \frac{\beta^2 \xi^2}{\alpha^2}\right)^{1/4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) \text{ と表わされる。}$$



第 3-16 図

実数導電率として得た交流インダクタンスに対して、複素導電率として得た交流インダクタンスの増加率が5%および10%以内の領域。ただし、 $Z = 1$ 。

論となる^(注)。また、直流導電率 σ_{DC} は空間的に一様としたが、プラズマの中心ほど高導電率であるようなトカマクプラズマの準定常状態でもっともらしい σ_{DC} と n_e の分布に対してはプラズマ中心部での ξ は平均導電率 σ_{DC} より

の関係からもとめることができる。また、 ξ および ω の具体的値も知ることができる。

第 3-15 図および第 3-16 図から対象とするプラズマにおける交流インダクタンスの増加率を評価できる。この増加率がトカマクプラズマにおける交流インダクタンス測定の測定誤差の範囲内であれ

ば、導電率を実数量として簡単化した扱いは問題ないと考えられる。

以上の議論では $Z = 1$ としたが

$Z > 1$ の場合についても同様の結

(注) 非常に極端な場合について考えると、 $Z = \infty$ のとき \bar{n}_e および $\bar{\sigma}_{DC}$ を既知として(3.56)式より $\langle \nu_{ei} \rangle$ は $Z = 1$ の場合の約1.8倍となる。 $Z = 1$ の場合 $\xi \leq 0.1$ であれば $\gamma_{HFL} \leq 1.123$ となることと比較して、 $\xi \leq 0.1/1.8 \approx 0.056$ の場合であれば $\gamma_{HFL} \leq 1.18$ となる。すなわち、約18%増となる。しかし現在の通常のトカマクプラズマでは $Z \leq 8$ なので $Z = 1$ の結論と大差ない結果となる。

評価した $\bar{\xi}$ より小さくなる。逆にプラズマ表面部での ξ は、通常のトカマクプラズマに対しては $\bar{\xi}$ より一般に大きくなる。この理由は、電子密度分布が電子温度分布（あるいは直流導電率分布）より広がった分布をしており、さらに分光測定から推定される Z も空間的に顕著な変化を示さないためである。しかし、プラズマ中心部の導電率の値は表皮効果の現われる周波数領域の交流インダクタンスの値にそれほど大きな寄与をもたない。したがって、複素導電率の交流インダクタンスに及ぼす寄与については上で述べた議論を十分適用できる。

3.3.2 非線形最適化法の導入とテスト計算

表皮効果の現われる周波数領域の交流インダクタンスの周波数依存性および平均直流導電率の測定データから直流導電率分布を決定する方法について詳しく述べる。ここでの議論を通じて、交流インダクタンスの評価は導電率を実数として単純化した計算方法を用いる。JFT-2での測定データの解析に際しては、導電率が複素量となることの影響について3.3.1の後半の議論に基づいて検討を加える。

3.3.1で設定した交流インダクタンス計算モデルによれば非一様導電率を有する円筒プラズマの交流インダクタンスは漸化式を含む解析的形式で表わされる。このようにして計算される交流インダクタンスを $\hat{L}_p(f_j)$ と表わし、測定データを $\tilde{L}_p(f_j)$ とする。ただし $j = 1, 2, \dots, J$ であり、 J は観測を行なった周波数の点数である。上記の計算モデルにおいて導電率分布を表わすための未知パラメータの選び方として、次の3種類を考えることができる。

- ① 各層の厚み d_i ($i=1, 2, \dots, N$) を予め与え、各層の導電率 σ_i ($i=1, 2, \dots, N$) を未知パラメータとする。
- ② 各層の導電率の中心でのそれに対する比率 $\alpha_i = \sigma_i / \sigma_1$ ($i=1, 2, \dots, N$; σ_1 : プラズマ中心での導電率) を予め与え、 σ_1 ^(注) および d_i ($i=1, 2, \dots, N-1$) の N 個を未知パラメータとする。ここで、 $d_N = 1.0 - \sum_{i=1}^{N-1} d_i$ である。
- ③ ②における α_i ($i=2, 3, \dots, N$; $\alpha_1 = 1.0$) も未知パラメータに取り入れる。すなわち、 σ_1 , d_i ($i=1, 2, \dots, N-1$) および α_i ($i=2, 3, \dots, N$) の $(2N-1)$ 個のパラメータを未知変数とする。ここで $\alpha_1 = 1.0$ である。

未知パラメータの選択法として上記の 3 種類のいずれの場合についても、未知パラメータベクトルを \mathbf{X} とすれば次の目的関数

$$F = \sum_{j=1}^J \left[\frac{\hat{L}_P(\mathbf{X}, f_j) - \tilde{L}_P(f_j)}{\langle \tilde{L}_P(f_j) \rangle} \right]^2 + \left[\frac{\bar{\sigma}(\mathbf{X}) - \bar{\sigma}^{\text{exp}}}{\bar{\sigma}^{\text{exp}}} \right]^2 \quad (3.57)$$

を最小とする \mathbf{X} を決定する必要がある。ここで、 $\langle \tilde{L}_P(f_j) \rangle$ はそれぞれ J 個の周波数について得られた測定データ $\tilde{L}_P(f_j)$ の相加平均である。 $\bar{\sigma}(\mathbf{X})$ はモデル計算により算定される断面平均導電率

(注) § 2-2 で述べたように、未知パラメータ間の数値的不均衡を除くため、 σ_1 を適当に規格化し、 $\sigma_1 / S_0 \equiv S_1$ を未知パラメータとする。なお S_0 はその他の未知パラメータと数値的均衡がとれるように適当に選ぶ。③の場合についても同様の操作を行なっている。

$$\bar{\sigma}(\mathbf{X}) = \sigma_1 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i^2 (\alpha_i - \alpha_{i+1}) + \alpha_N \right] \quad (3.58)$$

である。また $\bar{\sigma}^{\text{exp}}$ は実験的に得られた平均直流導電率である。

3.3.1で述べたように $\hat{L}_P(\mathbf{X}, f_j)$ および $\bar{\sigma}(\mathbf{X})$ は未知パラメータに関して非常に複雑な関係式で表わされ、目的関数のこれらの未知パラメータに関する微分はさらに複雑となる。したがって、計算時間や労力の点からみて目的関数の微分を最適化計算の過程で利用する傾斜法に属するアルゴリズムは本課題に対しては利用困難である。目的関数の微分を差分近似で代用することも試みたが、差分による桁落ち誤差のため最適値を見い出すに致らなかった^(注)。したがって、ここでは目的関数の微分を必要としないふたつのアルゴリズム、Powellの共役傾斜法²⁴⁾およびシンプレックス法²⁵⁾を候補にあげテスト計算を実行した。その結果、Powellの方法は§2-3で述べたように予測通り1次元探索のステップ幅の選定が単純でなかった。一方、シンプレックス法の適用にあたってはアルゴリズムの調整パラメータに関して特別な配慮を必要としないことから、最適値が能率よく求まると推定できたので最終的にこの方法を使用することにした。

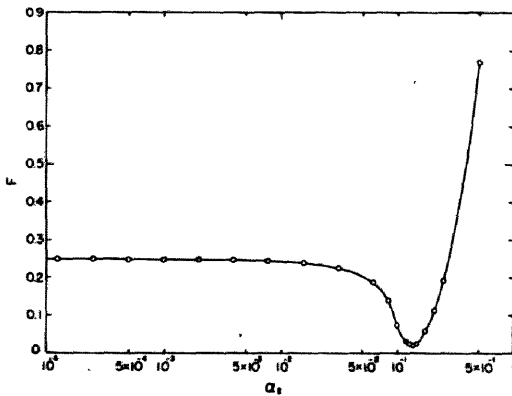
未知パラメータに関する3種類の選び方についてシンプレックス法を使ってテスト計算を実行した。交流インダクタンス測定はトカマクプラズマの準定常状態で行われることを前提として、導電率がプラズマ中心から表面に向

(注) G.W. Stewart²³⁾は桁落ちを十分注意した差分法による非線形最適化法を提案しているが、ここではこの方法を適用しなかった。

って単調に減少する場合を対象として適当な制約条件を課して計算を行なった。すなわち、①については $\sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, N-1$)、②に対しては、予め $a_i \geq a_{i+1} \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) を満足するように a_i を与え、 $\sigma_1 \geq 0, d_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, N$)、さらに③においては、②と同様の制約条件を課した。

テスト計算の結果、①の場合は 1000 回の反復計算にもかかわらず最終的な F の値は②の場合の F の値に比して約 10~100 倍大きく、また③の場合に比しては約 100~1000 倍程度でほとんど停滞してしまうことが明らかとなった。

②の場合は、予め与える a_i ($i=1, 2, \dots, N$) の値によって F の収束値がきまり、 a_i の最適な値の組み合わせを与えれば F の収束値は最も小さくなる。



第 3-17 図

パラボラ型導電率分布(第 3-18 図の曲線)に対し 2 層モデル ($N=2$) で最適化計算を行なったときの F の収束値と a_2 との関係。

第 3-17 図は、パラボラ型導電率分布(第 3-18 図の曲線)のテストデータに対し、2 層モデル ($N=2$) で得られた F の収束値と a_2 との関係を示しており、 a_2 の与え方に F の収束値が強く依存することを示している。ここで、 $a_1 = 1.0$ である。なお、 F の収束値は第 k 回目の F の値と第 $(k+1)$ 回目のそれとの差 $|F_{k+1} - F_k|$ が 1×10^{-16} 以下になったときの F_{k+1} の値である。また、 $a_2 = 122 \times 10^{-4}$ 、 $a_2 = 0.185$ 、および $a_2 = 0.50$ としたときに得られた導電率分布

を第 3-18 図に示す。この結果から $a_2 = 0.135$ ^(注) の場合が最適値に十分近いものとなることがわかる。

③の場合は第 3-17 図に示された結果を考慮し、 a_i ($i=2, 3, \dots, N$) も最適化計算の過程に組み入れるので未知変数が $(N-1)$ 個だけ増加するが②の場合に比し、はるかに効率よく最適解を得ることができる。また、最適化の変数をこれ以上増すことなくデータと計算値との適合性を一段と向上させるため各層間の導電率を線形補間し、各層を予め定めた段数 (LDD) でさらに再分割し、それをステップ状分布におきかえる。すなわち、新しい導電率比および層の厚みをそれぞれ a_k^* および d_k^* ($k=1, 2, \dots, (N-1) \times \text{LDD} + 1$) とすれば、

$$a_1^* = a_1' = a_1$$

$$a_k' = a_{k-1}' - \frac{a_i - a_{i+1}}{\text{LDD}}$$

$$a_k^* = \frac{1}{2} (a_k' + a_{k-1}') ,$$

$$i=1, 2, \dots, N-2$$

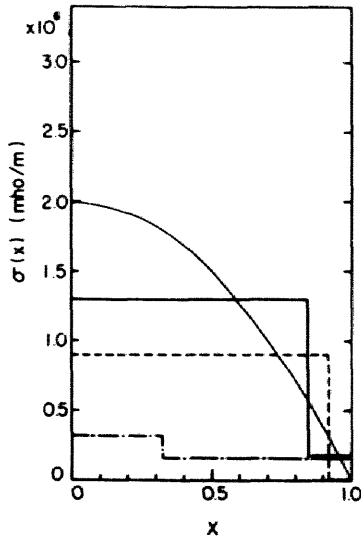
$$k=(i-1) \times \text{LDD} + 2, (i-1) \times \text{LDD} + 3, \dots, i \times \text{LDD} + 1$$

(3.59)

となる。また最外殻 (第 N 層) については a_k^* は次式により評価するものとする。

(注) ③の場合のような変数選択法によれば、 a_2 の最適値は $a_2 = 0.134964$

となる。



第 3-18 図

第 3-17 図で, $\alpha_2 = 0.5$ (一点鎖線), $\alpha_2 = 0.135$ (実線) および $\alpha_2 = 1.22 \times 10^{-4}$ (破線) の場合に得られたステップ状導電率分布。実線の曲線は $\sigma(x) = \sigma(0)(1-x^2)$, $\sigma(0) = 2 \times 10^6$ mho/m の分布を示している。

$$\alpha'_{k_1} = a_{N-1} - \frac{\alpha_{N-1} - \alpha_N}{(LDD/2)}, \quad k_1 = (N-2) \times LDD + 2 \quad (3.60)$$

$$\alpha'_{k_2} = \alpha'_{k_2-1} - \frac{\alpha_{N-1} - \alpha_N}{(LDD/2)}, \quad k_2 = (N-2) \times LDD + 3, (N-2) \times LDD + 4, \dots, (N-2) \times LDD + \frac{LDD}{2} + 1 \quad (3.61)$$

$$\alpha'_{k_3} = \alpha'_{k_3-1} - \frac{\alpha_N}{(LDD/2)}, \quad k_3 = (N-2) \times LDD + \frac{LDD}{2} + 2, (N-2) \times LDD + \frac{LDD}{2} + 3, \dots, (N-1) \times LDD + 1 \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_k^* &= \frac{1}{2} (\alpha'_k + \alpha'_{k-1}) , \\
 & \quad k=(N-2) \times LDD+2, (N-2) \times LDD+3, \dots, \\
 & \quad \quad \quad (N-1) \times LDD+1
 \end{aligned}
 \tag{3.63}$$

および、

$$\begin{aligned}
 d_1^* &= d_1 \\
 d_k^* &= d_i / (LDD) , \quad i=2, 3, \dots, N \\
 & \quad k=(i-2) \times LDD+2, (i-2) \times LDD+3, \dots, \\
 & \quad \quad \quad (i-1) \times LDD+1 ,
 \end{aligned}
 \tag{3.64}$$

次に、設定したモデルの適切性の評価方法が問題となる。すなわち、ある一組のデータが与えられたとき、層数 N や再分割数 LDD を変えることによりそれぞれ異った点に収束する。そのうちのどれを真の最適解として採用するかが問題となる。従来、人間の直観やあるいは他の角度からの考察により結果の取捨選択を行っていたが、本節で扱っている問題については明確な経験的規準を設定しにくい。そこで、客観的判定規準として情報量規準、いわゆる $AIC^{26)}$ を導入する。すなわち、

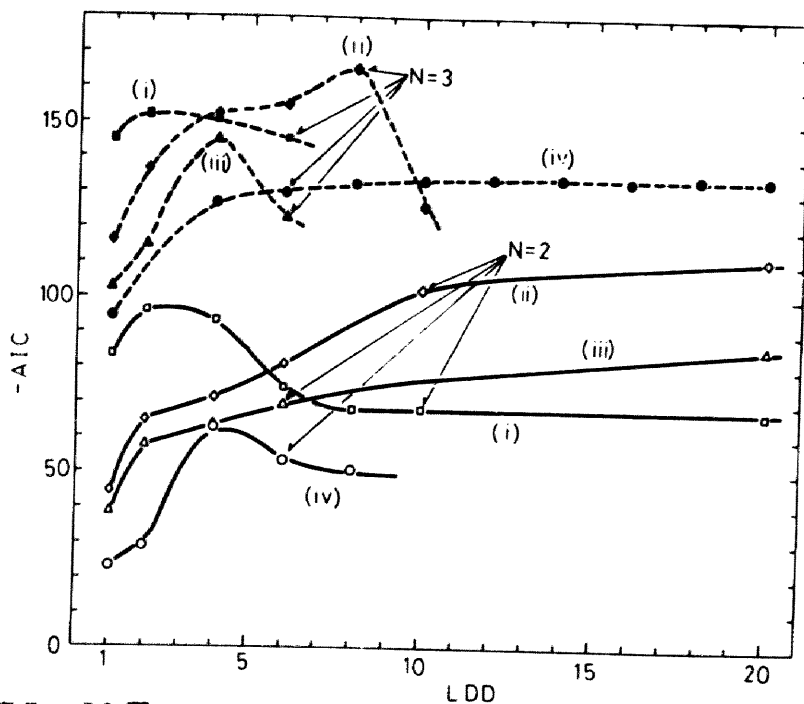
$$AIC = (J+1) \ln F + 2(N^*+1)
 \tag{3.65}$$

$$N^* = 2N - 1
 \tag{3.66}$$

を導入する。ここで、 N^* は独立変数の総数、 N は未知パラメータに関連した層数、 $(J+1)$ は測定データの総数である。また、 F は (8.57) 式で定義した目的関数の値である。AIC が小さいものほど良いモデルとみなす。2 個のモデルの間に格段の差があるときは右辺第 1 項に著しい差が生じ、第 1 項に著しい差のないときは第 2 項の寄与により独立変数の少ないものほど良いモデルと判断を下すのである。

次にいくつかのテスト計算結果を示す。第 8-18(a) 図に示した代表的な 4 種類の導電率分布 (i) $\sigma(x) = \sigma(0)(1-x^{20})$, (ii) $\sigma(x) = \sigma(0)(1-x^2)$, (iii) $\sigma(x) = \sigma(0)(1-\sqrt{x})$ および (iv) $\sigma(x) = \sigma(0)(1-x^2)^4$; $\sigma(0) = 2 \times 10^6$ mho/m, に対して $N = 200$ で計算した交流インダクタンス (第 8-18(b) 図) を模擬的な測定データとして非線形最適化法を適用し導電率分布の推定を行う。 $f = 50$ Hz から 1 kHz までの 13 点の周波数に対する交流インダクタンスおよび平均導電率の合計 14 個をデータとした。このデータには測定誤差に相当するものは含まれていないが、 10^{-4} % 以下のわずかな丸め誤差を含んでいる。また、シンプレックス法の計算コードにおいて制約条件は、それが犯されたシンプレックスの頂点での目的関数値に 100 倍の罰則 (Penalty) を課すことによって考慮した。第 8-19 図にそれぞれの分布に対し、 N をパラメータとし再分割数 (LDD) を変えたときの AIC の値を示している。最小 2 乗法によって未知パラメータを決めるので、未知パラメータの数 ($2N-1$) はデータ点数 ($J+1=14$) よりできるだけ小さくしなければならない。ここでは、 $N \leq 8$ とした。再分割数 (LDD) を一定としたとき、どの分布の場合に対しても、 $N=2$ よりも $N=3$ の方が AIC が小さくなる。逆に、 N を一定としたとき、適当な再分割を行うことにより ($LDD \geq 2$) AIC は $LDD=1$ の場合に比べ小さくなる。この図から、AIC を最小とす

る，すなわち最も良いモデルを与える N と LDD の値の組み合わせを各導電率分布の場合について求めることができる。すなわち，(i)，(ii)，(iii)および (iv) のいずれの場合についても $N = 3$ であり， LDD はそれぞれ 2, 8, 4, および 14 である。



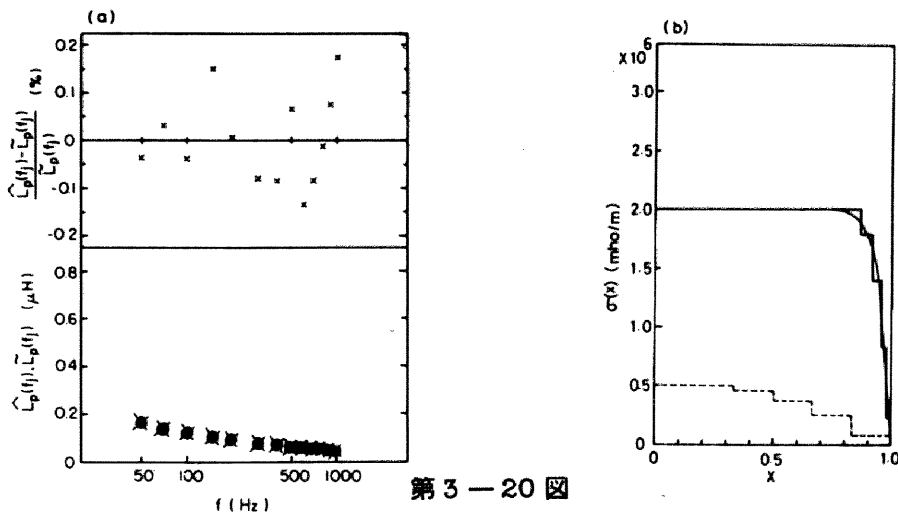
第 3-19 図

4 種類の導電率分布の場合に対し， N をパラメータとしたときの AIC の LDD 依存性。

$N = 2$ のとき (i) □, (ii) ◇, (iii) △, および (iv) ○,
 $N = 3$ のとき (i) ■, (ii) ◆, (iii) ▲, および (iv) ●,

これらの N と LDD の値の最良の組み合わせについて，模擬データとモデル計算値との比較および得られた導電率分布について第 3-20(a)(b) 図から第 3-28(a)(b) 図までに初期推定分布の 1 例とともに示す。なお，いずれの場合も初期推定分布を妥当な幅で変えても同じ分布に収束することを確認した。

第 3-20(b)図～第 3-23(b)図について注目すべき点は、平坦な分布の(i)の場合以外はプラズマ中心部での導電率の精度はあまりよくないが、これは表皮効果の現われる周波数領域の交流インダクタンスをデータの大部分として使用していることに起因しているということである。このことについては 3.3.1の後半でも簡単に述べた点であり、交流インダクタンス測定法からの導電率分布の決定という問題の最大の難点であるといえる。しかし、プラズマ中心部以外では非常に精度よく導電率分布が決定できることがわかる。上記の難点は、より広範囲の周波数領域、特に低周波側のデータがさらに追加できれば十分克服できるので大きな問題ではない。



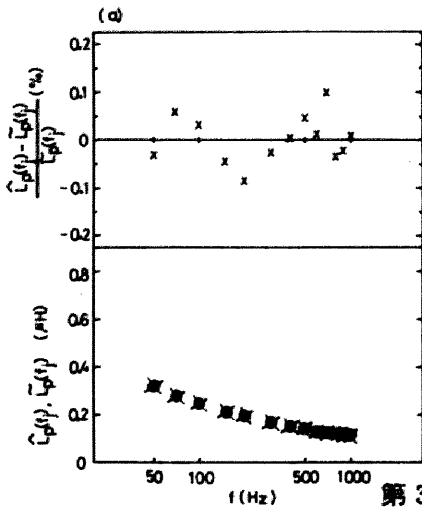
第 3-20 図

(a)

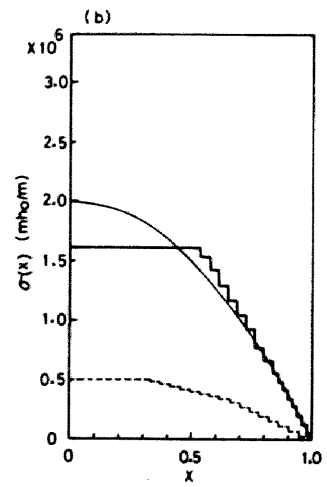
(i)の場合に対応した模擬データ ($\tilde{L}_P(t_j)$; ●)と $N=8$, $LDD=2$ の最適化計算で得られた値 ($\hat{L}_P(t_j)$; ×)との比較。記号は第 3-21(a)図～第 3-23(a)図についても共通である。また、 $\bar{\sigma}^{exp} = 1.8182 \times 10^6 \text{ mho/m}$, $\bar{\sigma}(X) = 1.8181 \times 10^6 \text{ mho/m}$ 。

(b)

第 3-20(a)図に対して得られたステップ状導分布(実線)。破線のステップ状分布は初期推定分布である。記号は第 3-21(b)図～第 3-23(b)図についても共通である。



第 3 - 21 図

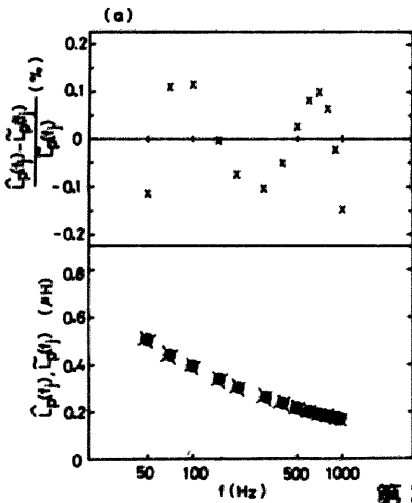


(a)

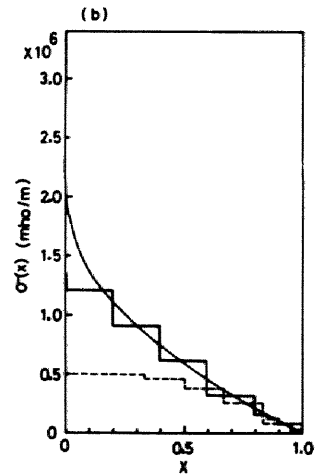
(b)

(ii)の場合に対応した模擬データと $N = 8$, $LDD = 8$ での最適化計算値との比較。また, $\bar{\sigma}^{exp} = 1.0000 \times 10^6 \text{ mho/m}$, $\bar{\sigma}(\mathbf{X}) = 1.0000 \times 10^6 \text{ mho/m}$ 。

第 3 - 2 1 (a)図に対して得られたステップ状導電率分布。



第 3 - 22 図



(a)

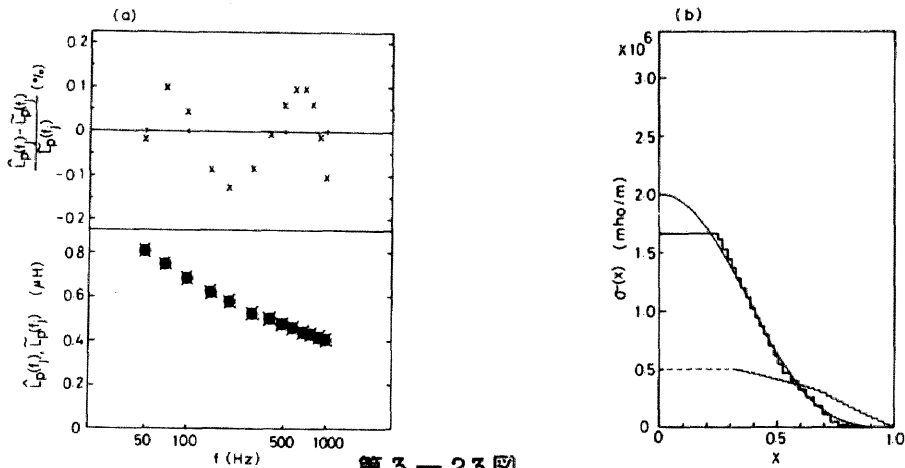
(b)

(ii)の場合に対応した模擬データと $N = 8$, $LDD = 4$ での最適化計算値との比較。また, $\bar{\sigma}^{exp} = 0.40000 \times 10^6 \text{ mho/m}$, $\bar{\sigma}(\mathbf{X}) = 0.40007 \times 10^6 \text{ mho/m}$ 。

第 3 - 2 2 (a)図に対して得られたステップ状導電率分布。

3.3.3 JFT-2 プラズマの導電率分布の決定

3.3.2で述べた方法はデータに測定誤差等を含む一般的な場合にも適用できる。ここでは、JFT-2 トカマクで得られた交流インダクタンスの測定データ（第3-9図）と平均直流導電率とから導電率分布を決定する。第3-24図に、平均直流導電率 $\bar{\sigma}^{XP}$ の測定誤差の幅を考慮し、中央値（ 3.0×10^6 mho/m）、上限値（ 3.4×10^6 mho/m）および下限値（ 2.6×10^6 mho/m）の3つの場合に対するAICのNおよびLDD依存性を示す。いずれの場合もN=2, LDD=4でAICは最小値をとる。N=3の場合は6000回の反復計算にもかかわらず、 $|F_{k+1} - F_k| < 1 \times 10^{-16}$ という収束判定条件が満たされないため計算を打切った^(注)。 $\bar{\sigma}^{XP} = 3.0 \times 10^6$ mho/mの場合で、N=2, LDD=4のときの測定データと計算値との差異を第3-25図に示す。また、 $\bar{\sigma}^{XP}$ の3種類の場合についての導電率分布を第3-26図にまとめて示す。



第3-23図

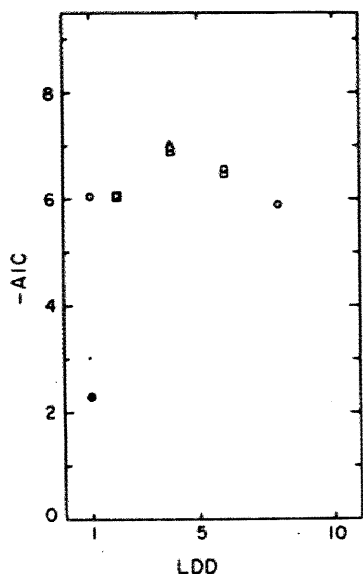
(a)

(M)の場合に対応した模擬データとN=3, LDD=14での最適化計算値との比較。また、 $\bar{\sigma}^{XP} = 0.40000 \times 10^6$ mho/m, $\bar{\sigma}(X) = 0.40000 \times 10^6$ mho/m。

(b)

第3-23(a)図に対して得られたステップ状導電率分布。

(注) 3.3.2で述べたテスト計算では、N=3の場合約1000回程度の反復計算で最適解が得られている。

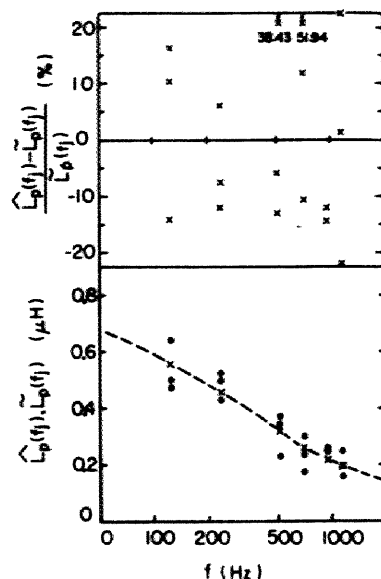


第 3-24 図

JFT-2 プラズマの測定データに対する最適化計算で得られた AIC の LDD 依存性。 $\bar{\sigma}^{EXP}$ の測定誤差の幅を考慮し、 $N=2$ として $\bar{\sigma}^{EXP}=3.0 \times 10^6$ mho/m (○), 3.4×10^6 mho/m (△) および 2.6×10^6 mho/m (□) の 3 種類の場合を示してある。●は $\bar{\sigma}^{EXP}=3.0 \times 10^6$ mho/m のときの $N=8$ の場合の結果である。

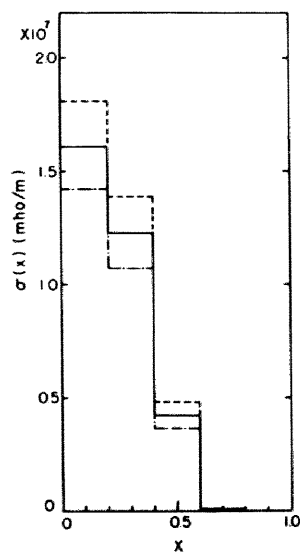
第 3-26 図

第 3-25 図に対して得られたステップ状導電率分布 (実線)。 $\bar{\sigma}^{EXP}=3.4 \times 10^6$ mho/m および 2.6×10^6 mho/m の各場合に対する結果もそれぞれ破線と一点鎖線で示してある。



第 3-25 図

第 3-24 図で AIC が最小となる場合 ($N=2, LDD=4$) に対応する測定データ (●) と最適化計算値 (×) との比較。ただし、 $\bar{\sigma}^{EXP}=3.0 \times 10^6$ mho/m。



この図からわかるように $\bar{\sigma}^{\text{exp}}$ の違いは各層の厚みにはほとんど変化をもたらさず各層の導電率のみに変化をもたらす。しかもその変化はプラズマ中心ほど大きく、プラズマの外側ではほとんど差異は生じない。この導電率分布はプラズマのほぼ半分より内側に集中した分布となっている。

以上の解析では導電率は実数量としたが実際には複素導電率となる。そこで3.3.1での議論に従って、その影響を調べる。(3.56)式において $\bar{n}_e = 1 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $\bar{\sigma}_{\text{DC}} = 3.0 \times 10^6 \text{ mho/m}$ および $Z = 1$ として低くめに評価すれば $\langle \overline{\nu_{ei}} \rangle \approx 184 \times 10^5 \text{ sec}^{-1}$ を得る。したがって、 $f \approx 125 \text{ Hz}$ では $\xi \approx 4.27 \times 10^{-3}$, $\Phi \approx 14.2$, $f \approx 1150 \text{ Hz}$ では $\xi \approx 3.93 \times 10^{-2}$, $\Phi \approx 131$ となる。第3-16図によれば、 $f \approx 1150 \text{ Hz}$ でも交流インダクタンスの増加率は5%以内となり実験での測定誤差で十分吸収されてしまう。また実数導電率として得たプラズマ中心での導電率は平均導電率より約6倍大きい。この領域の導電率の値は交流電界の表皮効果の現われるような周波数領域でのインダクタンスには殆んど寄与せず、交流インダクタンスが周波数に殆んど依存しない周波数領域で主として影響をもつ。したがって、上で述べた $\langle \overline{\nu_{ei}} \rangle$ による評価で大きな誤差は生じないと考えられる。たとえプラズマ中心の導電率に対し $f \approx 125 \text{ Hz}$ としても $\xi \approx 2.56 \times 10^{-2}$, $\Phi \approx 85.2$ となりこのように ξ を大きめに評価してもやはり問題ないと考えられる。

3.3.4 非線形最適化法によるプラズマ導電率分布決定に関する今後の課題

トカマクプラズマにおける交流インダクタンスの測定データの非線形最適化法による解析を導電率が実数量として行なってきたが、複素導電率の場合でも本節で述べた方法を自動的に拡張することができる。ただ、この場合は、電子温度分布 $T_e(r)$ および電子密度分布 $n_e(r)$ も既知として、 $Z(r)$ を適当に仮定し、各層の $\langle \nu_{ei} \rangle$ および ϵ を評価し、導電率が (8.24) 式で与えられるとして交流インダクタンスを計算し、測定データと最もよく一致するよう電荷数の空間分布 $Z(r)$ を決める問題に帰着される。

また、上で述べた方法では交流インダクタンスと平均直流電率のみをデータとして用いても、満足できる結果が得られた。データとして交流抵抗も加えることができれば、この測定法の信頼性は一段と向上すると考えられる。

§ 3-4 非線形最適化法による測定データ処理法の展望

トカマクプラズマはトロイダル方向に大電流を有し、しかも電子温度およびイオン温度とも数百 eV 以上の高温で電子密度も 10^{23} cm^{-3} 程度以上である。さらに不純物を極端にきらうという点から、従来プラズマ物理実験でよく使用されてきた探針測定法等のプラズマ内に検出子を挿入するような測定法は全く使用できない。このため、プラズマの局所的な情報を直接得ることのできる測定法はレーザ光のトムソン散乱法などごく限られた方法以外にない。一般にはプラズマ領域にわたっての積分量として情報が得られるにすぎ

ず、物理量の空間分布を知るためにはデータに対し何らかの積分変換を施す必要がある。一般にこのような問題は「逆問題」と呼ばれている。このような逆問題はトカマクプラズマの閉じ込め実験で得られるデータに関して、§ 3-3で述べた交流インダクタンスの周波数依存性から導電率分布を決定する問題、マイクロ波干渉法により得られる位相推移分布から電子密度分布を求める問題等、容易に数えあげることができる。マイクロ波干渉データから電子密度分布を求める場合、円筒対称性があれば、Abel変換を直接適用して分布を得ることができるが、トロイダルプラズマの場合は単純でない。この問題についても最近、非線形最適化法により非常に良好な結果が得られることが報告されている²⁷⁾。その他にトカマクプラズマに関連して主なものを列挙すると

- ① H_{α} 線測定データより H_{α} 線光量子数分布を求めること。これは、マイクロ波干渉データの処理法と同様に扱える。
- ② 荷電交換により得られる高速中性粒子のエネルギー分布よりイオン温度分布やプラズマ中の中性粒子密度分布を求めること。
- ③ X線スペクトルから電子の分布関数を推定すること。逃走電子量を評価すること²⁸⁾。
- ④ 軟X線測定データより、電子温度分布およびMHD不安定性に関連した有理磁気面の位置と摂動電流の大きさやその空間分布を決めること。

等である。このように、非線形最適化法は今後のトカマク実験の進展に伴ない、新たなデータの処理法として強力な手段となるであろう。

§ 3-5 結 言

トカマクプラズマの測定データを最小 2 乗法に基く解析法により処理し、良好な結果を得た。まず、§ 3-2 においてプラズマの交流インダクタンス測定において得られる減衰振動波形の分析に非線形最小 2 乗法を適用し、非線形最適化法により計算して精度よく波形パラメータが決定できることを示した。このようにして JFT-2 プラズマの交流インダクタンスの周波数依存性を求めた。また、ダイナミックリミターを使用した実験におけるプラズマ有効半径の時間的振舞を得、この半径で特徴づけられるようなプラズマの高温領域の端がりリミターとともに拮抗することを明らかにした。§ 3-3 では上記の交流インダクタンスの周波数依存性からプラズマ導電率分布を決定するという非常に興味深い問題に対し非線形最適化法を適用し、導電率分布がかなり精度よく決定できることを示した。ここでは測定データに対して設定した導電率分布のモデルの良さの評価規準として情報量規準 AIC を導入し、この判定法の有効性を示した。また、応用例として JFT-2 プラズマの導電率分布の推定を行なった。トカマクプラズマの測定データの大部分は上記のデータと同様、適当な積分変換を施さないかぎり、局所的な情報が得られない。このようなデータ処理に関連した、いわゆる逆問題の解法として非線形最適化法は強力な手段となりうることを本章の最後にいくつかの例をあげて指摘した。

以上で述べたようにトカマクプラズマの測定データを処理するとき、何らかの意味の最適化操作が不可欠であり、データと設定したモデルとの一致の良さを情報量規準 AIC によって判定することにより、このようなデータの系統的処理が可能となり含まれる情報が有効に取り出されるであろう。今後、

このようなデータの解析法の応用はますます拡大することが期待される。

参 考 文 献

- 1) Nuclear Fusion Lab., JAERI -memo 4084 (公開) (1970)
S. Itoh et al., JAERI-M 5385 (1973).
- 2) D.P. Ivanov and S.S. Krasilnikov, State Publishing
Hause of Literature of Atomic Science and
Technology, State Committee for the Utilization of
Atomic Energy, Moscow, 1963, Translation: AEC-
tr-6518(US Atomic Energy Commission, 1964) 266.
- 3) A.N. Dellis and J.C. Hosea, MATT-969(1973).
- 4) P. Plinate, in Controlled Fusion and Plasma Phys.
(Proc. 7th Europ. Conf. Lausannu, 1975).P11.
- 5) K. Toi, T. Takeda and S. Itoh, JAERI-M 5888(1974).
- 6) E. Van Der Voort and B. Dorpema, Report of Joint
Nuclear Research Center, EUR 4777e (1972).
- 7) 太田充, 大賀徳道, 国枝俊介, 山本正弘, 浜野昇,
JAERI-M 5433 (1973).
- 8) T. Tazima, et al., in Plasma Phys. and Controlled
Nucl. Fusion Research (Proc. 5th Int. Conf. Tokyo,
1974)Paper A1-2.
- 9) J.W.M. Paul, et al., in Plasma Phys. and Controlled
Nucl. Fusion Research (Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden,

- 1976)Paper A17.
- 10) S. Itoh, et al., in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden, 1976)Paper D-3.
 - 11) H.P. Furth, in Toroidal Plasma Confinement (Proc. 3rd Int. Symp. Garching, March 1973) B9-I.
 - 12) A.I. Anisimov, et al., in Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Proc. 4th Int. Conf. Madison, 1971) 3 , IAEA, Vienna (1971)543.
 - 13) S. Itoh, T. Sugawara, N. Suzuki, T. Takeda and K. Toi, Nucl. Fusion **14** (1974) 581.
 - 14) T. Sugawara, S. Itoh, N. Suzuki, T. Takeda and K. Toi, Nucl. Fusion **14** (1974) 451.
 - 15) K. Toi, T. Takeda, N. Suzuki, T. Sugawara, S. Itoh, H. Shirakata, K. Takahashi and S. Yano, Nucl. Fusion **15** (1975) 687.
 - 16) I.N. Golovin, Y.N. Dnestrovskii and D.P. Kostomarov, in Proc. Nucl. Fusion Reactor Conf., Culham, 194, see also page 210 for reference to B.B. Kadomtsev (British Nuclear Energy Society, 1969).
 - 17) L.I. Artemenkov, P.I. Koslov, P.I. Melikhov and V.S. Svishev, in Controlled Fusion and Plasma Phys.(Proc. 6th Europ. Conf., Moscow, 1973).
 - 18) K. Toi, T. Takeda and S. Itoh, Submitted to Japan. J. appl. Phys.

- 19) M.A. Heald and C.B. Wharton, Chapter 2 in **Plasma Diagnostics with Microwaves** (John Wiley, New York, 1965).
- 20) I.P. Shkarofsky, T.W. Johnston and M.P. Bachynski, Chapter 8 in **The Particle Kinetics of Plasmas** (Addison - Wesley, London, 1966).
- 21) L. Spitzer and R. Härm, *Rhys. Rev.* **89** (1953) 977.
- 22) Chapter 9 in **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables** ed. by M. Abramowitz and I.A. Stegun (National Bureau of Standards, Washington, 1964).
- 23) G.W. Stewart III, *J. ACM* **14** (1967) 72.
- 24) M.J.D. Powell, *Computer J.* **7** (1964) 155.
- 25) J.A. Nelder and R. Mead, *Computer J.* **7** (1965) 308.
- 26) 赤池弘次, *数理科学* No.153 (1976) 5.
- 27) T. Takeda, *J. Comput. Phys.* **21** (1976) 305.
- 28) V.A. Abramov, in **Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research** (Proc. 5th Int. Conf. Japan, 1974) Paper A16-4.

第4章 非線形境界値問題の解析

§4-1 緒言

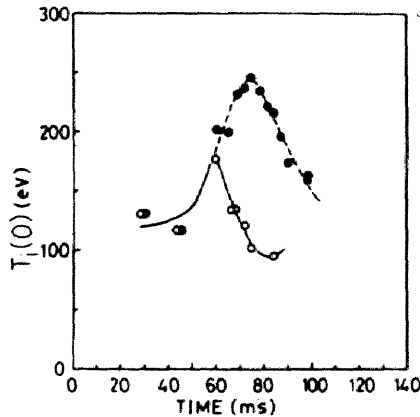
非線形最適化法は種々の非線形境界値問題の解析に対しても有効である。この方法をトカマクプラズマのイオン温度の定常分布の導出に応用する。ここで述べる方法は、有限要素法あるいは重みつき残差法により境界値問題を変分問題に変換し、非線形最適化法を適用して解を得るという非常に応用範囲の広いものである。

まず、§4-2においてダイナミックリミターを使用した実験(8章の3.2.4)におけるイオン温度の特徴的な時間変化について述べる。イオン温度の定常値に関するArtsimovichの比例法則を導入する。さらに、この比例法則に対するイオン温度の非定常性の影響について言及する。§4-3ではイオン温度の定常状態における半径分布を求める。電流密度分布および電子密度分布がイオン温度の比例法則の比例係数にどのような影響を与えるかについて解析する。§4-4において§4-3の結果を使って、ダイナミックリミターを使用した実験におけるイオン温度の時間変化に対する解釈を試る。最後に、トカマクプラズマに関連して発生する種々の定常問題の解析への非線形最適化法の適用の可能性について述べる。

§4-2 ダイナミックリミターを使用した実験におけるイオン温度¹⁾

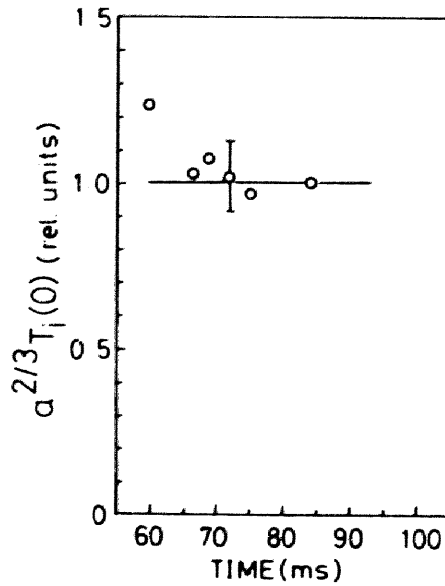
ダイナミックリミターを使用した実験における閉位置運転モードおよびリミター作動

モードについてイオン温度の時間変化を測定した。イオン温度は、プラズマ中のイオンと低温の中性粒子との荷電交換過程によりプラズマから放出される高速中性粒子のエネルギースペクトルから求めた。このようにして得られるイオン温度はプラズマ中心での値を示している。第4-1図はこれらの運転モードにおいて得られたもので、顕著な差異を示している。閉位置運転モ



第4-1図 ダイナミックリミター作動モード(○)および閉位置運転モード(●)の各々の場合についてのプラズマ中心でのイオン温度の時間変化。リミターは放電開始後60 mSECで駆動されている。

ドにおいてイオン温度は放電後75 mSECで最大値 $T_i(0) \approx 240 \text{ eV}$ に達している。この値は Artsimovich による新古典輸送理論のプラトー領域でのイオン温度に関する比例法則²⁾ (後述の(4.1)式)による推定値とよく一致している。一方、リミター作動モードではリミターの動きに応じてイオン温度の顕著な変化がみられ80 mSECで最小になる。さらに、リミターが作動中 $a^{3/4} T_i(0)$ が時間的にほぼ一定となっている(第4-2図)。この現象は、リミター作動中にプラズマ電流がほとんど変化しないので、Artsimovich のイオン温度に関する比例法則によれば $\lambda Ne^{1/3}$ が時間的にほぼ一定であるといえる。ここで、 λ は比例法則の比例係数であり、 Ne はプラズマ中の全



第 4-2 図 ダイナミックリミター作動中における $a^{2/3} T_i(0)$ の時間変化。
 (a : 有効プラズマ半径, $T_i(0)$: プラズマ中心でのイオン温度)

電子数である。この結果は次のようにして導かれる。

イオンのエネルギー損失は Galeev と Sagdeev によって導かれた新古典理論によるイオンの熱伝導⁸⁾のみとし、電子とのクーロン衝突によるエネルギー供給とバランスするとして定常状態でのプラズマ中心のイオン温度は

$$T_i(0) = \lambda (I_p B_t R^2 \bar{n}_e(\text{rad}))^{1/8} / A_i^{1/2} \quad (\text{eV}) \quad (4.1)$$

で与えられる²⁾。ここで I_p , B_t , R , $\bar{n}_e(\text{rad})$ および A_i はそれぞれプラズマ電流値(A), トロイダル磁場(G), プラズマの主半径(cm), 電子密度の半径方向平均値(cm^{-3}) およびイオンの原子量である。 $\lambda (\text{eV} \cdot \text{A}^{-1/3} \cdot \text{G}^{-1/3} \cdot \text{cm}^{1/3})$ はイオン温度の定常分布の解析により具体的に決定される量であり、§4-3 で詳しく述べる。

(4.1) 式は定常状態という仮定のもとに導かれたが、第4-1図からわかるようにイオン温度はかなり変化しているので、ここでこの非定常性の

(4.1)式に及ぼす影響を議論しておく必要がある。 $\frac{dT_i}{dt} = 0$ としたことによる T_i の相対誤差 $|\Delta T_i| / T_i$ はイオン1個あたりのエネルギーバランスの式,

$$\frac{3}{2} \frac{dT_i}{dt} = Q_{ei} - Q_i^{\text{cond}} \quad (4.2)$$

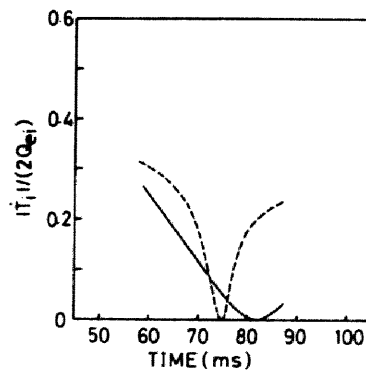
$$Q_{ei} \propto T_i^{-1/2} \quad (\text{電子からイオンへのエネルギー供給}) \quad (4.3)$$

$$Q_i^{\text{cond}} \propto T_i^{5/2} \quad (\text{プラトー領域でのイオンの熱伝導損失}) \quad (4.4)$$

より

$$|\Delta T_i| / T_i = |\dot{T}_i| / (2 Q_{ei}) \quad (4.5)$$

で与えられる。第4-3図はイオン温度の相対誤差を(4.5)式により



第4-3図 イオン温度の非定常性により生ずるイオン温度の相対誤差の時間的变化。リミター作動モード(実線)および閉位置運転モード(破線)の各々の場合を示している。

\bar{n}_e (rad) = $5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ (注) として、第4-1図の実験データから評価したものである。この図からわかるように、許容誤差を15%以下とすれば「閉位置運転モード」の場合に比べ「リミター作動モード」の場合の方がその条件を満足する時間領域が広く、後者の場合68mSECから90mSECまで以上に達する。

さて、(4.1)式において、

$$\bar{n}_e(\text{rad}) \propto N_e / (R a_n^2) \quad (4.6)$$

を考慮すれば、

$$T_i(0) \propto \lambda (I_p B_t R N_e / a_n^2)^{1/3} \quad (4.7)$$

となる。ここで、 a_n は電子密度分布を特徴づける半径であり、これを3.3.2で述べたプラズマ交流インダクタンス測定より得られた a_σ ((3.20)式)とみなせば第4-2図より

$$\lambda N_e^{1/3} \simeq \text{一定} \quad (4.8)$$

が導かれる。この式の意味を解釈するため次節において λ について詳しく調べる。このとき、イオン温度の定常状態の解析に非線形最適化法を適用する。

(注) (4.5)式で与えられるイオン温度の相対誤差の上限を評価するため、 Q_{ei} ができるだけ小さくなるよう放電条件から考えられる最低の電子密度(半径での平均値)として $\bar{n}_e(\text{rad}) = 5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ とした。

§ 4-3 イオン温度の定常分布

4.3.1 イオンのエネルギーバランス

抵抗加熱のみによる通常のトカマクプラズマにおける定常状態とみなせる場合のイオンのエネルギーバランスは円筒プラズマを仮定すれば、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \kappa_i \frac{dT_i}{dr} \right) = -q_i \quad (4.9)$$

で与えられる。ただし、トロイダル効果によるイオンの捕捉効果は熱伝導率 κ_i に含まれ、新古典輸送理論のプラトー領域の結果から³⁾

$$\kappa_i = \alpha^* A_i \sqrt{2} \frac{r}{R^2} \cdot \frac{n_e T_i^{3/2}}{B_t B_\theta} \quad (4.10)$$

となる。

ここで、 α^* および B_θ はそれぞれ比例定数およびプラズマ電流によるポロイダル磁場である。また、単位時間当り電子からイオンへ供給されるエネルギー密度 q_i は電子密度 (n_e)、電子温度 (T_e)、イオンの原子番号 (A_i)、およびイオン温度 (T_i) の関数であるが $1.6 \lesssim T_e/T_i \lesssim 10$ では T_e の影響は殆んど無視できて

$$q_i = \beta^* \frac{n_e^2}{A_i \sqrt{T_i}} \quad (4.11)$$

と表わすことができる。ここに β^* は比例定数である。

4.3.2 非線形境界値問題の最適化問題への変換⁴⁾

(4.10) および (4.11) 式を (4.9) 式に代入すればイオン温度の定常状態を決定する微分方程式が得られる。プラズマ半径 a および温度の次元をもつ量 T_0 を含む置換

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= (T_i(r)/T_0)^{1/2} \\ h(x) &= n_e(r)/n_e(0) \\ b(x) &= B_\theta(r)/B_\theta(a) \\ j(x) &= j_z(r)/j_z(0) \\ x &= r/a \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

を用いて、(4.9) 式は次のように書きかえられる。

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{h(x)}{b(x)} u'(x) \right) + \Lambda \frac{h^2(x)}{u(x)} = 0 \quad (4.13)$$

$$\Lambda = \frac{\mu_0 \beta^* R^2 B_t n_e(0) I_p}{2\pi a^* A_i^{3/2} T_0^3} \quad (4.14)$$

境界条件は

$$u'(0) = 0 \quad (4.15)$$

$$u^2(1) = T_i(a)/T_0 = C^2 \quad (4.16)$$

である。ここで Λ および C^2 は予め与えられる定数である。また (4.14) 式よりプラズマ中心でのイオン温度 $T_i(0)$ は

$$\gamma = \bar{n}_e(\text{rad}) / n_e(0) \quad (4.17)$$

とおけば、

$$T_i(0) = \left[\mu_0 \beta^* / (2\pi a^* \gamma \Lambda) \right]^{1/3} u^2(0) \cdot \left[R^2 B_t \bar{n}_e(\text{rad}) I_p \right]^{1/3} / A_i^{1/2} \quad (4.18)$$

で与えられる。したがって、Artsimovich のイオン温度比例則の比例定数 λ は (4.1) 式と上式を比較することにより

$$\lambda = \left[\mu_0 \beta^* / (2\pi a^* \gamma \Lambda) \right]^{1/3} u^2(0) \quad (4.19)$$

となる。したがって、(4.18)、(4.15) および (4.16) 式の境界値問題を解くことによりプラズマ電流密度および電子密度の半径方向分布に関する依存性が決定される。これらの式で与えられる非線形境界値問題を解く方法はいくつか考えられるが、ここでは有限要素法の手法をさらに一般化した重みつき残差法⁵⁾により上記境界値問題に対応した変分方程式を導き、非線形最適化法により解析する。いま、境界条件 (4.15) および (4.16) 式を満足する近似解 $\hat{u}(x)$ を (4.18) 式に代入することにより生ずる残差

$$R(\hat{u}(x_i), x) \equiv \mathcal{L}(\hat{u}(x)) \quad (4.20)$$

に適当な重み関数 $w_i(x)$ を乗じたものの定義領域 Γ での体積積分 F

$$F = \int_{\Gamma} R(\hat{u}(x_i), x) w_i(x) dV \quad (4.21)$$

が最小となるよう未知パラメータ $\hat{u}(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) を決める。重みつき残差法により問題を有効に解く上で重み関数の選択が一つの重要な要因である。 $w_i(x)$ を近似解 $\hat{u}(x_i)$ とおいた場合が Galerkin 法であり最も一般的な重み関数の選択であるが、以下の解析では

$$w_i(x) = \frac{\partial R(\hat{u}(x_i), x)}{\partial \hat{u}(x_i)} \quad (4.22)$$

とする。この場合、問題は平均 2 乗残差

$$F = \int_{\Gamma} [R(\hat{u}(x_i), x)]^2 dV \equiv \int_{\Gamma} \{\varphi(x)\}^2 dV \quad (4.23)$$

を未知パラメータ $\hat{u}(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, N$) に関して最小化することに帰着させる。これは最小 2 乗法に他ならず、 F の最小化により誤差の最も小さい解が得られることになる。 N 個のメッシュ点の値 $\hat{u}(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, N$) に関して (4.23) 式で与えられる F は非線形であるため、非線形最適化法により最小化を行う。

定義領域を N 等分し ($\Delta x=1/N$), N 個のメッシュ点の値 $\hat{u}(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, N$) を使って (4.23) 式を具体的に書き表わせれば、次の (4.24) 式の

よくなる。ただし、プラズマ表面 ($x = x_{N+1} = 1$) での $\hat{u}(x_{N+1})$ の値は境界条件 (4.16) 式により与えられる。

$$F = d_1 \psi_1^2 + \sum_{i=2}^N d_2 (i-1) \psi_i^2 + d_2 (N-1) \psi_N^2 + d_3 \psi_{N+1}^2 \quad (4.24)$$

ここに,

$$x_1 = 0, \quad x_{N+1} = 1.0 \quad (4.25)$$

$$d_1 = 0.25 (\Delta x)^2 \quad (4.26)$$

$$d_2 = (\Delta x)^2 \quad (4.27)$$

$$d_3 = 0.5 \cdot \Delta x \cdot [1 - 0.5 \cdot \Delta x] \quad (4.28)$$

$$\psi_1 = \alpha_1 \left\{ \left[\hat{u}(x_2) \right]^5 - \left[\hat{u}(x_1) \right]^5 \right\} + \frac{\Lambda}{\hat{u}(x_1)} \quad (4.29)$$

$$\psi_i = \alpha_i \left[\hat{u}(x_{i+1}) \right]^5 + \beta_i \frac{\Lambda}{\hat{u}(x_i)} + \gamma_i \left[\hat{u}(x_i) \right]^5 - (\alpha_i + \gamma_i) \left[\hat{u}(x_{i-1}) \right]^5$$

$i = 2, 3, \dots, N-1$ (4.30)

$$\psi_N = \alpha_N C^5 + \beta_N \frac{\Lambda}{\hat{u}(x_N)} + \gamma_N \left[\hat{u}(x_N) \right]^5 - (\alpha_N + \gamma_N) \left[\hat{u}(x_{N-1}) \right]^5 \quad (4.31)$$

$$\psi_{N+1} = \alpha_{N+1} C^5 + \beta_{N+1} \frac{\Lambda}{C} - (\alpha_{N+1} + \gamma_{N+1}) \left[\hat{u}(x_N) \right]^5 + \gamma_{N+1} \left[\hat{u}(x_{N-1}) \right]^5$$

(4.32)

$$\alpha_1 = \frac{1.6}{b'(x_1) \cdot (\Delta x)^2} \quad (4.33)$$

$$\alpha_i = \frac{0.4 x_i h(x_i)}{b(x_i) \cdot (\Delta x)^2} + \frac{0.2}{[b(x_i)]^2 \cdot (\Delta x)} \left\{ [2h(x_i) + x_i h'(x_i)] \cdot b(x_i) - x_i \cdot h(x_i) \cdot b'(x_i) \right\} \quad i=2, 3, \dots, N \quad (4.34)$$

$$\beta_i = [h(x_i)]^2 \quad i=2, 3, \dots, N \quad (4.35)$$

$$\gamma_i = -\frac{0.8 x_i \cdot h(x_i)}{b(x_i) \cdot (\Delta x)^2} \quad i=2, 3, \dots, N \quad (4.36)$$

$$\alpha_{N+1} = 0.4 \left\{ \frac{h(x_{N+1})}{(\Delta x)^2} + \frac{2h(x_{N+1}) + h'(x_{N+1}) - h(x_{N+1}) \cdot b'(x_{N+1})}{\Delta x} \right\} \quad (4.37)$$

$$\beta_{N+1} = [h(x_{N+1})]^2 \quad (4.38)$$

$$\gamma_{N+1} = \frac{0.4 h(x_{N+1})}{(\Delta x)^2} \quad (4.39)$$

であり、積分は台形公式により行なった。

(4.24)式で与えられる目的関数を最小化するための最適化計算法としては、目的関数の勾配 ($\frac{\partial F}{\partial \hat{u}_i}$; $i=1, 2, \dots, N$) およびヘシアン行列 ($\frac{\partial^2 F}{\partial \hat{u}_i \partial \hat{u}_j}$; $i, j=1, 2, \dots, N$) を比較的簡単な解析的形式で与えることができることを考慮し、Van der Voort と Dorpema の計算法⁶⁾を使用する。

簡単のため、電子密度分布およびプラズマ電流密度分布は次の形にかぎって計算を実行する。すなわち、

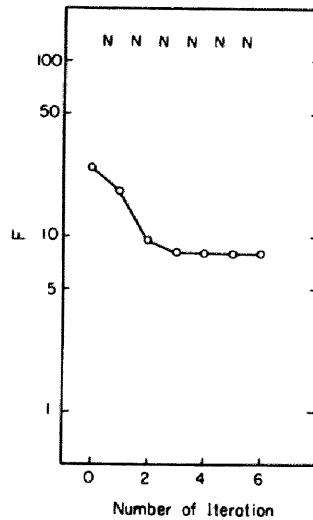
$$h(x) = n_e(r) / n_e(0) = 1.0 - A_1 x^{2m} + A_2 x^{2s} (1 - x^2) \quad (4.40)$$

$$j(x) = j_z(r) / j_z(0) = 1.0 - B_1 x^{2n} + B_2 x^{2t} (1 - x^2) \quad (4.41)$$

ここで、 A_1 、 A_2 、 B_1 および B_2 は任意の実数、 m 、 n 、 s および t は正の実数である。

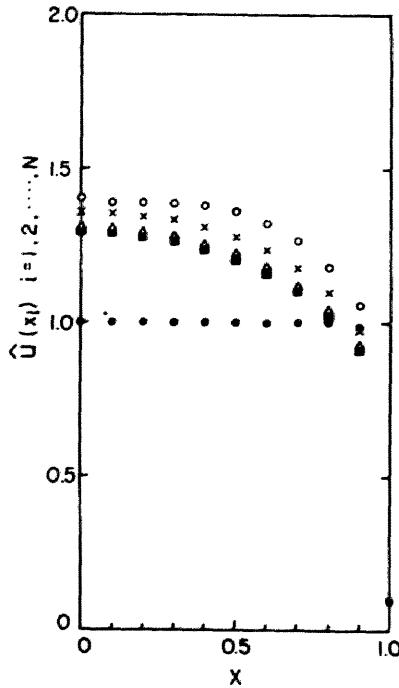
4.3.3 計算結果

第4-4および第4-5図は $N=10$ とし、 $h(x)=1-0.9x^4$ 、 $j(x)=1-x^2$ の場



第4-4図 $h(x)=1-0.9x^4$ 、 $j(x)=1-x^2$ およびメッシュ数 $N=10$ の場合の目的関数の収束状態。反復計算6回で収束している。図面の上端に示した「N」はNewton-Raphson法により最小化が実行されたことを意味している。

合について反復計算回数に対する目的関数値および未知パラメータ $\hat{u}(x_i)$ の収束状態を示している。第4-5図で示された $\hat{u}(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, N+1$) (●) が初期推定分布を構成している。この場合、ヘシアン行列が正定値であった



第 4 - 5 図 第 4 - 4 図に対する未知パラメータ $\hat{u}(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, 10$) の収束状態。 $x=1$ での $\hat{u}(x_i)$ は境界条件で規定されている。●が初期推定分布を構成している。○, x, △, □および■の順に反復計算が進行している。■は 5 回目と 6 回目の反復計算の結果を示している。

ため 6 回の反復計算のすべてが Newton-Raphson 法によって実行されている。第 4 - 6 図は $h(x)$ と $j(x)$ の 4 種類の組み合わせ, すなわち, I. $h(x)=1-0.9x^2$, $j(x)=1-x^2$; II. $h(x)=1-0.9x^4$, $j(x)=1-x^2$; III. $h(x)=1-0.9x^{200}$, $j(x)=1-x^{200}$, および IV. $h(x)=j(x)=1.0$ に対して, 比例係数 λ

第 4 - 6 図

λ のメッシュ点数に対する収束の状態。

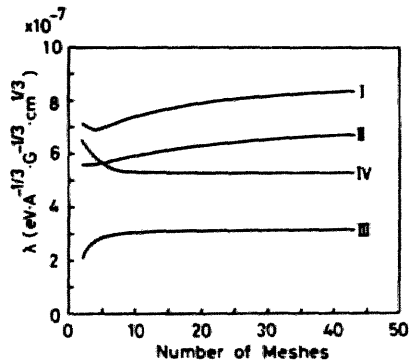
I: $h(x)=1-0.9x^2$, $j(x)=1-x^2$;

II: $h(x)=1-0.9x^4$, $j(x)=1-x^2$;

III: $h(x)=1-0.9x^{200}$, $j(x)=1-x^{200}$;

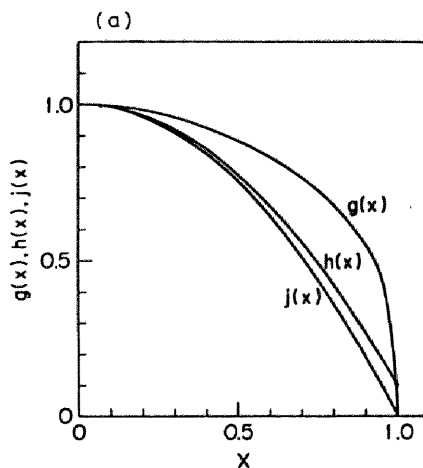
IV: $h(x)=j(x)=1.0$ 。

$T_i(a)=1 \text{ eV}$ 。

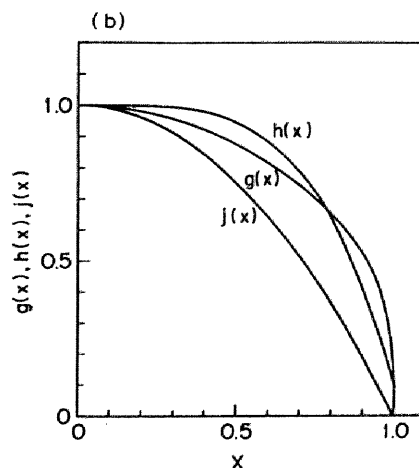


の収束性をメッシュ数 N の関数として示している。ただし、 $T_i(a)=1\text{eV}$ とした。 λ は非線形境界値問題の固有値に相当するものであり、前述したように (4.1) 式のイオン温度の比例法則の比例係数となっている重要な量である。 λ のメッシュ点数に関する収束性はこの図からわかるように $h(x)$ と $j(x)$ の形に依存して異なるが、いずれの場合についても $N=20$ 以上でほとんど収束する。第 4-7 (a), (b), (c) 図に、第 4-6 図における I, II および III の場合に対するプラズマ中心の値で規格化したイオン温度分布 ($g(x) = [u(x)/u(0)]^2$) を示す。ただし、 $N=20$ である。これらの図から、一般に

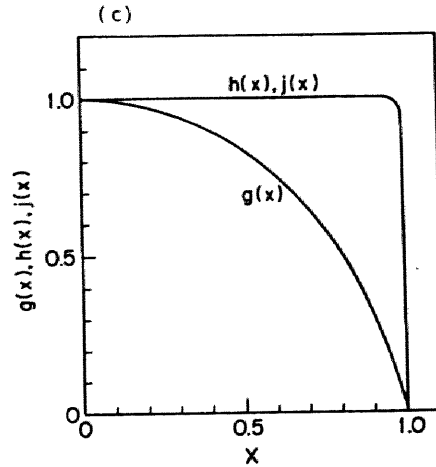
第 4-7 (a) 図
 第 4-6 図の I の場合に対応するイオン温度の定常分布。ただし、 $N=20$ 。



第 4-7 (b) 図
 第 4-6 図の II の場合に対応するイオン温度の定常分布。ただし、 $N=20$ 。

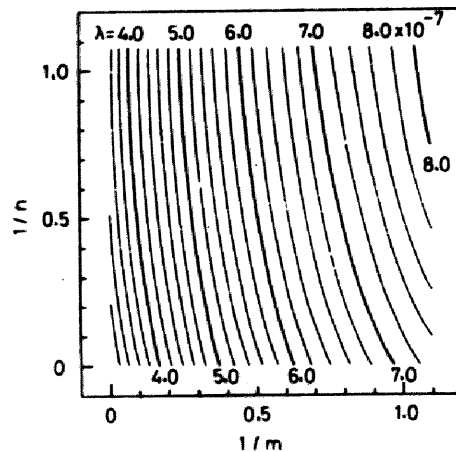


第 4 - 7 (c) 図
 第 4 - 6 図の ■ の場合に対応
 するイオン温度の定常分布。
 ただし、 $N = 20$ 。



尖がった電子密度分布に対しては平坦なイオン温度分布が得られるといえる。
 逆に平坦な電子密度分布に対しては、尖がったイオン温度分布が得られる。

比例係数 λ が電子密度分布およびプラズマの電流密度分布にどのように依存しているかをさらに明確にするために電子密度分布 ($h(x) = 1 - 0.9x^{2m}$) と電流密度分布 ($j(x) = 1 - x^{2n}$) を特徴づけるパラメータ $1/m$ および $1/n$ で構成される平面上に λ の等高線を描くと第 4 - 8 図のようになる。通常の

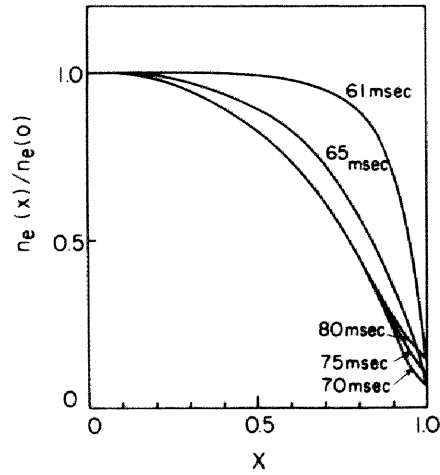
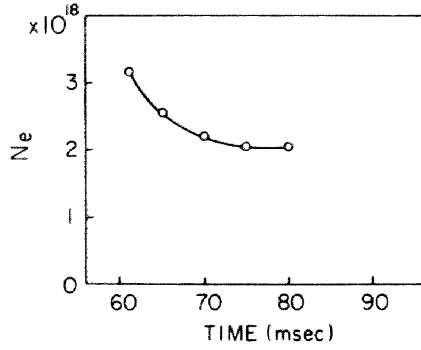


第 4 - 8 図 λ の ($1/m - 1/n$) 平面における等高線。ここで
 $T_i(a) = 1 \text{ eV}$, $N = 20$, $h(x) = 1 - 0.9x^{2m}$,
 $j(x) = 1 - x^{2n}$ である。

トカマクプラズマにおいてはプラズマ電流密度分布は電子密度分布よりもプラズマ中心に集中した形になっているので、上図から λ はプラズマの電流密度分布にほとんど依存せず電子密度分布のみに依存していると結論できる。したがって、イオン温度の定常分布に関しては電子密度分布のみに注目すればよいことになる。

§ 4-4 ダイナミックリミターを使用した実験結果に対する解釈

§ 4-2において、イオン温度の変化とプラズマ有効半径の変化とをイオン温度の比例法則で関係づけることにより、ダイナミックリミターが作動中 $\lambda Ne^{1/3}$ が時間的にほぼ一定であるという結果が導かれた。この結果を満足する条件として次の3つの場合を考えることができる。すなわち、(1) λ が増大し、 Ne が減少する。(2) λ と Ne がともに一定である。(3)(1)と増減関係が逆になっている。しかし、同実験では電子密度に関する情報が得られていないので、どの場合に最も近いかを実験結果から決定することが不可能である。しかしながら、計算機シミュレーション⁷⁾の結果を参考にすることができる。このシミュレーションでは実験で得られたプラズマ電流波形(第8-11図)、イオン温度の時間変化(第4-1図)およびプラズマの有効半径の変化(第8-12図)に最も良く合うようにプラズマへ流入する中性粒子束の大きさと時間変化および粒子拡散係数と電子の熱伝導係数の異常係数を調整した。その結果ダイナミックリミター作動中の電子密度分布と全電子数の変化が第4-9図のように得られた。この図によれば65mSECから80mSECにかけて電子密度分布にわずかながら尖鋭化が起り、同時に Ne は減少している。第4-8図を参照すると、この場合には λ が約10%程度増加する。この時間内



第4-9図 計算機シミュレーションにより得られた全電子数の時間変化と電子密度分布の変化。リミターは60 msecから作動を開始するものとして計算された。

での $\lambda Ne^{1/3}$ の変化は約9%程度でほぼ $\lambda Ne^{1/3} \cong \text{一定}$ が成立しているといえる。

§ 4-5 定常状態解析への非線形最適化法の応用

§ 4-3においてトカマクプラズマのイオンの簡単化したエネルギーバランスの定常状態を規定する非線形微分方程式の解析を行なった。このとき境界値問題を重みつき残差法によりある種の変分形式に直して非線形最適化法

を適用することにより効率よく解を得ることができた。このような手法はさらに複雑な定常問題の解析へ拡張できる。たとえば、新古典輸送理論で定常状態の解析である⁸⁾。この場合、未知量は電子密度、電子温度、イオン温度および電流密度の4種類であり、さらにプラズマをN個のメッシュに分割するとすれば、非線形最適化の未知パラメータ数は4N個とかなり多くなる。このように未知変数の数が多い場合にはできるだけ初期推定値を精度よく選ぶことが必要である。そのひとつの方法として、まずN=1として解を求め、その解をN=2の初期推定値とする。この操作を順次繰返していけば比較的容易に最適解を得ることができるであろう。トカマクプラズマのMHD平衡配位を決定するという問題も重要な定常問題のひとつである。

軸対称トロイダルプラズマのMHD平衡はポロイダル磁場の磁束関数 ψ を使ってトーラスの対称軸をz軸とする円筒座標系で表わした微分方程式

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r^2 \frac{dp}{d\psi} - I_A \frac{dI_A}{d\psi} \quad (4.42)$$

を次の境界条件で解くことにより決定される。

$$\left. \begin{aligned} \psi = 0 & : \text{プラズマ表面} \\ \psi > 0 & : \text{プラズマ中} \\ \psi < 0 & : \text{真空中} \\ \psi = \psi_0 < 0 & : \text{外部境界条件} \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

また,

$$I_A^2 = \begin{cases} I_A^2(\varphi) & : \varphi \geq 0 \\ I_A^2(0) & : \varphi < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

$$P = \begin{cases} P(\varphi) & : \varphi \geq 0 \\ 0 & : \varphi < 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

一般にこの問題は自由境界値問題となる。これを有限要素法や重みつき残差法により変分形式に変換し、それを非線形最適化法を使って最小化することにより平衡解が得られる。最近、この方法によりトカマクプラズマのMHD平衡が解析された⁹⁾。この場合、与えられたポロイダル磁束をもつメッシュ点の位置が未知パラメータとして選ばれており、特に自由境界値問題として平衡解が決定される場合に有効であると報告されている。これは、筆者の手法の拡張として可能となったものである。

§ 4-6 結 言

本章はJFT-2トカマクで行なわれたダイナミックリミターを使用した実験におけるプラズマの振舞、特にイオン温度について、Artsimovichの比例法則に基づいて有効プラズマ半径の時間変化と関係づけて解釈を試み、イオン温度が時間的に変化する場合に対しても新古典輸送理論の範囲内でよく

説明できることを示した。このようなデータの解析に際し、イオン温度の定常分布が、非線形境界値問題を有限要素法を一般化した重みつき残差法により変分形式に変換し、非線形最適化法を適用することにより能率よく決定された。この手法はその他の非線形境界値問題の解析に非常に有効であると結論できる。

このように非線形最適化法による非線形境界値問題の解法は数値計算上の労力と時間を大幅に軽減するであろう。未知パラメータ、初期推定分布、最適化アルゴリズムの選択に十分注意すれば解析がさらに能率よく行われるであろう。

参 考 文 献

- 1) K. Toi , T. Takeda , N. Suzuki , T. Sugawara , S. Itoh ,
H. Shirakata , K. Takahashi and S. Yano , Nucl.
Fusion 15(1975)637.
- 2) L.A. Artsimovich , Nucl. Fusion 12(1972)215.
- 3) A.A. Galeev and R.Z. Sagdeev , JETP 53(1966)348.
- 4) K. Toi and T. Takeda , Nucl. Fusion 14(1974)577.
- 5) 川井忠彦, 数理科学 № 144 (1975) 5 。
- 6) E. Van Der Voort and B. Dorpema , Report of Joint
Nuclear Research Center , EUR 4777e(1972).
- 7) T. Takeda and S. Itoh , JAERI-M 5697(1974).
- 8) A.B. MacMahon and A.A. Ware , Nucl. Fusion 13(1973)
413.
- 9) T. Takeda , Annual Report of the Division of
Thermonuclear Fusion Research , JAERI(1975~1976) ,
P 143 , JAERI-M 6926(1977).

第5章 外部磁場コイルの最適設計

§5-1 緒言

トカマクプラズマの平衡、MHD 安定性、およびエネルギーバランス等の輸送現象は外部磁場コイルの発生する磁場の強さだけでなくその空間分布によって大きく影響される。ここでは、このような外部磁場コイルの設計に非線形最適化法が有効に適用されることを示す。トカマク型装置の外部磁場コイルとして、制御磁場コイル（垂直磁場コイルの一般化したもの）、水平磁場コイル、変流器1次コイル、ダイバータコイル等に代表されるポロイダル磁場コイル類とトロイダル磁場コイルの2種類の型式をあげることができる。これらのコイルのつくる磁場形状について複数個の物理的および技術的制約が課せられる。このような条件のもとでは、最適化操作が重要な設計条件として考慮されねばならない。制御磁場コイルおよび変流器1次コイルについて非線形最適化法により最適配位を決定する。上記コイル類の最適設計ばかりでなく、トカマク装置設計においても非線形最適化法は多様な応用の可能性をもっているということを最後に言及する。

§5-2 制御磁場コイルの最適配位

5.2.1 制御磁場コイル

導電性シェルを有する従来のトカマクではプラズマ電流と導電性シェルに誘起されるイメージ電流との相互作用、あるいはこれに加えて外部電源で励

磁される制御磁場コイルのつくる主として垂直磁場成分によりプラズマの MHD 平衡が得られている。しかしながらシェルの導電率 σ_s が有限のため $\tau_s = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma_s r_s t_s$ (r_s : シェルの小半径, t_s : シェルの厚み) という特徴的な時間でシェル中のイメージ電流は減衰してしまう。将来の大型トカマク装置では、プラズマ電流を τ_s 以上に十分長く持続させる必要がある。プラズマ電流の持続時間よりも長い τ_s を実現するには実際上不可能なほどのシェルの厚みが必要となる。また、核融合炉を考える場合、シェルに相当する真空容器壁材料に対し炉工学上のいくつかの制約がある。すなわち、(1)中性子、荷電粒子および電磁波による照射損傷が少ないこと、(2)高温に耐え、熱伝導率が高いこと、(3)ブランケットのリチウムあるいはリチウム化合物に対し化学的に安定であること、(4)機械的応力や熱応力に対し機械的強度が大きいこと、(5)中性子による誘導放射能が少ないこと等である。このため現在シェルとして一般に使用されている銅やアルミニウムといった高導電率金属や超導材料を使用することができず、ニオブ、モリブデンあるいはステンレス鋼といった低導電率材料を使わざるをえない。このような理由から放電持続時間の長い大型トカマク装置においては本質的にプラズマの MHD 平衡は制御磁場コイルのつくる磁場によって維持されねばならない。ただ、成長率の十分大きい MHD 不安定性の安定化という観点から抵抗性あるいは「薄い」シェルが装備されることは十分考えられる。しかし、制御磁場コイルや変流器 1 次コイルのような外部導体が空間的に離散的に存在することによりプラズマ領域に磁場の乱れが生じる可能性が強く、この乱れはプラズマ境界をかなり変形させる恐れがある¹⁾。このため、制御磁場コイルの電流値および配置を注意深く設定することによりシェルのイメージ電流のつくる平衡保持磁場に十分近い磁場をつ

くる必要がある。この目的を達成するために通常、下記のような方法が採用される。

まず、軸対称トロイダルプラズマのMHD平衡方程式を解き²⁻⁴⁾、任意のひとつの磁気面で代表される導電性シェル上のイメージ電流の分布を決定する。特に、ShafranovとZakharovによる「仮想シェル原理」^{6,7)}によれば、あるひとつの磁気面、たとえばシェル上での平衡に必要なイメージ電流分布が直接計算できる。次に、このようにして得られたイメージ電流がプラズマ断面にわたってつくる磁場に最も良く一致するように制御磁場コイルの電流値および位置を決定すればよい。

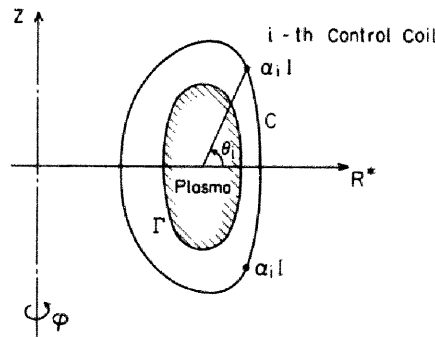
このような操作を行うため、線形計画法による方法が提案されている¹⁰⁾。この方法は、磁場とコイル電流値との線形性に注目し、コイル位置を予め適当に与え、各コイルの電流値を求めようとするものである。この手法は、文献7で提案されている方法と本質的に等価である。線形計画法による方法は、扱うべき計算式が非常に簡単になるという利点をもっている。しかし、この方法では予め各コイルの電流値の比率を、たとえば等しく、あるいは所要の比率で割りあてることはできず、あるコイルの電流値が技術的観点からみて極めて大きな値をとることもしばしばある。したがって、コイル設計という技術的立場からみて好ましいものではなく、上述のような線形問題として制御磁場コイルの最適配位を決定する方法は最良の方法とはいえない。このような短所を克服するため、筆者は各コイルの電流比を予め与え、コイルの全起磁力と各コイル導体の位置を所要の磁場が生成できるように決定する方法を提案する^{11,12)}。この場合、磁場とコイル位置との複雑な非線形関係のため、つねに非線形問題を扱う必要が生ずる。しかし、非線形最適化法によりこの種の問題は比較的容易に扱うことができる。

5.2.2 非線形最適化法による最適配位の決定方法

ここでは非線形最適化法による制御磁場コイルの最適設計の方法をさらに詳細に述べる。最適配位は制御磁場コイルのつくる磁場がプラズマ平衡から要求されるそれと最もよく一致するようにコイルが配置されている状態として定義される。このような最適基準に基づいて適当に選んだ目的関数をコイルの全起磁力と位置に関して最小化することにより制御磁場コイルの最適配位が得られる。ここで注意すべきことは、このような最適配位は非線形最適化のための数値計算法を使うことにより直接決定できるということである。コイルによる磁場と所要な磁場との一致の良さを定義するためある種の「距離」を導入する。すなわち、これらの磁場の差ベクトルの2乗の体積積分を目的関数として採用する。軸対称性を考慮すれば体積積分による目的関数は子午面内での面積積分に変換され、

$$F = \int_{\Gamma} |\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}|^2 dS \quad (5.1)$$

となる。ここで、 $\hat{\mathbf{B}}$ および \mathbf{B} はそれぞれコイルのつくる磁場およびMHD平衡に必要な磁場であり、 Γ はプラズマ表面を意味する(第5-1図)。閉領



第5-1図 プラズマと制御磁場コイルの位置関係

域内の磁場はその境界上の磁場によって完全に決定されるので(5.1)式はさらに簡単化され、境界上の線積分となる。数値計算にあたりこの線積分を離散化した各観測点での和、

$$F = \sum_{j=1}^J w_j \left| \hat{\mathbf{B}}_j - \mathbf{B}_j \right| \quad (5.2)$$

に書き直す。ここに、 w_j 、 $\hat{\mathbf{B}}_j$ および \mathbf{B}_j はそれぞれ j 番目の観測点での重み、制御磁場コイルによる磁場及びMHD平衡に必要な磁場である。いま、座標 (R_i, Z_i) の位置の i 番目のコイルを円形ループとみなしそれが j 番目の観測点 (ρ_j, ζ_j) につくる磁場を $\hat{\mathbf{B}}_{ji}$ とすれば、この R^* および Z 方向成分は

$$B_R(j, i) = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi \sqrt{(\rho_j + R_i)^2 + (\zeta_j - Z_i)^2}} \cdot \frac{\zeta_j - Z_i}{\rho_j} \left[-K(\kappa) + \frac{\rho_j^2 + R_i^2 + (\zeta_j - Z_i)^2}{(\rho_j - R_i)^2 + (\zeta_j - Z_i)^2} E(\kappa) \right] \quad (5.3)$$

$$B_Z(j, i) = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi \sqrt{(\rho_j + R_i)^2 + (\zeta_j - Z_i)^2}} \left[K(\kappa) - \frac{\rho_j^2 - R_i^2 + (\zeta_j - Z_i)^2}{(\rho_j - R_i)^2 + (\zeta_j - Z_i)^2} E(\kappa) \right] \quad (5.4)$$

$$\kappa^2 = \frac{4 \rho_j R_i}{(\rho_j + R_i)^2 + (\zeta_j - Z_i)^2} \quad (5.5)$$

によって表わされる。 $K(\kappa)$ および $E(\kappa)$ はそれぞれ第 1 種および第 2 種完全楕円積分である。これらを (5.2) 式に代入すれば、非線形最適化のための目的関数は、

$$F = F(R_1, Z_1; \dots; R_i, Z_i; \dots; R_N, Z_N; I) \quad (5.6)$$

で表わされる。ここで各コイルの電流値は $I_i = \alpha_i I$ であり、 I は規格化した全起磁力である。また、各コイルの電流比 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, N; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0)$ は予め与えておく^(注)。コイルの存在位置をある与えられたトーラス表面上に制限すれば、コイルの存在領域はトーラスの子午面内にある曲線 C 上に限られ i 番目のコイル位置 (R_i, Z_i) はポロイダル角度に関連した一つのパラメータ θ_i によって代表される(第 5-1 図)。したがって、(5.6) 式は $(N+1)$ 個の未知パラメータ $\theta_i (i=1, 2, \dots, N)$ および I の関数として表わされる。制御磁場コイルの最適設計の例として、平衡に必要な磁場が解析的に与えられる簡単だが重要な場合(後述の(5.16)式)を考えることにする。この場合、平衡に必要な磁場はプラズマの赤道面上のみで規定されるので、目的関数をプラズマの赤道面上の観測点に関して構成すればよいことになる。

上述のような目的関数の最小化を行うため勾配法に属する Van der Voort と Dorpema の計算法¹⁸⁾ およびシンプレックス法¹⁴⁾ を準備する。前述したように、前者では目的関数の微分が必要であり後者ではそれは不要である。前者は煩雑な目的関数の微分演算を必要とするが、後者の直接探索

(注) 制御磁場コイルがトーラスの赤道面に関して上下対称であるので、実際のコイルの本数は $2N$ となる。変流器 1 次コイルの本数についても同様である。

法より一般に収束性は良好である。本節では、目的関数の微分を得ることがそれほど困難でないので前者の計算法により制御磁場コイルの最適設計を行う。一方、変流器1次コイルの最適設計(§5-3)においては、上で述べた制御磁場コイルの場合のように観測点を赤道面上に限ることはできない。このため目的関数が複雑となり、その微分を得ることが非常に困難となる。したがって、変流器1次コイルの最適設計においては後者のシンプレックス法を用いることとする。

最適化によって得られた磁場分布が要求される磁場分布にどの程度よく一致しているかを調べるため次のような磁場に関する局所のおよび平均的な偏差を導入する。これらの偏差はプラズマの赤道面上に取った観測点($R^* = \rho_j, Z = 0$) に関して定義する。すなわち、

$$\Delta B_{\perp}(\rho_j)/B_{\perp}(\rho_j) \equiv \left[\hat{B}_{\perp}(\rho_j) - B_{\perp}(\rho_j) \right] / B_{\perp}(\rho_j) \quad (5.7)$$

$$\delta B_{\perp}/B_{\perp 0} \equiv \left[\left\{ \sum_{j=1}^J (\hat{B}_{\perp}(\rho_j) - B_{\perp}(\rho_j))^2 \right\} / (J-1) \right]^{1/2} / B_{\perp 0} \quad (5.8)$$

となり、 $\hat{B}_{\perp}(\rho_j)$ および $B_{\perp}(\rho_j)$ はそれぞれ制御磁場コイルのつくる磁場および平衡に必要な磁場のZ成分である、 $B_{\perp 0}$ は $B_{\perp}(\rho_j)$ のプラズマ断面中心での値である。これらの量の他に \hat{B}_{\perp} と B_{\perp} の R^* 方向への減少の度合を表わす指標 n ($= - (R^*/B_Z) \cdot (dB_Z/dR^*) \Big|_{Z=0}$) についても比較を行なう。

上述の手続によれば基本的には制御磁場コイルの最適配位を得ることは可能である。実際、制御磁場コイルの数が比較的少ない場合 ($N < 6$) には直接上述の方法によって最適解が得られた。しかし N が6以上となるとこのような方法だけでは収束性が著しく悪化する。これは隣り合うコイル同志がた

がいに絶えず位置の入れ換えを起こすことに起因している。そこで、このようなコイル同志の入れ換えが起らないような次のような制約条件を導入する、

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \theta_1 - \theta_{\min} > 0 \\
 g_i &= \theta_i - \theta_{i-1} > 0 \quad (i=2, 3, \dots, N) \\
 g_{N+1} &= \theta_{\max} - \theta_N > 0
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

ここで最初と最後の条件はすべての磁場コイルが θ_{\min} と θ_{\max} および $-\theta_{\max}$ と $-\theta_{\min}$ の間に存在するよう制限するためのものである。コイルの存在を禁止する領域は複数個導入することも可能である。このような制約条件はプラズマ観測用ポートの存在しない領域にコイルを配置するといったさらに実際的な応用において有効となる。制約条件付きの最適化問題の処理方法として現在最も有効と考えられている SUMT 法¹⁵⁾ を使うことにする。この方法は制約条件の境界付近に探索点が近づいたとき急激に増加するような罰則関数 P をいままでの目的関数 F に加え、制約条件なしの変換された目的関数 \tilde{F} をつくり、これを最小化する。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(\theta_i, i=1, 2, \dots, N; \mathbf{I}; \gamma_s) &= F(\theta_i, i=1, 2, \dots, N; \mathbf{I}) \\
 &+ P(\theta_i, i=1, 2, \dots, N; \gamma_s) \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

$$P(\theta_i, i=1, 2, \dots, N; \gamma_s) = \gamma_s \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{(g_i)^K} \tag{5.11}$$

ここに、 K は正の整数、 γ_s は最適点に達したときある指定された割合で減少されるSUMT法の第 s 回目の摂動パラメータである。 γ_s を零に漸近させたときに得られる最適解が最終的に求めようとするものである。換言すれば、固定した γ_s に対し \tilde{F} を最小化し、指定された精度内に収束すれば γ_s を減少率 γ によって

$$\gamma_{s+1} = \gamma_s \cdot \gamma \quad (5.12)$$

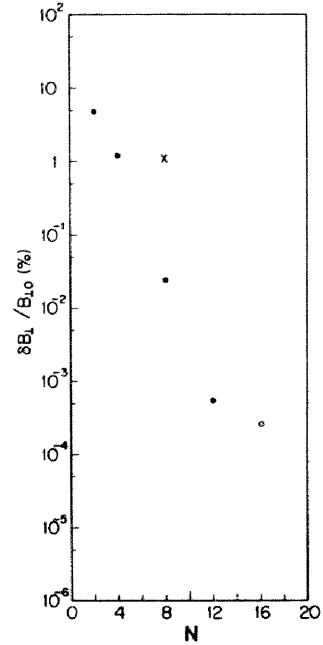
と減少させ、新しい γ_{s+1} に対し再び最小化を行い、 $\gamma_s \simeq 0$ と見なせるまでこの操作を繰り返す。特に、摂動パラメータの初期値 γ_1 および減少率 γ の選び方に注意を要する。最適化計算を通じて γ_1 は初期推定値に対して目的関数 \tilde{F} が F の10～100倍となるように選び、 $\gamma = 0.1 \sim 0.5$ とした。

5.2.3 円筒面上に置かれた直線電流群による一様垂直磁場の発生

5.2.2で述べた方法を予め簡単な場合について適用しその有効性を調べる。半径 $r_s = 0.5$ mの円筒表面 C 上の直線電流群からなる「制御磁場コイル」が円筒内に一様な垂直磁場をつくるように非線形最適化法によりその規格化した全起磁力とコイル位置を決定する。観測点はプラズマが存在すると仮定した半径 $a = 0.4$ mの円筒プラズマ断面の直径上を取る。 $N \geq 6$ のとき隣り合うコイル同志の入れかわりを防止する制約条件をいれない場合、5.2.2で述べたように最適値までに収束しない。その例を第5-2図に $N = 8$ の場合について \times 印で示す。(5.9)式の制約条件を導入し最適化を行った結果を●印にて示す。このとき禁止領域は設定していない($\theta_{\min} = 0$, $\theta_{\max} = \pi$)。 $N = 16$ の場合、倍精度計算により最適化が行なわれたにもかかわらず

第 5 - 2 図

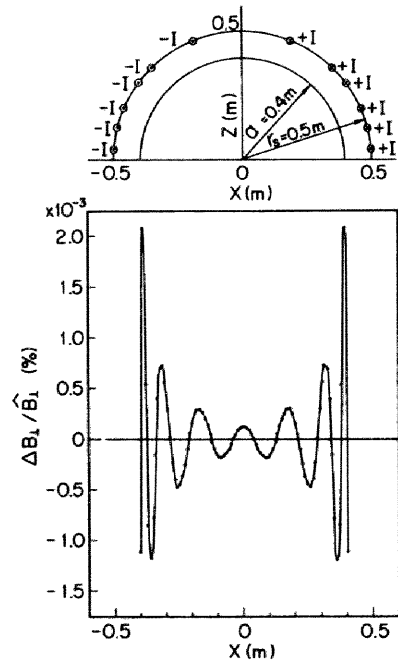
コイル本数 ($2N$) を変えたときの平均磁場偏差の大きさ。×はコイル同志の入れかわりを防止する制約条件を導入しなかった場合である。



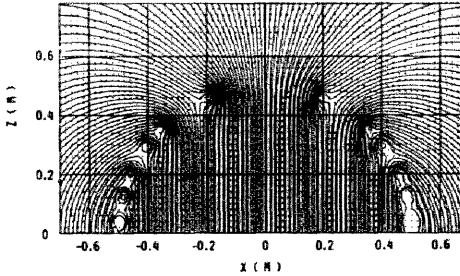
桁落ち誤差のため $N = 2$ から $N = 12$ までの結果から外挿される最適値に収束しないが、磁場の偏差は実際上全く問題とならないほど小さい。 $N = 12$ の場合に対し「制御磁場コイル」の最適位置とプラズマ領域での観測点上での磁場偏差を第 5 - 8 図に示す。このコイル位置をポロイダル角度方向にフーリエ分解し第 6 高調波まで加えることにより求めたイメージ電流密度の分布は

第 5 - 3 図

一様な垂直磁場を発生するのに必要な直線電流群の最適配置と磁場偏差の分布。ただし、 $N = 12$ であり、 $B_{\perp 0} = 1.0 \text{ Wb/m}^2$ に対し、 $I = 0.131579 \text{ MA}$ が得られた。



後述の第5-10図に示してある。それはポロイダル角の余弦関数に非常によく一致している。第5-3図に対する磁力線分布を第5-4図に示す。さらに、最適化法によって得られた磁場が観測点の置かれた直径以外の領域で



第5-4図 第5-3図の場合の磁力線分布

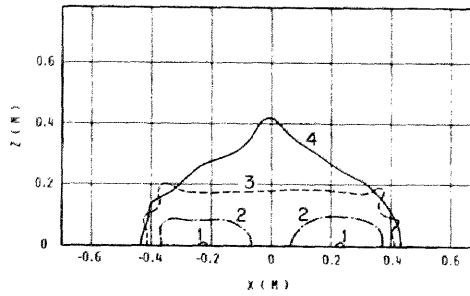
どの程度ずれているかをX-Z平面上に示す。このような磁場の偏差は(5.7)式と同様の考え方により

$$\varepsilon = \left| \frac{\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_0}{\mathbf{B}_0} \right| = \sqrt{(\hat{B}_X / B_{\perp 0})^2 + [(\hat{B}_Z - B_{\perp 0}) / B_{\perp 0}]^2} \quad (5.18)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = (\hat{B}_X, 0, \hat{B}_Z) \quad (5.14)$$

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_{\perp 0}) \quad (5.15)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{B}}$ および \mathbf{B}_0 はそれぞれ円筒表面C上の直線電流のつくる磁場および所要の一樣垂直磁場である。第5-5図は非線形最適化の過程での反復計算の進行のいくつかの中間段階で得られた $\varepsilon = 1\%$ の等 ε 線を示しており、反復計算の進行に伴って等 ε 線で囲まれた領域が急速に拡大していく様子がわかる。この図において反復計算の進行の程度は観測点での磁場の平均偏差 $\delta B_{\perp} / B_{\perp 0}$ を使って示してある。最適値に達したときプラズマの直径上の



第 5 - 5 図 最適化のための反復計算のいくつかの途中の段階での磁場偏差 ϵ が 1% 以内の領域の拡大の様子。4 で示された領域が最適解に対するものである。各段階での平均磁場偏差はそれぞれ 1. $\delta B_{\perp}/B_{\perp 0}=9.3\%$, 2. $\delta B_{\perp}/B_{\perp 0}=0.85\%$, 3. $\delta B_{\perp}/B_{\perp 0}=0.10\%$ および 4. $\delta B_{\perp}/B_{\perp 0}=5.5 \times 10^{-4}\%$ である。

の観測点で磁場の値を合わせたにもかかわらずプラズマの断面上の大部分で ϵ が 1% 程度になっている。この簡単なテスト計算から非線最適化法は制御磁場コイルの最適設計に非常に有効に働くことが推察できる。

5.2.4 制御磁場コイルの最適設計

実際のトカマク装置における制御磁場コイルの最適設計を試みる。制御磁場コイルがプラズマ領域につくる磁場が、プラズマの全表面にわたって平衡に必要な磁場と一致するように最適設計が行なわれねばならない。しかし、円に十分近い楕円断面を有する高アスペクト比のトカマクプラズマに対しては、平衡に必要な磁場はプラズマの赤道面上で次のような解析的形で与えられる^{2, 8)},

$$B_{\perp} = B_{\perp 0} \left[1 - \frac{R^* - R}{R} n_0 \right] \quad (5.16)$$

ここで,

$$B_{\perp 0} = \frac{\mu_0 I_p}{4\pi R} \left[\ell_n \frac{8R}{a} + \beta_I - \frac{5}{4} \right] \quad (5.17)$$

$$n_0 = \frac{\frac{3}{4} \ell_n \frac{8R}{a} - \frac{17}{16} + \left(1 - \frac{\ell_Z}{\ell_R}\right) \frac{R^2}{a^2}}{\ell_n \frac{8R}{a} + \beta_I - \frac{5}{4}} \quad (5.18)$$

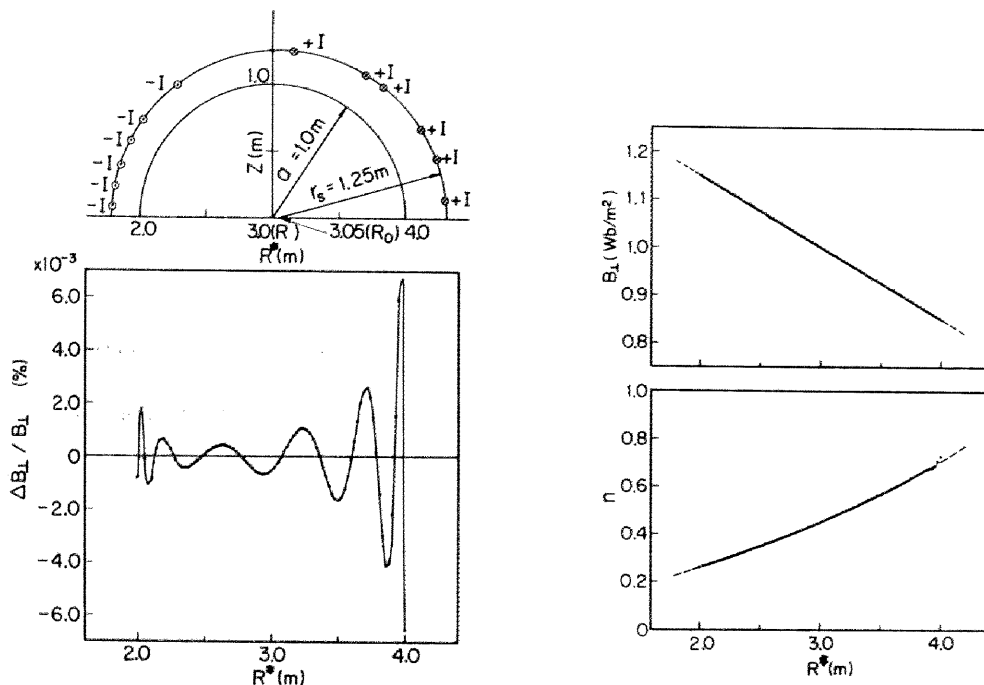
さらに, I_p , β_I , R , a , ℓ_Z , ℓ_R および R^* はそれぞれプラズマ電流, ポロイダル磁気圧に対するプラズマ圧力, プラズマの主半径と平均副半径, 楕円の Z 方向及び R 方向の半軸の長さ, およびプラズマの対称軸から観測点までの距離である。またプラズマの電流密度分布は一様であると仮定されている。 n_0 はプラズマ中心での平衡保持磁場の指標である。(5.16)式はアスペクト比の逆数の一次まで正しい式であり, この磁場の R^* 成分は

$$B_R = -B_{\perp 0} n_0 \frac{Z}{R} \quad (5.19)$$

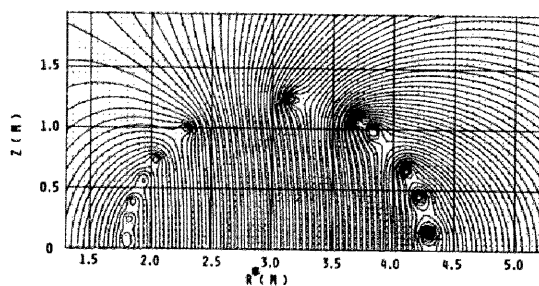
で表わされる。制御磁場コイルの最適設計を大型トカマク装置を想定し, $R = 3 \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$, $\ell_Z = \ell_R$ および $\beta_I = 1.0$ のパラメータに対し行ないその結果を示す。コイルに対する存在禁止領域を設定する場合と設定しない場合について変形された目的関数 \tilde{F} を最小化することにより最適設計を行なう。またコイルの存在するトーラス面の主半径 $R_0 = 3.05 \text{ m}$, 副半径 $r_s = 1.25 \text{ m}$ とする。禁止領域を設定しない場合については $\delta B_j / B_{\perp 0}$ は第 5-2 図に示した直線電流の場合と同程度であるが禁止領域が存在する場合は第

5-2図の結果よりはるかに大きくなる。しかも、禁止領域が増大するとともに $\delta B_{\perp} / B_{\perp 0}$ は一般に急速に増大する。

$N=12$ の場合の結果を第5-6図〜5-10図に示す。第5-6図は、制御

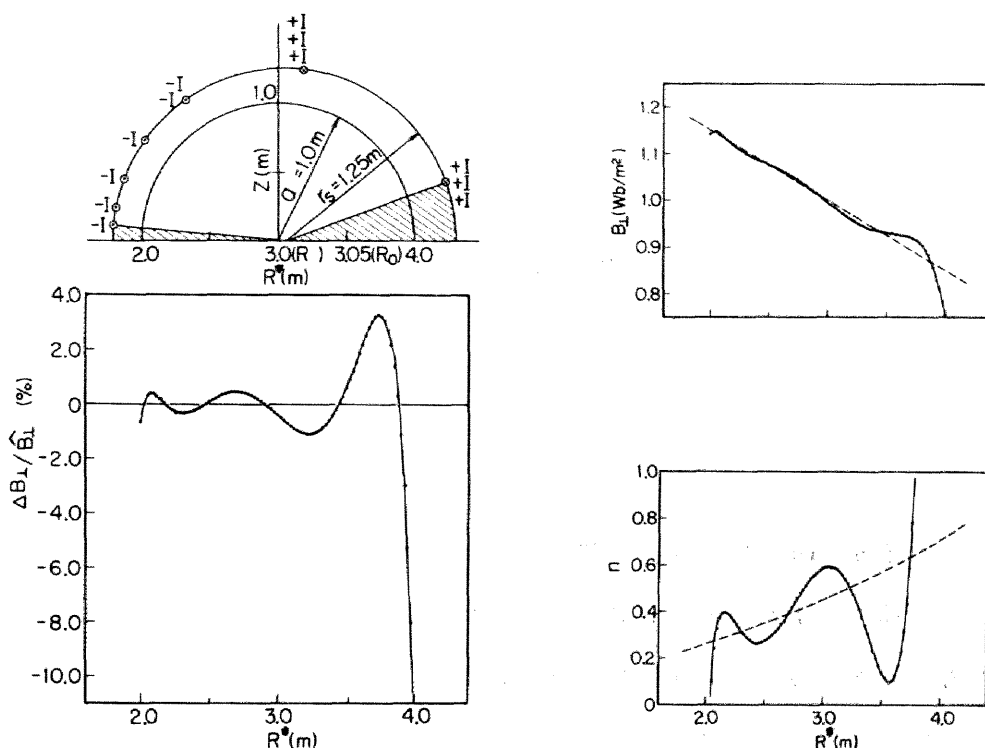


第5-6図 トーラスの場合の制御磁場コイル ($N=12$) の最適位置、磁場偏差の分布、制御磁場およびその減少の指標の比較。破線が平衡に必要な制御磁場である。 $B_{\perp 0} = 1.0 \text{ Wb/m}^2$ に対し、 $I = 0.856456 \text{ MA}$ が得られた。

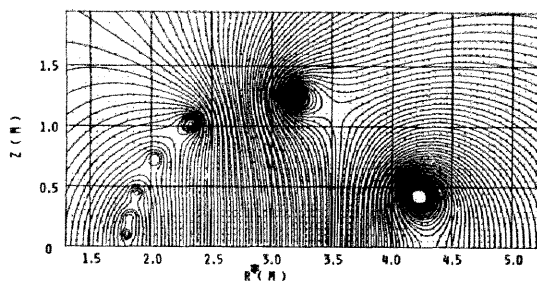


第5-7図 第5-6図の場合の磁力線分布

磁場コイルの最適位置、局所的な磁場偏差および磁場の減少指標 n を示している。このコイル配位で生ずる磁力線の二次元的分布を第5-7図に示す。



第 5 - 8 図 コイルの存在禁止領域 (斜線部) を設定した場合の結果。

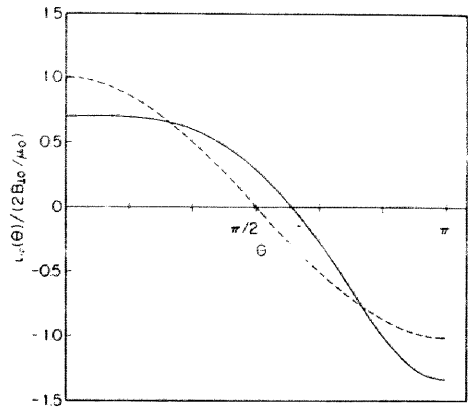


第 5 - 9 図 第 5 - 8 図の場合の磁力線分布

この磁力線分布は $|(R^* - R)/R| \ll 1, Z/R \ll 1$ の条件内で (5.16) 式および (5.19) 式で表わされる分布によく一致している。第 5 - 8 図および 第 5 - 9 図は $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の近くに禁止領域が存在する場合の結果を示している。第 5 - 6 図で得られたコイル配置をポロイダル角度方向にフーリエ分解し第 6 高調波まで加えることにより求められた等価的なイメージ電流密度

第5-10図

第5-3図(破線)および第5-6図(実線)の場合のコイル配置に対応した等価的なイメージ電流密度分布。前者は余弦分布に一致する。



分布を第5-10図に示す。同時に第5-3図の場合も示してある。

上で述べたように単純化された場合について制御磁場コイルの最適設計を行なったが、仮想シェル原理と非線形最適化法を組み合わせることにより、導電性シェルを使わずに、さらに一般的なトカマクプラズマの平衡を得るのに必要な制御磁場コイル配位を得ることができる。

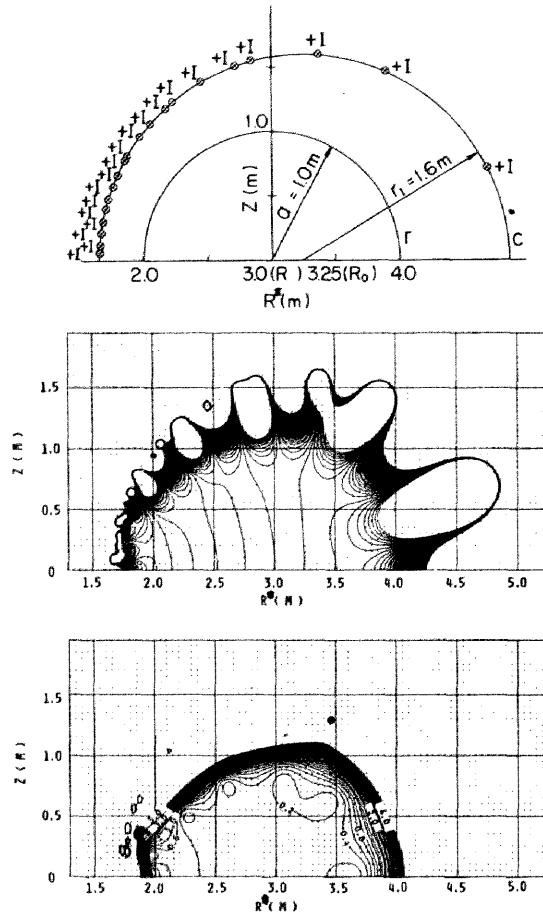
§5-3 空心変流器1次コイルの最適設計

大型トカマク装置では必要なプラズマ電流を誘起し持続させるために必要な磁束は10Wb 近くなり、磁性材料の画期的な発展がないかぎり従来のトカマクで使用されている変流器の鉄心は非常に大きなものとなり装置全体としてのコストを高いものにする。したがって、最近のトカマクでは中型規模でも鉄心を使用しない空心変流器がしばしば用いられるようになった。この場合注意すべきことは1次コイルによるプラズマ領域への漏洩磁場を可能なかぎり小さく抑えることである。このような漏洩磁場はプラズマを壁に向かって運動させ、プラズマ表面をかなり変形させる恐れがある。

このような漏洩磁場を最小にするように1次コイルの最適設計を行う。この場合も§5-2の議論と本質的な差はない。目的関数として、ある指定された領域、たとえばプラズマ領域内(Γ内)に1次コイルがつくる磁気エネルギーを採用する。

$$F = \int_{\Gamma} |\hat{\mathbf{B}}|^2 dS \quad (5.20)$$

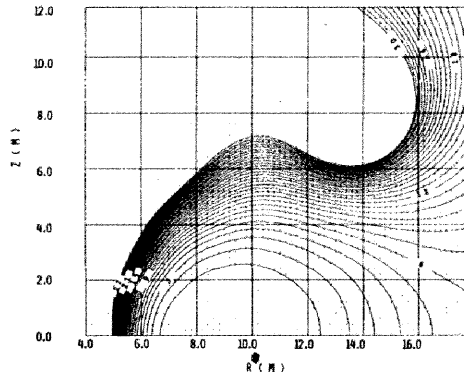
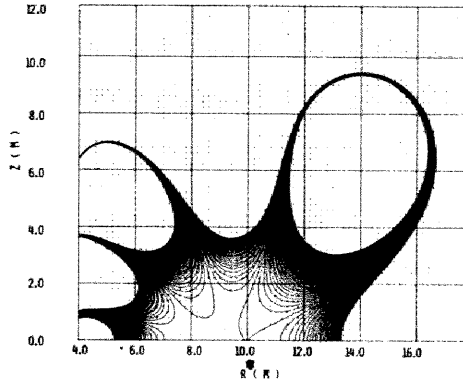
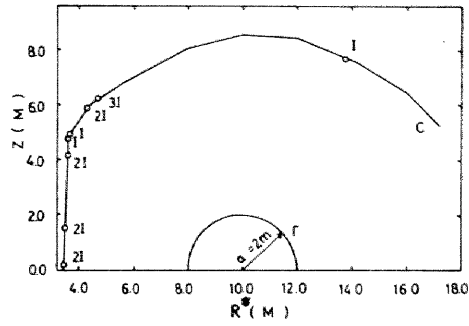
これをΓ上の線積分に置き換えさらに離散化し、全起磁力を一定として、コイルの位置に関してFを最小化することにより最適設計が行われた。目的関数には、§5-2で実際にテスト計算を行なった場合と異なりプラズマの赤道面以外の領域の磁場も計算する必要があるので§5-2の場合の目的関数に比べ格段に複雑となり、その微分はさらに複雑で勾配法に属するアルゴリズムは実用的でない。このような理由から、最適化計算アルゴリズムとしてシンプレックス法を用いた。その代表的な計算結果2例を示す。ひとつはプラズマの主半径および副半径がそれぞれ $R = 3.0 \text{ m}$ 、 $a = 1.0 \text{ m}$ であり、1次コイルの存在するトーラス面が円形断面の場合で主半径 $R_0 = 3.25 \text{ m}$ 、副半径 $r_1 = 1.60 \text{ m}$ の場合である。第5-11図に $N = 20$ のときの1次コイルの最適配位、磁力線分布および漏洩磁場強度分布を示す。全起磁力1 MATの場合に対しプラズマ領域での漏洩磁場強度は2 Gauss以下に抑えられている。もう一つの例は、 $R = 10.0 \text{ m}$ 、 $a = 2.0 \text{ m}$ のプラズマに対し1次コイルは非円形断面のトーラス面上に配置されている。 $N = 10$ の場合1 MATの起磁力に対し漏洩磁場は1 Gauss以下、 $N = 14$ のとき0.6 Gauss以下であり、後者の場合のコイルの最適配置、磁力線分布および漏洩磁場強度の分布を第5-12図に示す。



第 5-11 図 空心変流器 1 次コイルが円形断面のトーラス面上に配置されている場合の最適位置、磁力線分布および漏洩磁場強度分布 (Gauss 単位)。全起磁力 1 MAT に対しプラズマ領域で 2 Gauss 以下。

§ 5-4 制御磁場コイルおよび空心変流器 1 次コイルの最適設計における問題点

§ 5-2 および § 5-3 で述べたようにトカマク装置における制御磁場コ



第5-12図 空心変流器1次コイルが非円形断面のトーラス面上に配置されている場合の結果。全起磁力1MATに対しプラズマ領域で0.6 Gauss以下。

イルおよび変流器1次コイルの最適設計が非線形最適化法により能率よく実行できることを示したが実際に非線形最適化法を応用する場合に次の点に注意すべきである。目的関数を1回評価するためには $N \times J$ 回磁場計算が必要である。ここで N はコイルの全数の $1/2$ であり J は観測点数である。一般に J は N の2, 3倍に選ばれる。また, 1回の最適化反復計算において目的関

数が N 回計算される。ただし、シンプレックス法の場合は最初の反復計算以外は多くても2回だけ目的関数が評価されるが、これ以外のアルゴリズムと同様の最小化計算段階に達するには未知パラメータの個数(N)程度の反復計算が必要である。したがって、 $2N$ 本のコイル系の最適化計算に要する計算時間は N^3 に比例することになり、 N の増加とともに計算時間が急速に増大する。しかし、コイルの存在禁止領域がない場合でも $N=20$ 以上の場合は技術的観点からほとんど必要ないと考えられる。やむをえず N の大きい場合を扱う必要がある場合、それらのコイルをいくつかのサブグループに分離し、各サブグループについて最適化を行ないこれを交互に繰返すことにより計算時間を短縮できると考えられる。

§ 5-5 トーラス装置における最適設計

トーラス装置設計において限られた条件のもとで最も有効な設計を行うため最適設計という概念が常に存在する。このような場合、通常いくつかの制約条件付きの最適化問題を扱う必要が生じる。トーラス装置の典型であるトカマク装置の設計においても§ 5-2および§ 5-3で述べたように、制御磁場コイルおよび空心変流器1次コイルの最適配位の決定に非線形最適化法が応用され、良好な結果が得られた。さらに、非線形最適化法は次のような問題に対しても有効に適用できることが期待される。たとえば、コイル断面積あるいはコイル周長を一定として最大のトロイダル磁場エネルギーを得ることのできるトロイダル磁場コイルの最適断面形状を決めることである。これについては、コイルの厚みを無視したトーラス状のソレノイドとして Shafranov により検討されている¹⁶⁾。その後この問題は一定張力のトロイ

ダル磁場コイル，いわゆるD型トロイダル磁場コイル¹⁷⁾へと発展した。さらに現実のトロイダルコイルに近いモデルで，その他の条件を加味しての最適設計においても非線形最適化法は強力な手段となろう。

トラス装置の設計において，非線形最適化法はコイルの設計ばかりに限らず種々の部材の最適設計に今後ますます多く応用されるようになると思われる。

§ 5—6 結 言

トカマク装置における制御磁場コイルおよび空心変流器1次コイルの非線形最適化法による設計方法が非常に有効であることをいくつかの例をあげて示した。すなわち，これらのコイルの最適設計において各コイルの電流値を最適化の未知パラメータとするのではなく，その設置位置を未知パラメータとする方法である。この場合，非線形問題を扱う必要があるものの，各コイル相互の電流比を予め指定してコイルの最適配位が決定できるという実際の設計上の観点から非常に望ましい利点を有している。非線形最適化法により制約条件付きの最適問題を解くことにより上記コイルの最適設計を行ない，この手法の有効性を示した。今後ますます本章で述べた方法による設計の必要性が増大するであろう。また，本論文では全く言及しなかったが設計と同様に重要な技術的問題，すなわち制御への最適化の導入も今後重要になることが推測される。

- 1) S. Yoshikawa , Phys. Fluids **15**(1972)1688.
- 2) V.S. Mukhovatov and V.D. Shafranov, Nucl. Fusion **11**
(1971)605.
- 3) L.E. Zakharov , Soviet Phys. Tech. Phys. **16**(1971)645.
- 4) J.M. Greene , J.L. Johnson and K.E. Weimer , Phys.
Fluids **14**(1971)671.
- 5) A.E. Bazhanova and V.D. Shafranov , MATT-trans-104
(1971).
- 6) V.D. Shafranov and L.E. Zakharov , Nucl. Fusion **12**
(1972)599.
- 7) L.E. Zakharov , Nucl. Fusion **13**(1973)595.
- 8) W. Feneberg and K. Lackner , Nucl. Fusion **13**(1973)549.
- 9) B. Marder and H. Weitzner , Plasma Phys. **12**(1970)435.
- 10) 小林朋文 , 田村早苗 , 谷 啓二 , JAERI-M 5898(1974).
- 11) K. Toi and T. Takeda , JAERI-M 6018(1975).
- 12) K. Toi and T. Takeda , Japan. J. appl. Phys. **16**(1977)
825.
- 13) E. Van Der Voort and B. Dorpema , Report of Joint
Nuclear Research Center , EUR4777e(1972).
- 14) J.A. Nelder and R. Mead , Computer J. **7**(1965)308.
- 15) A.V. Fiacco and G.P. McCormick , Non-Linear Programming:
Sequential Unconstrained Minimization Techniques ,

, John Wiley , (1968).

16) V.D. Shafranov , Soviet Phys. Tech. Phys.17(1973)1433.

17) S.L. Gralnick and F.H. Tenney , MATT-1197(1976).

第 6 章 結 論

本論文ではトカマクプラズマに関連した最も基本的な 8 種類のタイプの問題, (I) 測定データの処理, (II) 非線形境界値問題および(III) 最適設計に対し非線形最適化法が非常に有効に働き, 良好な結果を得ることができることを具体的な例によって示した。

まず(I)については, 減衰振動波形分析を「曲線のあてはめ問題」として取り扱い, 非線形最適化法により良い結果が得られた。また, 測定データの処理に関連した逆問題の解析に対してもこの方法が非常に有効であることを示した。すなわち, トカマクプラズマの交流インダクタンスの周波数依存性より導電率分布を導出する方法を提案し, 数例のテスト計算によってその有効性を示した。JFT-2 トカマクプラズマでの実験結果の解析を行ない, その導電率分布を得た。このような解析において, 測定データと設定したモデルとの適合の程度を客観的に評価する尺度として情報量規準, いわゆる AIC を導入しその必要性を示唆した。

(II)では, 非線形境界値問題を重みつき残差法に従って変分形式に変換し, その目的関数を非線形最適化法を使って最小化することにより解を得るという方法について述べた。この手法の応用範囲は非常に広いということについても言及した。具体的応用例として, トカマクプラズマのイオン温度の定常状態の解析を行い, 非常に効率よく解が得られることを示した。

(III)の最適設計においても非線形最適化法は強力な手段となることを, トカマク装置の制御磁場コイルおよび 変流器 1 次コイルの最適設計を例にあげて示した。また, 制約条件付きの最適化問題の SUMT 法による処理も試み

た。

今後、トカマクプラズマの研究が進むにつれ上記の3種類の問題の解析の必要性が一層増大すると考えられる。この種の問題の解析に対し非線形最適化法は強力な手段を提供するであろう。また、電子計算機の大型、高速化は非線形最適化法の応用範囲をさらに拡大し、より複雑な問題への応用もかなり容易になるものと思われる。このような非線形最適化の活用は測定データの解析度が向上し今まで捨て去られていたデータからも新しい事実が引き出されるようになるであろう。また、理論解析や装置設計の面でもより詳細な検討が可能となり核融合研究に大きな寄与をもつ要素を十分もっているといえる。

謝 辞

本論文をまとめるにあたり名古屋大学工学部電子工学科教授奥田孝美博士をはじめ，同情報工学科教授福村晃夫博士および同プラズマ研究所助教授伊藤智之博士には適切な御指導，御教示をいただき心から感謝の意を表します。また，日本原子力研究所理事山本賢三博士および同核融合研究室室長森茂博士（現同核融合研究部部長）には，本研究遂行の過程で暖かい激励，御指導をいただき深く感謝致します。

本論文は日本原子力研究所核融合研究室（現同核融合研究部）において，主としてJFT-2実験グループの中で行った研究に基づいており，上記，伊藤智之博士（当時同研究室JFT-2実験グループリーダー）には研究面の確固たる指針とともに不断の激励と御指導をいただき，心から感謝致します。また，本研究の中心をなす非線形最適化法の応用に関しては同研究室竹田辰興博士（現同核融合研究部理論解析研究室）に負うところ極めて大きく，同氏からの懇切な御指導をいただき厚く御礼申し上げます。最後に，同研究室国枝俊介氏（現同核融合研究部装置技術管理室室長代理）をはじめとする同研究室の方々には，実験に際し御協力を，また同研究室田中正俊博士（現同核融合研究部理論解析研究室室長）には有意義な示唆をいただき御礼申し上げます。

本研究に関して発表した論文リスト

	論 文 題 名	発 表 雑 誌 名	共 同 研 究 者
第3章	Dynamic Limiter Experiments in JFT-2 Tokamak	Nuclear Fusion 14 (1974)581-583,	S. Itoh T. Sugawara N. Suzuki T. Takeda
	Stability Experiment with Dynamic Limiter in JFT-2 Tokamak	Nuclear Fusion 14 (1974)451-453,	T. Sugawara S. Itoh N. Suzuki T. Takeda
	Behaviour of Tokamak Plasma in the Dynamic Limiter Experiment	Nuclear Fusion 15 (1975)637-642,	T. Takeda N. Suzuki T. Sugawara S. Itoh H. Shirakata K. Takahashi S. Yano
	Determination of Conductivity Distribution in a Tokamak Plasma from Analysis of Plasma AC Impedance by Means of Non-Linear Optimization	Submitted to Japanese Journal of Applied Physics,	T. Takeda S. Itoh
第4章	Analysis of Tokamak Plasma Steady State by Non-Linear Programming	Nuclear Fusion 14 (1974)577-579,	T. Takeda
第5章	Optimum Design of Control Coils in a Tokamak Device by Nonlinear Optimization	Japanese Journal of Applied Physics 16(1977)825-834,	T. Takeda