

き裂前縁を含む面の非連続性を考慮したき裂モデルの提案と そのき裂パラメータ評価への適用*

渡辺 勝彦**, 畑上 秀幸***
Katsuhiko WATANABE, Hideyuki AZEGAMI

Key Words: Fracture, DWA Crack Model, Discontinuity in Cracked Plane, Crack Parameter, Crack Energy Density, Finite Element Analysis

1. 蘇 言

き裂問題を通常の連続体として解析するとき、き裂先端の応力、ひずみには特異性が生じる。一方、現実のき裂端においてはこのようなことは起こらず、き裂端近傍においては連続体としての要件が満たされなくなるのが普通である。Dugdale モデル⁽¹⁾はこの非連続性を一次近似的に表現したモデルと考えられるが材料の非線形性が完全塑性体状でしか取り入れられていないこと、塑性降伏域がき裂面に限られているといったことから一般的なき裂モデルとは言い難い。

ところで著者らは先に上記 Dugdale モデルについての考察を行い、新たに、き裂を含む面はその面上下面に作用する応力を面外応力、それに対応して生じる相対変位を面外相対変位と呼ぶことにすると、面外応力と面外相対変位の間の関係として構成則が与えられる剛塑性体、き裂を含む面以外を通常の弾性体と考えるモデルとして位置付けができる事を示し、このように考えるとき荷重履歴に従って刻々の変化を追っていけるモデルとなることを述べた⁽²⁾。Dugdale モデルを以上のように把握すると、その自然な発展としてき裂前縁を含む面（必ずしもき裂を含む面でなくてもよい）については面外応力と面外相対変位の間の関係として、考える面以外の領域に対しては応力とひずみの間の関係として、対象とする問題にふさわしい構成則を適用してき裂問題を解析することが考えられる。本研究はこのようなき裂モデルをき裂端近傍の非連続性を一次近似的に表現した一般的なき裂モデルとして新たに提案するとともにそのき裂パラメータ評価

への適用を試みるものであり、はじめに新たに考えるモデルの提示、構成則の与え方、解析のための定式化を示し、続いて新モデルによる単調負荷を受ける弾塑性き裂の有限要素解釈を行い、き裂モデルとしての有効性を示す。

2. き裂前縁を含む面の非連続性を考慮したき裂モデルの提案

本章においては提案するき裂モデルを提示し、このモデルにおけるき裂パラメータについて述べるとともに特に弾塑性問題を扱う場合の構成則の定式化、また新モデルにより有限要素解析を行う場合の定式化を示す。

2・1 DWA モデルとき裂パラメータ 現実のき裂先端近傍においては変位の連続性は保たれず連続体としての要件を満たさない。そこでこの状況を第一近似的に表現し得る一般的なき裂モデルとして次のようなモデルを提案する。すなわち、変形前のき裂材の状態（時刻 $\tau=0$ ）を示す図1(a)において、き裂を含むき裂端前方の面（図1(a)におけるき裂前方の実線）とそれ以外の部分に考える領域をわけ、き裂を含む面以外は通常の連続体と考え、き裂を含む面は変形後（時刻 $\tau=t$ ）においては図1(b), (c)に示すように引き伸ばされると考える（ただし図1(b)は引き伸ばされさらに長さ a までき裂が進展した状態を示してある）。このとき、き裂を含む面以外においては構成則が通常の応力、ひずみの関係として与えられ、き裂を含む面については、 σ_n , δ_n を図1(c)を参照して

とするとき、 $\lfloor \sigma_n \rfloor$ 、 $\lfloor \delta_n \rfloor$ の間の関係として構成則が与えられれば、実際の荷重履歴に従って解析が進めら

れるき裂モデルとなる。構成則としては現象に則したものと採用する必要があるがここで Dugdale モデルは前述のごとく、き裂を含む面を剛塑性、それ以外の部分を通常の弾性体とするモデルであり⁽²⁾、したがって本モデルは Dugdale モデルを最も一般化したモデルとして位置付けることができ、本論文においては以後簡単のためにこのモデルを DWA (Dugdale-Watanabe-Azegami) モデルと呼ぶこととする。またここでは非連続性を考える面としてき裂を含む面を考えているが、このような面としてき裂前縁を含む任意の面を考えることができ次節以後においてはそのような場合も念頭において定式化を行う。

次にこのき裂モデルにおいて定義される破壊力学パ

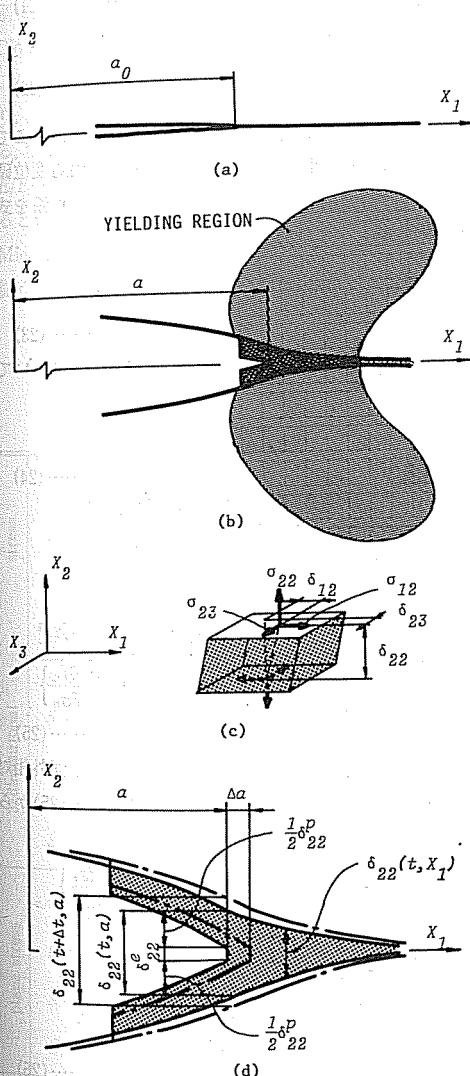


図 1 変位の非連続性を考慮したき裂モデル

ラメータについて考える。「初期の状態におけるき裂を含む面上の一点が現在まで担ったエネルギーをき裂を含む面内の単位面積当たりで表したもの」として定義されているき裂エネルギー密度は⁽³⁾⁻⁽⁵⁾、 W_{plane} をひずみエネルギー面密度として

$$W_{\text{plane}} = \int dW_{\text{plane}}, dW_{\text{plane}} = \llcorner \sigma_n \llcorner \{d\delta_n\} \quad \dots \dots \dots (3)$$

するとき、き裂を含む面に分布する形で与えられ、負荷を受けてき裂が進展し、き裂長さが a に達している状態〔図 1 (d)〕に対して、

$$\varepsilon(t, X_1) = \int dW_{\text{plane}}(t, X_1) \quad \dots \dots \dots (4)$$

によって与えられる。また弾塑性問題を考える場合には相対変位増分 $\{d\delta_n\}$ は弾性分、塑性分の和として、

$$\{d\delta_n\} = \{d\delta_n^e\} + \{d\delta_n^p\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

と表せることからき裂エネルギー密度の弾性成分および塑性成分はそれぞれ

$$\varepsilon^e(t, X_1) = \int dW_{\text{plane}}^e, dW_{\text{plane}}^e = \llcorner \sigma_n \llcorner \{d\delta_n^e\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\varepsilon^p(t, X_1) = \int dW_{\text{plane}}^p, dW_{\text{plane}}^p = \llcorner \sigma_n \llcorner \{d\delta_n^p\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

で与えられる。き裂先端の変形量を表すき裂開口変位 COD はき裂進展後も含めてき裂面に分布する $\delta_{22}(t, X_1)$ により

$$\text{COD}(t) = \delta_{22}(t, a) \quad \dots \dots \dots (8)$$

として与えられることになる〔図 1 (d)〕。またき裂の安定成長パラメータとされているき裂開口角 COA は $\Delta t, \Delta a$ を対応する増分とするとき、定義に基づき⁽⁶⁾、

$$\text{COA}(t) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\delta_{22}(t + \Delta t, a) - \delta_{22}(t, a)}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} \quad \dots \dots \dots (9)$$

として与えられる〔図 1 (d)〕。

2・2 弾塑性問題における構成則 DWA モデルは任意の構成則を考える場合に適用できるが、ここでは弾塑性変形を考える場合の構成則の定式化を行う。まず連続体として扱う部分に対しては通常のひずみ増分理論による構成則が適用でき、応力増分、ひずみ増分の間の関係として

$$\left\{ \frac{d\sigma_t}{d\sigma_n} \right\} = \left[\frac{D_{tt}^e}{D_{nn}^e} \mid \frac{D_{tn}^e}{D_{nn}^e} \right] \left\{ \frac{d\varepsilon_t}{d\varepsilon_n} \right\} \quad (\text{弾性})$$

$$\text{あるいは } \{d\sigma_t\} = [D^e] \{d\varepsilon_t\} \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$\left\{ \frac{d\sigma_t}{d\sigma_n} \right\} = \left[\frac{D_{tt}^p}{D_{nn}^p} \mid \frac{D_{tn}^p}{D_{nn}^p} \right] \left\{ \frac{d\varepsilon_t}{d\varepsilon_n} \right\} \quad (\text{弾塑性})$$

となる。このような定式化を行う場合、材料定数として \bar{E} および相当面外応力-相当塑性面外相対変位の関係を示す \bar{H}' を与えればよいことになり、それぞれ連続体の継弾性係数およびひずみ硬化率に対応しているが長さの次元だけ異なる。そこで特に、連続体と非連続面の関係が、弾性変形と塑性変形において整合しており長さの次元をもつ材料定数 h のみにより \bar{E} と \bar{H}' が

$$h = \frac{\bar{E}}{\bar{E}} = \frac{\bar{H}'}{\bar{H}'} \quad \dots \dots \dots (27)$$

で与えられるモデルを整合モデルと呼ぶことにする。ただし、 E は継弾性係数、 H' はひずみ硬化率である。解析にあたって h の値は、現実のき裂面に最も適合するよう定めることが必要であるが、これについては別に論ずるものとする。なお通常の連続体モデルは DWA モデルにおいて ($h \rightarrow 0$ とするときの極限) に対応し、このとき $\delta_{ij} \rightarrow 0$ 、き裂先端の応力 $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$ となり、き裂先端以外のき裂エネルギー密度の分布は零となる。Dugdale モデルはき裂を含む面以外を線形弾性体、 $E/\bar{E} \rightarrow 0$ 、 $H'/\bar{H}' \rightarrow \infty$ とするときの非整合モデルであることができる。表 1 に特に重要な連続体が Mises の降伏条件に従い、塑性変形が結合流れ則に従う場合の式(26)における $[\bar{H}_{nn}^e]$ 、 $[\bar{H}_{nn}^p]$ 、 $[\bar{H}_{nn}^h]$ が整

合モデルに対して示してある。ただし三次元応力状態を考える場合に対して $\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ として $\sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ および $\varepsilon_{33}, \gamma_{13}, \delta_{23}$ に関係する行および列成分を取り除いたものが平面ひずみ状態に対するものとなり、二次元問題においては次のように表すものとする。

$$\llcorner \sigma_{ij} \rrcorner = \llcorner \sigma_{11} \rrcorner, \llcorner \sigma_{nn} \rrcorner = \llcorner \sigma_{22}, \sigma_{12} \rrcorner \dots \dots \dots (28)$$

$$\llcorner \varepsilon_{ij} \rrcorner = \llcorner \varepsilon_{11} \rrcorner, \llcorner \delta_{nn} \rrcorner = \llcorner \delta_{22}, \delta_{12} \rrcorner \dots \dots \dots (29)$$

2・3 DWA モデルの有限要素定式化 ここでは DWA モデルを有限要素法により解析するための定式化を行う。これにより非連続性を考慮する面に面要素を導入することにより既存の有限要素解析プログラムに追加処置を行うことにより DWA モデルの解析が可能となることが示される。

対象とする DWA き裂モデルに仮想仕事の原理を適用する。非連続性を考慮する面を S_σ 、連続体として取扱う部分の体積を V とし外力として物体力と表面 S_σ において表面力を受ける場合を考える。この場合の仮想仕事の原理は増分形で次のように与えられる。

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \llcorner d\varepsilon \llcorner \{d\sigma\} dV + \int_{S_\sigma} \delta \llcorner d\delta_n \llcorner \{d\sigma_n\} dS \\ &= \int_V \delta \llcorner du \llcorner \{dF\} dV + \int_{S_\sigma} \delta \llcorner du \llcorner \{dp\} dS \end{aligned} \dots \dots \dots (30)$$

表 1 Mises の降伏条件に従う結合流れ則の場合の $[\bar{H}]$ マトリックス

stress	$[\bar{H}_{nn}^e] = -\begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\bar{H}_{nn}^p] = \frac{1}{S_0} \left(-G \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{S} \begin{bmatrix} S_1 S_2 + \lambda_2 (S_1^2 + S_2^2) & S_2 S_3 + \lambda_2 (S_1^2 + S_2^2) & S_2 S_3 \\ \lambda_1 S_1 S_4 - \lambda_2 S_2 S_4 & \lambda_1 S_3 S_4 - \lambda_2 S_2 S_4 & \lambda_1 S_4 S_5 \\ \lambda_1 S_1 S_6 - \lambda_2 S_2 S_6 & \lambda_1 S_3 S_6 - \lambda_2 S_2 S_6 & \lambda_1 S_5 S_6 \end{bmatrix} \right)$
3-dimensional	$[\bar{H}_{nn}^h] = \frac{1}{h S_0} \left(G \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{S} \begin{bmatrix} -\lambda_1 (S_1^2 + S_2^2) & S_2 S_4 & S_2 S_6 \\ \lambda_1 S_2 S_4 & -(S_2^2 + \lambda_1 S_2^2) & \lambda_1 S_4 S_6 \\ \lambda_1 S_2 S_6 & \lambda_1 S_4 S_6 & -(S_2^2 + \lambda_1 S_2^2) \end{bmatrix} - \frac{1}{S} \begin{bmatrix} \bar{S}_2 \bar{S}_2' & \bar{S}_2 \bar{S}_4' & \bar{S}_2 \bar{S}_6' \\ \bar{S}_4 \bar{S}_2' & \bar{S}_4 \bar{S}_4' & \bar{S}_4 \bar{S}_6' \\ \bar{S}_6 \bar{S}_2' & \bar{S}_6 \bar{S}_4' & \bar{S}_6 \bar{S}_6' \end{bmatrix} \right)$
plane stress	$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda_1 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \lambda_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}, \lambda_0 = \frac{\nu}{1-2\nu}$ $S_1 = G(\lambda_1 \sigma'_{11} + \lambda_2 \sigma'_{22} + \lambda_2 \sigma'_{33}), S_2 = G(\lambda_2 \sigma'_{11} + \lambda_1 \sigma'_{22} + \lambda_1 \sigma'_{33}), S_3 = G(\lambda_2 \sigma'_{11} + \lambda_2 \sigma'_{22} + \lambda_1 \sigma'_{33}),$ $S_4 = 2G\sigma_{12}, S_5 = 2G\sigma_{13}, S_6 = 2G\sigma_{12}, S = \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H' + S_1 \sigma'_{11} + S_2 \sigma'_{22} + S_3 \sigma'_{33} + 2S_4 \sigma'_{23} + 2S_5 \sigma'_{13} + 2S_6 \sigma'_{12}, \bar{S}_2 = \lambda_1 G \sigma'_{22} + \frac{1}{S}(-\lambda_1 (S_2^2 + S_3^2) \sigma'_{12} + 2S_2 S_4 \sigma'_{23} + 2S_2 S_6 \sigma'_{13}), \bar{S}_4 = 2\lambda_1 G \sigma'_{23}, \bar{S}_5 = 2G\sigma_{23}, \bar{S}_6 = 2G\sigma_{12},$ $\bar{S}_1 = \lambda_1 G - \frac{1}{S}(S_2^2 + \lambda_1 (S_1^2 + S_2^2)), \bar{S} = \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 h \bar{H}' + \bar{S}_2 \sigma'_{22} + 2\bar{S}_4 \sigma'_{23} + 2\bar{S}_6 \sigma'_{12},$ $[\bar{H}_{nn}^e] = -\begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\bar{H}_{nn}^p] = \frac{1}{S_0} \left(-E' \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{S} \begin{bmatrix} \nu S_1^2 + \lambda S_1 S_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda S_2 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda S_3 S_4 \end{bmatrix} \right), [\bar{H}_{nn}^h] = \frac{1}{h S_0} \left(E' \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \frac{1}{S} \begin{bmatrix} -S_1^2 & \lambda S_2 S_4 & 0 \\ S_2 S_4 & -\lambda S_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda S_4 S_6 \end{bmatrix} - \frac{1}{S} \begin{bmatrix} \bar{S}_2 \bar{S}_2' & \bar{S}_2 \bar{S}_4' & 0 \\ \bar{S}_4 \bar{S}_2' & \bar{S}_4 \bar{S}_4' & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S}_6 \bar{S}_6' \end{bmatrix} \right)$ $E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \lambda = \frac{1-\nu}{2}, S_1 = E'(\sigma'_{11} + \nu \sigma'_{22}), S_2 = E'(\nu \sigma'_{11} + \sigma'_{22}), S_3 = 2\lambda E' \sigma'_{12},$ $S_4 = \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H' + S_1 \sigma'_{11} + S_2 \sigma'_{22} + 2S_6 \sigma'_{12}, \bar{S}_2 = \lambda E' \sigma'_{22} + \frac{1}{S}(-S_2^2 \sigma'_{22} + 2\lambda S_2 S_6 \sigma'_{12}), \bar{S}_6 = 2\lambda E' J \sigma'_{12} + \frac{1}{S}(S_2 S_6 \sigma'_{22} - 2\lambda S_2 \sigma'_{12}),$ $\bar{S}_1 = E' \sigma'_{22}, \bar{S}_6 = 2\lambda E' \sigma'_{12}, \bar{S}_0 = \lambda E' - \frac{1}{S}(\lambda S_1^2 + S_2^2), \bar{S} = \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 h \bar{H}' + \bar{S}_2 \sigma'_{22} + 2\bar{S}_6 \sigma'_{12}$

$\bar{\sigma}$: equivalent stress, σ'_{ij} : deviatoric stress, H' : strain-hardening rate

ただし $\{de\}$, $\{d\sigma\}$ は全体座標系に対するひずみ増分および応力増分, $\{d\delta_n\}$, $\{d\sigma_n\}$ は面 S_n に対する面外相対変位増分および面外応力を表し, $\{du\}$, $\{dF\}$, $\{dp\}$ はそれぞれ全体座標系に対する変位増分, 物体力増分, 表面力増分である。また δ は変分を表し, $\delta\{du\}$ は幾何学的境界条件を満足する以外は任意の増分である。なお面 S_n において剛性はないが面内応力および面内ひずみが定義されていることから式(30)左辺第2項は次のように表すことができる。

ただし、 $d\sigma_L$ は式(16)による。この物体の体積 V を適當な体積 $V^{(m)}$ をもつ M 個の体積要素に分割する。また面 S_8 については、その面上全面外相対変位の中心から面外方向に相対変位 δ_{22} に対して規準化した座標をとり(図2), $-1/2 < \eta < 1/2$ における変位は $\eta = -1/2$ と $\eta = 1/2$ の変位を線形補間する分布をなしていると仮定してもこのモデルの一般性は失われない。

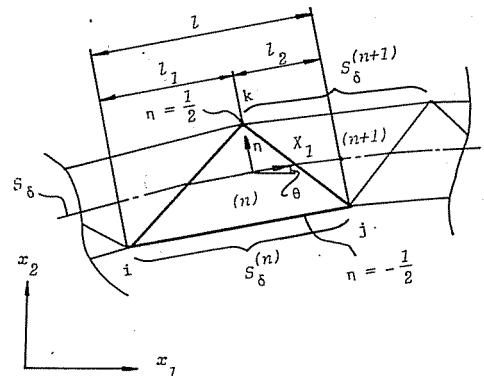


図 2 面要素の導入

ことからそのように仮定し、面 S_0 上、 $-1/2 \leq \eta \leq 1/2$ の領域を適当な N 個の面要素に分割する（例えば図 2）。ただし分割後 η 方向の変位分布は要素内で線形補間するものとする。このとき式(31)を代入した式(30)は次のようになる。

$$\sum_{m=1}^M \int_{V(m)} \delta \llcorner d\varepsilon \lrcorner \{d\sigma\} dV + \sum_{n=1}^N \int_{S^{(n)}} \int_{\eta^{(n)}} \delta \llcorner d\delta \lrcorner \{d\sigma_L\} d\eta dS \\ = \sum_{m=1}^M \int_{V(m)} \delta \llcorner du \lrcorner \{dF\} dV + \sum_{m=1}^M \int_{S^{(m)}} \delta \llcorner du \lrcorner \{dp\} dS \quad \dots \dots \dots \quad (32)$$

ただし、 $S_g^{(n)}$ 、 $\eta^{(n)}$ は n 番めの面要素の定義されている面積および η 座標の領域を表し（図 2）、 $S_v^{(m)}$ は m 番めの体積要素が表面 S_σ 上の一部を含む場合の面積を表す。さて体積要素については有限要素法の標準的手続きを従って次のような関係式が求められる。要素内変位増分 $\{du\}$ は要素を構成する節点変位増分 $\{d\bar{u}\}$ により

$$\{du\} = [N]\{d\bar{u}\} \quad \dots \dots \dots \quad (33)$$

ここで $[N]$ は形状関数と呼ばれるものである。ひずみ増分 $\{d\epsilon\}$ は変位増分および節点変位増分により

$$\{de\} = [\mathcal{D}]\{du\} = [\mathcal{D}][N]\{d\bar{u}\} = [B]\{d\bar{u}\} \quad \dots \dots \dots \quad (34)$$

ここで $[D]$ はひずみと変位を関係づける微分演算子から構成されたマトリックスであり、 $[B]$ はひずみ一変位マトリックスと呼ばれるものである。応力増分 $\{d\sigma\}$ はひずみ増分と式(10), (11)の関係があることから式(34)を考慮して

ただし、 $[D]$ は弾性変形に対しては $[D^e]$ 、弾塑性変形に対しては $[D^p]$ であるとする。一方要素については体積要素に則して次のような関係式が求められる。局所座標系における要素を構成する節点変位増分 $\{d\bar{u}_L\}$ は、全体座標系における節点変位増分 $\{d\bar{u}\}$ により、

ここで $[T]$ は座標変換マトリックスである。局所座標系における要素内変位増分 $\{dw_i\}$ は節点変位増分により

ここで $[N]$ は局所座標系の面内座標と η の関係から構成された面要素の形状関数である。面内ひずみ一面外相対変位増分 $\{de_s\}$ および面外相対変位増分 $\{d\delta_L\}$ は要素内変位増分および節点変位増分により

$$\{d\varepsilon_s\} = \left\{ \frac{d\varepsilon_t}{d\delta_n} \right\} = \left[\frac{\mathcal{D}_t}{\mathcal{D}_n} \right] \{du_L\} = [\bar{\mathcal{D}}] \{du_L\} = [\bar{\mathcal{D}}][\bar{N}][T]\{d\bar{u}\} = [\bar{B}]\{d\bar{u}\} \quad \dots \dots \dots \quad (38)$$

$$\{d\delta_L\} = \left\{ \frac{0}{d\delta_L} \right\} = \left[\frac{0}{\delta_L} \right] \{du_L\} = [\bar{\mathcal{D}}'] \{du_L\} = [\bar{\mathcal{D}}'] [\bar{N}] [T] \{d\bar{u}\} = [\bar{B}'] \{d\bar{u}\} \quad \dots \dots \dots \quad (39)$$

ここで「 \bar{w}_i 」は画外ひずみと要素内変位を関係づける微分演算子から構成されたマトリックス、「 \bar{w}_j 」は画外相対変

位と要素内変位を関係づけるマトリックスである。応力増分は、面内ひずみ-面外相対変位増分と式(16), (26)の関係があることから式(38)を考慮して,

$$\{d\sigma_L\} = [\bar{D}] \{d\varepsilon_s\} = [\bar{D}] [\bar{B}] \{d\bar{u}\} \dots \quad (40)$$

ただし、 $[\bar{D}]$ は、弾性変形に対しては $[\bar{D}^e]$ 、塑性変形に対しては $[\bar{D}^p]$ であるとする。ここで式(33)～(40)を式(32)に代入し、 $\delta \perp d\bar{u}$ は幾何学的境界条件を満足する以外は任意であることに注意すると、各要素の節点に対する支配方程式が次のように得られる。

ただし

$$[\bar{k}] = \int_{S^{(n)}} \int_{\eta}^{(n)} [\bar{B}']^T [\bar{D}] [B] d\eta dS \quad \dots \quad (45)$$

ここで $[k]$ は体積要素剛性マトリックス, $\{dP\}$ は等価節点ベクトル増分, $[\bar{k}]$ は面要素剛性マトリックスである。これにより、体積要素に関しては式(41), (43), (44), 面要素に関しては式(42), (45)で剛性方程式を作成し、それらを組み立てることにより系全体の剛性方程式が得られる。 $[\bar{H}]$ あるいは $[\bar{D}]$ は非対称マトリックスであるが、 $[k]$ は $[D]$ が対称マトリックスであれば対称マトリックスである。体積要素については式(34), (35)でひずみおよび応力が、面要素については式(38), (40)で面内ひずみ-面外相対変位および応力が得されることになる。

特に、この定式化において二次元問題を、線形変位場を仮定した三角形面要素を用いて解析する場合の面要素剛性マトリックスの具体的表示は次のような。すなわち、図2に示すような全体座標系から θ だけ傾いた接点*i*, *j*, *k*をもつ辺の長さ $l(i, j)$, $l(i, k)$, $l(j, k)$ の三角形面要素を考えるとき、面要素剛性マトリックスは、

で与えられる。ただし $\lfloor d\bar{u} \rfloor = \lfloor d\bar{u}_{i1}, d\bar{u}_{i2}, d\bar{u}_{j1}, d\bar{u}_{j2}, d\bar{u}_{k1}, d\bar{u}_{k2} \rfloor$ として

であり、 t は板厚である。

3 DWA モデルの弾塑性有限要素解析

本章では2章で示した定式化に従って単調荷重下の弾塑性き裂とDugdaleモデルに対応するき裂の有限要素法によるDWAモデル解析を行い、き裂モデルとしてのDWAモデルの有効性についての基本的検討を行う。

3・1 弾塑性き裂 図3(a)に示すA533B鋼を想定した中央き裂材が単調な一様引張りを受ける場合を解析した。リガメント面に2・3節で具体的表示を与えた三角形面要素を、連続体部分に三角形定ひずみ要素を適用し、用いた要素分割は中央き裂材の対称性から1/4について、体積要素数786、面要素数63、節点

数 467 なる図 3 (b)に示すとおりのものである。塑性変形の構成則としては、体積要素には Mises の降伏条件に従う結合流れ則を、面要素には表 1 に示した $[\bar{H}]$ マトリックスを用いた構成則を適用している。採用した材料定数はヤング率 $E = 205.8 \text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu = 0.3$, 降伏応力 $\sigma_y = 0.4802 \text{ GPa}$ であり、相当応力-相当ひずみ関係は二直線近似とし、ひずみ硬化率は $H' = d\sigma/d\epsilon^p = 2.058 \text{ GPa}$ とした。リガメント面に対して式(27)で定義される h としては $h = 0.02 \text{ mm}$ を採用した。ただし、解析にあたっては上下の対称性を得るためにリガメント面に図 3 (a)の面要素を対称となるように二重に入れた状態を想定しているので要素としての h は $h = 0.01 \text{ mm}$ である。また荷重増

分法は山田の方法を採用した。このときの解析結果を図4～図7に示す。ここで図4は塑性降伏域を示したものであり、図5には、き裂先端のき裂エネルギー密度 \mathcal{E} と荷重端平均変位 u_m の関係が、図6には荷重 $2P$ -荷重端平均変位 u_m の関係が示してある。図7はリガメント面に分布するき裂エネルギー密度を示したものである。なお図4、5には面要素を考えない通常の連続体

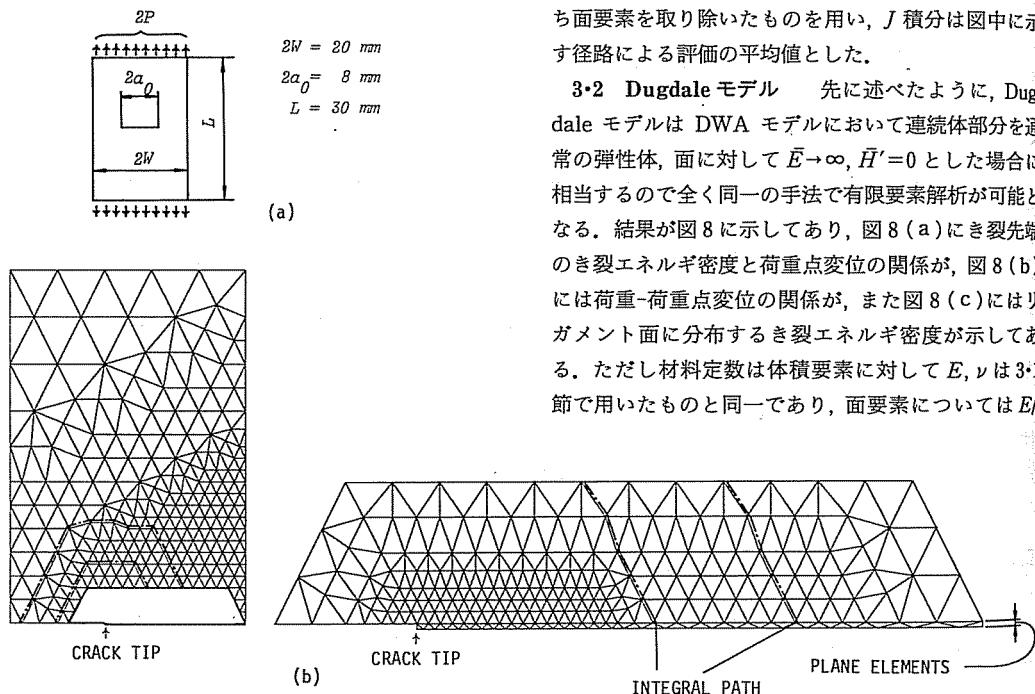
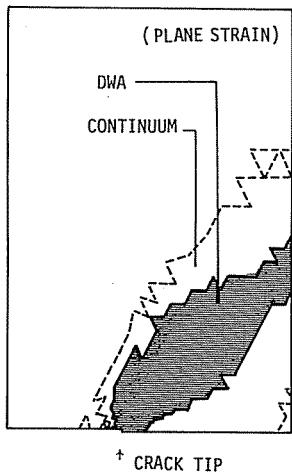
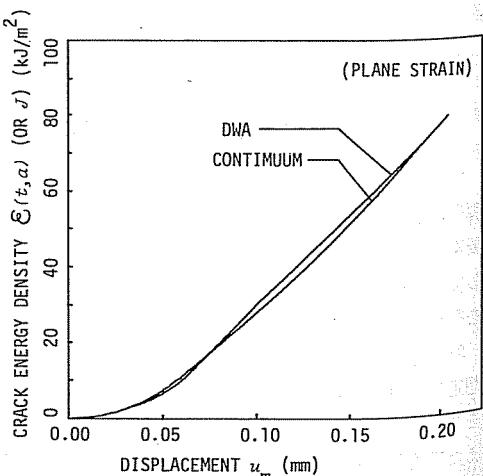


図3 解析に用いた試験片形状と要素分割

図4 塑性降伏域の形状
(荷重端平均変位 $u_m = 0.63 \text{ mm}$)図5 き裂端き裂エネルギー密度(J 積分)-荷重端平均変位曲線

モデルに対する解析結果も併せて示してあり、図5にはこれに基づく J 積分の値が示してある。両者は全域にわたってよく一致しており、連続体モデルにおける J 積分は連続体モデルに対するき裂エネルギー密度となっていることが示されているので⁽⁸⁾、これによりDWAモデルはき裂エネルギー密度を評価するき裂モデルとして非常に有望であることがわかる。ここで連続体モデルの要素分割としては図3(b)に示した要素分割のうち面要素を取り除いたものを用い、 J 積分は図中に示す径路による評価の平均値とした。

3・2 Dugdale モデル 先に述べたように、Dugdale モデルは DWA モデルにおいて連続体部分を通常の弾性体、面に対して $E \rightarrow \infty$, $H' = 0$ とした場合に相当するので全く同一の手法で有限要素解析が可能となる。結果が図8に示してあり、図8(a)にき裂先端のき裂エネルギー密度と荷重点変位の関係が、図8(b)には荷重-荷重点変位の関係が、また図8(c)にはリガメント面に分布するき裂エネルギー密度が示してある。ただし材料定数は体積要素に対して E, ν は3節で用いたものと同一であり、面要素については $E/$

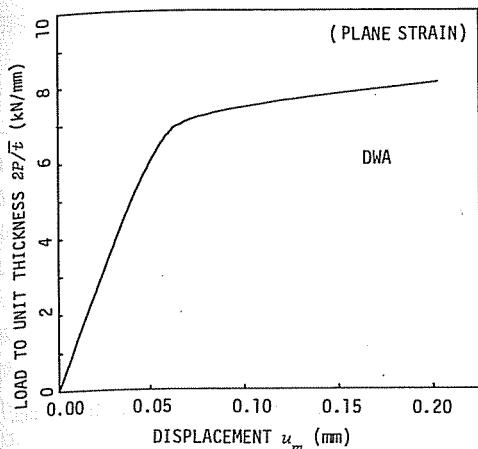
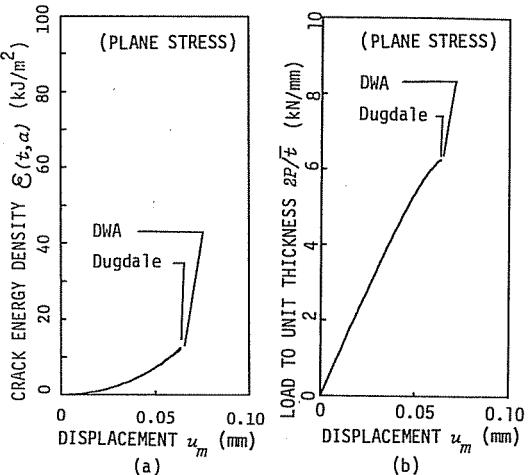


図 6 荷重-荷重点位変曲線



(a) (b)

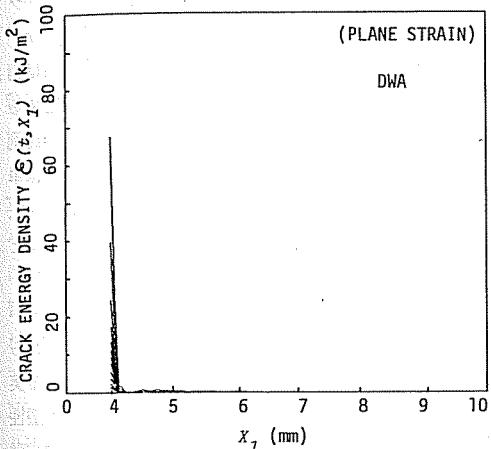


図 7 リガメント面上き裂エネルギー密度分布

$\bar{E}=0.1 \text{ mm}$, $\bar{H}'=0$, $\sigma_Y=0.4802 \text{ GPa}$ とした(弾塑性解析の場合と同一の事情にあり, 面としての E/\bar{E} は $E/\bar{E}=0.2 \text{ mm}$ である). 図 8 には石田の示した選点法⁽⁹⁾を適用した 12 節点倍精度による Dugdale モデル解析の結果も示してあり, 両者は極めてよく一致していることがわかり, 本論文で示した DWA モデル, ならびにその解析手法の有効性を裏付けるものとなっていいる。ただし選点法による解析にあたって, 分布力としては DWA モデルを解析したときの結果として現れた面外応力(面内応力が生じていることにより降伏応力とは異なる)の平均として 0.55 GPa を用いた。

4. 結 言

DWA モデルと名付けた現実のき裂端近傍の非連続性を第一近似的にとり入れたき裂モデルを提案し, 弾塑性問題を解析するための定式化を行った。またさら

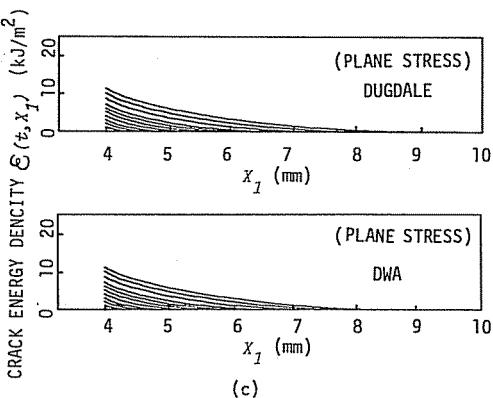


図 8 Dugdale モデルの DWA モデルと選点法による解析

にそれに基づく単調荷重を受ける弾塑性き裂, Dugdale モデルき裂の有限要素解析を行い, 本モデルがき裂パラメータを解析するためのき裂モデルとして有望であることを示した。

文 献

- (1) Dugdale, D. S., *J. Mech. Phys. Solids*, 8 (1960), 100.
- (2) Watanabe, K., Azegami, H. and Kurashige, Y., *Proc. of 32nd Jap. N. Congr. on Theoretical and Appl. Mech.* 1982 (1984-2), 427.
- (3) 渡辺, 機論, 47-416, A (昭 56), 406.
- (4) 渡辺, 機論, 48-433, A (昭 57), 1226.
- (5) 渡辺・畔上, 機論, 51-464, A (昭 60), 1122.
- (6) Shih, C. F., ほか 2 名, *ASTM STP*, 668 (1979), 65.
- (7) 例えば, 山田, マトリックス法材料力学, (昭 55), 209, 培風館。
- (8) 渡辺・倉繁, 機論, 50-460, A (昭 59), 1983.
- (9) Ishida, M., *Mechanical Behavior of Materials*, *Proc. 1971, ICM*, 1 (1972), 394.