

き裂エネルギー密度に基づくき裂の安定・不安定クライテリオンの提案と 従来のクライテリオンの物理的位置付け*

渡 辺 勝 彦**, 畔 上 秀 幸***
Katsuhiko WATANABE, Hideyuki AZEGAMI

Key Words: Fracture, Stability-Instability Criterion, Tearing Modulus, Crack Extension, Crack Energy Density

1. 緒 言

き裂進展挙動の安定・不安定に関し、小規模降伏を伴ったき裂進展に対しては従来エネルギー・バランスの理論を背景にした g - R - a 曲線⁽¹⁾に基づくクライテリオンが有効とされてきているが、大規模降伏を伴うき裂進展に対するエネルギー・バランスに基づく議論は成功しておらず、これに代わるものとして種々の Tearing Modulus ($T^{(2)(3)}$, $T^{(4)}$, $T^{(5)}$) によるクライテリオンが注目されるようになってきている。しかしながらこれら Tearing Modulus によるクライテリオンにはその物理的意味が不明であったり、特殊な適用条件が付されていたりといった問題点があり、さらになによりも小規模降伏に対する g - R - a 曲線法との関係が明らかでないという問題が残されており、現在に至るまでき裂の安定・不安定を統一的に表現する手法は見出されていないように思われる。

このような状況において、先に従来エネルギー解放率に代わるべきものとしてき裂エネルギー密度なる概念を導入することにより、き裂進展開始に関しては従来の種々のクライテリオンが統一的に把握できさらに物理的意味も明らかにできることが著者の一人により示された⁽⁶⁾⁽⁷⁾。このき裂エネルギー密度は進展を含む任意の履歴を経た後もその意味を失わない形で定義されており、したがってき裂の安定・不安定に関するクライテリオンもき裂エネルギー密度により与えられる可能性が出てきたといえる。本論文においてはこのような観点からき裂エネルギー密度に基づく小規模降伏から大規模降伏まで有効なき裂進展挙動の安定・不安定に関す

る $T_e(T_e^*)$ クライテリオンなるものを新たに提案し、その物理的意味を明確にした上で、このクライテリオンと従来のクライテリオンとの関係を考察し、前出の各クライテリオンが $T_e(T_e^*)$ クライテリオンを中心としてすべて概念的に統一でき、上に述べた問題点が解消されることを明らかにする。

2. き裂エネルギー密度による新たな安定・不安定クライテリオンの提案とその考え方

き裂エネルギー密度 \mathcal{E} は先に連続体モデル(き裂端が応力・ひずみの発散する特異点となる)とき裂端近傍が連続体の要件を満たさない現実的なモデルに対して刻々のき裂端における量として定義がなされている⁽⁶⁾⁽⁷⁾が、本章においてはさらにき裂先端以外のき裂面の各点における分布も考えたき裂エネルギー密度分布なるものを定義し、それに基づいてき裂の安定・不安定に関する新たなクライテリオンである T_e クライテリオンとその別の表現としての T_e^* クライテリオンの提案を行う。

2・1 き裂エネルギー密度分布 図1(a)に示すような、負荷を受ける前の初期状態(時刻 $t=0$)において長さ a_0 のき裂が、負荷を受けて先端が鈍化し、さらに長さ $a-a_0$ だけき裂が進展して図1(b)に示すような状態(時刻 $t=t$)にある現実的モデルを考える。ここで Γ_0 は初期の状態におけるき裂端形状であり、 a は $t=t$ におけるき裂長さ(鈍化による見かけの伸びはき裂長さに加えないものとし、滑らかなき裂進展を考えている)である。また以下の議論においてはすべて単位厚さ当りを考えるものとする。 X_1 - X_2 座標を図1(a)のようにとり、初期の状態において Γ_0 を X_1 方向に平行移動した時に重なる部分の面状微小体積を現実的き裂面と考える。この時この現実的き裂面におけるエネルギーの分布としてき裂エネルギー密度分布を次

* 昭和59年3月23日 関西支部第59期定時総会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和58年10月26日。

** 正員、東京大学生産技術研究所(〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

*** 正員、東京大学大学院。

のように定義する。

$$\begin{aligned}\varepsilon(t, X_1) &= \lim_{\Delta X_1 \rightarrow 0} \left\{ \left(\int_{\Delta V} W dV \right) / \Delta X_1 \right\} \\ &= \lim_{\Delta X_1 \rightarrow 0} \left\{ \left(\int_{X_1}^{X_1 + \Delta X_1} \left(\int_{\Gamma(X_1)} W dX_2 \right) dX_1 \right) / \Delta X_1 \right\} \\ &= \int_{\Gamma(X_1)} W dX_2 \quad \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

ここで $\Gamma(X_1)$ は初期の状態において現実的き裂面内 X_1 の位置に想定した Γ_0 と同一形状の径路であり、 ΔV は ΔX_1 に対応する現実的き裂面の体積、 W は「変形に際しての変形前の一点に実際になされた仕事を単位体積当りで表したものの」で広い意味でのひずみエネルギー密度である。この時 $\varepsilon(t, X_1)$ は「初期の状態 (時刻 $t=0$) における $\Gamma(X_1)$ 部分がき裂長さ a に到った現在 (時刻 $t=t$) に至るまでに担ったエネルギーをき裂を含む面内の単位面積当りで表したものの」の意味をもち、一般的には X_1 に対して離散的分布になるものと思われるが、それを平均的にならした連続分布に置き換えて考えることは十分現実的であると考えられ、以後の議論においてはそのような $\varepsilon(t, X_1)$ の分布を想定する。このように考える時、その分布は図 1 (c) の一点鎖線 [$\varepsilon(t+\Delta t, X_1)$ は図中の破線] のようになる。なお図中の二点鎖線はすでにき裂端が通過した部分の各位置がき裂端となるまでに担ったき裂エネルギー密度を表している。

き裂エネルギー密度分布は以上のように一般的に定義されるが特に Dugdale モデルのような簡単なモデルを考える場合には容易に評価することができる。すな

わち、先の現実的き裂面はここでは完全な面となり、負荷を受けた後先端前方のき裂面が図 2 (a) の薄墨部分で示されるように引き伸されさらにき裂先端の分布力を除去することによって進展するモデルとなっているので、き裂面上の点 $X_1(2a)$ が現在までに担ったエネルギーを単位面積当りで表したものの分布、すなわちき裂エネルギー密度分布 $\varepsilon(t, X_1)$ は刻々受けた分布力 σ^* とそれに対応する相対変位増分 $d\delta(t, X_1)$ の積の和 (積分) として

$$\varepsilon(t, X_1) = \int_0^t \sigma^* d\delta(t, X_1) \quad \dots\dots\dots (2)$$

で与えられ、図 2 (b) に示ようになる。ここで図中の二点鎖線は図 1 (c) におけるものと同様であり、式 (2) において X_1 がき裂端となった以後において σ^* を零とすることにより求まる。

2.2 T_I クライテリオンの提案 滑らかかつ安定的に成長している実際のき裂において刻々実際に実現されるき裂エネルギー密度分布を $\varepsilon_c(t, X_1)$ と表し、またこの時のき裂先端のき裂エネルギー密度 $\varepsilon_c(t, a)$ を限界き裂エネルギー密度と呼ぶことにする。この時 $\varepsilon_c(t, a)$ は「安定的に成長するき裂において $X_1=a$ の部分がき裂先端となるまでに $\Gamma(a)$ の部分が実際に担い得たエネルギーをき裂面内の単位面積当りで表したものの」の意味をもつ。一方、与えられた境界条件 (進展とともに変化するものであってもよい) のもとにおいて静的にき裂を仮想進展させる場合に実現されるき裂エネルギー密度分布 (力学的条件により定まるき裂エネルギー密度分布) を $\varepsilon_{ap}(t, X_1)$ と表すことにする。このようにする時、き裂の進展開始とその後の進展も含めてき裂が進展するための条件は

$$\varepsilon_{ap}(t, a) = \varepsilon_c(t, a) \quad (\text{進展}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

で与えられることになり、これをき裂進展に関する

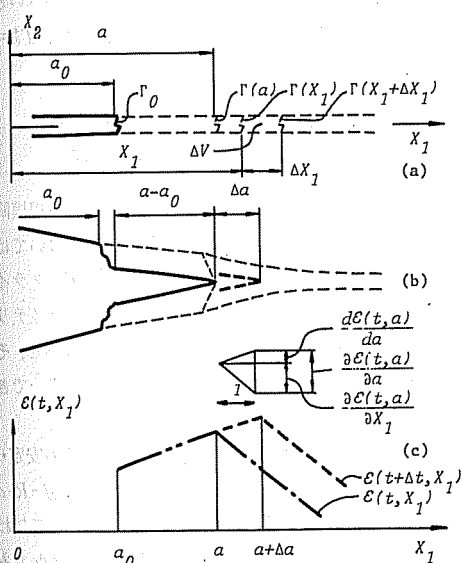


図 1 現実的き裂における進展とき裂エネルギー密度

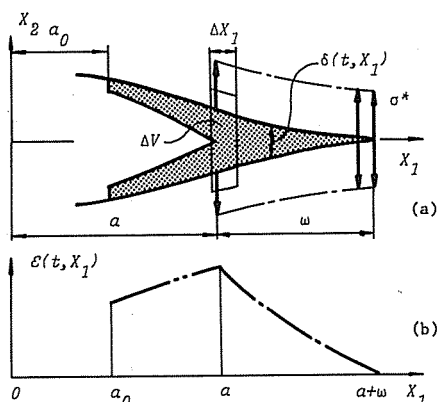


図 2 進展する Dugdale モデル

ε_c クライテリオンと呼ぶことにする。ここで下付きの ap, c はこれ以後扱うクライテリオンにおいて注目するパラメータに対しても同様の意味で用いることとし、それらを付さない場合は、両者を代表して表しているものとする。

さて以上のようにき裂の進展をとらえる時、進展を開始したあるいは安定に成長してきたき裂が次の瞬間に安定に向かうか不安定に向かうかの条件は

$$\frac{d\varepsilon_{ap}(t, a)}{da} = \frac{\sigma_f^2}{E} T_{\varepsilon_{ap}} \geq \frac{d\varepsilon_c(t, a)}{da} = \frac{\sigma_f^2}{E} T_{\varepsilon_c} \quad (\text{不安定}), \quad \frac{d\varepsilon_{ap}(t, a)}{da} < \frac{d\varepsilon_c(t, a)}{da} \quad (\text{安定}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

あるいは

$$T_{\varepsilon_{ap}} \geq T_{\varepsilon_c} \quad (\text{不安定}), \quad T_{\varepsilon_{ap}} < T_{\varepsilon_c} \quad (\text{安定}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

で与えられることになり、この式(4)あるいは(5)を T_ε クライテリオンと呼び新たにき裂進展挙動の安定・不安定に関するクライテリオンとして提案する。ただし、

$$\frac{d\varepsilon(t, a)}{da} = \lim_{\Delta a(dt) \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t+\Delta t, a+\Delta a) - \varepsilon(t, a)}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} = \frac{d\varepsilon(t, a)}{dt} \frac{dt}{da} \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。また E はヤング率、 σ_f は流動応力であり、 $\{d\varepsilon(t, a)\}/(da)$ は図1(c)における二点鎖線に関する $X_1 = a$ における右方より決定されるこう配を意味するものとなっていることに留意したい。 ε_c クライテリオンや T_ε クライテリオンの有効性は同一材料、同一破壊様式でのき裂の進展に対して $\varepsilon_c(t, a) = \text{一定}$ 、あるいは $T_{\varepsilon_c} = 0$ となることが示されることによって実証されることになる。

2.3 T_ε^* クライテリオンの提案 式(6)は次のように変形される。

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t, a)}{da} &= \lim_{\Delta a(dt) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon(t+\Delta t, a+\Delta a) - \varepsilon(t, a+\Delta a)}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} + \frac{\varepsilon(t, a+\Delta a) - \varepsilon(t, a)}{\Delta a} \right\} \\ &= \lim_{\Delta a(dt) \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t+\Delta t, a+\Delta a) - \varepsilon(t, a+\Delta a)}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} + \lim_{\Delta X_1 \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t, a+\Delta X_1) - \varepsilon(t, a)}{\Delta X_1} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

したがって式(7)の右辺第1項を $\{\partial \varepsilon(t, a)\}/\partial a$ 、第2項を $\{\partial \varepsilon(t, a)\}/\partial X_1$ と表す時式(4)あるいは(5)で与えられる条件は、進展開始時あるいは安定に成長してきた現時点においては $\{\partial \varepsilon_{ap}(t, a)\}/\partial X_1 = \{\partial \varepsilon_c(t, a)\}/\partial X_1$ であることも考慮すると、

$$\frac{\partial \varepsilon_{ap}(t, a)}{\partial a} = \frac{\sigma_f^2}{E} T_{\varepsilon_{ap}}^* \geq \frac{\partial \varepsilon_c(t, a)}{\partial a} = \frac{\sigma_f^2}{E} T_{\varepsilon_c}^* \quad (\text{不安定}), \quad \frac{\partial \varepsilon_{ap}(t, a)}{\partial a} < \frac{\partial \varepsilon_c(t, a)}{\partial a} \quad (\text{安定}) \quad \dots\dots\dots (8)$$

あるいは

$$T_{\varepsilon_{ap}}^* \geq T_{\varepsilon_c}^* \quad (\text{不安定}), \quad T_{\varepsilon_{ap}}^* < T_{\varepsilon_c}^* \quad (\text{安定}) \quad \dots\dots\dots (9)$$

のように表すこともでき、本論文においては式(8)あるいは(9)によって表したクライテリオンを特に T_ε^* クライテリオンと呼ぶことにする。 T_ε クライテリオンと T_ε^* クライテリオンは全く等価な条件を表すものであり、 T_ε クライテリオンが新たにき裂端になった部分におけるき裂進展による全き裂エネルギー密度の変化に注目するのに対し、 T_ε^* クライテリオンは新たにき裂端となった部分においてき裂の進展の結果として上乗せされるき裂エネルギー密度の変化に注目したものであると考えることができる。すなわち、 T_ε^* は図1(c)において一点鎖線と $X_1 > a$ における二点鎖線の間のこう配の意味を持つことになる。なお同一材料、同一破壊様式でのき裂進展を考える時 $T_{\varepsilon_c} = 0$ となることが予想されるのに対し、 $T_{\varepsilon_c}^*$ はき裂エネルギー密度分布の前方方向の傾きがき裂長さによらず一様であるような時において同一材料、同一破壊様式でのき裂進展に対して定数となることが予想される量である。一般に、例えばリガメント部が非常に小さいような特殊

な場合を除いて前方の分布のこう配の変化は小さいと思われるので、 $T_{\varepsilon_c} = 0$ であるような場合には、 $T_{\varepsilon_c}^* = \text{一定}$ となる場合が多いものと考えられる。

3. 提案したクライテリオンと従来有効とされているクライテリオンとの関係

従来有効とされているクライテリオンは、小規模降伏においては $g-R-a$ 曲線法、大規模降伏においては T_I クライテリオン、 T_σ クライテリオン、 T_w クライテリオンがあげられる。本章ではこれらのクライテリオンと T_ε (T_ε^*) クライテリオンとの関係を考察し、それにより従来の各クライテリオンが概念的に統一できることを示す。

3.1 $g-R-a$ 曲線法 小規模降伏のき裂の安定・不安定はエネルギー・バランスの理論に基づく $g-R-a$ 曲線⁽¹⁾ による評価が有効であるとされてきた。すなわち、き裂が進展した時に解放されるポテンシャルエネルギーが破面形成に必要なエネルギーを上回った時に不安

定となる考えられてきた。しかしながら、小規模降伏においてエネルギー解放率とされてきたものは実はエネルギー解放率ではなくき裂エネルギー密度にほかならないことが明らかにされている⁽⁷⁾。したがって g - R - a 曲線法と呼ばれてきたものは実は \mathcal{E}_{ap} - \mathcal{E}_c - a 曲線法とも呼ばれるべきもの、すなわち T_c クライテリオンそのものということになり、 g - R - a 曲線による評価の有効性は T_c クライテリオンの有効性を実証してきたものになると考えられる。

3.2 T_J クライテリオン 大規模降伏を伴うき裂の安定・不安定に関するクライテリオンとして Paris らにより J 積分抵抗曲線の傾きに注目した T_J クライテリオンが提案され⁽²⁾、その有効性が注目されている。ここでは T_J クライテリオンにおいて注目する T_J と T_c^* との関係を明らかにすることにより、ある条件のもとではその両者は等しくなること、一般に T_J クライテリオンはき裂進展開始点における T_c^* クライテリオンに対応するものとして位置付けできることを示す。

さて、 T_J クライテリオンにおいては力学的条件によって決定される J 積分を J_{ap} 、抵抗曲線上の J 積分を J_c として時刻 t におけるき裂進展の条件を

$$J_{ap}(t) = J_c(t) \quad (\text{進展}) \quad (10)$$

で与え、安定・不安定に関する条件は

$$T_{Jap} \geq T_{Jc} \quad (\text{不安定}), \quad T_{Jap} < T_{Jc} \quad (\text{安定}) \quad (11)$$

として与えられている。ただし

$$T_J = \frac{E}{\sigma_f^2} \frac{dJ(t)}{da} \quad (12)$$

である。 T_J の評価には荷重-変位曲線によるものと経路積分によるものがあり、以下にそれぞれについての考察を行う。

(1) 荷重-変位曲線による T_J ここでは Rice の簡便法⁽⁸⁾に基づく T_J と T_c^* との関係を考察するものとし、Rice の簡便法の基礎を与える図 3 に示すような初期き裂長さが a_0 と $a_0 + \Delta a_0$ である 2 本のき裂材に対する荷重 P -変位 u 曲線(あるいは曲げ荷重 M -角変位 θ 曲線)を考える。ただしここではき裂の進展後も考えており、進展後も含め 2 本のき裂材は時刻 $t=0$ から t に至る刻々の各時刻において等しい変位 u を生ずるように荷重は加えられ、さらに t と $u(t)$ [あるいは $\theta(t)$] は 1 対 1 に対応するものとする。またそれぞれ初期き裂長さ a_0 のき裂材は図中 1 の点 ($t=t_1$) で、初期き裂長さ $a_0 + \Delta a_0$ のき裂材は図中 2 の点 ($t=t_2$) でき裂が進展を開始するものとし、初期き裂長さが短いき裂材のほうが早く進展を開始する場合には図 3 (a) で、逆の場合には図 3 (b) で考える。さらに、初期き裂長さ a_0 のき裂材は、初期き裂長さ $a_0 + \Delta a_0$ のき裂材が進展を開始するまでの Δt 時間に、変位と荷重はそれぞれ Δu (あるいは $\Delta \theta$)、 ΔP 増加し、き裂は Δa 進展するものとし、その進展後の状態を図中 1_{ex} の点で表す。この時 Δa 、 Δt 、 Δu 、 ΔP は Δa_0 に対応して定まるものとなる。また以下においては、進展開始時において時間に対する変化率が不連続になることが予想される場合には進展直前および直後における変化率をそれぞれ $(\quad)^-$ 、 $(\quad)^+$ で表すものとし、増分を表す Δ は微分形式で微小極限をとった時 d と表すことにする。

さて上のようにする時一般にき裂進展開始点の J 値 $J(t_1)$ は、荷重を初期き裂長さ a_0 と変位 $u(t)$ (あるいは時刻 t) の関数として $P(a_0, u(t))$ [あるいは $P(a_0, t)$] で表し、 $\Delta A(t_1)$ を図 3 に示す面積 201 として次式で与えられる⁽⁹⁾。

$$J(t_1) = -\frac{dA(t_1)}{da_0} = -\frac{1}{B} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial P}{\partial a_0} \right)_u du \quad (13)$$

ただし B は板厚である。Rice の簡便式は式 (13) に基づき曲げと引張りの特殊な場合について与えられており、曲げに対しては角変位 θ 、曲げ荷重 $M(a_0, \theta)$ [あるいは $M(a_0, t)$]、リガメント長さ b_0 、板厚 B の間に $M = b_0^2 B f(\theta)$ あるいは

$$\left(\frac{\partial M}{\partial a_0} \right)_\theta = - \left(\frac{\partial M}{\partial b_0} \right)_\theta = -2b_0 B f(\theta) = -\frac{2}{b_0} M \quad (14)$$

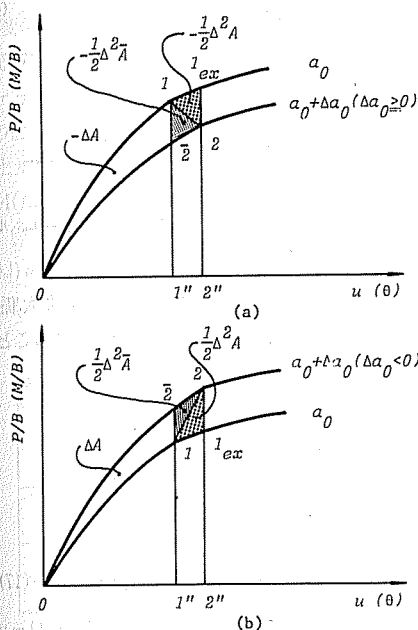


図 3 初期き裂長さの異なる 2 本の荷重-変位曲線

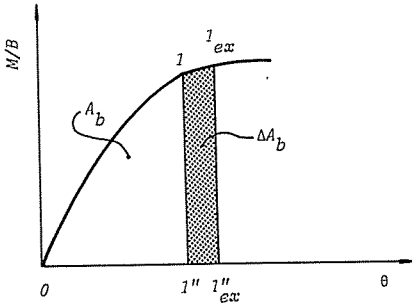


図 4 曲げ荷重-角変位曲線

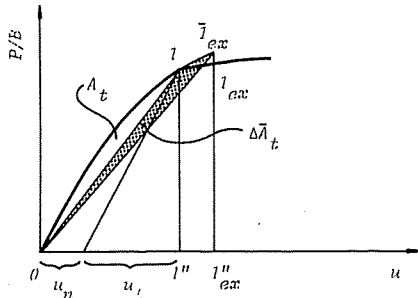


図 5 引張荷重-変位曲線

なる関係が近似的に成立していることから、図 4 における面積 101' を $A_b(t_1)$ として

$$J(t_1) = -\frac{1}{B} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial M}{\partial a_0} \right)_\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{Bb_0} \int_0^{t_1} M d\theta = \frac{2A_b(t_1)}{b_0} \quad (\text{曲げ}) \quad \dots\dots (15)$$

与えられる。中央(両側)き裂試験片の引張りに対しては荷重点変位の非線形寄与分 u_n (図 5 参照), P , b_0 , B の間に

$$u_n = b_0 g \left(\frac{P}{b_0 B} \right) \quad \text{あるいは} \quad \left(\frac{\partial u_n}{\partial a_0} \right)_P$$

$$= - \left(\frac{\partial u_n}{\partial b_0} \right)_P = \frac{P}{b_0} \left(\frac{\partial u_n}{\partial P} \right)_{b_0} - \frac{u_n}{b_0}$$

$$\dots\dots\dots (16)$$

なる関係が近似的に成立しておりさらに線形寄与分は $u_t(a_0, P)$ (図 5 参照) と表せることから $u(t) = u(a_0, P)$

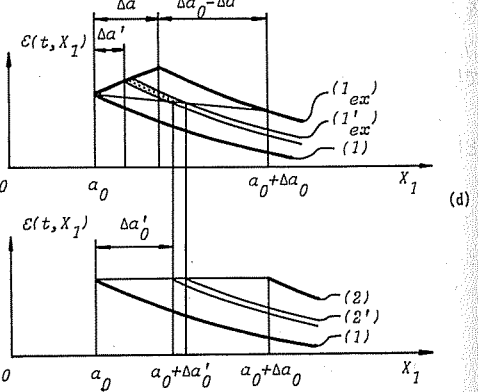
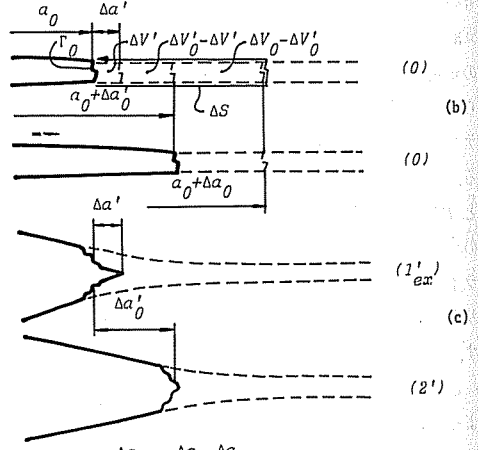
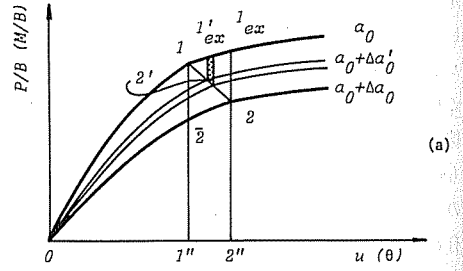


図 6 初期き裂長さの異なるき裂材の進展とき裂エネルギー密度 ($\Delta a_0 \geq 0$)

$P(a_0, t) = u_t + u_n$ と表せ、さらに応力拡大係数 $K_I(a_0, P)$ との関係および $P du_t = u_t dP$ であることを考慮して

$$J(t_1) = \frac{1}{B} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial P}{\partial a_0} \right)_u du = \frac{1}{B} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u_t}{\partial a_0} \right)_P dP = \frac{1}{B} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u_t}{\partial a_0} \right)_P dP + \frac{1}{B} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u_n}{\partial a_0} \right)_P dP$$

$$= \frac{K_I^2}{E'} + \frac{1}{Bb_0} \int_0^{t_1} (P du_n - u_n dP) = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{2}{Bb_0} \left(\int_0^{t_1} P du - \frac{1}{2} P(a_0, t_1) u(t_1) \right)$$

$$= \frac{K_I^2(a_0, P(a_0, t_1))}{E'} + \frac{2A_t(t_1)}{b_0}, \quad (\text{引張り}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

与えられる。ここで $A_t(t_1)$ は図 5 における面積 101 を表し、 E' は平面応力の時 E , 平面ひずみの時 $E/(1-\nu^2)$,

ν はポアソン比である。 T_I はき裂進展後の J 積分のき裂進展量に対する変化率 $(dJ)/(da)$ を無次元化した値であるが、ここでは $(dJ)/(da)$ として次式で評価されるもの考える。

$$\frac{dJ(t_1)}{da} = \frac{2}{b_0} \frac{dA_0(t_1)}{da} = \frac{2M(a_0, t_1)}{Bb_0} \frac{d\theta}{da}, \quad (\text{曲げ}) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ(t_1)}{da} &= \frac{1}{E'} \left(\frac{\partial K_I^2(a_0, P(a_0, t_1))}{\partial P} \right)_{a_0} \frac{dP}{da} + \frac{2}{b_0} \frac{d\bar{A}_I(t_1)}{da} \\ &= \frac{1}{B} \left[\left(\frac{\partial u_t(a_0, P(a_0, t_1))}{\partial a_0} \right)_P \frac{dP}{da} + \frac{1}{b_0} \left\{ P(a_0, t_1) \frac{du}{da} - u(t_1) \left(\frac{\partial P(a_0, t_1)}{\partial u} \right)_{a_0} \frac{du}{da} \right\} \right], \quad (\text{引張り}) \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ただし $\Delta A_0(t_1)$ は図 4 における面積 $11'' 1_{ex} 1_{ex}$ であり Δa (あるいは $\Delta t, \Delta u, \Delta P$) に対応する変化を表し、 $\Delta \bar{A}_I(t_1)$ は図 5 において 1_{ex} を荷重-変位曲線上 $\{P(a_0, t_1) + [\partial P(a_0, t_1)/\partial u] \Delta u, u(t_1) + \Delta u\}$ の点として図中の面積 $10 1_{ex}$ であり、 Δa に対応する変化を表す。なお、JSME S 001 J_{Ic} 試験法三点曲げ試験片の抵抗曲線上進展開始点における進展側こう配は式(18)に対応する。この時式(18)および式(19)に $t=t_1$ における式(14)および式(16)の関係を代入し図 3 (a) において $-1/2 \Delta^2 \bar{A}(t_1)$ [図 3 (b) において $1/2 \Delta^2 \bar{A}(t_1)$] を図中の面積 $12 \bar{2}$ とする時、次のように表すことができる。

$$\frac{dJ(t_1)}{da} = -\frac{1}{B} \left(\frac{\partial M(a_0, t_1)}{\partial a_0} \right)_{a_0} \frac{d\theta}{da} = \frac{1}{B} \left(\lim_{\Delta a_0 \rightarrow 0} \frac{M(a_0, t_1) - M(a_0 + \Delta a_0, t_1)}{\Delta a_0} \right) \frac{d\theta}{da} = -\frac{d^2 \bar{A}(t_1)}{da_0 da} \quad (\text{曲げ}) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ(t_1)}{da} &= \frac{1}{B} \left[\left(\frac{\partial u_t(a_0, P(a_0, t_1))}{\partial a_0} \right)_P \frac{dP}{da} + \frac{1}{b_0} \left\{ P(a_0, t_1) \left(\frac{\partial u_n(a_0, P(a_0, t_1))}{\partial P} \right)_{b_0} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - u_n(a_0, P(a_0, t_1)) \left(\frac{\partial P(a_0, t_1)}{\partial u} \right)_{a_0} \frac{du}{da} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{B} \left\{ \left(\frac{\partial u_t(a_0, P(a_0, t_1))}{\partial a_0} \right)_P + \left(\frac{\partial u_n(a_0, P(a_0, t_1))}{\partial a_0} \right)_P \right\} \left(\frac{\partial P(a_0, t_1)}{\partial u} \right)_{a_0} \frac{du}{da} \\ &= \frac{1}{B} \left(\frac{\partial u(a_0, P(a_0, t_1))}{\partial a_0} \right)_P \left(\frac{\partial P(a_0, t_1)}{\partial u} \right)_{a_0} \frac{du}{da} = -\frac{1}{B} \left(\frac{\partial P(a_0, t_1)}{\partial a_0} \right)_u \frac{du}{da} \\ &= \frac{1}{B} \left(\lim_{\Delta a_0 \rightarrow 0} \frac{P(a_0, t_1) - P(a_0 + \Delta a_0, t_1)}{\Delta a_0} \right) \frac{du}{da} = -\frac{d^2 \bar{A}(t_1)}{da_0 da} \quad (\text{引張り}) \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

したがってこれによって、式(18)および式(19)で評価される $\{dJ(t_1)/da\}$ は初期き裂長さの異なる 2 本の荷重-変位曲線を考えることによって定義される面積と対応づけられたことになる。

一方、初期き裂長さの異なる 2 本の荷重-変位曲線上の面積とき裂進展開始時 ($t=t_1$) のき裂エネルギー密度上乘せ率 $\{\partial \varepsilon(t_1, a_0)/\partial a\}$ との対応は図 3 に示す $\Delta^2 A(t_1)$ と関係づけられることが次のように示される。図 6 (a) において初期き裂長さ $a_0 + \Delta a_0$ ($|\Delta a_0| \leq |\Delta a_0|$) のき裂材は図中 2' の点で進展を開始するものとする [ここでは図 3 (a) に対応する場合のみが描いて

あるが図 3 (b) のようになる場合についても全く同様に扱える]。初期き裂長さ a_0 のき裂材は初期き裂長さ $a_0 + \Delta a_0$ のき裂材が進展を開始するまでの $\Delta t'$ 時間に変位は $\Delta u'$ 増加し、き裂は $\Delta a'$ 進展するものとし、進展後の状態を $1'_{ex}$ の点で表す。この時 $\Delta a', \Delta t', \Delta u'$ は Δa_0 に対応して定まるものとなる。また W は 2・1 節で定義したひずみエネルギー密度として初期き裂長さや時間と場所 $X_i (i=1, 2)$ の関数として $W(a_0, t, X_1, X_2)$ で表せるものとするときエネルギー保存則が成立する。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{B} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} P(a_0, t) du \\ &= \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \left\{ \int_{V_0 - (dV_0' - dV')} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{a_0 = a_0, X_i} dV \right\} dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \left[\int_{a_0 + \Delta a_0}^{a_0 + \Delta a_0'} \left\{ \int_{\Gamma(X_1)} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{a_0 = a_0, X_i} dX_2 \right\} \right. \\ &\quad \left. \times dX_1 \right] dt \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{B} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} P(a_0 + \Delta a_0', t) du \\ &= \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \left\{ \int_{V_0 - (dV_0' - dV')} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{a_0 = a_0 + \Delta a_0', X_i} dV \right\} dt \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

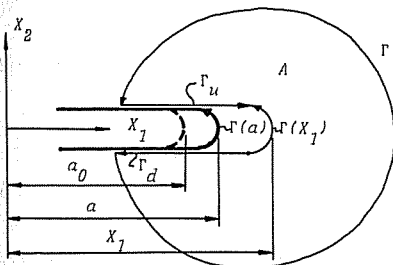


図 7 切欠きを囲む積分経路

ただし、どちらも左辺は外力のした仕事であり、 $V_0 - (\Delta V'_0 - \Delta V')$ は変形前の状態における全体積から $\Delta a'_0$ に対応する体積と $\Delta a'$ に対応する体積の差の体積を除いた残りの体積を表す [図 6 (b) 参照]。また $V_0 - (\Delta V'_0 - \Delta V')$ の部分について次の関係を与えることができる。

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_1+dt} \left\{ \int_{V_0-(\Delta V'_0-\Delta V')} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{a_0=a_0, x_i} dV \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_1+dt} \left\{ \int_{V_0-(\Delta V'_0-\Delta V')} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{a_0=a_0+\Delta a_0, x_i} dV \right\} dt \\ &+ \int_{\Delta S} \left(\int_0^{\Delta F_i, \Delta u_{if}} F_i^* du_{if}^* \right) dS \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ただし ΔS は変形前の状態における Δa_0 に対応する体積 ΔV_0 を囲む面から Γ_0 面を引いた残りの面を表し、[図 6 (b) 参照]、 ΔF_i は初期き裂長さ $a_0 + \Delta a_0$ のき裂材の ΔS に相当する表面に等号が成り立つように働かされた表面力増分であり、 Δu_{if} は ΔF_i に対応する変位増分で、 F_i^* 、 du_{if}^* はこの増分に至る過程における表面力とそれに対応する変位増分を表す。一方 Δt 時間に初期き裂長さ a_0 のき裂材の ΔS 面に実際に生じた変位増分 Δu_i に対して同じ ΔS 面上に仮想的に次式が成り立つように作用させた表面力 T_i および表面力増分 ΔT_i を考える。

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_1+dt} \left[\int_{a_0+\Delta a'}^{a_0+\Delta a_0} \left\{ \int_{\Gamma(x_1)} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{a_0=a_0, x_i} dX_2 \right\} dX_1 \right] dt \\ &= \int_{\Delta S} \left(\int_{T_i}^{T_i+\Delta T_i, \Delta u_i} T_i du_i \right) dS \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

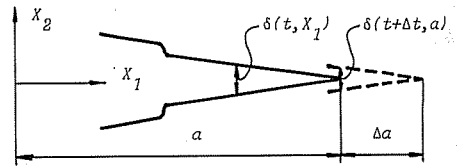


図 8 き裂進展に伴うき裂開口変位増分

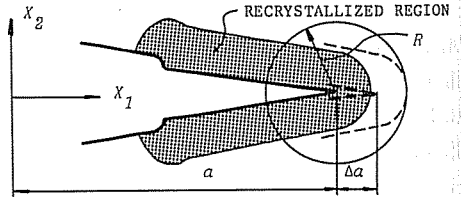


図 9 先端に固定された閉領域

このようにしておいて対応して定義されている Δa_0 と Δa を 1 次の微小量とする時、 ΔF_i 、 Δu_{if} 、 ΔT_i は Δa_0 と Δa の両者の影響で 2 次の微小量となり、 T_i は Δa_0 の影響で 1 次の微小量、 Δu_i は Δa の影響で 1 次の微小量となる。このことから式 (24) の右辺第 2 項は式 (25) の右辺よりも高次の微小量であり省略できることになる。これより $-1/2 \Delta^2 A(t_1)$ を図 3 (a) における面積 $11_{ex} 2$ とする時次の関係が得られることになる。

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2 A(t_1)}{da_0 da} = \frac{2}{B} \lim_{\Delta a(dt) \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta a_0 \Delta a} \int_{t_1}^{t_1+dt} (P(a_0, t) - P(a_0 + \Delta a_0, t)) du \right\} \\ &= 2 \lim_{\Delta a(dt) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta a_0 \Delta a} \int_{t_1}^{t_1+dt} \left\{ \int_{a_0+\Delta a'}^{a_0+\Delta a_0} \left(\int_{\Gamma(x_1)} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{a_0=a_0, x_i} dX_2 \right) dX_1 \right\} dt \right] \\ &= \lim_{\Delta a(dt) \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta a_0 - \Delta a}{\Delta a_0} \left\{ \int_{\Gamma(a_0)} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{a_0=a_0, x_i} dX_2 \right\} \frac{\Delta t}{\Delta a} \right] = \left(1 - \frac{da}{da_0} \right) \frac{\partial \mathcal{E}(t_1, a_0)}{\partial a} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

式 (26) により初期き裂長さの異なる 2 本の荷重-変位曲線上の面積 $\Delta^2 A(t_1)$ とき裂エネルギー密度の上乗せ率 $\{\partial \mathcal{E}(t_1, a_0)/\partial a\}$ との関係が与えられたことにより、荷重-変位曲線による $\{dJ(t_1)/da\}$ と $\{\partial \mathcal{E}(t_1, a_0)/\partial a\}$ の関係は $\Delta^2 \bar{A}(t_1)$ と $\Delta^2 A(t_1)$ の関係より

$$\frac{\partial \mathcal{E}(t_1, a_0)}{\partial a} = C \frac{dJ(t_1)}{da} \dots\dots\dots (27)$$

で与えられることになる。ただし

$$C = \left[1 - \left\{ \left(\frac{\partial P(a_0, t_1)}{\partial u} \right)_{a_0} - \left(\frac{\partial P(a_0, t_1)}{\partial u} \right)_{a_0}^+ \right\} / \left\{ \left(\frac{\partial P(a_0, t_1)}{\partial a_0} \right)_u \frac{da_0}{da} \right\} \right] / \left(1 - \frac{da}{da_0} \right) \dots\dots\dots (28)$$

である。したがってき裂進展開始時の T_i^* と T_j の間には

$$T_i^* = CT_j \dots\dots\dots (29)$$

なる関係が成り立ち、このことからき裂進展開始直後に限られるが C があまり変化しない。すなわちほぼ定数的に扱えるような条件のもとにおいては T_j は T_i^*

の代役的な役割を果し得るパラメータとなることがわかり、特に $C=1$ が成立している状況においては $T_i^* = T_j$ となって T_j は T_i^* の意味を持つことになる。なお、同じ形状のき裂材でも延性材料になるに従って $(da)/(da_0) < 1$ となる傾向が見られること、さらに荷重-変位曲線の進展開始点での傾きの不連続性も延性

材料になるに従って小さくなる傾向があることから、延性材料の特定のき裂材においては $C \approx 1$ が成立している可能性があるものと考えられる。

(2) 径路積分による T_J 進展するき裂において遠方の径路を用いて形式的に径路積分によって評価される J は、その先端曲率半径が十分小さい進展する切欠きに対して評価される遠方の径路を用いた径路積分による J とほぼ一致し、また適切な曲率半径の切欠きを選ぶ時これはき裂エネルギー密度をその分布も含めて評価し得る連続体モデルとなり得る可能性が指摘されている⁽¹⁰⁾ということもあるので、ここではき裂の代わりに図7に示すような進展する切欠き（進展に際しては余分となる体積部分の剛性が零となっていくと考える）を考える。この時このモデルにおけるき裂エネルギー密度分布 $\mathcal{E}(t, X_1)$ は任意の構成則を考える場合に対して径路独立な積分

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_J(t, X_1) = & \int_{\Gamma} (W n_1 - T_i u_{i,1}) ds \\ & - \int_{\Gamma u - \Gamma(X_1) + \Gamma_d} ds - \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} \\ & - d\sigma_{ij}, \epsilon_{ij,1}) dA \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

により $\mathcal{E}(t, X_1) = \mathcal{E}_J(t, X_1)$ として評価されるので⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、 $J(t) = \int_{\Gamma} (W n_1 - T_i u_{i,1}) ds$ であることも考慮して $\{\partial \mathcal{E}(t, a)\} / \{\partial a\}$ を定義に従って計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}(t, a)}{\partial a} &= \frac{\partial \mathcal{E}_J(t, a)}{\partial a} \\ &= \frac{dJ(t)}{da} - \int_{\Gamma(a)} \sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} dX_2 \\ &+ \frac{dt}{da} \int_A (\epsilon_{ij,1} \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij,1} \dot{\epsilon}_{ij}) dA \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

なる関係が得られる。ここで W はひずみエネルギー密度で $W = \int_0^t \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ であり、 σ_{ij} , ϵ_{ij} , T_i , u_i はそれぞれ

れ応力、ひずみ、表面力、変位、また n_1 は X_1 方向の方向余弦成分、 A は $\Gamma + \Gamma_u - \Gamma(X_1) + \Gamma_d$ によって囲まれる部分の面積である。また $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot) / \partial X_i$, $(\cdot)_{,t} = \partial(\cdot) / \partial t$ であり、時刻0から t までの積分は実際の負荷径路にそってのものを意味している。式(31)はき裂進展開始直後に限らず T_J と T_s^* の間に成り立つ一般的関係であり、これより両クライテリオン間の変換が可能となる。いうまでもないことであるが、またこれについては今後の検討が必要であるが

$$\begin{aligned} \frac{dJ(t)}{da} &\gg - \int_{\Gamma(a)} \sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} dX_2 \\ &+ \frac{dt}{da} \int_A (\epsilon_{ij,1} \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij,1} \dot{\epsilon}_{ij}) dA \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

が成り立っているような状況においては両者は一致するものとなる。

3.3 T_s クライテリオン 大規模降伏において、大規模なき裂進展後に対しても適用可能なクライテリオンとして T_s クライテリオンが提案されており、その安定・不安定のクライテリオンは解析的モデルの上で次のように与えられている⁽⁴⁾。

$$T_{s,ap} \geq T_{sc} \text{ (不安定)}, T_{s,ap} < T_{sc} \text{ (安定)} \dots\dots\dots (33)$$

ただし、 T_s は $\delta(t, X_1)$ を図8に示すような時刻 t , 場所 X_1 における開口変位として次のように定義される。

$$T_s = \frac{E}{\sigma_f} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\delta(t + \Delta t, a) - \delta(t, a)}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} \dots\dots\dots (34)$$

そこでこのように定義された T_s を正確な定式化が可能な Dugdale のモデルで考えてみる。すなわち、この場合には分布力 $\sigma^* = \sigma_f$ として

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{E}{\sigma_f^2} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\sigma_f \{\delta(t + \Delta t, a) - \delta(t, a)\}}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} \\ &= \frac{E}{\sigma_f^2} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\sigma_f \{\delta(t + \Delta t, a + \Delta a) - \delta(t, a + \Delta a)\}}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} = \frac{E}{\sigma_f^2} \frac{\partial \delta(t, a)}{\partial a} = T_s^* \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

なる関係が得られ、これより T_s と T_s^* は注目しているのが進展前のき裂端における変化であるか進展後のき裂端における変化であるかの違いはあるが等しい値を示すことになる。一般的には両者は等しくならないが採用するモデルあるいは δ の定義の仕方に依存して定まる係数を介して1対1対応が成り立つものと考えられる。

3.4 T_w クライテリオン 大規模降伏において大規模なき裂進展に対しても適用可能なクライテリオンとして、き裂進展に対するき裂先端近傍の塑性仕事増分に注目した T_w クライテリオンが坂らにより提案されており⁽⁵⁾、その安定・不安定の条件は次のように与えられている。

$$T_{w,ap} \geq T_{wc} \text{ (不安定)}, T_{w,ap} < T_{wc} \text{ (安定)} \dots\dots\dots (36)$$

ただし、 $\bar{W}_P(t, X_1)$ を図9に示すような場所 X_1 を中心とする半径 R の閉領域内の時刻 t における塑性ひずみエネルギーとして T_w は次式で与えられるものである。

$$T_w = \frac{E}{\sigma_f^2} \frac{1}{R} \lim_{\Delta a(\Delta t) \rightarrow 0} \frac{\bar{W}_P(t + \Delta t, a) - \bar{W}_P(t, a)}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} \dots\dots\dots (37)$$

T_s 同様 Dugdale モデルにおいて考え、閉領域として図 2 に示すような ΔV , R として ΔX_1 を採用し、分布 $\sigma^* = \sigma_f$ として、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta X_1 \rightarrow 0} T_w &= \frac{E}{\sigma_f^2} \lim_{\Delta X_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta X_1} \lim_{\Delta a(\Delta t) \rightarrow 0} \int_{\Delta X_1} \frac{\sigma_f \{\delta(t + \Delta t, a) - \delta(t, a)\}}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} dX_1 \\ &= \frac{E}{\sigma_f^2} \lim_{\Delta a(\Delta t) \rightarrow 0} \frac{\sigma_f \{\delta(t + \Delta t, a + \Delta a) - \delta(t, a + \Delta a)\}}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta a} = \frac{E}{\sigma_f^2} \frac{\partial \varepsilon(t, a)}{\partial a} = T_s^* \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

となる。この結果をふまえる時、一般に T_w はき裂先端を囲む有限な大きさの領域を考え、 T_s^* はき裂先端に注目しているという違いはあるが、両者は概念的には同一のものとして位置づけできるものと考えられる。

4. 結 言

き裂進展挙動の安定・不安定に関する $T_s(T_s^*)$ クライテリオンなるものを新たに提案し、従来のクライテリオンとの関係を明らかにすることにより、従来のき裂の安定・不安定問題における疑問点あるいは問題点が解消でき種々のクライテリオンが統一的に解釈できることを示した。

文 献

- (1) 例えば, Bluhm, I. I., *Fracture*, (Liebowitz, H. 編), 5 (1981), 1.
- (2) Paris, P. C., ほか 3 名, *ASTM STP*, 668 (1979), 5.
- (3) Hutchinson, I. W., ほか, *ASTM STP*, 668 (1979), 37.
- (4) Shih, C. F., ほか 2 名, *ASTM STP*, 668 (1979), 65.
- (5) 坂, ほか 3 名, 機論, 47-424, A (昭 56), 1301.
- (6) 渡辺, 機論, 47-416, A (昭 55), 406.
- (7) 渡辺, 機論, 48-433, A (昭 57), 1226.
- (8) Rice, J. R., ほか 2 名, *ASTM STP*, 536 (1973), 231.
- (9) Begley, J. A., ほか 1 名, *ASTM STP*, 514 (1972), 1.
- (10) 渡辺・番, 機論, No. 840-1 (昭 59-4), 190.
- (11) 渡辺, 機論, 50-453, A (昭 59), 894.