

成長ひずみ法による平等強さ形状の解析* (定常振動問題への適用)

畔上 秀幸*¹, 荻原 忠*², 高見 昭康*³

Analysis of Uniform-Strength Shape by the Growth-Strain Method (Application to the Problems of Steady-State Vibration)

Hideyuki AZEGAMI, Tadashi OGIHARA, and Akiyasu TAKAMI

The present report describes an application of the method (growth-strain method) previously proposed for analysis of uniform-strength shape with the finite-element method to the problems of steady-state vibration, especially free vibration with a normal-mode shape and response to a harmonic excitation. A difference in the implementation of the method for these vibration problems from the method for static problems is to analyze growth-measure (strength-parameter) distribution on the deformation with normal mode or amplitude of a response. Numerical experiments are made on simple beam structures. In the case of normal-mode vibration, monotonous convergence is constantly observed. On the harmonic response problem, while the natural frequencies do not vary monotonously, the maximum value of the strength parameter, the mass and deflection at the excitation point converge monotonously.

Key Words: Optimum Design, Computer-Aided Design, Eigenvalue Problem, Mode of Vibration, Finite-Element Method

1. はじめに

前報⁽¹⁾において平等強さの形状を解析するための有限要素法を用いたはん用的な方法(成長ひずみ法)を提案し,それを基礎的な静的弾性問題に適用した場合の有効性を確認した。

本報の焦点は,この方法を定常振動(特に正規モードでの自由振動と調和振動に対する定常振動)問題に適用した場合にもこの方法が有効に機能するかという点である。

なお,本報では平等強さ形状の解析に注目することにして,これまで報告されている固有振動数や重量を目的関数においた最適形状解析⁽²⁾⁻⁽¹²⁾に対応した成長ひずみ法は別に論ずる予定である。

2. 成長ひずみ法

前報⁽¹⁾で提案した方法を簡潔に示す。

2・1 成長則 体積ひずみを発生させることによ

って形状を修正することを考える。なお,このときに生じる応力とひずみは,外力に対して発生する通常の応力,ひずみと区別するために,成長応力,成長ひずみと呼ぶことにする。

この体積ひずみは次のように発生するものと仮定する。強度を平等化するには,強度のパラメータ(例えば相当応力や最大主応力)を均一化すればよい。そこで平等強さ形状の解析では,強度パラメータを成長の指標(体積ひずみの発生基準)と仮定する。強度のパラメータは,一般に体積が増加したとき減少する特性をもつ。したがって,体積ひずみテンソル ε_{ij}^g は,強度パラメータの大きさ σ の,その基準値 σ_0 に対する偏差 $\sigma - \sigma_0$ に比例して発生するものと仮定する:

$$\varepsilon_{ij}^g = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} h \delta_{ij}, \dots\dots\dots (1)$$

ただし, δ_{ij} はKroneckerのデルタ, h は体積ひずみの大きさを決める定数で成長比と呼ぶ。

体積ひずみの発生によって生じる成長応力テンソル σ_{ij}^g と成長ひずみテンソル ε_{ij}^g の関係はHooke則に従うものと仮定する:

$$\sigma_{ij}^g = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^g = D_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^e - \varepsilon_{kl}^g), \dots\dots\dots (2)$$

ただし D_{ijkl} は弾性の剛性テンソル, ε_{kl}^e は体積ひずみが発生したときの成長ひずみテンソルの弾性成分であ

* 原稿受付 平成元年8月24日。

*¹ 正員, 豊橋技術科学大学工学部(☎440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

*² 正員, 鈴木自動車工業(株)(☎432-911 静岡県浜名郡可美村高塚300)。

*³ 学生員, 豊橋技術科学大学大学院。

る。なおここでは総和規約が用いられている。

2.2 解析手順 成長ひずみ法の解析手順は基本的に図1に示す二つの解析ステップを有限要素法によって繰返すというものである。

ステップ1(指標解析)は、形状の入力に対して、与えられた力学的環境下で成長の指標(measure)の分布を解析し、出力するステップである。ここで力学的な条件や解析方法に特別の制約はない。

ステップ2(成長解析)は、ステップ1で評価された成長の指標分布を入力して、式(1)に基づいて発生した体積ひずみによる変形を式(2)の関係に基づいて解析し、形状を出力するステップである。境界条件は形状変形に対する設計の制約条件から設定される。なお成長比 h の大きさは、成長変形解析を微小変形理論の範囲内で行う場合にはそれを逸脱しない大きさにとる必要がある。

収束判定はステップ1の後で行うのが適当である。また有限要素メッシュの大きさに偏りが生じた場合にはステップ2の後でメッシュの改善を行う必要がある。

2.3 成長の数値解法 ステップ2は、初期応力を用いた有限要素法によって解析される。

有限要素法の標準的な手続きに従えば、要素内 x_i における成長変位ベクトル $\{u^c(x_i)\}$ とひずみベクトル $\{\epsilon^c(x_i)\}$ は、要素節点の成長変位ベクトル $\{u^g\}$ によって表すことができる：

$$\{u^c(x_i)\} = [N(x_i)]\{u^g\}, \dots\dots\dots(3)$$

$$\{\epsilon^c(x_i)\} = [B(x_i)]\{u^g\}, \dots\dots\dots(4)$$

ただし、 $[N(x_i)]$ は形状関数マトリックス、 $[B(x_i)]$ はひずみ-節点変位マトリックスである。成長応力ベクトル $\{\sigma^c(x_i)\}$ は、これらの式を式(2)のベクトル表示した関係に代入することによって得られる：

$$\{\sigma^c(x_i)\} = [D][B(x_i)]\{u^g\} - [D]\{\epsilon^B(x_i)\}. \quad (5)$$

成長変形に対する仮想仕事の原理は、次のように与えられる。

$$\int_{V^e} \delta\{\epsilon^c(x_i)\}^T \{\sigma^c(x_i)\} dV = 0, \quad \dots\dots\dots(6)$$

ただし、 $\delta\{\epsilon^c(x_i)\}$ は設計の境界条件を満たす仮想成長変位による仮想成長ひずみベクトル、 V^e は有限要素の体積である。なお上付きの T は転置を表す。要素の支配方程式は、式(4)と式(5)を式(6)に代入することによって得られる：

$$[k]\{u^g\} = \{g\}, \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、

$$[k] = \int_{V^e} [B(x_i)]^T [D] [B(x_i)] dV, \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\{g\} = \int_{V^e} [B(x_i)]^T [D] \{\epsilon^B(x_i)\} dV, \quad \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 $[k]$ は通常の要素剛性マトリックス、 $\{g\}$ は体積ひずみによって発生した等価節点力ベクトルである。全体の支配方程式は、式(7)の要素支配方程式をすべての要素について重ね合わせることによって得られる。

解析方法をまとめると、ステップ1で評価された強度パラメータ分布 $\sigma(x_i)$ に基づいて式(1)によって体積ひずみ $\{\epsilon^B(x_i)\}$ を求め、それを式(9)によって各要素の等価節点力に変換する。最後は全体の等価節点力を既知として全体の支配方程式を解くことによって全

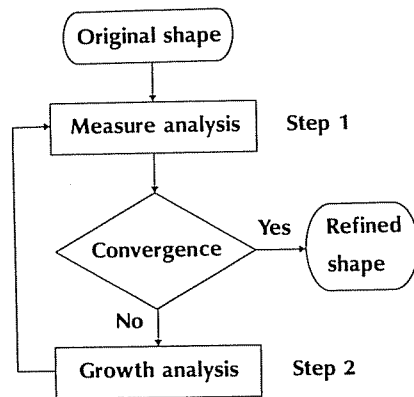
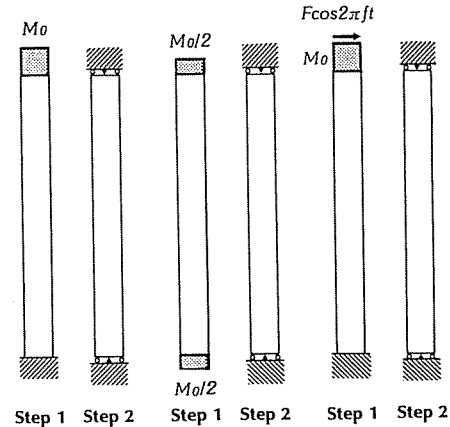


図1 成長ひずみ法



- (a) ケース1：正規モードで自由振動する片持ばり
- (b) ケース2：正規モードで自由振動する自由支持ばり
- (c) ケース3：先端で周波数の調力を受ける片持ばり

(幅=6m, 長さ60m, 非構造質量 M_0 =初期のはり質量, $f=500$ Hz, 調力振幅 $F=6$ MN/m; ヤング率 $E=210$ GPa, ポアソン比 $\nu=0.3$, 密度 $\rho=7.8 \times 10^3$ kg/m³)

図2 問題設定

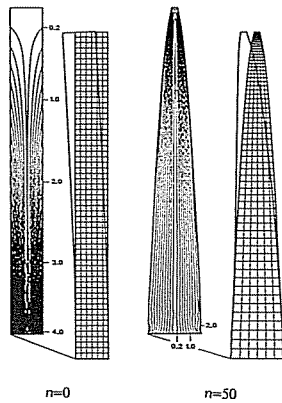
体節点の成長変位 $\{u^e\}$ が計算される。

3. 定常振動問題への適用

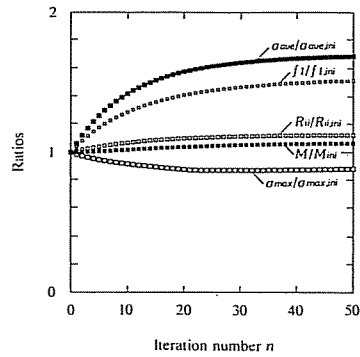
定常振動の代表的な問題は、各正規モードでの自由振動と調和加振に対する定常振動であろう。これらの問題の特徴は、時間に依存しない唯一の極大変形状態が存在し、形状が連続的に変化した場合にもその変形が唯一極大を保ちながら連続的に変化するところである。したがって、最大振幅のときの強度パラメータを解析し、その結果に基づいて成長解析を行えば、強度は連続的に平等化することが予想される。

基本的な問題を3題取り上げた。図2にそれらの詳細を示す。ケース1, 2は、正規モードで自由振動している場合であり、先端に非構造質量のある片持ばりがケース1, 両端に非構造質量のある自由支持ばりがケース2である。またケース3は、ケース1の片持ばりが先端で調和励振されている場合である。いずれも平面応力状態を仮定した。なお先端の非構造質量と外力は均一に分布し、成長後もそれらの積分値は一定であると仮定した。

使用した要素は8節点アイソパラメトリック要素である。強度パラメータは相当応力、その基準値は体積

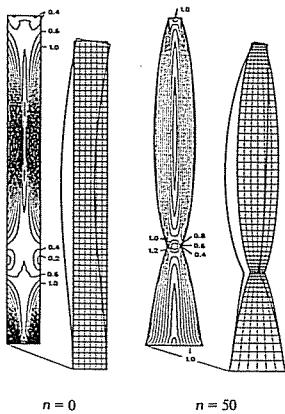


(a) 要素分割, モード形状, 体積平均で規準化された相当応力の等高線

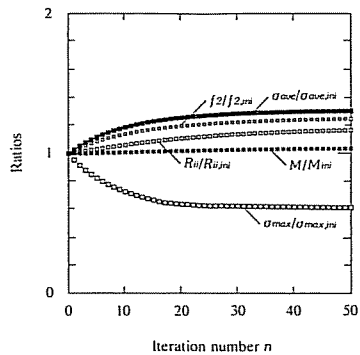


(b) 初期値に対する収束比: ガウス点における相当応力の最大値 σ_{max} , 相当応力の体積平均 σ_{ave} , 質量 M , r 次の固有振動数 f_r , 先端中央の自己留数 R_{ii}

図3 解析結果: ケース1 (一次モード)



(a) 要素分割, モード形状, 体積平均で規準化された相当応力の等高線



(b) 初期値に対する収束比: ガウス点における相当応力の最大値 σ_{max} , 相当応力の体積平均 σ_{ave} , 質量 M , r 次の固有振動数 f_r , 先端中央の自己留数 R_{ii}

図4 解析結果: ケース1 (二次モード)

平均とした。成長比は5%に固定した。また成長変形後、メッシュの改善を行った。すべての場合に、内部の節点を移動して、幅方向に等間隔となるように改善した。さらにケース3の場合だけ、縦方向の周囲の節点を移動して、周囲上等間隔にしてから内部の節点を移動した。その効果は後に示すケース1とケース3の固定端両わきの形状結果の違いに現れている。

解析に用いた関係式を記しておく。有限要素法の手続きに従って $N \times N$ の質量マトリックス $[M]$ と剛性マトリックス $[K]$ が得られれば、減衰を無視して r 次のモード対である固有角周波数 Ω_r と正規モードベクトル $\{\phi_r\}$ は固有値解析によって次の関係を満たす

ものとして得られる。

$$(-\Omega_r^2[M] + [K])\{\phi_r\} = \{0\}, \dots\dots\dots(10)$$

$$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\} = \delta_{ij} \dots\dots\dots(11)$$

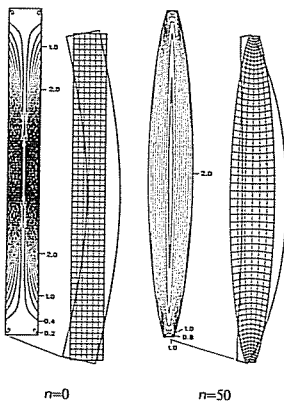
調和励振力(振幅ベクトル $\{F\}$) に対する変位振幅ベクトル $\{U\}$ は1次から n 次までのモード対を使って次の関係によって近似的に計算される。

$$\{U\} = \sum_{r=1}^n \frac{[R]}{\Omega_r^2 - \omega^2} \{F\}, \dots\dots\dots(12)$$

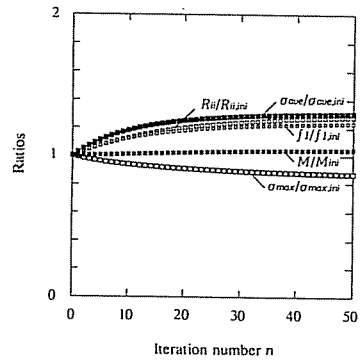
$$[R] = \{\phi_r\}\{\phi_r\}^T, \dots\dots\dots(13)$$

ただし、 ω は励振角周波数、 $[R]$ は留数マトリックスである。

ケース1の解析結果を図3と図4に、ケース2の解

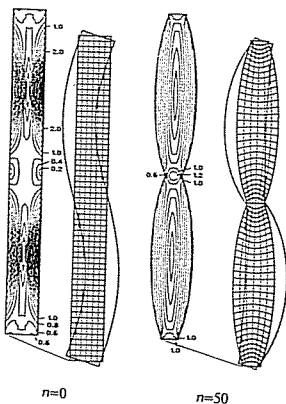


(a) 要素分割, モード形状, 体積平均で規準化された相当応力の等高線

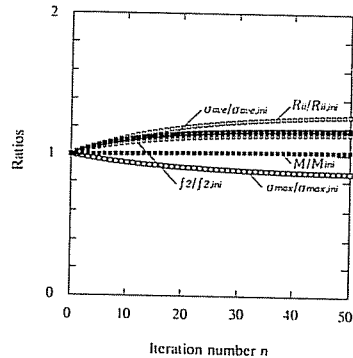


(b) 初期値に対する収束比: ガウス点における相当応力の最大値 σ_{max} , 相当応力の体積平均 σ_{ave} , 質量 M , r 次の固有振動数 f_r , 先端中央の自己留数 R_{ii}

図5 解析結果: ケース2 (一次モード)



(a) 要素分割, モード形状, 体積平均で規準化された相当応力の等高線

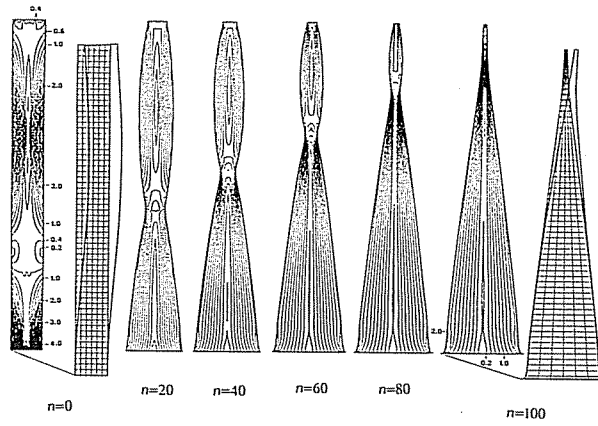


(b) 初期値に対する収束比: ガウス点における相当応力の最大値 σ_{max} , 相当応力の体積平均 σ_{ave} , 質量 M , r 次の固有振動数 f_r , 先端中央の自己留数 R_{ii}

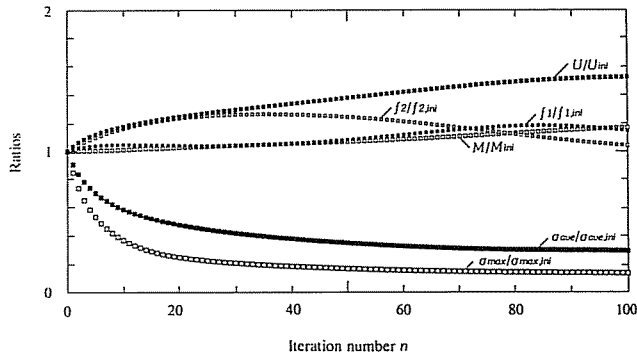
図6 解析結果: ケース2 (二次モード)

析結果を図5と図6に示す。それぞれ図3と図4が一次モード、図4と6が二次モードの結果である。いずれの場合も質量は、基準応力を相当応力の体積平均に

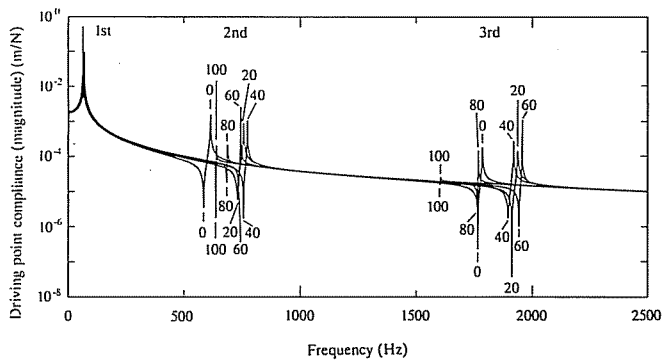
とっていることからほぼ一定で推移する。相当応力の体積平均が増加して最大値が減少する傾向は、強度が平等化していることを表している。また固有振動数は



(a) 要素分割, 変位振幅形状, 体積平均で規準化された相当応力の等高線



(b) 初期値に対する収束比: ガウス点における相当応力の最大値 σ_{max} , 相当応力の体積平均 σ_{ave} , 質量 M , r 次の固有振動数 f_r , 先端中央の変位振幅 U



(c) 先端中央の自己伝達関数(コンプライアンスの絶対値)

図7 解析結果: ケース3

最大化する傾向を示した。

調和励振の場合の結果を図7に示す。なお、変位振幅は一次から五次(四次の縦振動を含む)までのモード対を用いて計算された。この問題の特徴は、形状の変化に伴って固有振動数が増加し、それによって変位振幅に対する各モードの寄与率が変化することである。したがって、形状や固有振動数の変化は単調ではない。しかし相当応力の体積平均や最大値、質量それに先端中央の変位振幅は単調に収束する傾向を示している。強度を決定する相当応力の最大値は成長前の値の13%に減少した。

4. ま と め

前報⁽¹⁾で提案した平等強さ形状の解析法を定常振動

に適用した場合の有効性を確認した。

文 献

- (1) 畔上, 機論, 54-508, A(1988), 2167.
- (2) Niordson, F. L., *Q Appl. Math.*, 23-1(1965), 47.
- (3) Turner, M. J., *AIAA J.*, 5-3(1967), 406.
- (4) Taylor, J. E., *AIAA J.*, 5-10(1967), 1911.
- (5) Bratch, R. M., *Int. J. Solids Structures.*, 4-2(1968), 667.
- (6) Fox, R. L. and Kapoor, M. P., *AIAA J.*, 8-10(1970), 1798.
- (7) Olhoff, N., *Int. J. Solids Structures.*, 10(1974), 93.
- (8) 山川・奥村, 機論, 42-356(1976), 1109.
- (9) 山川・奥村, 機論, 42-359(1976), 2050.
- (10) 山川・奥村, 機論, 42-359(1976), 2060.
- (11) 山川・甘利・川島・国広, 機論, 43-372(1977), 2931.
- (12) 浜田・瀬口・多田, 機論, 46-402, A(1980), 187.