

指数ウィンドウを用いたモードパラメータ同定法の提案*

畔上秀幸*¹, 沖津昭慶*¹, 備前和之*²A Proposal of Identification Method of Modal Parameters
by Using an Exponential Window

Hideyuki AZEGAMI, Akiyoshi OKITSU, and Kazuyuki BIZEN

A new identification method of modal parameters by using an exponential window is proposed as a single-degree-of-freedom method. The method is superior in simplicity to any other method in the case of a discrete transfer function such as when using a FFT analyzer. Using the method, the modal parameters of natural frequency and modal damping ratio are identified with a complex ratio of the transfer function obtained from the unit impulse response multiplied by an exponential window to the normal transfer function at an only point near resonance. The present method and former method are compared through the results identified from experimental results on a simple bar.

Key Words: Vibration, Modal Analysis, Single-Degree-of-Freedom Method, Exponential Window, FFT Analyzer

1. 序 論

振動の数学的モデルから定義されるモードパラメータ(固有振動数, モード減衰比, 固有モード)を実験結果から同定する実験モード解析は, 振動計測技術とデータ処理技術の向上とあいまって近年急速に発展し, 多くのはん用システムが開発されてきた⁽¹⁾。そこで使われている同定手法を分類すると, 伝達関数の共振峰が明確な場合に適用可能な一自由度法(SDOF: single degree of freedom method)とより一般的な多自由度法(MDOF: multi degrees of freedom method)に大別され, さらに後者は, 一つの伝達関数だけを用いる単点参照のほか多点参照(multi-reference), 多点励振(multi-excitation)といった分類もなされている⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。このように, 同定手法も多様化してきたが, 現場では精度だけでなく簡便さも要求されることを考え, また, 初期値を必要とする偏分反復法⁽⁴⁾などの多自由度法において一自由度法をプレプロセスとして使用していることなど相互の補足関係も考え合

せると, 多自由度法の研究だけでなく一自由度法の研究も怠ってはならないと思われる。

本研究は, この一自由度法について行われたものであり, 伝達関数が離散的で周波数分解能が悪い場合でも従来の方法よりも精度のよい同定が行える方法を提案する。従来の方法は, 伝達関数の振幅が最大振幅をはさんで等しくなるときの角振動数の差あるいは実部および虚部が最大あるいは最小になるときの角振動数, 位相の角振動数に対する微分の最大値などを必要としており⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾, FFTアナライザを使用して得られた伝達関数のように離散的で周波数分解能が悪い場合には同定困難であった。それに対して, 新しい方法は, 最近のFFTアナライザには通常備わっている指数ウィンドウを単位インパルス応答にかけた場合の伝達関数とかけない場合の伝達関数の複素数の比からモードパラメータを同定しようとするものであり, その特徴は, 伝達関数が離散的で共振周波数付近に一つしか測定点がない場合でも同定可能な点である。

本論文では, 最初に, 指数ウィンドウの定義と, それを一般粘性減衰と一般ヒステリシス減衰を仮定した振動モデルの単位インパルス応答に使用した場合の伝達関数に与える効果を明示し, 続いてそれを用いて指数ウィンドウを用いたモードパラメータ同定法を提案

* 昭和63年7月15日 東海支部浜松地方講演会において講演, 原稿受付 昭和62年10月23日。

¹ 正員, 豊橋技術科学大学工学部 (〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

² 豊橋技術科学大学大学院。

し、最後に実験結果を用いた同定結果により、提案した方法と従来の方法の比較検討を行う。

2. 指数ウィンドウとその効果

ここでは、指数ウィンドウの定義を与え、それを振動モデルの単位インパルス応答に使用した場合の伝達関数に与える効果を示す。

2・1 指数ウィンドウの定義 指数ウィンドウは、インパルス応答のノイズの影響を減少させる目的で使用されるウィンドウで、次のような指数関数形の重み関数 $w(t)$ である。

$$w(t) = e^{-at} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 t はインパルス入力時からの時間であり、 a はこのウィンドウの強さを示す実定数である。通常のFFTアナライザでは観測時間 T における $w(t)$ の値 $w(T)$ でウィンドウの強さを設定するのでその場合の a の値は次のように与えられることになる。

$$a = -\frac{\ln w(T)}{T} \dots\dots\dots (2)$$

2・2 指数ウィンドウを使用した場合の伝達関数

この指数ウィンドウを単位インパルス応答に使用した場合、伝達関数は次のように変化する。ここでは一般粘性減衰と一般ヒステリシス減衰に分けて論ずる。

2・2・1 一般粘性減衰の場合 この場合の伝達関数をコンプライアンス ${}_vH(s)$ で表すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} {}_vH(s) &= \sum_{r=1}^N {}_vH_r(s) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{{}_vB_r}{s - {}_vs_r} + \frac{{}_vB_r^*}{s - {}_vs_r^*} \right) \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{{}_vA_r(s)}{(s - {}_vs_r)(s - {}_vs_r^*)} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ただし、角振動数 ω と $j = \sqrt{-1}$ を用いて

$$\begin{aligned} s &= j\omega, \\ {}_vs_r &= -{}_v\sigma_r + j{}_v\omega_{dr} \\ &= -{}_v\Omega_r({}_v\zeta_r - j\sqrt{1 - {}_v\zeta_r^2}), \\ {}_vA_r(s) &= {}_vR_r + j{}_vI_r\omega \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

である。ここで、右上付きの*は複素共役を示す。なお、 $H_r(s)$, s_r , σ_r , ω_{dr} , Ω_r , ζ_r , B_r はそれぞれ r 次モードの伝達関数、極 (pole)、モード減衰率、減衰固有角振動数、固有角振動数 (一般に非減衰固有角振動数とは異なる)、モード減衰比、留数 (residue) を示し、左下付きの v は粘性減衰を仮定した場合の値であることを示す。また、振動モデルが n 個の剛体モードを含む場合は、 $r=1 \sim n$ を剛体モードとして $s_r=0$ と考える。このような表示を用いると、単位インパルス変位応答 ${}_v h(t)$ 、速度応答 ${}_v \dot{h}(t)$ 、加速度応答 ${}_v \ddot{h}(t)$ はそれぞれ次のように表せる。

$${}_v h(t) = \sum_{r=1}^N ({}_vB_r e^{s_r t} + {}_vB_r^* e^{S_r^* t}) u(t) \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} {}_v \dot{h}(t) &= \sum_{r=1}^N \{ ({}_vB_r s_r e^{s_r t} + {}_vB_r^* s_r^* e^{S_r^* t}) u(t) \\ &\quad + ({}_vB_r + {}_vB_r^*) \delta(t) \} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_v \ddot{h}(t) &= \sum_{r=1}^N \{ ({}_vB_r s_r^2 e^{s_r t} + {}_vB_r^* s_r^{*2} e^{S_r^* t}) u(t) \\ &\quad + ({}_vB_r s_r + {}_vB_r^* s_r^*) \delta(t) \\ &\quad + ({}_vB_r + {}_vB_r^*) \dot{\delta}(t) \} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ただし、 $u(t)$, $\delta(t)$ はそれぞれ単位ステップ関数、デルタ関数であり、 $(\dot{\quad})$ は時間微分を表す。

上の表示を用いて、変位応答に式(1)の指数ウィンドウをかけた場合を考える。この場合の変位応答 $\{ {}_v h(t) \}_w$ は、

$$\begin{aligned} \{ {}_v h(t) \}_w &= {}_v h(t) w(t) \\ &= \sum_{r=1}^N ({}_vB_r e^{(s_r - a)t} + {}_vB_r^* e^{(s_r^* - a)t}) u(t) \dots (8) \end{aligned}$$

で与えられ、この場合のコンプライアンス $\{ {}_v H(s) \}_w$ は、 $\{ {}_v h(t) \}_w$ をフーリエ変換することにより、

$$\{ {}_v H(s) \}_w = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{{}_vB_r}{s - ({}_vs_r - a)} + \frac{{}_vB_r^*}{s - ({}_vs_r^* - a)} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。したがって、変位応答に指数ウィンドウをかけた場合の伝達関数は ${}_vs_r$ が ${}_vs_r - a$ あるいはモード減衰率 ${}_v\sigma_r$ が ${}_v\sigma_r + a$ に置き換えられていることになる。

一方、実際の振動計測では加速度応答からアクセルランスを直接求めることが多いが、加速度応答に指数ウィンドウを用いた場合も、 $1 \gg {}_v\zeta_r$ のときに変位応答の場合と同一になる。指数ウィンドウをかけた加速度 $\{ {}_v \ddot{h}(t) \}_w$ は、

$$\begin{aligned} \{ {}_v \ddot{h}(t) \}_w &= {}_v \ddot{h}(t) w(t) \\ &= \sum_{r=1}^N \{ ({}_vB_r s_r^2 e^{(s_r - a)t} + {}_vB_r^* s_r^{*2} e^{(S_r^* - a)t}) u(t) \\ &\quad + ({}_vB_r s_r + {}_vB_r^* s_r^*) \delta(t) \\ &\quad + ({}_vB_r + {}_vB_r^*) \dot{\delta}(t) \} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

で与えられ、この場合のアクセルランス $\{ s_r^2 H(s) \}_w$ は、 $\{ {}_v \ddot{h}(t) \}_w$ をフーリエ変換することにより、

$$\begin{aligned} \{ s_r^2 H(s) \}_w &= \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{s_r^2 B_r}{s - ({}_vs_r - a)} \left(1 + a \frac{{}_vs_r + s}{s^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^2 B_r^*}{s - ({}_vs_r^* - a)} \left(1 + a \frac{{}_vs_r^* + s}{s^2} \right) \right\} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $|a({}_vs_r + s)/s^2| \neq 0$ であるために変位応答の場合と異なるが、 $1 \gg {}_v\zeta_r$ でウィンドウの強さ a を

$$a \approx {}_v\sigma_r = {}_v\Omega_r \zeta_r \dots\dots\dots (12)$$

のように決めたととき $s = j {}_v\Omega_r$ の近傍で $1 \gg |a({}_vs_r + s)|$

s^2 となることから、加速度応答に指数ウィンドウをかけた場合の伝達関数も近似的に $v s_r$ が $v s_r - a$ あるいはモード減衰率 $v \sigma_r$ が $v \sigma_r + a$ に置き換えられていることになる。実際、

$$\begin{aligned} s &= j\omega \doteq j v \Omega_r, \\ v s_r &= -v \sigma_r + j v \omega_{dr} \\ &= -v \Omega_r (v \zeta_r - j \sqrt{1 - v \zeta_r^2}) \\ &\doteq j v \Omega_r \end{aligned} \quad (13)$$

であり、式(12)を考慮して次のようになる。

$$\left| a \frac{v s_r + s}{s^2} \right| \doteq 2 v \zeta_r \quad (14)$$

2・2・2 一般ヒステリシス減衰の場合 この場合の伝達関数をコンプライアンス ${}_h H(s)$ で表すと、次式のようになる。

$${}_h H(s) = \sum_{r=1}^N {}_h H_r(s) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_h A_r(s/j)}{s^2 - {}_h s_r (s/j)^2} \quad (15)$$

ただし、

$$\begin{aligned} {}_h s_r (s/j) &= j {}_h \Omega_r \sqrt{1 + j \operatorname{sgn}(\omega) 2 {}_h \zeta_r} \\ &= j {}_h \Omega_r \left\{ 1 + j \operatorname{sgn}(\omega) {}_h \zeta_r + \frac{1}{4} {}_h \zeta_r^2 + O({}_h \zeta_r^3) \right\} \\ &\doteq -\operatorname{sgn}(\omega) {}_h \Omega_r {}_h \zeta_r + j {}_h \Omega_r \\ &= -\operatorname{sgn}(\omega) {}_h \sigma_r + j {}_h \Omega_r, \\ {}_h A_r(s/j) &= {}_h R_r + j \operatorname{sgn}(\omega) {}_h I_r \\ \operatorname{sgn}(\omega) &= 2u(\omega) - 1 \end{aligned} \quad (16)$$

である。また、 $O({}_h \zeta_r^3)$ は ${}_h \zeta_r$ に関する三次以上の項の和を示し、式中の \doteq は $1 \gg {}_h \zeta_r^2$ を仮定している。それぞれの値に付された左下の h はヒステリシス減衰を仮定したときの値であることを示す。ここで、この ${}_h H(s)$ の実部と虚部はそれぞれ ω に関して偶関数と奇関数となっており、 ${}_h H(s)$ の逆フーリエ変換は実時間関数になるようであるが、実部と虚部がヒルベルト変換の関係になっていないことから因果性実時間関数になる保証はない。また、その実時間関数の表示式は得られていない。したがって、式(13)の ${}_h H(s)$ の代わりに次に示す ${}_h H(s)'$ を用いることが行われている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

$${}_h H(s)' = \sum_{r=1}^N \frac{{}_h A_r'}{s^2 - {}_h s_r'^2} \quad (17)$$

ただし、

$$\begin{aligned} {}_h s_r' &= j {}_h \Omega_r \sqrt{1 + j 2 {}_h \zeta_r} \doteq -{}_h \sigma_r + j {}_h \Omega_r, \\ {}_h A_r' &= {}_h R_r + j {}_h I_r \end{aligned} \quad (18)$$

である。この ${}_h H(s)'$ の逆フーリエ変換は、 t に関する複素関数となるが、これを便宜的にヒステリシス減衰の場合の単位インパルス変位応答と呼ぶことにすると、その変位応答 ${}_h \dot{h}(t)'$ 、速度応答 ${}_h \dot{h}(t)$ 、加速度応

答 ${}_h \ddot{h}(t)$ は、それぞれ次のように表せる。

$${}_h \dot{h}(t)' = \sum_{r=1}^N \frac{{}_h A_r'}{2 {}_h s_r'} e^{{}_h s_r' t} \quad (19)$$

$${}_h \dot{h}(t) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_h A_r'}{2} \operatorname{sgn}(t) e^{{}_h s_r' t} \quad (20)$$

$${}_h \ddot{h}(t)' = \sum_{r=1}^N \frac{{}_h A_r'}{2} \{ {}_h s_r' e^{{}_h s_r' t} - 2\delta(t) \} \quad (21)$$

ここで、上の速度応答に指数ウィンドウをかけた場合を考える。ただし、この場合の指数ウィンドウは、 $w'(t) = e^{-a|t|}$

であるとする。この場合の速度応答 $\{ {}_h \dot{h}(t) \}'_w$ は、 $\{ {}_h \dot{h}(t) \}'_w = {}_h \dot{h}(t)' w'(t)$

$$= \sum_{r=1}^N \frac{{}_h A_r'}{2} \operatorname{sgn}(t) e^{({}_h s_r' - a)|t|} \quad (23)$$

で与えられ、この場合のモビリティ $\{ s {}_h H(s) \}'_w$ は、 $\{ {}_h \dot{h}(t) \}'_w$ をフーリエ変換することにより、

$$\{ s {}_h H(s) \}'_w = \sum_{r=1}^N \frac{s {}_h A_r'}{s^2 - ({}_h s_r' - a)^2} \quad (24)$$

で与えられる。したがって、速度応答に指数ウィンドウをかけた場合の伝達関数は ${}_h s_r'$ が ${}_h s_r' - a$ あるいは $1 \gg {}_h \zeta_r$ のときにはモード減衰率 ${}_h \sigma_r$ が ${}_h \sigma_r + a$ に置き換えられていることになる。

一方、式(22)の指数ウィンドウをかけた加速度応答 $\{ {}_h \ddot{h}(t) \}'_w$ は、

$$\begin{aligned} \{ {}_h \ddot{h}(t) \}'_w &= {}_h \ddot{h}(t)' w'(t) \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{{}_h A_r'}{2} \{ {}_h s_r' e^{({}_h s_r' - a)|t|} - 2\delta(t) \} \end{aligned} \quad (25)$$

で与えられ、この場合のアクセラランス $\{ s^2 {}_h H(s) \}'_w$ は、 $\{ {}_h \ddot{h}(t) \}'_w$ をフーリエ変換することにより、

$$\{ s^2 {}_h H(s) \}'_w = \sum_{r=1}^N \frac{s^2 {}_h A_r'}{s^2 - ({}_h s_r' - a)^2} \left(1 - a \frac{2 {}_h s_r' - a}{s^2} \right) \quad (26)$$

で与えられる。ここで、 $|a(2 {}_h s_r' - a)/s^2| \neq 0$ であるために速度応答の場合と異なるが、 $1 \gg {}_h \zeta_r$ で式(12)と同様の条件

$$a \doteq {}_h \sigma_r = {}_h \Omega_r {}_h \zeta_r \quad (27)$$

が満たされているとき $s = j {}_h \Omega_r$ の近傍で $1 \gg |a(2 {}_h s_r' - a)/s^2|$ となることから、加速度応答に指数ウィンドウをかけた場合の伝達関数も変位応答の場合と同様に ${}_h s_r'$ が ${}_h s_r' - a$ あるいはモード減衰率、 ${}_h \sigma_r$ が ${}_h \sigma_r + a$ に置き換えられていることになる。実際、

$$\begin{aligned} s &= j\omega \doteq j {}_h \Omega_r, \\ {}_h s_r' &\doteq -{}_h \Omega_r {}_h \zeta_r + j {}_h \Omega_r \doteq j {}_h \Omega_r \end{aligned} \quad (28)$$

であり、式(27)を考慮して次のようになる。

$$\left| a \frac{h s_r^2 + a}{s^2} \right| \doteq 2 h \zeta_r \dots\dots\dots (29)$$

3. モード減衰比同定法の提案

ここでは、2章で示した関係に基づいて、指数ウィンドウを用いたモードパラメータの同定法を提案する。ここでも一般粘性減衰と一般ヒステリシス減衰に分けて論ずる。なお、ここからは一自由度法の適用範囲に限定し、伝達関数 $H(j\omega)$ は2章で定義した $H_r(j\omega)$ [$vH_r(j\omega)$ と $hH_r(j\omega)$ の総称] を用いて

$$H(j\omega) \doteq H_r(j\omega) + H_{r0} \quad (\omega \doteq \Omega_r) \dots\dots\dots (30)$$

であると仮定する。ただし、 H_{r0} は vH_{r0} と hH_{r0} の総称で剰余複素定数である。

3.1 一般粘性減衰の場合 伝達関数は式(3)で与えられるが、その中で $1 \gg v \zeta_r$ のとき $vH_r(j\omega)$ を与える式の第2項は第1項と比較して十分小さくなる⁽⁴⁾ ことから、この場合の式(30)はさらに、

$$vH(j\omega) - vH_{r0} \doteq \frac{vB_r}{v\sigma_r + j(\omega - v\omega_{dr})} \dots\dots\dots (31)$$

と表せる。一方、指数ウィンドウをかけた場合は、2章の結果から式(31)に対して、

$$\{vH(j\omega)\}_w - (vH_{r0})_w \doteq \frac{vB_r}{v\sigma_r + a + j(\omega - v\omega_{dr})} \dots\dots\dots (32)$$

と表せる。ここで、 $vH(j\omega)$ と $\{vH(j\omega)\}_w$ は共振周波数付近の ω における伝達関数であり実験によって得ることができる。また、剰余定数 vH_{r0} と $(vH_{r0})_w$ は無視できない場合でも共振周波数から適当に離れた周波数における伝達関数から評価できる。したがって、式(31)と式(32)において未知数は $v\sigma_r$ 、 $v\omega_{dr}$ と vB_r であるが、式(31)と式(32)の比をとることによって vB_r は消去され、次の関係を得る。

$$\frac{\{vH(j\omega)\}_w - (vH_{r0})_w}{vH(j\omega) - vH_{r0}} = c + jd \doteq \frac{v\sigma_r + a + j(\omega - v\omega_{dr})}{v\sigma_r + j(\omega - v\omega_{dr})} \dots\dots\dots (33)$$

ただし、 c と d は上記の理由により ω を決めたときの左辺を表す実定数である。さらに、式(33)は、 $v\sigma_r$ 、 $v\omega_{dr}$ を未知数とする方程式であるが、実部と虚部の関係から、次のように解くことができる。

$$v\sigma_r \doteq \frac{(1-c)}{(1-c)^2 + d^2} a - a \dots\dots\dots (34)$$

$$v\omega_{dr} \doteq \omega - \frac{d}{(1-c)^2 + d^2} a \dots\dots\dots (35)$$

また、固有角振動数 $v\Omega_r$ とモード減衰比 $v\zeta_r$ はそれぞれ式(4)により次のように求めることができる。

$$v\Omega_r = \sqrt{v\sigma_r^2 + v\omega_{dr}^2} \dots\dots\dots (36)$$

$$v\zeta_r = v\sigma_r / v\Omega_r \dots\dots\dots (37)$$

したがって、次のようなモードパラメータ同定法を提案する。直接インパルス加振によってあるいはランダム加振によって得られた伝達関数を逆フーリエ変換することによって単位インパルス応答を求め、それに指数ウィンドウをかけた場合とかけない場合の伝達関数の共振周波数付近における比 $c + jd$ を求め、式(34)~(37)により固有振動数とモード減衰比を計算する。固有モードは、それらを式(31)に代入して留数 vB_r を求め、他の伝達関数から同様に得られた留数との比に基づいて計算できる⁽⁴⁾。なお、2章の結果から $1 \gg v \zeta_r$ のときには伝達関数としてモビリティやアクセルランスを用いてもよい。

3.2 一般ヒステリシス減衰の場合 伝達関数は式(17)で与えられるが、この場合の式(30)は、

$$hH(j\omega) - hH'_{r0} \doteq \frac{hA'_r}{h\Omega_r^2 - \omega^2 + j2h\Omega_r h\sigma_r} \dots\dots\dots (38)$$

と表せる。一方、指数ウィンドウをかけた場合は、2章の結果から $1 \gg h \zeta_r^2$ のとき、式(38)に対して、

$$\{hH(j\omega)\}_w - (hH'_{r0})_w \doteq \frac{hA'_r}{h\Omega_r^2 - \omega^2 - 2a h\sigma_r - a^2 + j2h\Omega_r(h\sigma_r + a)} \dots\dots\dots (39)$$

と表せる。式(38)と(39)において未知数は $h\sigma_r$ 、 $h\Omega_r$ と hA'_r であるが、(38)と式(39)の比をとることによって hA'_r は消去され、次の関係を得る。

$$\frac{\{hH(j\omega)\}_w - (hH'_{r0})_w}{hH(j\omega) - hH'_{r0}} = c' + jd' \doteq \frac{h\Omega_r^2 - \omega^2 + j2h\Omega_r h\sigma_r}{h\Omega_r^2 - \omega^2 - 2a h\sigma_r - a^2 + j2h\Omega_r(h\sigma_r + a)} \dots\dots\dots (40)$$

ただし、 c' と d' は左辺を表す実定数である。式(40)は、 $h\sigma_r$ と $h\Omega_r$ を未知数とする方程式であり、実部と虚部の二つの関係から解くことができるが、三次方程式となるために簡単ではない。そこで、式(27)の関係が成立しており、さらに、

$$\frac{h\Omega_r - \omega}{h\Omega_r} \gg h \zeta_r^2 \dots\dots\dots (41)$$

が成立しているとき、式(40)は、

$$\frac{\{hH(j\omega)\}_w - (hH'_{r0})_w}{hH(j\omega) - hH'_{r0}} = c' + jd' \doteq \frac{h\Omega_r^2 - \omega^2 + j2h\Omega_r h\sigma_r}{h\Omega_r^2 - \omega^2 + j2h\Omega_r(h\sigma_r + a)} \dots\dots\dots (42)$$

となり、 $h\sigma_r$ と $h\Omega_r$ について次のように解くことができる。

$$h\sigma_r \doteq \frac{(1-c')}{(1-c')^2 + d'^2} a - a \dots\dots\dots (43)$$

$$h\Omega_r \doteq \sqrt{\omega^2 - \frac{2d'h\Omega_r}{(1-c')^2 + d'^2} a}$$

$$\cong \omega - \frac{d'}{(1-c')^2 + d'^2} a \dots\dots\dots (44)$$

ただし、式(44)の二つめの \cong は $1 \gg (h_s \Omega_r - \omega) / h_s \Omega_r$ を仮定している。また、モード減衰比 $h_s \zeta_r$ はそれぞれ式(16)により次のように求めることができる。

$$h_s \zeta_r = h_s \sigma_r / h_s \Omega_r \dots\dots\dots (45)$$

したがって、一般ヒステリシスの場合も一般粘性減衰の場合と同様の方法でモードパラメータが同定できる。

4. 従来の方法との比較

ここでは、簡単なはりの振動実験を行って伝達関数を求め、その結果を用いて3章で提案した方法と従来の方法でモードパラメータを同定し、それらの結果の比較によって提案した方法の有効性について検討する。

4.1 実験 供試体はアクリル製で、形状寸法と加振・応答点を図1に示す。加振方法はインパルス加振とランダム加振の両方を試みた。なお、インパルス加振の場合は、加振力持続時間内のサンプリング点が五つ程度以上という条件と、逆にサンプリング間隔を狭くすると加振周波数域が測定周波数域に満たなくなってしまうことから、周波数レンジは2 kHzのみとし、ランダム加振の場合はそのような制約がないことから周波数レンジは500 Hz, 1, 2, 5 kHzの4種類とした。周波数分解能は周波数レンジの1/400である。また、図2は計測システムの構成を示す。このシステムの構成については、次のような注意がなされた。

(1) 供試体を上からひもでつり下げ、加振・応答方向を水平にして、測定自由度が支持系の影響を受けないようにした。

(2) 力計は直接供試体にねじ止めし、加振器との接続は横荷重に対して十分柔にした。

(3) 力計と加速度計の重量はそれぞれ23.3 gと1.4 gであり、供試体の重量2.4 kgに対して十分小さくなるようにした。

実験結果の一部を図3~5に示す。ここで、図3はインパルス加振によって得られた加速度応答とすべての加速度応答に使用した指数ウィンドウを示す。ただし、指数ウィンドウの強さ a は、弾性モードの三次までの同定を目指すことにして二次の同定結果について式(12)を満たすように、 $a=90/s$ とした。また、図4はインパルス加振の場合の加速度応答から指数ウィンドウを使用しないで得た伝達関数であり、図5はその加速度応答を指数ウィンドウを使用して得た伝達関数である。なお、図中に描かれている円は、共振周波数近傍の

データから最小二乗法 (LSM) により円適合 (circle fit) を行って得られたモード円である。

4.2 同定結果 4.1節の実験で得られたアクセラランスを用いて、一般粘性減衰を仮定したときの3章で提案した方法と従来の方法によって得られた同定結果を図6と図7に示す。ここで、提案した方法によ

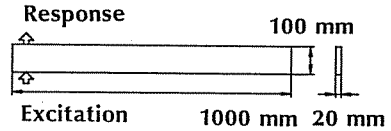
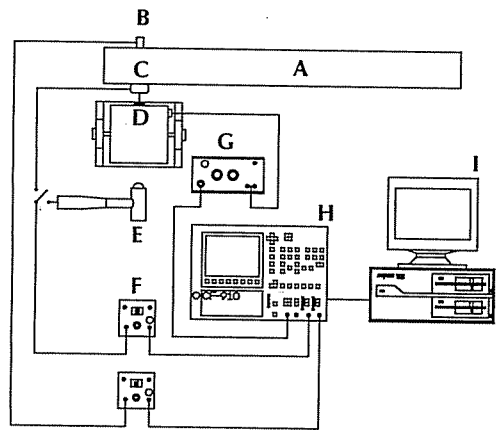


図1 共試体の形状



- A: Specimen
- B: Accelerometer (Rion PV-90B)
- C: Force transducer (Rion PF-31)
- D: Vibration exciter (B&K 4809)
- E: Impulse hammer (Rion PH-51)
- F: Charge preamplifier (Rion VP-14A)
- G: Power amplifier (B&K 2706)
- H: FFT analyzer (Ono Sokki CF-910)
- I: Personal computer (NEC PC-9801VM2)

図2 計測システム

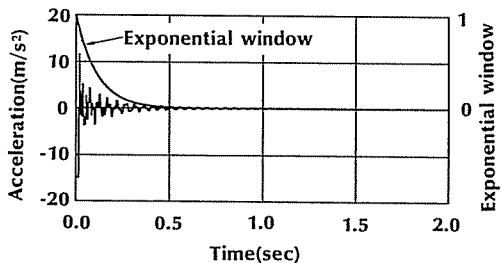
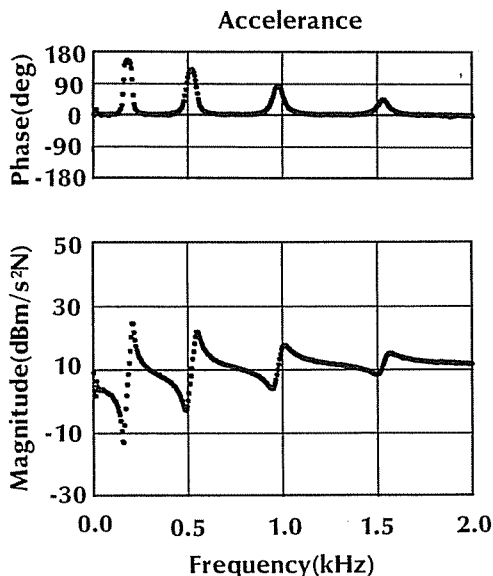


図3 インパルス加振によって得られたインパルス加速応答と指数ウィンドウ

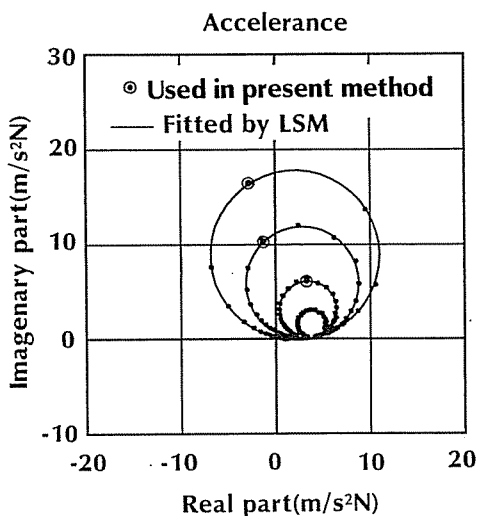
る結果は、各モードにおける共振周波数に最も近い1組のデータを用いて式(33)によって c と d を求め、それらを式(34)~(37)に代入して固有振動数 $\omega_{ar}/2\pi$ とモード減衰比 $\nu\sigma_r$ を求めたものである。ただし、剰余定数は、図4と図5に示すようなモード円の最下部の座標とした。一方、従来の方法による結果は、円適合

の結果から等周波数間隔 $\Delta\omega/2\pi$ の隣接データがつくる r 次のモード円の中心角 $\Delta\phi_r$ が最大となる二つの周波数の平均を $\omega_{ar}/2\pi$ として求め、モード減衰率 $\nu\sigma_r$ を

$$\nu\sigma_r = 2 \frac{\Delta\omega}{\Delta\phi_r} \dots\dots\dots (46)$$

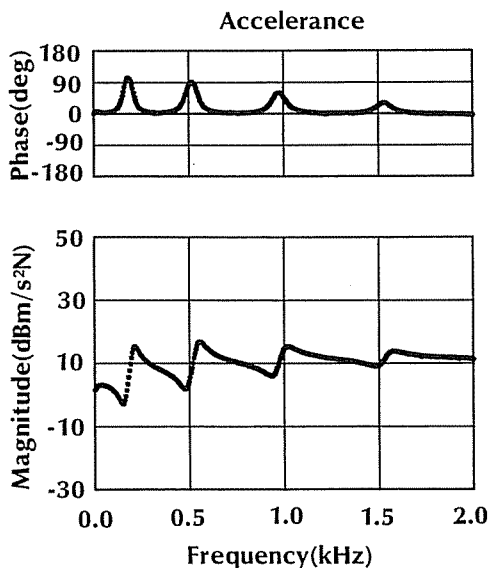


(a)

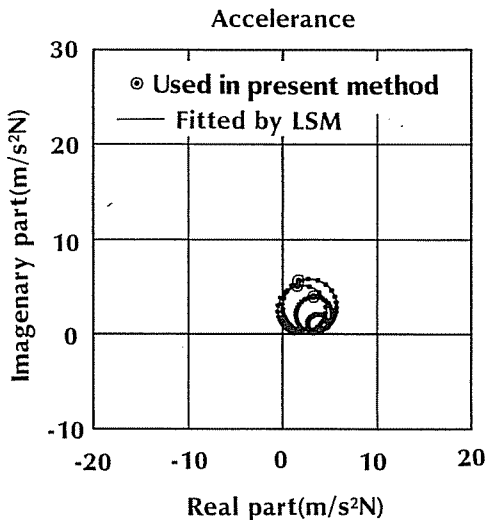


(b)

図4 指数ウィンドウを使用しない伝達関数



(a)



(b)

図5 指数ウィンドウを使用した伝達関数

によって求めた⁽⁴⁾。固有振動数 $\omega_n/2\pi$ とモード減衰比 ζ_n は式(36)と式(37)によった。

4.3 比較 上の同定結果では、周波数分解能が高い場合に提案した方法によって得られた同定結果と従来の方法によって得られた同定結果はよく一致している。この結果により提案した方法の有効性を確認することができる。さらに、提案した方法によって得られた同定結果は、特にモード減衰比において周波数分

解能が低下しても従来の方法によって得られた結果と比較して変動が小さく、提案した方法が周波数分解能に対して鈍感であることを裏付けている。

5. 結 論

実験モード解析の一自由度法に分類され、周波数分解能が悪く共振周波数付近に一つしか測定点がない場合でも同定可能な新しいモードパラメータ同定法を提

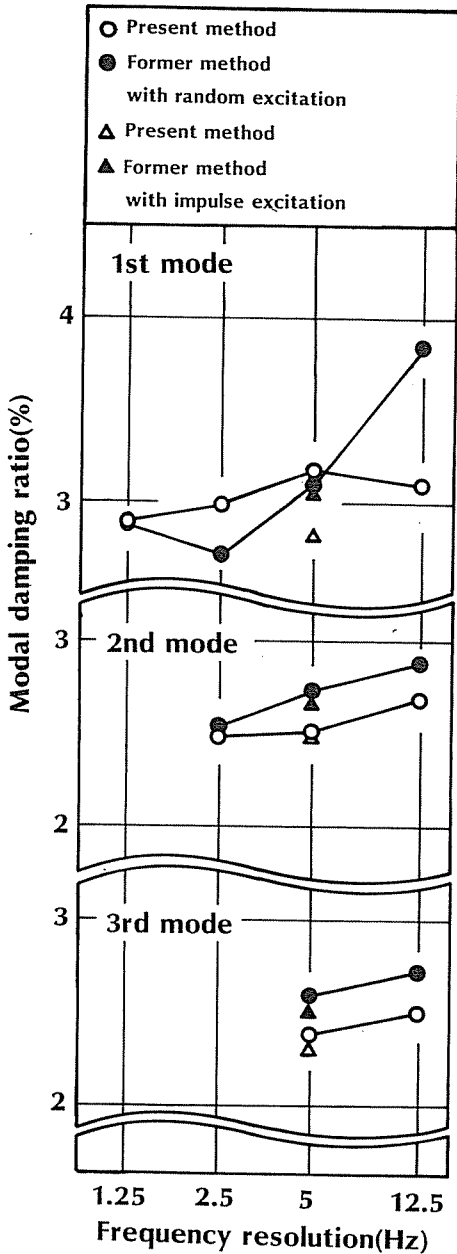


図 6 モード減衰比 ζ_n の同定結果

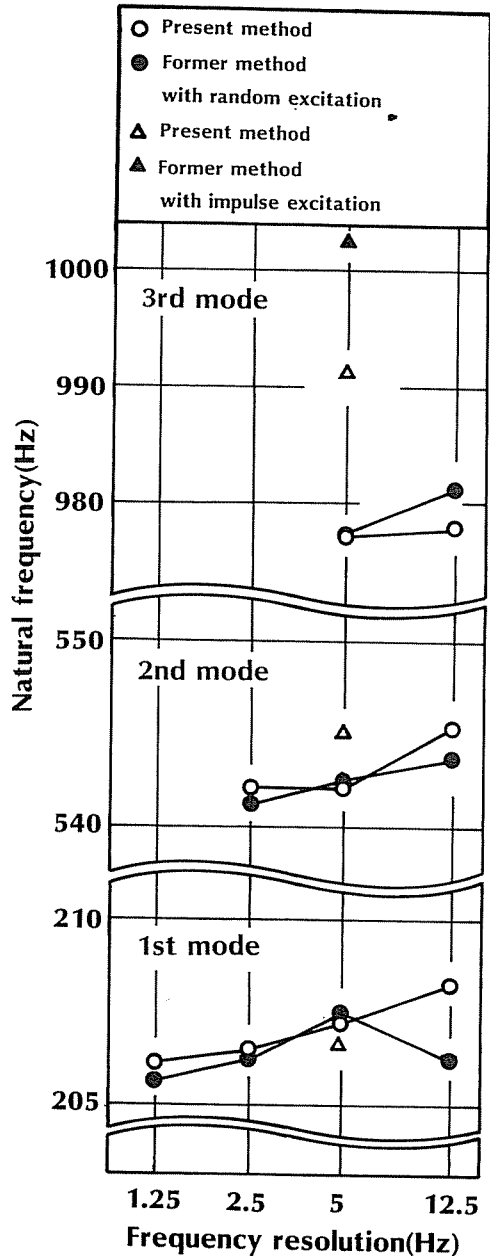


図 7 固有振動数 $\omega_n/2\pi$ の同定結果

案した。この方法は、直接インパルス加振によってあるいはランダム加振によって得られた伝達関数を逆フーリエ変換することによって単位インパルス応答を求め、それに指数ウィンドウをかけた場合とかけない場合の伝達関数の共振周波数付近における比 $c+jd$ を求め、式(34)~(37)あるいは式(43), (44)により固有振動数とモード減衰比を計算する方法である。

この方法の有効性は、簡単なはり(図1)の振動実験を行って伝達関数を求め、その結果を用いて4章で提案した方法と従来の方法でモードパラメータを同定し

(図6, 7), それらの結果を比較することによって示した。

文 献

- (1) 日本機械学会, モード解析の基礎と応用, (昭61), 丸善.
- (2) Ewins, D.J., *Modal Testing: Theory and Practice*, (1984), John Wiley & Sons.
- (3) 大久保, 機械のモーダル・アナリシス, (昭57), 中央大学出版会.
- (4) 長松, モード解析, (昭60), 培風館.
- (5) 長池, 長松, 機論, 51-464, C (昭60), 710.

討 論

[質問] 大熊政明〔東京工業大学工学部〕

(1) 指数ウィンドウを用いれば、図4(b)が図5(b)になるように、虚数部成分が相対的に大きなデータが増えるので、そのデータを用いて従来の曲線適合(モード円適合)を行い、減衰パラメータに関しては指数ウィンドウ分だけ差引く、というやり方に比べて貴方法は特にどのような長所を有しているか。

(2) たとえば、一般粘性減衰の場合は式(33)から σ_r と ω_d を求めるわけだが、実際には共振点近傍の複数のデータについて式(33)の関係を用いて最小二乗法的に σ_r と ω_d を求めるのか。

(3) 複数点を用いないとすると、使用するデータによって解が異なってくると思われるが、いかがか。必ず共振点に最も近い点のデータを用いるのが良いのか。

(4) 式(33)の関係を方程式にすると、未知数 σ_r と ω_d に対する係数行列に誤差を含んでいるはずの c と d が入ってきている。このような場合には一般的には解の精度が悪化してしまうと思われるが、いかがか。

この性質は特に最小二乗法を用いる場合には顕著になるようである。

[回答] (1) ご指摘のように、離散的でモード

円適合が行えないような伝達関数も指数ウィンドウを使用すればモード円上のデータが増加してモード円適合が行えるようになることは事実だが、従来の方法がそのモード円に基づいて位相の角振動数に対する微分の最大値といったような特定の条件を満たすときの値を必要としているという事実は本質的に変わっていない。また、むやみに指数ウィンドウの強さを増しても、そこで同定されたモード減衰比から指数ウィンドウの寄与分を差引く際に同定しようとしているモード減衰比が誤差に埋もれてしまうことになる。それに対して本方法は本質的に共振点近傍の任意の振動数における一つの測定点だけで同定が可能であるという点が優れていると思う。なお、本方法では指数ウィンドウの設定に際して式(12)のような条件を課している。

(2) 本方法は現場や予備実験において電卓で行える程度の簡便な方法として提案を行ったものであり、最小二乗法は想定していない。

(3) ご指摘のような結果のばらつきは予測される。一自由度法の基本的仮定式(30)における H_{r0} の誤差を相対的に小さくするために測定点は共振点に最も近い点を選ぶのが良いと考えられる。

(4) 精度よりも簡便さを重視することが許される場合の一つの方法として提案した。