

## 実験モード解析によるモーダルパラメータの 分散評価とそれに基づく精度の最適化\*

畔上 秀幸<sup>\*1</sup>, 沖津 昭慶<sup>\*1</sup>  
野田 英一<sup>\*2</sup>, 小林 秀孝<sup>\*3</sup>

### Variance Evaluation of Modal Parameters Identified by Experimental Modal Analysis and Optimization of Accuracy of the Modal Parameters Based on the Variances

Hideyuki AZEGAMI, Akiyoshi OKITSU,  
Eiichi NODA, and Hidetaka KOBAYASHI

The objects of the present paper are to propose a variance evaluation method of modal parameters identified by the least square method with an experimental transfer function, and to show that the evaluated variances can be used to optimize the accuracy of the modal parameters at selection of proper excitation type, weighting function and so forth. The variances of the modal parameters are evaluated by the first order approximation with the discrete values of experimental transfer function as stochastic variables, where the variance of the transfer function are evaluated with the coherence function based on a theory of statistical error. The results on a simple beam made of acrylic resin show that the variances can be used to optimize in accuracy of the modal parameters, and the results on the cover of an outboard motor show that the proposed variance evaluation method is applicable to actual structures.

**Key Words:** Vibration, Modal analysis, Accuracy, Variance, First order approximation, Excitation type, Weighting function

#### 1. 序 論

振動の理論的モデルから定義されるモーダルパラメータ(固有振動数, モード減衰比, 固有モード, モード剛性, モード質量, 剰余質量, 剰余剛性)を, 振動実験によって得られた伝達関数や単位インパルス応答に基づいて同定する実験モード解析は, 現在まで盛んに研究され<sup>(1)-(4)</sup>, はん用システムが開発されるに至って, 実際の振動問題に対処するための有力な手段となってきた。

しかしながら, 解析システムを用いて結果が得られるようになって, 同定されたモーダルパラメータの不確かさの解析までなされ, それに基づいてモーダルパラメータの精度の最適化がなされた例は著者らの知る限りでは見あたらない。これまで同定されたモーダルパラメータの不確かさは, 伝達関数やインパルス応答の誤差によって見当づけられていた。しかし, 誤差ノルムは, 適合の様子を定量化したものであっても,

実験によって得られた伝達関数の不確かさを反映したものになっていない。いいかえると, 実験結果の不確かな部分に重みを付けて誤差ノルムを減少させたとしても, 同定されたモーダルパラメータの不確かさは必ずしも減少するとは限らない。

本研究は, この実験モード解析によって得られたモーダルパラメータの不確かさを表す分散(variance)を評価する方法を提案し, その方法で評価された結果に基づけば, 実験方法や同定方法の適切な選択によりモーダルパラメータの精度の最適化が行えることを示すのがねらいである。

提案する方法は, 実験によって得られた伝達関数に基づいて最小二乗法(least square method)によって同定されたモーダルパラメータの分散を, 離散化された伝達関数の一つ一つを確率変数として, 一次近似法(first-order approximation)によって評価する方法である, そこで必要となる実験によって得られた伝達関数の分散は, 統計的誤差の理論に基づいてコヒーレンス関数(coherence function)を用いて評価される。また, モーダルパラメータの期待値を同定する方法は, 単点ごとの多自由度法(multi degree of freedom method)であればいずれの方法でもよいが, 偏分反復法を用いると有利である。その理由は, 分散を評価す

\* 昭和63年8月23日 第951回講演会において講演, 原稿受付 昭和63年3月18日。

<sup>\*2</sup> 正員, 豊橋技術科学大学工学部(〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

<sup>\*3</sup> 准員, 横河電機(株)(〒180 武蔵野市中町2-9-32)。

<sup>\*4</sup> 第三信工業(〒432 浜松市新橋1400)。

るときに必要なモーダルパラメータの伝達関数に対する一次変動率は偏分反復法の中で計算されるものと同一のものであるためである。

提案した方法によって評価されたモーダルパラメータの分散に基づくモーダルパラメータの精度の最適化は、本論文では、簡単なアクリル樹脂製のりを解析対象にして、実験方法においては加振方法 (excitation type) を、また同定方法においては最小二乗法で用いる重み関数 (weighting function) の設定方法を変化させて検討される。さらに、提案した方法の実構造物に対する適用可能性は、船外機のエンジンカバーを解析対象にして検討される。

本論文では、まずモーダルパラメータの分散評価法の提案を行い、続いて解析例を示してそれに基づく精度の最適化と実構造物に対する適用可能性の検討を行う。

## 2. モーダルパラメータの分散評価法

本章では、実験によって得られた伝達関数に基づいて最小二乗法によって同定されたモーダルパラメータの分散を、一次近似法によって評価する方法を提案する。

その方法は、実験によって得られた伝達関数変動したときも、同定されたモーダルパラメータは伝達関数の二乗誤差が最小になるという条件を満たしながら変動するという関係から、実験によって得られた伝達関数の変動に対する同定されたモーダルパラメータの変動を与える式を導き、その式に一次近似法を適用することによってモーダルパラメータの分散を評価する方法である。また、その評価法で必要になる実験によって得られた伝達関数の分散は、統計的誤差の理論に基づいて評価されることを示す。なお、減衰は一般粘性減衰を仮定するが、ヒステリシス減衰の場合も同様である。

**2・1 伝達関数の変動に対するモーダルパラメータの変動** 伝達関数は、同定対象の周波数範囲に  $q$  次から  $q+N$  次までのモードの共振峰がある場合に、モーダルパラメータにより次のように与えられる。

$$H_i(p) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{U_r + jV_r}{\sigma_r + j(\omega_i - \omega_{dr})} + \frac{U_r - jV_r}{\sigma_r + j(\omega_i + \omega_{dr})} \right) + \frac{C + jD}{\omega_i^2} + E + jF \quad (i=1 \sim L) \cdots (1)$$

ただし、 $H_i(p)$  は  $L$  個の角振動数  $\omega_i (i=1 \sim L)$  のときの伝達関数であり、その実部とその虚部を成分とした  $2L$  個の成分からなるベクトルを  $\{H(p)\}$  で、またその成分を  ${}_iH(p) (i=1 \sim 2L)$  で表す。また、 $U_r, V_r, \omega_{dr}, \sigma_r (r=1 \sim N)$

と  $C, D, E, F$  はそれぞれ留数 (residue) の実部、その虚部、減衰固有角振動数 (damped natural angular frequency)、モード減衰率 (modal decay rate) と剰余質量 (residual mass) の逆数 (図表では  $\text{mass}^{-1}$  と表す) の実部、その虚部、剰余剛性 (residual stiffness) の逆数 (剰余コンプライアンス) (図表では  $\text{stiff}^{-1}$  と表す) の実部、その虚部である。また、 $p = \{p\}$  は次のようなこれら  $M=4N+4$  個のモーダルパラメータを成分としたベクトルである。

$$\begin{aligned} \{p\} &= \{p_1, p_2, \dots, p_M\}^T \\ &= \{U_1, V_1, \omega_{d1}, \sigma_1, U_2, V_2, \omega_{d2}, \sigma_2, \\ &\quad \dots, U_N, V_N, \omega_{dN}, \sigma_N, C, D, E, F\}^T \cdots (2) \end{aligned}$$

ただし、右上付の  $T$  は転置を表す。

一方、実験によって得られた伝達関数は、 $H_i(p)$  に対応させて  $H_{ex}(i=1 \sim L)$ 、 $\{H(p)\}$  に対応させて  $\{H_{ex}\}$ 、 ${}_iH(p)$  に対応させて  ${}_iH_{ex}(i=1 \sim 2L)$  と表すことにする。

実験によって得られた伝達関数に基づいて最小二乗法によって同定されたモーダルパラメータは、次のような関係式を満たしている。伝達関数の誤差関数  $\{E(p)\}$  は次のように与えられ、

$$\{E(p)\} = \{H_{ex}\} - \{H(p)\} \cdots \cdots (3)$$

二乗誤差  $\lambda(p)$  は

$$\lambda(p) = \{E(p)\}^T {}^T w \{E(p)\} \cdots \cdots (4)$$

で定義される。ここで、 ${}^T w$  は解析者が設定する重み関数であり、角振動数  $\omega_i (i=1 \sim L)$  のときの重み  $w_i$  を  $\{w\}$  の成分に対応させて対角に並べた  $2L$  次元の対角行列である。同定されたモーダルパラメータは、 $\lambda(p)$  が最小値をもつときの  $\{p\}$  の値  $\{p_{st}\}$  によって与えられることから、次の関係式を満たしている。

$$\left[ \frac{\partial \lambda}{\partial p_i}(p) \right]_{(p_{st})} = 0 \quad (i=1 \sim M) \cdots \cdots (5)$$

ただし、本論文では  $\{(\partial f / \partial z_i)(z)\}_{(z_0)}$  は  $f(z)$  の  $z_i$  に対する偏導関数  $(\partial f / \partial z_i)(z)$  の  $\{z\} = \{z_0\}$  のときの値を表すものとする。さらに、モーダルパラメータによって与えられる式 (1) の伝達関数  $\{H(p)\}$  を  $\{p\} = \{p_{st}\}$  のまわりで Taylor 展開すると、次式のように表せ、

$$\begin{aligned} \{H(p)\} &= \{H(p_{st} + \Delta p)\} \\ &= \{H(p_{st})\} + \sum_{i=1}^M \left[ \frac{\partial \{H\}}{\partial p_i}(p) \right]_{(p_{st})} \Delta p_i \\ &\quad + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial^2 \{H\}}{\partial p_i \partial p_j}(p) \right]_{(p_{st})} \Delta p_i \Delta p_j \\ &\quad + \cdots \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

この式を式 (3)、(4) に代入することによって、式 (5) は次のように表せる。

$$\left[ \frac{\partial \{H\}}{\partial p_i}(p) \right]_{(p_{st})} {}^T w [\{H_{ex}\} - \{H(p_{st})\}] = 0$$

$$(i=1 \sim M) \cdots \cdots (7)$$

実験によって得られた伝達関数に変動したときも、同定されたモーダルパラメータは二乗誤差が最小になるという条件を満たしながら変動するという関係から、同定されたモーダルパラメータの変動を与える式は次のように導ける。実験によって得られた伝達関数  $\{H_{ex}\}$  がその推定値  $\{\bar{H}_{ex}\}$  のまわりで変動し、同定されたモーダルパラメータはその推定値  $\{\bar{p}_{st}\}$  のまわりで変動するものとする。すなわち、式(7)は、 $\{H_{ex}\} = \{\bar{H}_{ex}\}$  のとき、次のように表すものとする、

$$\left[ \frac{\partial \{H\}^T}{\partial p_i}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}}^T \mathbf{r}_{w_i} [\{\bar{H}_{ex}\} - \{H(\bar{\mathbf{p}}_{st})\}] = 0$$

$$(i=1 \sim M) \cdots \cdots (8)$$

$\{H_{ex}\} = \{\bar{H}_{ex}\} + \{\Delta H_{ex}\}$  のときには、次のように表すことができる。

$$\left[ \frac{\partial \{H\}^T}{\partial p_i}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\} + \{\Delta p_{st}\}}^T \mathbf{r}_{w_i}$$

$$\times [\{\bar{H}_{ex}\} + \{\Delta H_{ex}\} - \{H(\bar{\mathbf{p}}_{st} + \Delta \mathbf{p}_{st})\}] = 0$$

$$(i=1 \sim M) \cdots \cdots (9)$$

ここで、次の一般的な関係：

$$\left[ \frac{\partial \{H\}}{\partial p_i}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\} + \{\Delta p_{st}\}} = \left[ \frac{\partial \{H\}}{\partial p_i}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}}$$

$$+ \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial^2 \{H\}}{\partial p_i \partial p_j}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}} \Delta p_{stj} + \cdots$$

$$(i=1 \sim M) \cdots \cdots (10)$$

と式(6)において  $\{p_{st}\} + \{\Delta p\} = \{\bar{p}_{st}\} + \{\Delta p_{st}\}$  とおいた関係を式(9)に代入し、式(8)の関係を考慮して、変動量が二次以上となる項を省略すると、次の関係式を得る。

$$\left[ \frac{\partial \{H\}^T}{\partial p_i}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}}^T \mathbf{r}_{w_i}$$

$$\times \left[ \{\Delta H_{ex}\} - \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial \{H\}^T}{\partial p_j}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}} \Delta p_{stj} \right]$$

$$+ \left[ \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial^2 \{H\}^T}{\partial p_i \partial p_j}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}} \Delta p_{stj} \right]^T \mathbf{r}_{w_i}$$

$$\times [\{\bar{H}_{ex}\} - \{H(\bar{\mathbf{p}}_{st})\}] = 0$$

$$(i=1 \sim M) \cdots \cdots (11)$$

さらに、二乗誤差  $\lambda$  の最小値が十分小さければ  $\{\bar{H}_{ex}\} - \{H(\bar{\mathbf{p}}_{st})\}$  は一次の変動量とみなすことができるので、次式を得る。

$$\left[ \frac{\partial \{H\}^T}{\partial p_i}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}}^T \mathbf{r}_{w_i}$$

$$\times \left[ \{\Delta H_{ex}\} - \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial \{H\}^T}{\partial p_j}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}} \Delta p_{stj} \right] = 0$$

$$(i=1 \sim M) \cdots \cdots (12)$$

したがって、実験によって得られた伝達関数の変動  $\{\Delta H_{ex}\}$  に対する同定されたモーダルパラメータの変動  $\{\Delta p_{st}\}$  を与える式は、次のように表すことができ

る。

$$\{\Delta p_{st}\} =$$

$$\left[ \left[ \frac{\partial \{H\}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}}^T \mathbf{r}_{w_i} \left[ \frac{\partial \{H\}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}} \right]^{-1}$$

$$\left[ \frac{\partial \{H\}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}) \right]_{\{\bar{p}_{st}\}}^T \mathbf{r}_{w_i} \{\Delta H_{ex}\}$$

$$= [A(\bar{\mathbf{p}}_{st})] \{\Delta H_{ex}\} \cdots \cdots (13)$$

ただし、次のように定義する。

$$\left[ \frac{\partial \{H\}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}) \right] = \left[ \frac{\partial \{H\}}{\partial p_1}(\mathbf{p}), \frac{\partial \{H\}}{\partial p_2}(\mathbf{p}), \right.$$

$$\left. \cdots \frac{\partial \{H\}}{\partial p_M}(\mathbf{p}) \right] \cdots \cdots (14)$$

なお、式(13)の  $[A(\mathbf{p})]$  は、偏分反復法において伝達関数の不適合に対するモーダルパラメータの修正量を求めるときに用いるものと同一のマトリックスである。

## 2.2 モーダルパラメータの分散の評価

実験によって得られた伝達関数の変動に対する同定されたモーダルパラメータの変動を与える式が式(13)のように得られたことから、一次近似法を適用することによってモーダルパラメータの分散を与える式を次のように得ることができる。

一次近似法は、確率変数の関数を確率変数の期待値のまわりで Taylor 展開し、零次と一次の変動率を含む項で与えられると仮定し、その確率変数の関数の期待値を零次の項によって、分散を一次の項と確率変数の共分散によって求める方法である<sup>(5)</sup>。

実験モード解析では、実験によって得られた伝達関数が確率変数で、同定されたモーダルパラメータがその関数となっている。式(13)によれば、同定されたモーダルパラメータ  $\{\bar{p}_{st}\}$  は、伝達関数の推定値  $\{\bar{H}_{ex}\}$  のまわりで二次以上の項を省略して、次のように表される。

$$\{p_{st}\} = \{\bar{p}_{st}\} + \{\Delta p_{st}\}$$

$$= \{\bar{p}_{st}\} + [A(\bar{\mathbf{p}}_{st})] \{\Delta H_{ex}\} \cdots \cdots (15)$$

したがって、一次近似法を適用すれば、同定されたモーダルパラメータの期待値  $E[p_{sti}]$  と分散  $\text{Var}[p_{sti}]$  ( $i=1 \sim M$ ) は次のように推定されることになる。

$$E[p_{sti}] = \bar{p}_{sti} \quad (i=1 \sim M) \cdots \cdots (16)$$

$$\text{Var}[p_{sti}] = \sum_{k=1}^{2L} \sum_{l=1}^{2L} A_{ki}(\bar{\mathbf{p}}_{st}) A_{li}(\bar{\mathbf{p}}_{st})$$

$$\times \text{Cov}[kH_{ex}, lH_{ex}] \quad (i=1 \sim M) \cdots \cdots (17)$$

ただし、 $A_{ki}(\mathbf{p})$  は、 $[A(\mathbf{p})]$  の  $k$  行  $i$  列の成分である。ここで、 $\text{Cov}[kH_{ex}, lH_{ex}]$  は、実験によって得られた伝達関数の共分散 (covariance) であるが、実験によって得られた離散的な伝達関数は一つ一つが独立であることから、次の関係が成立する。

$$\text{Cov}[{}_k H_{exl}, {}_l H_{exl}] = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \text{Var}[{}_k H_{exl}] = \sigma_k^2 & (k = l) \end{cases} \quad (k=1 \sim 2L, l=1 \sim 2L) \quad \dots\dots\dots (18)$$

2・3 伝達関数の分散の評価 同定されたモーダルパラメータの分散は、一次近似法を適用すれば式(18)を代入した式(17)によって与えられ、そのうち  $A_{ki}(\bar{p}_{st})(k=1 \sim 2L, i=1 \sim M)$  は式(13)によって与えられることから、式(18)の  $\text{Var}[{}_k H_{exl}] = \sigma_k^2 (k=1 \sim 2L)$  が得られれば評価されることになる。

実験によって得られた伝達関数の分散は、統計的誤差の理論に基づいて、次のように推定される。実験によって得られた伝達関数の推定値  $\bar{H}_{exl}$  は、 $n$  回の観測で得られた入力と変位出力に基づいて、入力のパワースペクトル密度関数 (power spectral density function) および入出力の相互スペクトル密度関数 (cross spectral density function) の  $\omega = \omega_l$  のときの集合平均  $\bar{S}_{xl}$  および  $\bar{S}_{xyl}$  により、次のように与えられるものとする。

$$\bar{H}_{exl} = \frac{\bar{S}_{xyl}}{\bar{S}_{xl}} \quad (l=1 \sim L) \quad \dots\dots\dots (19)$$

考慮する誤差を、出力の測定の際の誤差雑音および入力と無相関な他の入力による出力成分とし、系統的な偏り誤差 (bias error) を省略し、不規則な標準誤差 (standard error) だけと考えると、次の関係式が得られる<sup>(6)</sup>。

$$|\bar{H}_{exl} - H_{exl}|^2 = \frac{2\bar{S}_{yl}}{(n-2)\bar{S}_{xl}} (1 - \bar{\gamma}_{xyl}^2) F_{2,n-2} \quad (l=1 \sim L) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $H_{exl}$  は  $\omega = \omega_l$  のときの真の伝達関数、 $\bar{S}_{yl}$  は  $\omega = \omega_l$  のときの出力のパワースペクトル密度関数、 $F_{2,n-2}$  は自由度 2 と  $n-2$  をもつ F 分布 (F distribution) である。

また、 $\bar{\gamma}_{xyl}$  は  $\omega = \omega_l$  のときのコヒーレンス関数であり、次式で与えられる。

$$\bar{\gamma}_{xyl}^2 = \frac{|\bar{S}_{xyl}|^2}{\bar{S}_{xl}\bar{S}_{yl}} \quad (l=1 \sim L) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、次の一般的な関係：

$$\begin{aligned} E[|\bar{H}_{exl} - H_{exl}|^2] &= E[(\text{Re}[\bar{H}_{exl} - H_{exl}])^2] + E[(\text{Im}[\bar{H}_{exl} - H_{exl}])^2] \\ &= \text{Var}[\text{Re}[\bar{H}_{exl}]] + \text{Var}[\text{Im}[\bar{H}_{exl}]] \quad (l=1 \sim L) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (22)$$

と誤差が不規則であることから、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \text{Var}[\text{Re}[\bar{H}_{exl}]] &= \text{Var}[\text{Im}[\bar{H}_{exl}]] \\ &= \frac{1}{2} E[|\bar{H}_{exl} - H_{exl}|^2] \quad (l=1 \sim L) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

したがって、実験によって得られた伝達関数の実部と

その虚部の分散  $\text{Var}[\text{Re}[\bar{H}_{exl}]]$ 、 $\text{Var}[\text{Im}[\bar{H}_{exl}]]$  は、式(20)と式(23)より、次式によって推定されることになる。

$$\begin{aligned} \text{Var}[\text{Re}[\bar{H}_{exl}]] &= \text{Var}[\text{Im}[\bar{H}_{exl}]] \\ &= E\left[\frac{\bar{S}_{yl}}{(n-2)\bar{S}_{xl}} (1 - \bar{\gamma}_{xyl}^2) F_{2,n-2}\right] \\ &= \frac{\bar{S}_{yl}}{(n-2)\bar{S}_{xl}} (1 - \bar{\gamma}_{xyl}^2) E[F_{2,n-2}] \\ &= \frac{\bar{S}_{yl}}{(n-4)\bar{S}_{xl}} (1 - \bar{\gamma}_{xyl}^2) \quad (l=1 \sim L) \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

### 3. 分散評価とそれに基づく精度の最適化

本章では、最初に簡単なアクリル樹脂製のはりを解析対象にして、2章で示した方法によって加振方法と重み関数の設定方法を変化させた場合のモーダルパラメータの分散を評価し、それらの結果に基づいてモーダルパラメータの分散が減少する加振方法と重み関数の設定方法を検討し、続いて船外機のエンジンカバーに対する評価例を通して実構造物に対する適用可能性を示す。

なお、モーダルパラメータの推定値の同定法は偏分反復法<sup>(3)</sup>を採用した。

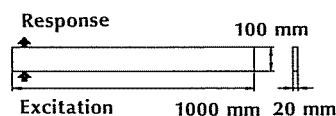
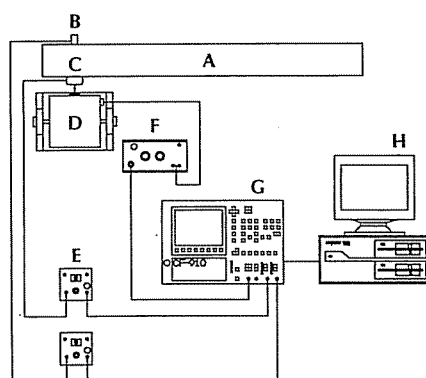


図 1 はりの形状と加振・応答点



- A: Specimen
- B: Accelerometer (Rion PV-90B)
- C: Force transducer (Rion PF-31)
- D: Vibration exciter (B&K 4809)
- E: Charge preamplifier (Rion VP-14A)
- F: Power amplifier (B&K 2706)
- G: FFT analyzer (Ono Sokki CF-910)
- H: Personal computer (NEC PC-9801 VM2)

図 2 伝達関数計測システム

表 1 同定されたモーダルパラメータの期待値 (はり)

Mode	Expectation			Expectation		
	1st	2nd	3rd	Residual	Mass <sup>-1</sup>	Stiff <sup>-1</sup>
Real residue	-0.0146 <sup>a)</sup>	-0.0040 <sup>a)</sup>	0.0004 <sup>a)</sup>	Real	1331.65 <sup>d)</sup>	-0.000002 <sup>e)</sup>
Imag. residue	-0.3346 <sup>a)</sup>	-0.0759 <sup>a)</sup>	-0.0196 <sup>a)</sup>	Imag.	-5.15300 <sup>d)</sup>	-0.000005 <sup>e)</sup>
Nat. freq.	210.19 <sup>b)</sup>	551.93 <sup>b)</sup>	986.84 <sup>b)</sup>	Unit: a) mm/Ns, b) Hz, c) 1/s		
Decay rate	30.031 <sup>c)</sup>	76.182 <sup>c)</sup>	138.57 <sup>c)</sup>	d) mm/Ns <sup>2</sup> , e) mm/N		

3.1 はりモデルの解析 解析対象とするはりの形状および加振, 応答点を図1に, また使用した伝達関数測定システムを図2に示す。比較検討した加振方法は, 正弦波掃引 (sine sweep), インパルス (impulse), ランダム (random)加振の3種類である。ただし, インパルス加振は図2に示す力計をハンマで加振した。また, ランダム加振の際にはハニング (Hanning) ウィンドウを使用した重み関数  $w_l (l=1 \sim L)$  は, 通常用いられてきた伝達関数の大きさの逆数 (図表において  $\text{Mag.}^{-1}$  で示す) を用いて次式によって与えられたものと,

$$w_l = \frac{1}{|\bar{H}_{ext}|^\alpha} \quad (l=1 \sim L) \dots \dots \dots (25)$$

大熊ら<sup>(7)</sup>の提案による最大ゆが度推定法に基礎をおく伝達関数の分散の逆数 (図表において  $\text{Var.}^{-1}$  で表す) を用いて次式によって与えられたものを検討対象とした。

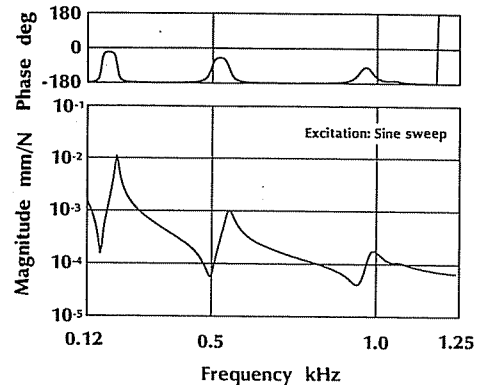
$$w_l = \frac{1}{\sigma_l^2} \quad (l=1 \sim L) \dots \dots \dots (26)$$

ただし, 式(25)の  $\alpha$  は定数であり, 通常1に近い値がとられる。

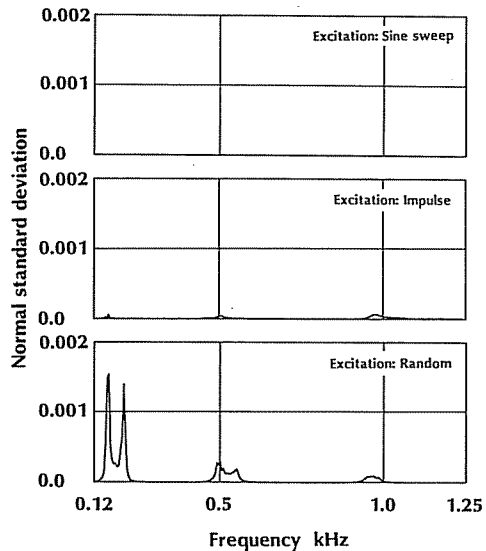
3.1.1 加振方法の検討 図3は, 伝達関数 (コンプライアンス) の推定値  $\bar{H}_{ext} (l=1 \sim L)$  を正弦波掃引加振を用いた場合を取り上げて示し, それと対比させて, 3種類の加振方法に対する伝達関数の分散  $E[|\bar{H}_{ext} - H_{ext}|^2] (l=1 \sim L)$  の推定結果を規準化標準偏差 (normal standard deviation) あるいは変動係数 (coefficient of variation)  $\sqrt{E[|\bar{H}_{ext} - H_{ext}|^2]} / |\bar{H}_{ext}| (l=1 \sim L)$  で表したものである。なお, 観測回数  $n$  はすべての加振方法において128回と設定した。

表1は, 同定されたモーダルパラメータの期待値の推定結果であり, 図4は, 図3の結果に基づいて2章の方法によって得られたモーダルパラメータの規準化標準偏差の結果である。なお, 使用した重み関数はすべて伝達関数の大きさの逆数 ( $\alpha=1$ ) を使用した。

これらの結果から, 本実験の範囲内では正弦波掃引加振を用いた場合は, 他の加振方法を用いた場合と比



(a) 期待値



(b) 分散

図3 伝達関数 (コンプライアンス) の期待値と分散 (はり)

較して, 同定されたモーダルパラメータの有効けた数が6けた以上向上することがわかる。

3.1.2 重み関数設定方法の検討 図5は, 式(25)の重み関数を使用した場合について, 同定されたモーダルパラメータの規準化標準偏差の指数  $\alpha$  に対

する変化を示したものである。なお、加振方法はインパルス加振を使用した。この結果から、モーダルパラメータの分散は指数  $\alpha$  の値が1の近傍で減少するという傾向を読み取ることができる。この結果は、これまで慣用的に使用されていた  $\alpha=1$  が本実験の場合には有効であったことを示している。

一方、伝達関数の分散の逆数を使用した場合の同定されたモーダルパラメータの規準化標準偏差の推定結果を、伝達関数の大きさの逆数を使用した場合 ( $\alpha=1$ ) の推定結果と対比させて図6に示す。なお、正弦波掃引加振の場合は、それによって得られた伝達関数の分散が零になる領域が存在することから、伝達関数の分散の逆数を求めることができないために載せていない。この結果から、重み関数として伝達関数の大きさの逆数よりも、伝達関数の分散の逆数を使用した場合のほうが、同定されたモーダルパラメータの分散は減少する傾向を読み取ることができる。この結果は、伝達関数の分散の逆数を使用した場合のほうが、同定されたモーダルパラメータの精度は向上することを実証したのになっている。なお、三次モードの留数の実部において規準化標準偏差が減少しないのは、標準偏差は虚部の値と等しくても、表1より期待値が零に近い値であるために、規準化によって誤差を含んだ大きな値になってしまうためである。

また、同定されたモーダルパラメータの分散が小さいからといって必ずしも伝達関数の誤差ノルムが減少するわけではないことを図7に示す。図7(a)は、イ

ンパルス加振を用いて得た伝達関数に基づいているためにランダム加振の場合と比較して伝達関数の分散が小さく(図3参照)、それに加えて重み関数として伝達関数の分散の逆数を用いているために同定されたモー

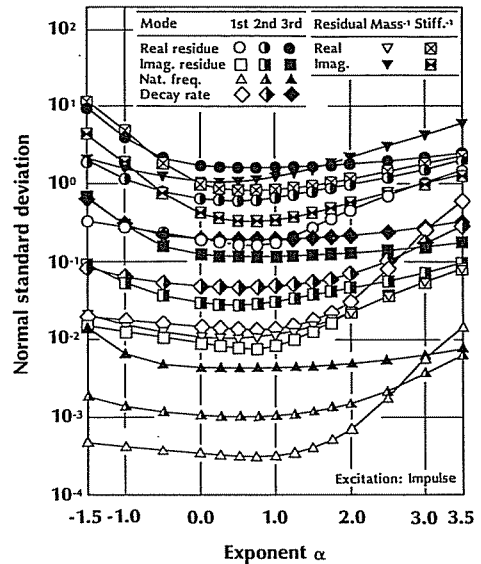


図5 重み関数として伝達関数の大きさの逆数を用いた場合の同定されたモーダルパラメータの分散の指数  $\alpha$  に対する変化 (はり)

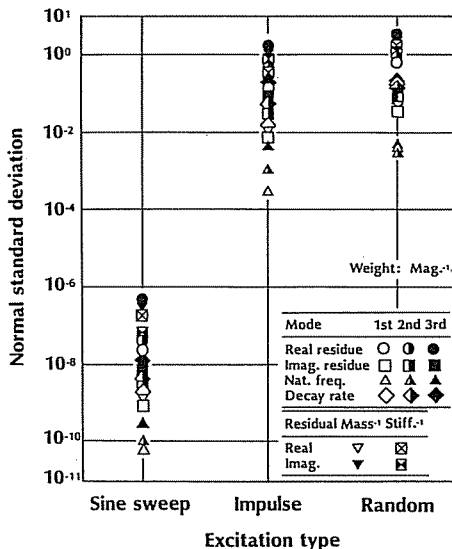


図4 同定されたモーダルパラメータの分散の加振方法に対する比較 (はり)

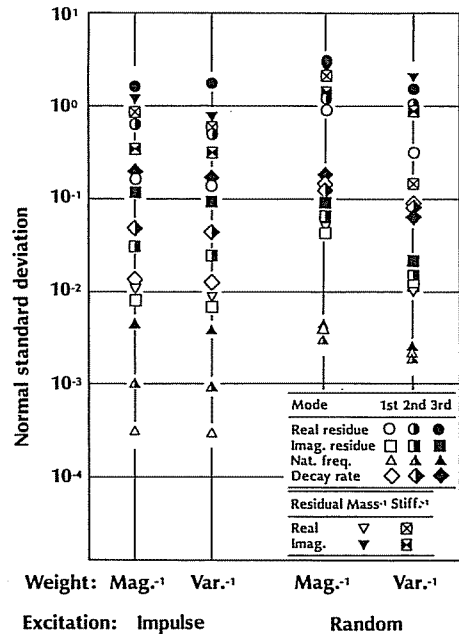


図6 同定されたモーダルパラメータの分散の重み関数設定方法に対する比較 (はり)

表 2 同定されたモーダルパラメータの期待値と分散 (船外機エンジンカバー)

Mode	Expectation			Nor. stand. dev.		
	1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
Real residue	0.0414 <sup>a)</sup>	0.0316 <sup>a)</sup>	-0.0005 <sup>a)</sup>	0.0820	0.0667	-3.9407
Imag. residue	0.2621 <sup>a)</sup>	0.1370 <sup>a)</sup>	-0.1006 <sup>a)</sup>	0.0129	0.0155	-0.0184
Nat. freq.	318.50 <sup>b)</sup>	481.00 <sup>b)</sup>	740.38 <sup>b)</sup>	0.0012	0.0009	0.0009
Decay rate	130.81 <sup>c)</sup>	117.17 <sup>c)</sup>	175.17 <sup>c)</sup>	0.0188	0.0235	0.0231

Residual	Expectation		Nor. stand. dev.	
	Mass <sup>-1</sup>	Stiff <sup>-1</sup>	Mass <sup>-1</sup>	Stiff <sup>-1</sup>
Real	1572.41 <sup>d)</sup>	-0.000012 <sup>e)</sup>	0.0120	-0.3678
Imag.	115.659 <sup>d)</sup>	0.000060 <sup>e)</sup>	0.1482	0.8290

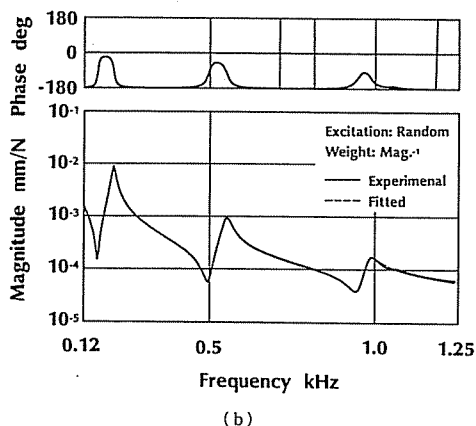
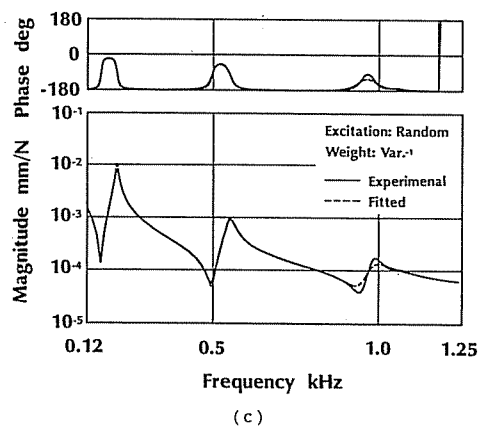
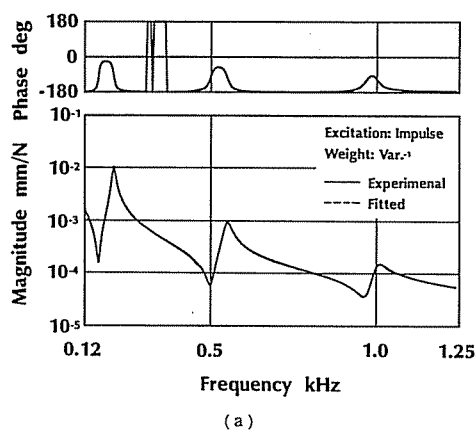
Unit: a) mm/Ns, b) Hz, c) 1/s, d) mm/Ns<sup>2</sup>, e) mm/N

図 7 伝達関数 (コンプライアンス) 適合結果の比較

ダルパラメータの分散も小さく、理想的な伝達関数の同定結果になっている。このときの伝達関数の二乗誤差  $\lambda$  (誤差ノルムの二乗) は  $\lambda = 0.00151 \text{ mm}^2/\text{N}^2$  である。それに対して、図 7 (b), (c) は、ランダム加振を用いて得た伝達関数に基づいているためにインパルス加振の場合と比較して伝達関数の分散は大きくなっ

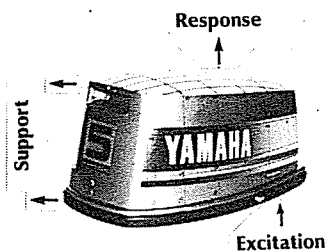


図 8 船外機エンジンカバーの概観と加振・応答点

ている (図 3 参照)。ここで図 7 (b) と図 7 (c) の違いは、前者が重み関数の大きさの逆数を用いている ( $\alpha = 1$ ) ために同定されたモーダルパラメータの分散が大きいものに対して、後者が重み関数として伝達関数の分散の逆数を用いているために同定されたモーダルパラメータの分散が小さい点である。(図 6 参照)。図 7 (b) と図 7 (c) の伝達関数の二乗誤差  $\lambda$  を比較すると、前者が  $\lambda = 0.00684 \text{ mm}^2/\text{N}^2$  であるのに対して、後者が

$\lambda=0.010\ 064\ \text{mm}^2/\text{N}^2$ であり、図からもわかるように前者のほうが良好な同定を行っているかに見える。しかしながら、その両者を図7(a)と比較すると、後者のほうが図7(a)に近く(特にモード1の共振点近傍では、同定結果は実験結果と異なっているが、図7(a)の同定結果と一致している)、一見まずい同定結果に見えても実は理想的な同定結果に近いものになっていることがわかる。

**3・2 船外機エンジンカバーの解析** 解析対象物の概観と加振・応答点および支持方向を図8に示す。伝達関数計測システムは図2に示したものを使用した。加振方法は、インパルス加振ではエネルギー不足であることからランダム加振を使用し、重み関数は、前節の結果を考慮して伝達関数の分散の逆数を用いた。

表2に同定されたモーダルパラメータの期待値と規準化標準偏差の推定結果を示す。この結果から、本解析対象物に対して本計測システムを用いた場合、減衰固有振動数は0.1%、モード減衰率は2%、留数は8%程度の規準化標準偏差をもつと推定され、2章で示した評価法が実構造物に対しても適用可能であることが示された。

#### 4. 結 論

本論文では、実験によって得られた伝達関数に基づいて最小二乗法によって同定されたモーダルパラメータの分散を、伝達関数を確率変数として、一次近似法によって得られた式(17)によって、またそこで必要になる伝達関数の分散を式(24)によって評価する方法を提案し、その分散に基づく加振方法と重み関数の設定方法の適切な選択により同定されたモーダルパラメータの精度の最適化が行えることを簡単なアクリル樹脂製のはり(図1)を解析対象に示し(図4～7)、さらに提案した評価方法の実構造物に対する適用可能性を船外機エンジンカバー(図8)を解析対象にして示した(表2)。

#### 文 献

- (1) 大久保, 機械のモーダル・アナリシス(昭57), 中央大学出版会.
- (2) Ewins, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*, (1984), John Wiley & Sons.
- (3) 長松, モード解析, (昭60), 倍風館.
- (4) 日本機械学会, モード解析の基礎と応用, (昭61), 丸善.
- (5) 例えば, 中桐・久田, 確率有限要素法入門, (昭60), 22, 倍風館.
- (6) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., (得丸・ほか5名訳), ランダムデータの統計的処理, (昭57), 192, 培風館.
- (7) 大熊・山口・長松, 機論, 52-484, C (昭61), 3198.