

## 材料非線形性を考慮した形状最適化問題の解法\*

井原 久<sup>\*1</sup>, 畔上 秀幸<sup>\*2</sup>  
下田 昌利<sup>\*3</sup>, 渡邊 勝彦<sup>\*4</sup>Solution to Shape Optimization Problem  
Considering Material Non-linearityHisashi IHARA<sup>\*5</sup>, Hideyuki AZEGAMI,  
Masatoshi SHIMODA and Katsuhiko WATANABE<sup>\*5</sup> Structure Research, Research Department, Car Research & Development Center, Mitsubishi Motors Corp.,  
Okazaki Aichi, 444-8501 Japan

This paper presents a numerical solution to boundary shape optimization problems taking into account material non-linearity. The goal aimed in this paper is to minimize external work by varying a boundary shape under a volume constraint. Shape variation is described by using a one-parameter family of mappings defined in a domain where a continuum lies initially. The shape sensitivity is derived using the Lagrange multiplier method and the formula of the material derivative. A procedure to solve this problem using the traction method is presented, which one of the authors has proposed as an approach to solving domain optimization problems. The validity of proposed method is verified by applying basic numerical examples and by comparing with results considering only linearity.

**Key Words:** Optimum Design, Nonlinear Problem, Numerical Analysis, Finite Element Method, Design Sensitivity Analysis, Shape Optimization, Traction Method

## 1. はじめに

自動車サスペンションの設計では、走行中の縁石乗り上げを想定した過大荷重に対しては、塑性変形を許したもとで変形を一定限度内に抑えることが要求される。一般に、機械構造の設計では、正常稼働時には弾性限度内で設計されても、非常時の過大荷重に対しては非弾性変形まで考慮して設計される場合が少なくない。したがって、形状最適化手法においても材料非線形性を許した問題への拡張が望まれている。

これまで研究の対象とされてきた材料非線形性を考慮した形状最適化問題は、主に形状を記述する有限個の寸法を設計変数に選んだ、いわゆる寸法最適化問題であった。材料非線形性は、超弾性のような負荷経路に依存しない経路非依存形と弾塑性のような負荷経路に依存する経路依存形とに大別される。経路非依存形

の材料非線形性を考慮した寸法最適化問題に対する直接微分法による感度の解析方法はRyuら<sup>(1)</sup>によって報告されている。さらに随伴変数法による感度の解析方法はCardoso-Arora<sup>(2)</sup>によって示された。それに対して、経路依存形の材料非線形性を考慮した寸法最適化問題の解度解析に関してはこれまでいくつかの報告がなされてきた。Hisada<sup>(3)(4)</sup>は準解析的な直接微分法による感度解析手法を提案した。随伴変数法による感度の解析方法はTsay-Arora<sup>(5)</sup>によって示された。その後、Vidalら<sup>(6)</sup>は感度解析において整合接線剛性を用いることの重要性を指摘した。さらに、Vidal-Haber<sup>(7)</sup>は粘弾性変形問題における感度の解析方法も示している。また、山崎と渋谷<sup>(8)</sup>は感度解析における構成則の不連続性に関する取扱い方を示した。さらに視野を広げれば、寸法最適化問題に対して実験計画法を用いて応答曲面を評価し、その曲面上で最適解を求める方法も実用上有力な手段になり得る<sup>(9)</sup>。柏村ら<sup>(10)</sup>は材料非線形性に加えて強い幾何学的非線形性が組合わされた衝撃現象にその方法を適用した。

また、連続体の境界を固定して領域内に微細な穴を開けていくことによって位相を変化させる位相最適化問題に、材料非線形性を組み込む方法はVuge-

\* 原稿受付 1999年9月27日。

<sup>\*1</sup> 正員, 三菱自動車工業(株)(☎444-8501 岡崎市橋目町中新切1)。<sup>\*2</sup> 正員, 豊橋技術科学大学工学部(☎441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。<sup>\*3</sup> 正員, 三菱自動車工業(株)。<sup>\*4</sup> 正員, 東京大学生産技術研究所第1部(☎106-8558 東京都港区六本木7-22-1)。

E-mail: ihara-hisashi@pde.mitsubishi-motors.co.jp

Kikuchi<sup>(11)</sup>によって提案されている。しかしながら、連続体の位相を固定して境界を変動させる境界形状最適化問題に材料非線形性を組入れる試みはこれまでなされてこなかった。

一方、著者らは境界形状の自由度に実用上制限を持たない境界形状最適化問題の解法として方法を提案し<sup>(12)</sup>、線形弾性体に対しては、これまで外力仕事最小化問題<sup>(13)(14)</sup>、振動固有値移動問題<sup>(15)</sup>、周波数応答問題<sup>(16)</sup>、応力分布規定問題<sup>(17)</sup>、変位規定問題<sup>(18)</sup>、最大変位および最大応力最小化問題<sup>(19)</sup>に適用されてきた。さらに、位相最適化法との統合も試みられている<sup>(20)</sup>。方法は、領域変動を写像で表現することによって境界形状最適化問題を定式化し、Lagrange乗数法(あるいは随伴変数法)と物質導関数の公式を用いて理論的に導出される関係式に基づいて形状こう配関数(感度関数)を計算し、その形状こう配関数の値に比例した境界力で連続体の境界を法線方向に引張っていく方法として提案されている。形状こう配関数や境界を引張った場合の形状変動の解析には有限要素法や境界要素法などを利用する。方法は、当初、Hilbert空間におけるこう配法の一応用として提案されていたが、その後、直接Hilbert空間のこう配法を適用すると滑らかさが維持できないような問題に対しても初期形状と同じ滑らかさを維持できることが保証された平滑化こう配法とも呼べる方法の一応用例であることが確認された<sup>(21)</sup>。

本論文では、実用性の観点から、塑性変形を含む経路依存形の材料非線形性に注目し、その材料非線形性を有した連続体の外力仕事最小化問題に対しても方法が適用可能であることを示す。そのためには、この問題の形状こう配関数の評価法を見出すことが鍵となる。本論文では、形状こう配関数の関係式を従来の手続きに沿って導出した後で、比例負荷の仮定を導入する。その結果、随伴方程式を解かなくても形状こう配関数が評価できる関係(準自己随伴関係)を得る。これまで経路依存形の形状最適化問題では、感度解析に随

伴変数法を適用した場合、随伴方程式を解かなければならないことが難点とされてきた<sup>(22)</sup>。しかし、この比例負荷の仮定を認めればその難点は解消されるという新たな知見を得る。最後に、本論文で提案する方法の有用性を確認するために、基本的な二次元および三次元問題の解析結果を紹介する。

2. 記号法

最初に、本論文で使用する基本的な記号法をまとめておく。 $n$ 次元空間  $R^n$  ( $R$  は実数を表す)、 $n=2, 3$ 、のベクトル、2階のテンソルおよび  $m$ 階のテンソルをそれぞれ矢印表示  $(\cdot)$ 、 $(\cdot)$ 、 ${}^m(\cdot)$ 、あるいは添字表示  $(\cdot)_i$ 、 $(\cdot)_{ij}$ 、 $(\cdot)_{i \dots k}$  で表す。添字表示では総和規約と空間座標  $\bar{x} \in R^n$  に関する偏微分表記法  $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial x_i$  を使用する。いずれの表示においても時間  $t \in R$  に関する偏微分は  $(\cdot)_{,t} \equiv \partial(\cdot)/\partial t$  と表す。また、本来、空間座標  $\bar{x} \in R^n$  と時間  $t \in R$  の関数は  $(\cdot)(\bar{x}, t)$ 、あるいはその関数の合成関数は  $(\cdot)((\cdot)(\bar{x}, t))$  と明示すべきであるが、必要に応じて時間の関数であることだけを強調して  $(\cdot)(t)$  と表すことにする。さらに、累積積分形の汎関数において、関数  $(\cdot)(\tau)$ 、 $\tau \in (0, t)$ 、を  $((\cdot))_t$  で表すことにする。

3. 領域変動

最初に、連続体が定義された領域が変動する様子を定式化する。図1に示すように、初期状態において  $n$ 次元の領域  $\Omega \in R^n$ 、 $n=2, 3$ 、と境界  $\Gamma$  で定義された連続体は、形状変動に関する拘束条件の集合  $\Theta$  のもとで変動して領域  $\Omega_s$  と境界  $\Gamma_s$  になると仮定する。このとき、領域変動は1媒介変数写像族  $\bar{T}_s(\Omega)$  を用いて次のように表すことができる<sup>(23)-(27)</sup>。

$$D \ni \bar{T}_s(\Omega) : \Omega \ni \bar{X} \mapsto \bar{x} \in \Omega_s, \quad s \geq 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $s$  は領域の変動履歴(時間とは異なる)を表すパラメータである。写像族  $\bar{T}_s$  の許容集合  $D$  は1対1写像を保証するように次式で与えられると仮定する。

$$D = \left\{ \bar{T}_s(\cdot) \in (C^1(\bar{\Omega}))^n \mid \det \left( \frac{\partial T_{si}}{\partial X_j}(\bar{X}) \right) \neq 0, \right. \\ \left. T_{si}(\bar{X}) < +\infty, \bar{X} \in \Omega, \theta \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ただし、 $C^1(\Omega_s)$  は1次の導関数まで連続な関数空間、 $\det(\partial T_{si}/\partial X_j(\bar{X}))$  は Jacobi 行列式を表す。また、 $\bar{\Omega}$  は開領域  $\Omega$  の閉領域を表す。

4. 材料非線形性を考慮した連続体の変形問題

次に、本論文で扱う経路依存形の材料非線形性を考

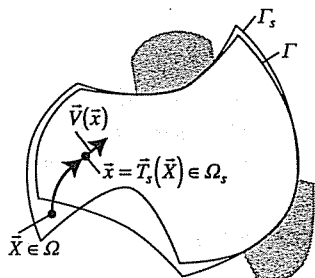


Fig. 1 Domain variation

慮した連続体の変形問題を記述する。

連続体は変動後の領域  $\Omega_s$  で定義されていると仮定する。その連続体は、部分境界  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  上の方向  $\vec{n}_{0r}$ ,  $r=1, 2, \dots, n_0$ ,  $n_0 \leq n$ , で拘束されたもとで、非零の境界力  $\vec{P}(\vec{x}, t)$  が部分境界上  $\vec{x} \in \Gamma_p \subset \Gamma$ , 時刻  $t \in (0, T) \subset R$  の変位が拘束されていない方向に作用すると仮定する。ただし、初期境界力  $\vec{P}|_{t=0} = \vec{0}$  と仮定する(記号法  $(\cdot)|_{t=0}$  はトレースとして定義される境界値を表す)。さらに、本論文では、簡単のために、変位の拘束条件が与えられた部分境界と非零の境界力が作用する境界では領域は法線方向に変動しないと仮定する[これらの条件を式(2)の  $\Theta$  に加える]。また、簡単のために物体力は無視する。

境界力による変位は微小であると仮定して、時刻  $t \in (0, T)$  のときの変位を  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{x} \in \Omega_s$ , と表せば、そのときの全ひずみ速度  $\vec{\varepsilon}_{kl,t}(\vec{u}, t)$  は次式で与えられる。

$$\varepsilon_{kl,t}(\vec{u}, t) = \frac{1}{2}(u_{k,l,t} + u_{l,k,t}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

材料非線形性を次のように考慮する。実用上重要な経路依存形の材料非線形性は弾塑性変形である。古典弾塑性理論によれば、降伏関数を与えて結合流れ則を仮定すれば、応力速度テンソル  $\vec{\sigma}_{ij,t}$  と全ひずみ速度テンソル  $\vec{\varepsilon}_{kl,t}$  を関連付ける剛性テンソル  $\vec{C}$  は応力テンソル  $\vec{\sigma}$  の関数  $\vec{C}(\vec{\sigma})$  で与えられる。このとき、増分形の構成則は次式となる。

$$\sigma_{ij,t} = C_{ijkl}(\vec{\sigma}) \varepsilon_{kl,t} \quad \dots\dots\dots (4)$$

増分形の構成則が与えられたならば、増分形平衡方程式の変分形式(弱形式)は次式で与えられる。

$$\int_0^T \{l_t(\vec{v}) - a(\vec{u}, t, \vec{v})\} dt = 0, \quad \vec{u} \in U, \quad \forall \vec{v} \in U_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、1次形式  $l_t(\cdot)$  と双1次形式  $a(\cdot, \cdot)$  は次式で定義する。

$$l_t(\vec{v}) = \int_{\Gamma_p(\Gamma_r)} P_{r,i} v_i d\Gamma \quad \dots\dots\dots (6)$$

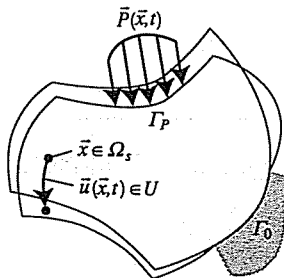


Fig. 2 Deformation by external force

$$a(\vec{u}, t, \vec{v}) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl}(\vec{\sigma}) \varepsilon_{kl,t}(\vec{u}, t) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dx = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\vec{v}$  は変分変位あるいは随伴変位と呼ばれる。また、変位と変分変位の許容集合  $U, U_0$  は次式で与えられる。

$$U = \{\vec{u}(\cdot, \cdot) \in (H^1(\Omega_s \times (0, T)))^n | (u_i n_{0r})|_{\vec{x} \in \Gamma_0} = 0, r=1, 2, \dots, n_0, \vec{u}|_{t=0} = \vec{0}\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$U_0 = \{\vec{v}(\cdot, \cdot) \in (H^1(\Omega_s \times (0, T)))^n | (u_i n_{0r})|_{\vec{x} \in \Gamma_0} = 0, r=1, 2, \dots, n_0\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $(H^1(\Omega_s \times (0, T)))^n$  は領域  $\Omega_s \times (0, T)$  で定義された1階導関数まで2乗可積分な  $n$  次元ベクトル関数の Hilbert 空間あるいは Sobolev 空間である。

5. 外力仕事最小化問題

材料非線形性を考慮した連続体の外力仕事最小化問題を定式化して、この問題の形状こう配関数を理論的に導出する。

5.1 定式化 4章で示したように、境界力  $\vec{P}(\vec{x}, t)$  が部分境界上  $\vec{x} \in \Gamma_p \subset \Gamma$  の変位が拘束されていない方向に時刻  $t \in (0, T)$  に作用した場合の連続体の変形を考える。ただし、初期境界力  $\vec{P}|_{t=0} = \vec{0}$  と仮定する。連続体の定義された領域の大きさ ( $n=2$  のとき面積,  $n=3$  のとき体積) を既定値  $M_0$  以下に制限した下で、境界力(外力)がした仕事の最小化問題は次のように表せる。

$$\min_{\vec{T}_i(\Omega) \in D} \int_0^T l(\vec{u}, t) dt \quad \dots\dots\dots (10)$$

such that Eq.(5)

$$\int_{\Omega_s} dx \leq M_0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、1次形式  $l(\cdot)$  は次式で定義する。

$$l(\vec{u}, t) = \int_{\Gamma_p(\Gamma_r)} P_{r,i} u_i d\Gamma \quad \dots\dots\dots (12)$$

5.2 形状こう配関数の導出 この問題に Lagrange 乗数法と物質導関数法あるいは随伴変数法を適用して形状こう配関数を導出する。この問題の Lagrange 乗数形式  $L(\Omega_s, \vec{u}, t, \vec{v}, \Lambda)$  は、 $\vec{v}, \Lambda$  をそれぞれ式(5)と領域の大きさ制約式(11)に対する Lagrange 乗数として、次式のように与えられる。

$$L = \int_0^T \{l(\vec{u}, t) + l_t(\vec{v}) - a(\vec{u}, t, \vec{v})\} dt + \Lambda(M - M_0) \quad \dots\dots\dots (13)$$

領域変動を表す媒介変数  $s$  に対する Lagrange 乗数形式の導関数  $\dot{L}$  は、物質導関数の公式を用いて次式で与えられる<sup>(12)(27)</sup>。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & \int_0^T \int_{\Gamma_r} \{P'_i u_{i,t} + P_i u'_{i,t} + (P_i n_j u_{i,t} + P_i u_{i,j} n_j + P_i u_{i,\kappa}) n_\kappa V_k\} d\Gamma + \int_{\Gamma_r} \{P'_{i,t} v_i + P_{i,t} v'_i \\ & + (P_{i,j} n_j v_i + P_{i,t} v_{i,j} n_j + P_{i,t} v_{i,\kappa}) n_\kappa V_k\} d\Gamma - \int_{\Omega_s} (C_{ijk} u_{k,t} v_{i,j} + C_{ijk} u'_{k,t} v_{i,j} + C_{ijk} u_{k,t} v'_{i,j}) dx \\ & - \int_{\Gamma_s} C_{ijk} u_{k,t} v_{i,j} n_m V_m d\Gamma \Big] dt + \dot{L}(M - M_0) + \int_{\Gamma_s} \Lambda n_i V_i d\Gamma \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

ただし、 $(\cdot)$  は領域の変動履歴  $s$  に対する導関数、 $(\cdot)'$  は分布関数の領域変動に対する空間座標に固定した偏導関数を表す。また、 $\bar{n}$  は外向き単位法線ベクトル、 $\kappa$  は  $n=2$  の場合は曲率、 $n=3$  の場合は平均曲率を表す。また、このときの領域変動に関する速度  $\vec{V}(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in \Omega_s$ , は次式で定義される。

$$\vec{V}(\Omega_s) \equiv \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial s} (\bar{T}_s^{-1}(\Omega_s)) \dots \dots \dots (15)$$

ただし、 $\bar{T}_s^{-1}(\Omega_s)$  は  $\bar{T}_s(\Omega)$  の逆写像  $\Omega_s \ni \bar{x} \rightarrow \bar{X} \in \Omega$  を表す。さらに、本論文では簡単のために非零の表面力が作用する境界  $\Gamma_r$  では領域は法線方向に変動しないと仮定したので、 $(n_\kappa V_k)|_{x \in \Gamma_r} = 0$  となる。この関係を用いると、式(14)は次式で書き換えられる。

$$\dot{L} = \int_0^T \{l_{i,t}(\bar{v}') - a(\bar{u}_{i,t}, \bar{v}') + \{l(\bar{u}'_{i,t}) - a(\bar{u}'_{i,t}, \bar{v}) - a_c(\{\bar{u}'_{i,t}\}'_0, \bar{u}_{i,t}, \bar{v})\}\} dt + \dot{L}(M - M_0) + l_c(\vec{V}) \dots \dots (16)$$

ここで、剛性変動項  $a_c(\{\bar{u}'_{i,t}\}'_0, \bar{u}_{i,t}, \bar{v})$  は次式で定義する。

$$\begin{aligned} a_c(\{\bar{u}'_{i,t}\}'_0, \bar{u}_{i,t}, \bar{v}) & \equiv \int_{\Omega_s} C'_{ijk} u_{k,t} v_{i,j} dx = \int_{\Omega_s} \frac{\partial C_{ijk}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma'_{mn} u_{k,t} v_{i,j} dx \\ & = \int_{\Omega_s} \frac{\partial C_{ijk}}{\partial \sigma_{mn}} \left( \int_0^t \frac{\partial \sigma_{mn}(\tau)}{\partial \sigma_{op}(\tau)} \frac{\partial \sigma_{op,t}(\tau)}{\partial \varepsilon_{qr}(\bar{u}_{i,t}(\tau))} u'_{q,r}(\tau) d\tau \right) u_{k,t} v_{i,j} dx \\ & = \int_{\Omega_s} \frac{\partial C_{ijk}}{\partial \sigma_{mn}} \left( \int_0^t \frac{\partial \sigma_{mn}(\tau)}{\partial \sigma_{op}(\tau)} C_{opqr}(\tau) u'_{q,r}(\tau) d\tau \right) u_{k,t} v_{i,j} dx \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

経路依存性は  $\sigma(t)$  が時刻  $t$  以前の応力  $\{\sigma(\tau)\}'_0$  に依存する関数とすることにより考慮されるため、その効果は上式の時刻 0 から  $t$  までの時間積分として表される。ただし、応力の偏導関数  $\partial \sigma_{ij}(t) / \partial \sigma_{kl}(\tau)$  は次式で定義する。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(t)}{\partial \sigma_{kl}(\tau)} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_{ij}(t)}{\partial \sigma_{mn}(t - \Delta t)} \frac{\partial \sigma_{mn}(t - \Delta t)}{\partial \sigma_{op}(t - 2\Delta t)} \times \dots \frac{\partial \sigma_{op}(\tau + \Delta t)}{\partial \sigma_{kl}(\tau)} \dots \dots \dots (18)$$

また、領域変動速度  $\vec{V}$  に対する 1 次形式  $l_c(\vec{V})$  は次式で与えられる。

$$l_c(\vec{V}) = \int_{\Gamma_s} G_m V_m d\Gamma = \int_{\Gamma_s} G n_m V_m d\Gamma \dots \dots \dots (19)$$

$$G = - \int_0^T C_{ijk} u_{k,t} v_{i,j} dt + \Lambda \dots \dots \dots (20)$$

したがって、Lagrange 乗数形式  $L$  の  $\bar{u}_{i,t}$ ,  $\bar{v}$  および  $\Lambda$  に対する最適性の条件は不等式制約条件に対する Kuhn-Tucker 条件考慮すると次のようになる。

$$\int_0^T \{l_{i,t}(\bar{v}') - a(\bar{u}_{i,t}, \bar{v}')\} dt = 0, \quad \forall \bar{v}' \in U_0 \dots \dots \dots (21)$$

$$\int_0^T \{l(\bar{u}'_{i,t}) - a(\bar{u}'_{i,t}, \bar{v}) - a_c(\{\bar{u}'_{i,t}\}'_0, \bar{u}_{i,t}, \bar{v})\} dt = 0, \quad \forall \bar{u}' \in U \dots \dots \dots (22)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad M - M_0 \leq 0, \quad \Lambda(M - M_0) = 0 \dots \dots \dots (23)$$

ここで、式(21)は制約条件に用いた増分形の平衡方程式(5)を再び得たことになる。したがって、 $\bar{u}_{i,t}$ はこの式によって解析可能である。式(22)はこの問題の随伴方程式と呼ばれ、随伴変位  $\bar{v}$  の支配方程式に相当する。この方程式の解法は5・3節で検討する。また、式(23)は領域の大きさ制約に対する Kuhn-Tucker 条件の一部である。これらの最適性の条件によって  $\bar{u}_{i,t}$ ,  $\bar{v}$  および  $\Lambda$  を決定できていれば、制約がすべて満たされることになる。したがって、次の関係が成立する。

$$\dot{L}|_{\bar{u}_{i,t}, \bar{v}, \Lambda} = \frac{d}{ds} \left( \int_0^T l(\bar{u}_{i,t}) dt \right) \Big|_{\bar{u}_{i,t}, \bar{v}, \Lambda} = l_c(\vec{V}) \dots \dots \dots (24)$$

このとき、式(19)と式(20)で与えられる  $G n$  は、領域の微小変動を与える領域変動速度  $\vec{V}$  の係数関数になっていることから、この問題における形状こう配関数、 $G$  は形状こう配密度関数になる。

### 5・3 随伴方程式の解法

5・2節で残された随伴方程式(22)の解法について考えよう。

まず、式(17)で定義された剛性変動項  $a_c(\{\bar{u}'_{i,t}\}'_0, \bar{u}_{i,t}, \bar{v})$  を書き換えることから始めよう。累次積分に関する Dirichlet の変換公式は、関数  $\phi(t, \tau)$  が  $0 \leq \tau < t \leq T$  で連続ならば次式で与えられる<sup>(28)</sup>。

$$\int_0^T \int_0^t \phi(t, \tau) d\tau dt = \int_0^T \int_\tau^T \phi(t, \tau) dt d\tau \dots\dots\dots (25)$$

この公式を用いれば、式(17)は次のように変換できる。

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_s} a_c(\{\bar{u}'_i\}_t, \bar{u}_i, \bar{v}) dt &= \int_{\Omega_s} \int_0^T \int_0^t \frac{\partial C_{ijkl}(t)}{\partial \sigma_{mn}(t)} \frac{\partial \sigma_{mn}(t)}{\partial \sigma_{op}(\tau)} C_{opqr}(\tau) u_{k,u}(t) v_{i,j}(t) u'_{q,r}(\tau) d\tau dt dx \\ &= \int_{\Omega_s} \int_0^T \int_\tau^T \frac{\partial C_{ijkl}(t)}{\partial \sigma_{mn}(t)} \frac{\partial \sigma_{mn}(t)}{\partial \sigma_{op}(\tau)} C_{opqr}(\tau) u_{k,u}(t) v_{i,j}(t) u'_{q,r}(\tau) dt d\tau dx \equiv \int_0^T a(\bar{u}'_i(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ただし、随伴変位の剛性変動による補正項  $\bar{v}(\tau)$  をひずみ成分  $\varepsilon_{qr}(\bar{v}(\tau))$  で表示すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{op}(\bar{v}(\tau)) &= \int_\tau^T \frac{\partial C_{ijkl}(t)}{\partial \sigma_{mn}(t)} \frac{\partial \sigma_{mn}(t)}{\partial \sigma_{op}(\tau)} u_{k,u}(t) \\ &\quad \times v_{i,j}(t) dt \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

したがって、随伴変位  $\bar{v}$  の増分形支配方程式(22)は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^T a(\bar{u}'_i(\tau), \bar{v}(\tau) + \bar{v}(\tau)) d\tau &= \int_0^T l(\bar{u}'_i(\tau)) d\tau \\ \forall \bar{u} \in U, \bar{v} \in U_0 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

この増分形方程式によれば、最終時刻  $T$  のときの随伴変位  $\bar{v}|_{\tau=T}$  は、そのときの剛性テンソルを用いて境界力  $\bar{P}|_{\tau=T}$  が作用したときの変位として求めることができ、さらに、 $\bar{v}(\tau)$ ,  $\tau \in (0, T)$  はそれを初期条件にして時刻  $T$  から時刻  $0$  に溯りながら解くことができることを示している。

さらに、境界力が次式で与えられるような比例負荷の場合を考える。

$$\bar{P}|_{x \in \Gamma_r}(t) = A(t) \bar{P}|_{x \in \Gamma_r}(T), \quad t \in (0, T) \dots\dots\dots (29)$$

ただし、係数関数  $A(t)$ ,  $t \in (0, T)$  は境界値  $A|_{t=0} = 0$ ,  $A|_{t=T} = 1$  をもつ時間に対して連続微分可能な単調増加関数と仮定する。このとき、次の関係を得る。

$$\bar{P}(\tau)|_{x \in \Gamma_r} = \frac{A(\tau)}{A_i(\tau)} \bar{P}_i(\tau)|_{x \in \Gamma_r}, \quad \tau \in (0, T) \dots\dots\dots (30)$$

この関係を随伴方程式(28)に代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_0^T a(\bar{u}'_i(\tau), \bar{v}(\tau) + \bar{v}(\tau)) d\tau \\ = \int_0^T \frac{A(\tau)}{A_i(\tau)} l_i(\bar{u}'_i(\tau)) d\tau, \quad \forall \bar{u} \in U, \bar{v} \in U_0 \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

この式と増分形平衡方程式(5)を比較することにより、次のような準自己随伴関係を得る。

$$\frac{A(\tau)}{A_i(\tau)} \varepsilon_{ij}(\bar{u}_i(\tau)) = \varepsilon_{ij}(\bar{v}(\tau)) + \varepsilon_{ij}(\bar{v}(\tau)) \dots\dots\dots (32)$$

あるいは、 $\varepsilon_{ij}(\bar{v}(\tau))$  について解いて

$$\varepsilon_{ij}(\bar{v}(\tau)) = \frac{A(\tau)}{A_i(\tau)} \varepsilon_{ij}(\bar{u}_i(\tau)) - \varepsilon_{ij}(\bar{v}(\tau)) \dots\dots\dots (33)$$

この関係は、随伴方程式を直接解かなくても、式(27)で  $\varepsilon_{qr}(\bar{v}(\tau))$  を計算しながら、随伴変位のひずみ成分  $\varepsilon_{ij}(\bar{v}(\tau))$  を計算できることを示している。

最後に、線形弾性体を仮定した場合には、すでに得られている結果に帰着することを確認しておこう。線形弾性体を仮定した場合、剛性テンソルは応力の関数ではなくなる。したがって、式(27)において  $\partial C_{ijkl} / \partial \sigma_{mn}(\bar{\sigma}(t)) = 0$  となることから、 $\varepsilon_{qr}(\bar{v}(\tau)) = 0$  を得る。さらに、 $A(t) = t/T$  を仮定すれば、式(33)から  $\varepsilon_{ij}(\bar{v}(t)) = t \varepsilon_{ij}(\bar{u}_i(t))$  を得る。この関係を式(20)に代入すれば、線形弾性体の場合の形状こう配密度関数  $G_L$  を得る。

$$G_L = -\frac{1}{2} C_{ijkl} u_{k,i} |_{t=\tau} u_{i,j} |_{t=\tau} + \Lambda \dots\dots\dots (34)$$

前報<sup>(13)</sup>の結果では、第1項が  $-C_{ijkl} u_{k,i} |_{t=\tau} u_{i,j} |_{t=\tau}$  となっていた。この違いは、前報では平衡方程式を時刻  $T$  のときの変形式で与えていたのに対して、本報では時刻  $0$  から時刻  $T$  までの増分形変形式で与えたことによって現れた。しかし、領域の大きさ制約を満たすように  $\Lambda$  を決定したときにこの違いは修正されて、形状こう配密度関数は定数倍だけ異なる同一の分布関数に帰着する。

## 6. 力 法

力法は、領域変動速度  $\bar{V} \in D$  を次式で解きながら有限の増分  $\Delta s > 0$  を与えて、微小な領域変動  $\bar{V} \Delta s$  を繰返していく方法として提案されている<sup>(12)</sup>。

$$a(\bar{V}, \bar{y}) = -l_c(\bar{y}), \quad \forall \bar{y} \in D \dots\dots\dots (35)$$

ここで、双1次形式  $a(\cdot, \cdot)$  は式(7)によって与える。ただし、剛性テンソル  $C_{ijkl}$  は線形弾性体の値を用いる。1次形式  $l_c(\cdot)$  は式(19)で与える。

## 7. 解 析 例

本論文で示した方法の有用性を確認するために、基本的な二次元および三次元問題に対する解析結果を紹介する。ここで扱われる例題は Mises の降伏関数を用いた結合流れ則の弾完全塑性体に比例負荷の仮定を満たした境界力が作用した場合を仮定した。

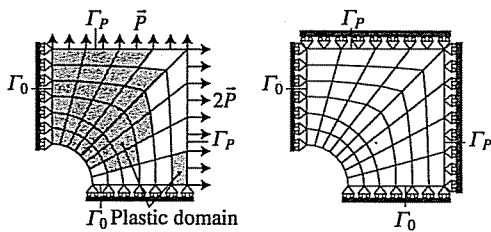
増分形の平衡方程式(5)と領域変動速度の支配方程

式(35)の解析にはFEMコードMSC/NASTRAN v.70を利用した。式(5)の計算において、増分の分割数に初期値として5を与え、汎用FEMコードの適合増分機能によってさらに分割を追加した。式(20)で与えられる形状こう配密度関数は、変動が許された境界上の節点のみについて次のように評価した。式(20)中の応力増分  $C_{ijkl}u_{k,l} \Delta t$  は汎用FEMコードの結果を用いた。また、式(20)で必要となる随伴ひずみ  $\varepsilon_{ij}(\bar{v})$  を与える式(33)において、第1項は汎用FEMコードの結果を用いた。第2項は、そこで必要となる式(27)中の  $u_{k,l} \Delta t$  は汎用FEMコードの結果を用い、式(18)で定義された  $\partial \sigma_{ij}(t) / \partial \sigma_{mn}(t - \Delta t)$  は次式で評価した。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(t)}{\partial \sigma_{mn}(t - \Delta t)} \approx \delta_{im} \delta_{jn} + \frac{\partial C_{ijkl}(t - \Delta t)}{\partial \sigma_{mn}(t - \Delta t)} \Delta \varepsilon_{kl}(t) \dots \dots \dots (36)$$

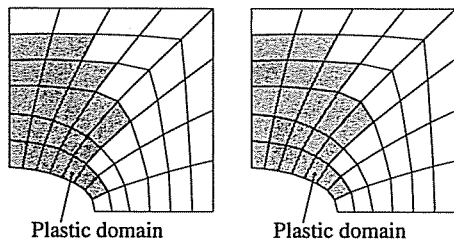
ただし、 $\delta_{ij}$  は Kronecker デルタである。さらに、式(27)と式(36)で必要となる導関数  $\partial C_{ijkl}(t) / \partial \sigma_{mn}(t)$  は、 ${}^t\bar{C}(t)$  が  $\bar{\sigma}(t)$  の陽な関数で与えられることから、解析的に導出される  $6 \times 6 \times 6$  の理論式に汎用FEMコードで得られた  $\bar{\sigma}(t)$  を代入することによって求めた。

7.1 平板の孔形状最適化問題 二次元連続体に対する例題として、図3のような1辺200mm、厚さ5mmの平板中央に設けられた半径30mmの孔形状を最適化する問題を解析した。計算モデルは対称性を



(a) Loading condition (b) Domain variation

Fig. 3 Shape optimization problem of hole in rectangular plate



(a) With  $G$  (nonlinear) (b) With  $G_L$  (linear)

Fig. 4 Optimized shapes of holes in rectangular plates

考慮して領域の1/4に8節点六面体要素を板厚方向に一層配置して、板厚方向の領域変動は拘束した。境界力は上辺と右辺の法線方向に作用させた。ただし、右辺の境界力は上辺の境界力に対して2倍になるように仮定し、 $|\bar{P}| = 1.4 \times 10^2$  MPa、ヤング率  $2.1 \times 10^5$  MPa、ポアソン比0.3、降伏応力  $\sigma_a = 2.5 \times 10^2$  MPaとした。

材料非線形性を考慮した場合 [形状こう配密度関数を式(20)で計算した場合] と仮定しない場合 [形状こう配密度関数を式(34)で計算した場合] の最適化形状と塑性領域の比較を図4に示す。図5は材料非線形性を考慮した場合の目的汎関数(外力仕事)と制約汎関数(体積)の収束履歴を示す。

材料非線形性を考慮した場合と仮定しない場合の形状比較からは、大規模な塑性領域が発生しているにもかかわらず、ほぼ同一の形状に収束する結果を得た。その理由はこの問題では変動境界において弾性限度内で一様な応力状態、すなわち一様な形状こう配密度関数分布、が実現可能であったためであると考えられる<sup>(29)(30)</sup>。このような問題では、塑性降伏も一樣に発生し、変動境界で一様な応力・ひずみ履歴を持つことになったと考えられる。

材料非線形性を考慮した場合の収束履歴の結果からは、体積が一定のまま外力仕事が単調に収束し、初期形状に対して材料非線形性を考慮しない場合と同程度の52%まで減少する結果を得た。

7.2 三軸トラス状連続体の形状最適化問題 三次元連続体に対する例題として、図6のような三軸トラス状連続体の形状最適化問題を縦200mm、厚さ30mmの拘束面から垂直方向に90mmの部材端部に負荷する条件で解析した。ただし、実際の設計では他部品との干渉から改善効果が最も望める部分の形状変更が制限されることが頻出することを勘案して、変位固定境界と境界力負荷境界に加えて、各部の上下面、さ

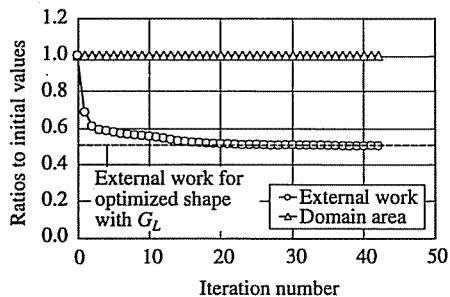


Fig. 5 Iteration histories for hole optimization problem

らには、上端部と下端部の両側面の一部で法線方向の形状変動を拘束した。また、形状変動が許された両側面での面内方向の移動も拘束した。計算に用いた値は  $|\bar{P}|=5.5 \times 10^3$  N/mm, ヤング率  $2.1 \times 10^5$  MPa, ポアソン比 0.3, 降伏応力  $\sigma_a=2.5 \times 10^2$  MPa である。

図7に材料非線形性を考慮した場合と考慮しない場合の最適化形状と塑性領域の比較を示す。図8は材料非線形性を考慮した場合の目的汎関数(外力仕事)と制約汎関数(体積)の収束履歴を示す。図9は荷重-変位線図を初期形状と最適形状とで比較した結果である。

この例題では、材料非線形性を考慮した場合と考慮しない場合の最適化形状に差異が現れた。上傾斜部の断面1(図7参照)では材料非線形性を考慮しない場合の断面が材料非線形性を考慮した場合の断面より大きくなっているのに対して、中央部の断面2では逆に材料非線形性を考慮した場合の断面が大きくなっている。その理由は次のように考えられる。本例題では上下の傾斜部では塑性ヒンジが発生する。材料非線形性を

を考慮しない場合には、上下の傾斜部で塑性ヒンジが発生し難くするように(応力を緩和させるように)補強する結果しか見出せない。それに対して、材料非線形性を考慮した場合には、上下の傾斜部を補強することと、中央部を補強することの調和を保ちながら補強することができた結果、中央部で負荷を分担させる解を見出したためであると考えられる。

材料非線形性を考慮した場合の収束履歴の結果は、外力仕事量が27%まで減少したことを示している。材料非線形性を考慮しない場合には32%であった。この結果から、本論文で示した方法が有効に機能することが裏付けられた。

さらに、荷重-変位線図の結果を示した図9からは、負荷点変位を同一にした条件で比較しても、初期形状のときの最終変位を基準にした場合、初期形状に比べ約5%増加し、材料非線形性を考慮しない形状最適化の結果と比べても約3%増加する結果となった。この結果は、形状最適化において材料非線形性を考慮することの実用性を示している。

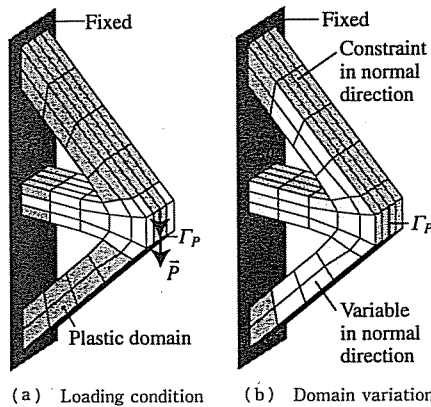


Fig. 6 Shape optimization problem of three-bar-truss-like continuum

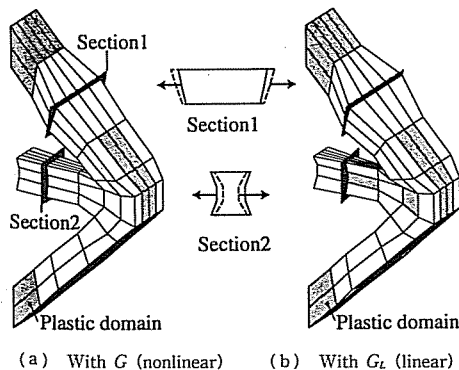


Fig. 7 Optimized shapes of three-bar-truss-like continuum

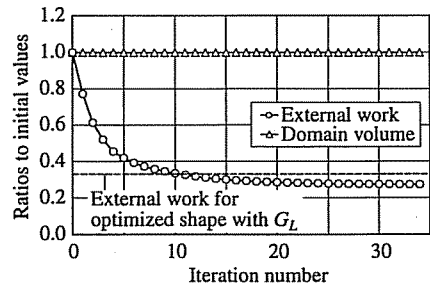


Fig. 8 Iteration histories for three-bar-truss-like continuum optimization problem

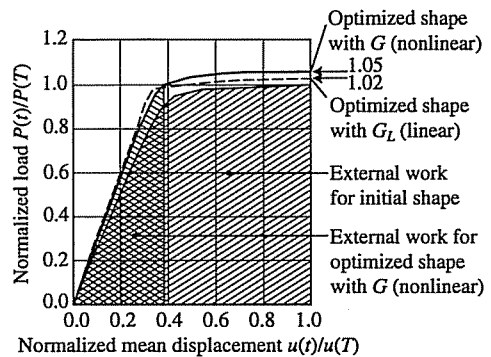


Fig. 9 Load-displacement curves for three-bar-truss-like continuum optimization problem

## 8. おわりに

結合流れ則に従う塑性変形を念頭においた経路依存形の材料非線形性に注目し、その材料非線形性を有した連続体の外力仕事最小化問題を定式化し、その問題に対する形状こう配関数を理論的に導出した。さらに、比例負荷の仮定を用いれば準自己随伴関係が成立し、随伴方程式を解かなくても形状こう配関数が評価できることを示した。最後に、法法を用いた解析例を通して、実際の設計では他部品との干渉から改善効果が見込める部分の形状変更が制限されることが頻出するが、そのような場合にも材料非線形性を考慮することによって考慮しない場合よりも改善できることを示した。

## 文 献

- (1) Ryu, Y. S., Haririan, M., Wu, C. C. and Arora, J. S., Structural design sensitivity analysis of nonlinear response, *Comput. Struct.*, 21(1985), 245-255.
- (2) Cardoso, J. B. and Arora, J. S., Variational method for design sensitivity analysis in nonlinear structural mechanics, *AIAA J.*, 26(1988), 595-603.
- (3) Hisada, T., Sensitivity analysis of nonlinear fem, *Proc. 5th ASCE Specialty Conf. on Probabilistic Methods in Civil Engng.*, (1988), 160-163.
- (4) Hisada, T., Recent progress in nonlinear fem-based sensitivity analysis, *JSME Int. J.*, 38(1995), 301-310.
- (5) Tsay, J. J. and Arora, J. S., Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems, part 1: General theory, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 81(1990), 183-208.
- (6) Vidal, C. A., Lee, H. S. and Haber, R. B., The consistent tangent operator for design sensitivity analysis of history-dependent response, *Comput. Systems Engng.*, 2(1991), 509-523.
- (7) Vidal, C. A. and Haber, R. B., Design sensitivity analysis for rate-independent elastoplasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 107(1993), 393-431.
- (8) 山崎光悦・渋谷和弘, 弾塑性体の設計感度解析法と形状最適化への応用, *機論*, 60-576, A(1994), 1892-1897.
- (9) Giunta, A. A., Narducci, R., Burgee, S., Grossman, B., Mason, W. H., Watson, L. T. and Haftka, R. T., Variable-complexity response surface aerodynamic design of an hsc wing, *Proc. of 13th AIAA Aerodynamics Conference*, (1995), 994-1002.
- (10) 柏村孝義・森孝男・白鳥正樹・干強・丸山修, 統計的最適手法による衝撃荷重を受ける構造部材の最適設計, *機論*, 62-603, A(1996), 2422-2427.
- (11) Yuge, K. and Kikuchi, N., Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation, *Struct. Opt.*, 10(1995), 197-208.
- (12) 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, *機論*, 60-574, A(1994), 1479-1486.
- (13) 畔上秀幸・吳志強, 線形弾性問題における領域最適化解析(法法によるアプローチ), *機論*, 60-578, A(1994), 2312-2318.
- (14) 下田昌利・吳志強・畔上秀幸・桜井俊明, 汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法(法法によるアプローチ), *機論*, 60-578, A(1994), 2418-2425.
- (15) 吳志強・畔上秀幸, 固有振動問題における領域最適化解析(法法によるアプローチ), *機論*, 61-583, C(1995), 930-937.
- (16) 吳志強・畔上秀幸, 周波数応答問題における領域最適化解析(法法によるアプローチ), *機論*, 61-590, C(1995), 3968-3975.
- (17) 下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, 応力分布を規定した連続体の境界形状決定, *機論*, 62-602, A(1996), 2393-2400.
- (18) 下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, ホモロガス変形を目的とする連続体の形状決定, *機論*, 62-604, A(1996), 2831-2837.
- (19) 下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, 形状最適化におけるミニマックス問題の数値解法(最大応力と最大変位の最小設計), *機論*, 63-607, A(1997), 610-617.
- (20) 井原久・下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, 位相最適化と形状最適化の統合による多目的構造物の形状設計(均質化法と法法によるアプローチ), *機論*, 62-596, A(1996), 1091-1097.
- (21) Azegami, H., Kaizu, S., Shimoda, M. and Katamine, E. (Hernandez, S. and Brebbia, C. A. 編), Irregularity of shape optimization problems and an improvement technique, *Computer Aided Optimization Design of Structures V*, (1997), 309-326, Computational Mechanics Publications, Southampton.
- (22) 久田俊明・野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, (1995), 366-380, 丸善.
- (23) Cea, J. (Haug, E. J. and Cea, J. 編), Problems of shape optimization, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, 2(1981), 1005-1048, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- (24) Cea, J. (Haug, E. J. and Cea, J. 編), Numerical methods of shape optimal design, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, 2(1981), 1049-1088, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- (25) Zolésio, J. P. (Haug, E. J. and Cea, J. 編), The material derivative (or speed) method for shape optimization, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, 2(1981), 1089-1151, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- (26) Zolésio, J. P. (Haug, E. J. and Cea, J. 編), Domain variational formulation for free boundary problems, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, 2(1981), 1152-1194, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- (27) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag, New York.
- (28) 森口繁一・宇田川金圭久・一松信, 数学公式 I, (1956), 55, 岩波書店.
- (29) Kristensen, E. S. and Madsen, N. F., On the optimum shape of fillets in plates subject to multiple in-plane loading, *Int. J. Num. Methods Eng.*, 10(1976), 1007-10191.
- (30) Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, (1935), Izd. Akad. Nauk.