

座屈に対する形状最適化*

畔上秀幸*¹, 須貝康弘*², 下田昌利*³

Shape Optimization with Respect to Buckling

Hideyuki AZEGAMI*⁴, Yasuhiro SUGAI and Masatoshi SHIMODA*¹ Dept. of Mechanical Engineering, Toyohashi University of Technology,
1-1 Hibarigaoka, Tempaku-cho, Toyohashi, Aichi, 441-8580 Japan

A shape optimization method for linear buckling load maximization problems of continua is presented. Using a one-parameter family of mappings defined in a domain where a continuum lies initially, a buckling load maximization problem considering multimodal conditions was formulated. The shape gradient density function for the problem was derived using the Lagrange multiplier method and the formula of the material derivative. The shape gradient density function was then used in a shape optimization analysis conducted with the traction method. The validity of the proposed method was demonstrated by numerical analyses of column-like and arch-like two-dimensional continua in a plane strain condition.

Key Words: Optimum Design, Buckling, Finite-Element Method, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Traction Method

1. はじめに

機械構造の軽量化を計る場合、剛性は確保できても新たに座屈現象が誘発されることがある。本論文では、座屈現象に注目した形状最適化問題の定式化とその解法を提示する。

座屈荷重の最大化を目的にした形状最適化問題に関する研究を振り返れば、両端固定柱を対象にした一連の研究があった。Tadibakhsh and Keller⁽¹⁾は領域の大きさ一定の下で座屈荷重を最大化する両端固定柱の断面積分布を求める問題をLagrange乗数法によって定式化し、停留条件として得られる連立微分方程式を解析的に解くことによって、断面積が零になる2つのヒンジを有する形状を得た。その後、Olhoff and Rasmussen⁽²⁾は、その解はヒンジ部でのたわみ角の不連続性を考慮していないために、ヒンジで挟まれた部分が剛体回転する1次モードを評価できていなかったことを指摘して、それを考慮した形状を示した。しかし、彼らは、その解よりも高い座屈荷重の柱が存在することを見出し、新たな定式化を提案した。その定式化では、Tadibakhshらの定式化に1次モードと2次モードの座屈荷重が一致する重根条件

と最小断面積の制約条件が加えられた。最適解は最小断面積の制約条件を緩めていく過程で得られた。その最適形状はTadibakhshらが得た形状のヒンジ部が有限の断面積として残る形状であった。さらに、多田と汪⁽³⁾は、Olhoffらの解における2つの固有モード関数の非対称性に疑問を抱き、重根定式化を再検討した結果、互いに対称で直交する2つの固有モード関数を解析的に導出した。また、多田と汪⁽⁴⁾は、ヒンジのある形状に関してもOlhoffらの解の不備を指摘して、ヒンジのある最適形状を解析的に導出した。

骨組構造を対象とした座屈荷重の最大化問題は、甘利、山川、奥村⁽⁵⁾が解いている。彼らは、要素ごとの断面積を設計変数に選んだ座屈荷重の最大化問題を定式化し、Rosenの傾斜投影法を用いた数値解析結果を示した。

CADデータを設計変数に選んだCAEシステムを用いた座屈荷重最大化解析もBotkin⁽⁶⁾によって報告されている。

しかしながら、連続体を対象にした座屈荷重最大化問題の実用的な解法に関する提案は未だなされていないようである。浜田、瀬口、多田⁽⁷⁾はHorák⁽⁸⁾の逆変分原理に着目した定式化を示した。しかし、数値解法ははり構造に限定されていた。

一方、著者らは、これまで、偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の幾何学的境界形状を設計対象にした形状最適化問題の汎用解法として、Hilbert空間の勾配法を応用した力法を提案してきた⁽⁹⁾。これまで、線形弾

* 原稿受付 1999年9月20日。

¹ 正員、豊橋技術科学大学(☎441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。² (株)シーティーアイ(☎450-0003 名古屋市中村区名駅南1-27-2)。³ 正員、三菱自動車工業(株)(☎444-0908 岡崎市橋目町宇新中切1)。

E-mail: azegami@mech.tut.ac.jp

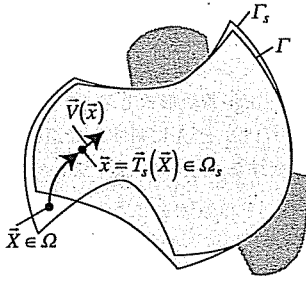


Fig. 1 Domain variation

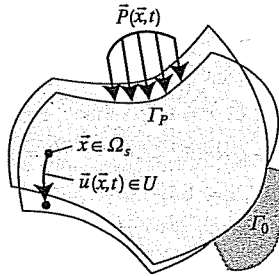


Fig. 2 Deformation by external forces

性問題では外力仕事最小化問題^{(10),(11)}, 振動固有値移動問題⁽¹²⁾, 周波数応答問題⁽¹³⁾, 応力分布規定問題⁽¹⁴⁾, 変位規定問題⁽¹⁵⁾, 最大変位および最大応力最小化問題⁽¹⁶⁾に適用されてきた。

本論文では、この方法を線形弾性連続体の座屈荷重最大化問題にも適用できることを紹介する。

2. 領域変動

領域 $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$, その境界 Γ で定義されている連続体が、図1に示すように、形状変動に関する指定された拘束条件の集合 θ の下で変動して領域 Ω_s と境界 Γ_s になると仮定する。このとき、領域変動は1媒介変数写像族 $\bar{T}_s(\Omega)$ を用いて次のように表すことができる。

$$D \ni \bar{T}_s(\bar{\Omega}) : \bar{\Omega} \ni \bar{x} \mapsto \bar{x} \in \bar{\Omega}_s \quad (1)$$

$$\bar{T}_s^{-1}(\bar{\Omega}_s) : \bar{\Omega}_s \ni \bar{x} \mapsto \bar{x} \in \bar{\Omega} \quad (2)$$

ここで、 s は領域の変動履歴を表すパラメーターである。写像族 \bar{T}_s の許容集合 D は1対1写像を保証するように次式で与えられると仮定する。

$$D = \left\{ \bar{T}_s(\cdot) \in (C^1(\bar{\Omega}))^n \mid \det \left(\frac{\partial T_{si}}{\partial X_j}(\bar{X}) \right) \neq 0, \right. \\ \left. T_{si}(\bar{X}) < +\infty, \bar{X} \in \Omega, \theta \right\} \quad (3)$$

ただし、 $C^l(\Omega_s)$ は l 次の導関数まで連続な関数空間、 $\det(\partial T_{si}/\partial X_j(\bar{X}))$ は Jacobi 行列式を表す。また、 $\bar{\Omega}$ は開領域 Ω の閉領域を表す。なお、本論文では (\cdot) は n 次元ベクトルを表す。

3. 座屈荷重最大化問題

その線形弾性体は、図2に示すように、部分境界 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 上で指定された方向に変位が拘束され、部分境界 $\Gamma_P \subset \Gamma$ 上の変位拘束されていない方向に非零の境界力 \bar{P} が作用すると仮定する。本論文では簡単のために、非零の境界力や変位拘束が与えられた自由度では形状変動しないと仮定する(図1参照)。すなわち、これらの形状変動制約を式(3)の θ に加える。

この線形弾性問題に対して、線形座屈モードが m 次、 $1 \leq m \leq +\infty$, まで存在して、モードの次数 $r = 1, 2, \dots, m$ は初期形状に対する次数で固定し、形状変化の過程で座屈荷重係数の順位が入れ替わっても次数の置き換えをしないものと仮定する。このとき、重根制約を課した線形座屈荷重最大化問題は、境界力 $\bar{P}(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Gamma_P$, 領域の許容変動領域 $\Omega_{\text{limit}} \supseteq \Omega_s$, $s \geq 0$ で規定された剛性テンソル $C_{ijkl}(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Omega_{\text{limit}}$, $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$, および領域の大きさ許容値 M が与えられた下で、次のように定式化される。

$$\min_{\bar{T}_s(\bar{\Omega}) \in D} -\zeta^{(1)} \quad \text{such that} \\ a(\bar{u}^{(0)(r)}, \bar{v}^{(0)(r)}) = l(\bar{v}^{(0)(r)}) \\ \bar{u}^{(0)(r)} \in U, \forall \bar{v}^{(0)(r)} \in U, r = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

$$a(\bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) + \zeta^{(r)} d(\bar{u}^{(0)(r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) = 0 \\ \bar{u}^{(r)} \in U, \forall \bar{v}^{(r)} \in U, r = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

$$\zeta^{(1)} \leq \zeta^{(r)} \quad (6)$$

$$r = 2, 3, \dots, m$$

$$\text{meas}(\Omega_s) \equiv \int_{\Omega_s} dx \leq M \quad (7)$$

ただし、 $a(\cdot, \cdot)$, $d(\cdot, \cdot, \cdot)$, $l(\cdot)$ および U は次のように定義する。

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad (8)$$

$$d(\bar{u}^{(0)}, \bar{u}, \bar{v}) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} u_{k,l}^{(0)} u_{m,i} v_{m,j} dx \quad (9)$$

$$l(\bar{v}^{(0)}) = \int_{\bar{T}_s(\Gamma_P)} P_i v_i^{(0)} d\Gamma \quad (10)$$

$$U = \left\{ \bar{u} \in (H^1(\Omega_s))^n \mid \text{boundary conditions} \right. \\ \left. \text{with respect to displacement on } \Gamma_0 \right\} \quad (11)$$

$(H^1(\Omega_s))^n$ は領域 Ω_s で定義された1階導関数まで2乗可積分な n 次元ベクトル関数の Hilbert 空間、あるいは Sobolev 空間、である。式(4)は座屈を考慮しない変位 $\{\bar{u}^{(0)(r)}\}_{r=1}^m$ を決定するための変分形式、式(5)は r 次の座屈モード $\{\bar{u}^{(r)}\}_{r=1}^m$ と座屈荷重係数 $\{\zeta^{(r)}\}_{r=1}^m$ に対する変分形式を与えている。これらの式において $\{\bar{v}^{(0)(r)}\}_{r=1}^m$ および $\{\bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^m$ はそれぞれの変分形式における変分関

数,あるいは随伴変位および随伴座屈モードと呼ばれる。本来,座屈を考慮しない変位は1つであるが,式(4)のように m 個の変位 $\{\bar{u}^{[0](r)}\}_{r=1}^m$ を定義する理由は,座屈モードを決定する式(5)が m 個の独立な関係式にするためである。

なお,本稿ではベクトル表示 $(\bar{\cdot})$ と添字表示 $(\cdot)_i$ を併用する。添字表示では総和規約と空間に関する偏微分表記法 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。また, $\{(\cdot)^{(r)}\}_{r=1}^m$ を $(\cdot)^{(1)}, (\cdot)^{(2)}, \dots, (\cdot)^{(m)}$ の意味で用いる。

この問題に, Lagrange 乗数法, あるいは随伴変数法, を適用する。式(4), (5)に対する Lagrange 乗数を $\{\bar{v}^{[0](r)}, \bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^m$, 重根制約式(6)に対する Lagrange 乗数をそれぞれ $\{\mu^{(r)}\}_{r=2}^m$, 領域の大きさ制約式(7)に対する Lagrange 乗数を Λ と仮定すると, Lagrange 乗数形式 $L(\{\bar{u}^{[0](r)}, \bar{v}^{[0](r)}, \zeta^{(r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^m, \{\mu^{(r)}\}_{r=2}^m, \Lambda, \bar{T}_s)$ は次式のように与えられる。

$$L = -\zeta^{(1)} + \sum_{r=1}^m \left\{ a(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{v}^{[0](r)}) - l(\bar{v}^{[0](r)}) \right. \\ \left. + a(\bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) + \zeta^{(r)} d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) \right\} \\ + \sum_{r=2}^m \mu^{(r)} (\zeta^{(1)} - \zeta^{(r)}) + \Lambda (\text{meas}(\Omega_s) - M) \quad (12)$$

領域変動に対する L の s に対する導関数 \dot{L} は, 物質導関数の公式から, 領域変動に対する速度,

$$\bar{V}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial s} (\bar{T}_s^{-1}(\bar{x})) \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_s \quad (13)$$

を用いて次式のように与えられる。

$$\dot{L} = -\dot{\zeta}^{(1)} \left(1 - \sum_{r=2}^m \mu^{(r)} - d(\bar{u}^{[0](1)}, \bar{u}^{(1)}, \bar{v}^{(1)}) \right) \\ - \sum_{r=2}^m \dot{\zeta}^{(r)} \left(\mu^{(r)} - d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) \right) \\ + \sum_{r=1}^m \left\{ a(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{v}^{[0](r)}) - l(\bar{v}^{[0](r)}) \right. \\ \left. + a(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{v}^{[0](r)}) + \zeta^{(r)} d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) \right. \\ \left. + a(\bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) + \zeta^{(r)} d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) \right. \\ \left. + a(\bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) + \zeta^{(r)} d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) \right\} \\ + \sum_{r=2}^m \dot{\mu}^{(r)} (\zeta^{(1)} - \zeta^{(r)}) \\ + \dot{\Lambda} (\text{meas}(\Omega_s) - M) + l_G(\bar{V}) \quad (14)$$

ただし,

$$l_G(\bar{V}) = \int_{\bar{T}_s(\Gamma)} G n_i V_i d\Gamma \quad (15)$$

$$G = \sum_{r=1}^m (C_{ijkl} u_{k,i}^{(r)} v_{i,j}^{(r)} + \zeta^{(r)} C_{ijkl} u_{k,i}^{[0](r)} u_{o,i}^{(r)} v_{o,j}^{(r)} \\ + C_{ijkl} u_{k,i}^{[0](r)} v_{i,j}^{[0](r)}) + \Lambda \quad (16)$$

なお,本稿では空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数を $(\cdot)'$ で表す。また, \bar{n} は外向き単位法線である。

したがって, Lagrange 乗数形式 L の $\{\zeta^{(r)}, \bar{u}^{[0](r)}, \bar{v}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^m, \{\mu^{(r)}\}_{r=2}^m$ と Λ に対する最適性の条件は不等式制約条件に対する Kuhn-Tucker 条件を考慮すると次のようになる。

$$d(\bar{u}^{[0](1)}, \bar{u}^{(1)}, \bar{v}^{(1)}) = 1 - \sum_{r=2}^m \mu^{(r)} \quad (17)$$

$$d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) = \mu^{(r)}, \quad r = 2, 3, \dots, m \quad (18)$$

$$a(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{v}^{[0](r)}) = l(\bar{v}^{[0](r)}) \\ \forall \bar{v}^{[0](r)} \in U, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

$$a(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{v}^{[0](r)}) + \zeta^{(r)} d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) = 0 \\ \forall \bar{u}^{[0](r)} \in U, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

$$a(\bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) + \zeta^{(r)} d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) = 0 \\ \forall \bar{v}^{(r)} \in U, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

$$a(\bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) + \zeta^{(r)} d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}) = 0 \\ \forall \bar{u}^{(r)} \in U, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (22)$$

$$\mu^{(r)} \geq 0, \quad \mu^{(r)} (\zeta^{(1)} - \zeta^{(r)}) = 0, \quad \zeta^{(1)} \leq \zeta^{(r)} \\ r = 2, 3, \dots, m \quad (23)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \Lambda (\text{meas}(\Omega_s) - M) = 0, \quad \text{meas}(\Omega_s) \leq M \quad (24)$$

これらの条件から $\{\zeta^{(r)}, \bar{u}^{[0](r)}, \bar{v}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^m, \{\mu^{(r)}\}_{r=2}^m$ と Λ が決定できることを見ていこう。座屈を考慮しない変位 $\{\bar{u}^{[0](r)}\}_{r=1}^m$ は式(19)で決定できる。この方程式は式(4)と同一である。また, 座屈荷重係数 $\{\zeta^{(r)}\}_{r=1}^m$ と大きさ不定の座屈モード $\{\bar{u}^{(r)}\}_{r=1}^m$ は固有方程式(21)によって決定できる。この方程式は式(5)と同一である。一方, 大きさ不定の随伴座屈モード $\{\bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^m$ は式(22)で決定できる。しかし, この関係は $\{\bar{u}^{(r)}\}_{r=1}^m$ の決定式(21)と同一の関係を与えている。さらに, 座屈モード $\{\bar{u}^{(r)}\}_{r=1}^m$ と随伴座屈モード $\{\bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^m$ の大きさは正規化条件式(17)と(18)によって決定できる。したがって, これらの決定条件から, 座屈モード $\{\bar{u}^{(r)}\}_{r=1}^m$ と随伴座屈モード $\{\bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^m$ は自己随伴関係:

$$\bar{u}^{(r)} = \bar{v}^{(r)}, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

を利用して, 正規化条件:

$$d(\bar{u}^{[0](1)}, \bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(1)}) = 1 - \sum_{r=2}^m \mu^{(r)} \quad (26)$$

$$d(\bar{u}^{[0](r)}, \bar{u}^{(r)}, \bar{u}^{(r)}) = \mu^{(r)}, \quad r = 2, 3, \dots, m \quad (27)$$

を用いれば決定できることになる。ただし, ここで使われる重根制約の Lagrange 乗数 $\{\mu^{(r)}\}_{r=2}^m$ は, 問題設定が適切であれば, 重根制約の不等式制約条件に対する

Kuhn-Tucker 条件の一部である式 (23) を満たすように決定できる。この際、 r 次座屈モードについて重根制約が不等号で成立しているときには $\mu^{(r)} = 0$ 、したがって、正規化条件式 (27) を用いて r 次座屈モードの大きさを決定すれば $\bar{v}^{(r)} = \bar{0}$ となる。重根が成立する場合には、 $\mu^{(r)} > 0$ を変動させることによって重根制約を成立させることができる。その際、 $\mu^{(r)} > 0$ を変動させれば、 r 次座屈モード $\bar{v}^{(r)}$ の大きさが変化し、それによって後述の形状勾配関数を変更される。さらに、それを用いた形状変動を行えば、それぞれの座屈荷重係数が変動する。この関係を用いれば、重根制約を満たすように $\mu^{(r)} > 0$ を決定できる。

座屈を考慮しない随伴変位 $\{\bar{v}^{(0)(r)}\}_{r=1}^{m_1}$ は、上で得られた座屈荷重係数 $\{\zeta^{(r)}\}_{r=1}^{m_1}$ と座屈モード $\{\bar{v}^{(r)} = \bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^{m_1}$ を使って式 (20) で決定できる。この方程式は、領域 Ω_s 内に初期ひずみ $\varepsilon_{ij}^{(r)} \equiv \zeta^{(r)} u_{k,i}^{(r)} u_{k,j}^{(r)}$ を発生させたときの変位が $\bar{v}^{(0)(r)}$ となることを示している。領域の大きさ制約の Lagrange 乗数 Λ は領域の大きさ制約の不等式制約条件に対する Kuhn-Tucker 条件の一部である式 (24) を満たすように決定できる。このときも、領域の大きさ制約が不等号で成立しているときには $\Lambda = 0$ となる。領域の大きさ制約が等号で成立する場合には、 $\Lambda > 0$ を変動させることによって領域の大きさ制約を成立させることができる。その際、 $\Lambda > 0$ を変動させれば、後述の形状勾配関数を変更され、それを用いた形状変動を行えば、領域の大きさが変動する関係を用いる。

このように決定した $\{\bar{v}^{(0)(r)}, \bar{v}^{(r)}, \zeta^{(r)}, \bar{v}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^{m_1}, \{\mu^{(r)}\}_{r=2}^{m_2}$ と Λ を用いれば、Lagrange 乗数形式の領域変動を表す s に対する導関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \{\bar{v}^{(0)(r)}, \bar{v}^{(r)}, \zeta^{(r)}, \bar{v}^{(r)}, \bar{v}^{(r)}\}_{r=1}^{m_1}, \{\mu^{(r)}\}_{r=2}^{m_2}, \Lambda} \\ = l_G(\bar{V}) \end{aligned} \quad (28)$$

このとき、式 (16) で与えられる $G\bar{n}$ は、領域の微小変動を与える速度場 \bar{V} の係数関数になっていることから、この問題における形状勾配関数、 G は形状勾配密度関数になる。

4. 力法

重根制約を導入した座屈荷重最大化問題の形状勾配関数が導出できたことから、この問題の領域形状最適化解析に力法を適用することができる。力法は、速度場 \bar{V} を次式で解きながら有限の増分 $\Delta s > 0$ を与えて、微小な領域変動 $\bar{V}\Delta s$ を繰り返していく方法として提案されている⁽⁹⁾。

$$a(\bar{V}, \bar{y}) = -l_G(\bar{y}) \quad \forall \bar{y} \in D \quad (29)$$

ただし、双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ は式 (8) によって、一次形式 $l_G(\cdot)$ は式 (15) で与える。

なお、Lagrange 乗数 $\{\mu^{(r)}\}_{r=2}^{m_2}$ と Λ は、前述の通り、それぞれ式 (23) と (24) を満たすように決定する必要がある。本論文では、それぞれの Lagrange 乗数の変動に伴う制約汎関数 $\{\zeta^{(1)} - \zeta^{(r)}\}_{r=2}^{m_2}$ と $\text{meas}(\Omega_s) - M$ の感度を差分で評価して、それを用いた Newton-Raphson 法によって解いた⁽¹³⁾。

5. 解析例

平面ひずみを仮定した 2 次元連続体に対する 3 つの解析例を示す。線形座屈解析や随伴方程式の解析には汎用有限要素法解析プログラム ANSYS 5.2 を利用した。

はり理論に基いて得られている既報の結果と比較するために、両端単純支持柱および両端固定柱に対応した柱状連続体を解析対象に選んだ。図 3 は両端単純支持の柱状連続体に圧縮力が作用した場合の 1 次の座屈荷重を最大化する問題に対する問題設定と解析結果である。繰り返し数 50 回後の形状 (図 3 (d) の左図) は、はり理論に基いて得られている文献⁽⁷⁾ の長方形断面に対する最適形状 (図 3 (d) の右図) と類似の形状になっている。座屈荷重係数を比較すると、本解析における繰り返し数 50 回後の結果が初期形状の場合との比で 4.23 となっているが、文献⁽⁷⁾ の結果では 1.47 であった。両者の差異の原因は不明である。この問題では、1 次の座屈荷重のみに注目して最大化を計ると 2 次以上の座屈荷重もそれに伴って増加することから、重根制約は実際には作動しなかった。また、本解析では収束に至る前に解析を打ち切った。その理由は、両端部での有限要素の潰れ (三角形要素の場合最小内角で評価) が汎用有限要素法解析プログラムのチェック機能に触れ、解析を続行できなくなったためである。

それに対して、両端固定の柱状連続体では重根制約が作動した。図 4 に問題設定と解析結果を示す。繰り返し数 50 回後の形状 (図 4 (d) の左図) は、重根制約の必要性を示した文献^{(2),(3)} の結果 (図 4 (d) の右図) と類似の形状になっている。ただし、文献^{(2),(3)} の結果は断面 2 次モーメントが断面積の 2 乗に比例すること (例えば円形断面) を仮定している。参考までに、座屈荷重係数を比較すると、本解析の結果が初期形状の場合との比で 1.23 であるが、文献^{(2),(3)} の結果では 1.33 であった。この問題においては、1 次の座屈荷重のみに注目して最大化を計ると 2 次以上の座屈荷重はそれに伴って減少した。その結果、重根制約が作動し、その制約の下で目的汎関数 (1 次の座屈荷重) がわずかに増加して収束した。この結果から、重根制約を考慮して最適化を続けることの有用性が裏付けられた。

やや実用的な問題として、静水圧を受ける半円筒形構造の座屈荷重最大化問題を解析した。図 5 に問題設定と解析結果を示す。この問題でも、重根制約が作動し、重根制約の下で目的汎関数 (1 次の座屈荷重) がわずかに増加して収束した。繰り返し数 30 回後の座屈荷重係数は初期形状の場合との比で 1.21 であった。繰り返し数 30 回後の形状 (図 5 (e)) において現れた 3 箇所ヒンジは、それぞれ 1 次座屈モードの節 (上端中央部) と 2 次座屈モードの節 (左右それぞれ 1 箇所) に対応している。この結果は 1 次と 2 次の座屈モードに対して同時に最適化されたことを裏付けている。

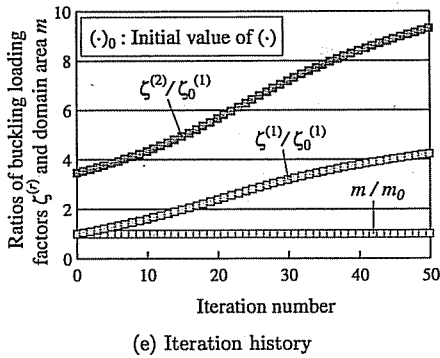
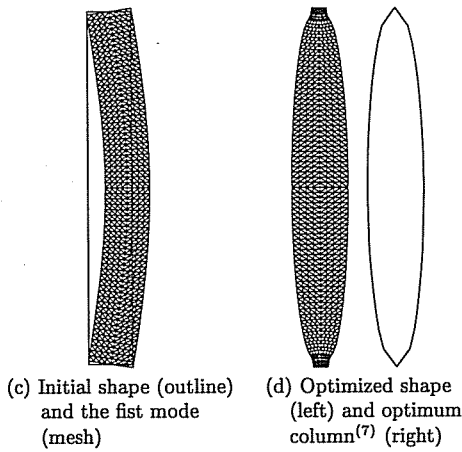
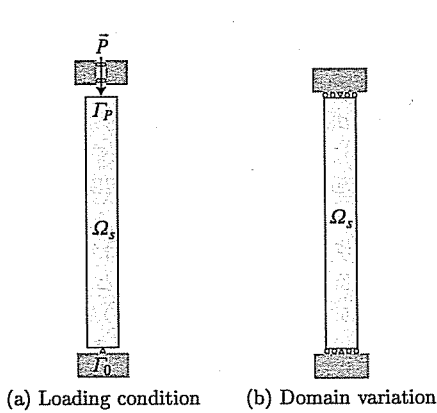


Fig. 3 Maximization problem with respect to the first linear buckling load of column-like two-dimensional continuum simply supported at both ends

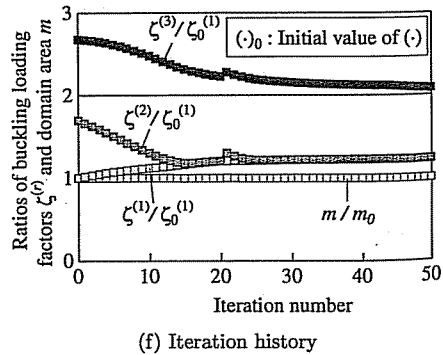
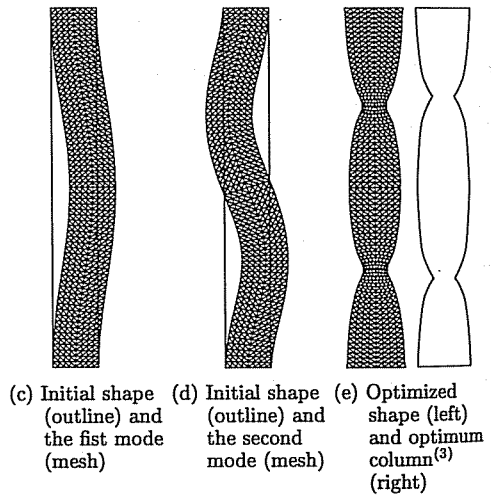
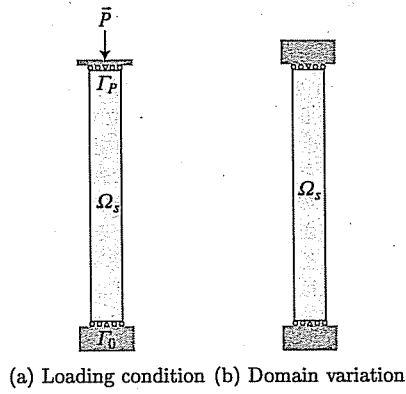


Fig. 4 Maximization problem with respect to the fundamental linear buckling load of column-like two-dimensional continuum clamped at both ends

6. おわりに

重根制約を考慮した線形座屈荷重最大化問題を定式化し、その問題に対する形状勾配関数を導出し、それが解析可能であることを示した。その形状勾配関数を用いれば、方法を適用することによって、初期形状と同じ滑らかさの境界を有した最適化された形状が得られることを解析例を通して示した。

文 献

- (1) I. Tadibakhsh and J. B. Keller. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, Vol. 29, pp. 159-164, 1962.
- (2) N. Olhoff and S. H. Rasmussen. On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns. *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 13, p. 605, 1977.
- (3) 多田幸生, 汪藍天. 両端固定柱の最適形状と固有モードの対称性についての再検討. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 59, pp. 1150-1155, 1993.
- (4) 多田幸生, 汪藍天. ヒンジのある両端固定柱の最適形状とその固有モード. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 61, pp. 454-459, 1995.
- (5) 甘利昌彦, 山川宏, 奥村敦史. 線形座屈を考慮した骨組構造物の最適設計. 日本機械学会論文集 (第 1 部), Vol. 44, pp. 2253-2262, 1978.
- (6) M. E. Botkin. Shape optimization with buckling and stress constraints. *AIAA Journal*, Vol. 34, pp. 423-425, 1996.
- (7) 浜田実, 瀬口靖幸, 多田幸生. 逆変分原理による構造物の形状決定問題. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 46, pp. 187-196, 1980.
- (8) V. Horák. *Inverse Variational Principles of Continuum Mechanics*. Rozprawy Československe Akad. Ved., 1969.
- (9) 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 1479-1486, 1994.
- (10) 畔上秀幸, 吳志強. 線形弾性問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 2312-2318, 1994.
- (11) 下田昌利, 吳志強, 畔上秀幸, 桜井俊明. 汎用 fem コードを利用した領域最適化問題の数値解析法 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 2418-2425, 1994.
- (12) 吳志強, 畔上秀幸. 固有振動問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 61, pp. 930-937, 1995.
- (13) 吳志強, 畔上秀幸. 周波数応答問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 61, pp. 3968-3975, 1995.
- (14) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明. 応力分布を規定した連続体の境界形状決定. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 62, pp. 2393-2400, 1996.
- (15) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明. ホモログス変形を目的とする連続体の形状決定. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 62, pp. 2831-2837, 1996.
- (16) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明. 形状最適化におけるミニマクス問題の数値解析 (最大応力と最大変位の最小設計). 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 63, pp. 610-617, 1997.

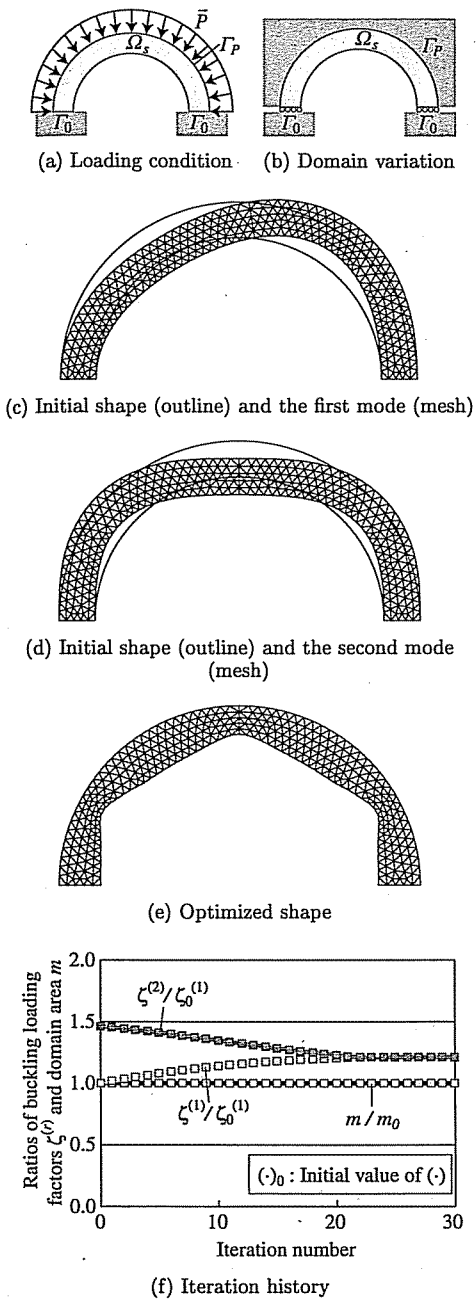


Fig. 5 Maximization problem with respect to the fundamental linear buckling load of arch-like two-dimensional continuum loaded by static water pressure on the outside boundary under complete constraint on the bottom boundaries and domain variation allowed on the inside boundary