

幾何学的非線形性を考慮した
変形経路制御問題に対する形状最適化*井原 久*¹, 畔上 秀幸*², 下田 昌利*¹Shape Optimization for Displacement Path Control Problem
Considering Geometrical Non-linearityHisashi IHARA*³, Hideyuki AZEGAMI and Masatoshi SHIMODA*³ Strength Testing Safety Proving Department Car Research & Development Center,
1 Nakashinkiri Hashime-cho, Okazaki-shi, Aichi, 444-8501 Japan

This paper presents a shape optimization method to displacement path control problem taking into account geometrical non-linearity. The aim in this paper is to minimize the time integration of squared displacement error norm on the responded mode and the prescribed mode by varying a boundary shape under a volume constraint. The shape sensitivity is derived using the Lagrange multiplier method and the formula of the material derivative. A procedure to solve this problem using the traction method is presented, which one of the authors has proposed as an approach to solving domain optimization problems. The validity of proposed method is verified by applying to basic numerical examples.

Key Words: Optimum Design, Nonlinear Problem, Numerical Analysis, Finite Element Method, Design Sensitivity Analysis, Shape Optimization, Traction Method

1. はじめに

構造の幾何学的非線形問題は、自動車部品の設計においてもボデー外板部品の飛び移り座屈の制御、抑制等、薄板構造の張り剛性を確保する場合に頻出する問題である。このような問題に対しても厳しい設計基準を満足しながら、開発期間の短縮を実現する方法の一つとして構造最適化手法の適用が期待されている。

本論文では、このような幾何学的非線形問題に対する構造最適化の基礎的研究として、境界形状の変更によって変形経路の制御を試みる。変形経路の制御は各時間レベルあるいは各荷重レベルにおける変形モードを制御することにより実現する。

これまで、変形モードを制御する設計の一つとしてホモロジー設計が研究されてきた。その変形はホモロガス変形として「あるモードの外力系のもとで変形前、変形中、変形後を通じて構造物あるいはその一部が指定された形状を保つこと」と定義されている⁽¹⁾。

これまで、線形構造物の変形モードを制御しホモロガス変形を実現するホモロジー設計に関する研究として、半谷らの一般逆行列の解の存在条件を利用する方法⁽²⁾や吉川らの節点変位間の制約マトリックスを導入する方法⁽³⁾、尾田ら、富田らの遺伝的アルゴリズムを利用した方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾が提案されている。また、著者らも方法に基づく境界形状最適化手法⁽⁶⁾や均質化法に基づく位相最適化手法⁽⁷⁾によるホモロガス構造物の算出方法⁽⁸⁾⁽⁹⁾を提案している。しかし、これらはいずれも線形範囲での検討であり、幾何学的非線形性を有する構造物の変形経路制御を対象にした感度解析法や感度解析に基づく構造最適化手法は、これまで研究されてこなかった。

一方、非線形挙動を示す構造物の有限個の寸法を設計変数に選んだ寸法最適化問題を取扱った研究は数多く実施され、それぞれの方法の特徴についても比較されている⁽¹⁰⁾。これに対し著者らは、材料非線形性を有する構造物に対しても、境界形状の自由度を制限しない形状最適化問題に対する解法⁽¹¹⁾を提案しているが、幾何学的非線形性の考慮は課題であった。また、これらの研究は変形経路の制御に着目した研究ではなかった。

本論文では幾何学的非線形性を有する構造物の境界

* 原稿受付 2000年5月22日。

¹ 正員, 三菱自動車工業(株) (☎444-0908 岡崎市橋目町中新切1)。² 正員, 豊橋技術科学大学工学部 (☎441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

E-mail: ihara-hisashi@pde.mitsubishi-motors.co.jp

形状を力法に基づいて変更することにより、その変形経路を狙いの経路と相似になるよう制御する変位規定問題について記述している。具体的には、体積を制約条件として、目的汎関数に応答変位と規定変位の二乗誤差の時間積分をとることにより、狙いの経路と相似になるよう制御する問題を定式化し、Lagrange乗数法と物質導関数法を用いた従来の手順で形状こう配関数と呼ばれる形状感度を導出する。その後、力法を適用した具体的な解法を提示するとともに、簡単な計算例により、提案する方法の有効性と実用性を示す。

2. 記号法

最初に、本論文で使用する基本的な記号法をまとめておく。n次元空間R^n(Rは実数を表す)、n=2, 3のベクトルと2階のテンソルおよびm階のテンソルをそれぞれ矢印表示(→), (→→), m(→→→), あるいは添字表示(·)_i, (·)_{ij}, (·)_{ijk}で表す。添字表示では総和規約と空間座標x̄ ∈ R^nに関する偏微分表記法(·)_{,i} ≡ ∂(·)/∂x_iを使用する。また、本来、空間座標x̄ ∈ R^nと時間t ∈ Rの関数は(·)(x̄, t), あるいはその関数の合成関数は(·)((·)(x̄, t))と明示すべきであるが、必要に応じて時間の関数であることだけを強調して(·)(t)と表すことにする。

3. 領域変動

最初に、連続体が定義された領域が変動する様子を定式化する。図1に示すように、初期状態においてn次元の領域Ω ∈ R^n, n=2, 3, と境界Γで定義された連続体は、形状変動に関する拘束条件の集合Θのもとで変動して領域Ω_sと境界Γ_sになると仮定する。このとき、領域変動は1媒介変数写像族T_s(Ω)を用いて次のように表すことができる⁽¹²⁾⁻⁽¹⁵⁾。

$$D \ni \bar{T}_s(\Omega): \Omega \ni \bar{X} \mapsto \bar{x} \in \Omega_s, s \geq 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここで、sは領域の変動履歴(時間とは異なる)を表すパラメータである。写像族T_sの許容集合Dは1対1

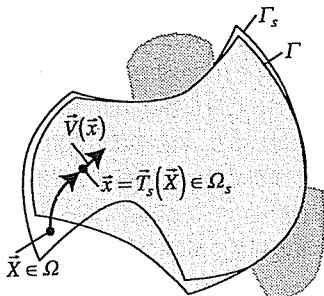


Fig. 1 Domain variation

写像を保証するように次式で与えられると仮定する。

$$D = \left\{ \bar{T}_s(\cdot) \in (C^1(\bar{\Omega}))^n \mid \det \left(\frac{\partial T_{si}}{\partial X_j}(\bar{X}) \right) \neq 0, T_{si}(\bar{X}) < +\infty, \bar{X} \in \Omega, \Theta \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、C^l(Ω_s)はl次の導関数まで連続な関数空間、det(∂T_{si}/∂X_j(̄X))はJacobi行列式を表す。また、Ω̄は開領域Ωの閉領域を表す。

4. 幾何学的非線形性の考慮

次に、本論文で扱う幾何学的非線形性を考慮した図2のような連続体の変形について記述する。

連続体は変動後の領域Ω_sで定義し、部分境界Γ_0で拘束され、部分境界Γ_pに境界力P̄(t)が作用すると仮定する。ここで簡単のために物体力は無視する。時間tのときの変位ベクトルをū(t)と表せば、そのときのGreen-Lagrangeのひずみテンソル(以下ひずみテンソル)ε̄(ū(t))は幾何学的非線形性を考慮した次のような関係で与えられる。

$$\varepsilon_{ij}(\bar{u}(t)) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(t) + u_{j,i}(t) + u_{k,i}(t)u_{k,j}(t)) \dots\dots\dots (3)$$

一方、幾何学的非線形性を考慮した時間tにおける平衡方程式は次式のように定義できる。

$$\int_{\bar{T}_s(\Gamma_p)} P_i(t) \delta u_i(t) d\Gamma = \int_{\Omega_s} \sigma_{ij}(t) \delta \varepsilon_{ij}(\bar{u}(t)) d\Omega \dots\dots\dots (4)$$

ここで、σ_{ij}(t)は第二Piola-Kirchhoff応力とし、構成則は材料非線形性を無視した場合、剛性テンソルC̄を用いて次のように表される。

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\bar{u}(t)) \dots\dots\dots (5)$$

ただし、δu_i(t)は変分変位あるいは随伴変位であり、δ\varepsilon_{ij}(\bar{u}(t))は変分ひずみあるいは随伴ひずみである。また、u_i(t)とδu_i(t)は変位の拘束条件を満たす適当に滑らかな関数空間Uの要素である。

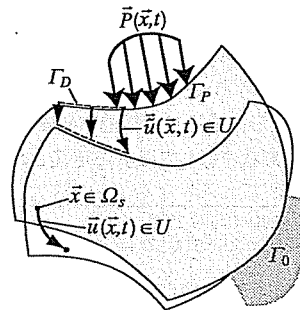


Fig. 2 Deformation by external force

5. 変位規定問題

幾何学的非線形性を考慮した変位規定問題を定式化し、この問題の形状こう配関数を理論的に導出する。ここでは簡単のため材料非線形性は無視するが、領域変動に対する剛性の変動項⁽¹¹⁾を考慮することにより、材料非線形性を同時に取扱うことも可能である。

5.1 定式化 4章で定義した連続体上に、図2に示すような規定境界 Γ_b を考える。 $\bar{u}(t)$ は Γ_b 上で事前に与えられる変位(規定変位)とし、 $u(t)$ は式(4)を解くことによって求められる変位(応答変位)とすれば、変形経路を狙いの経路と相似になるよう制御する問題は $u(t)$ と $\bar{u}(t)$ の二乗誤差の時間積分を目的関数とし、体積と平衡方程式を制約条件にして次のように定式化できる。

$$\min_{r_s(t) \in \Omega} \int_0^T E(u(t) - a\bar{u}(t), u(t) - a\bar{u}(t)) dt \quad \dots\dots\dots (6)$$

such that Eq. (4) $t \in [0, T]$ $\dots\dots\dots (7)$

$$L = \int_0^T E(u(t) - a\bar{u}(t), u(t) - a\bar{u}(t)) dt + \int_0^T \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_s(\Gamma_r)} P_i(t) \delta u_i(t) d\Gamma - \int_{\Omega_s} \sigma_{ij}(t) \delta \varepsilon_{ij}(u(t)) d\Omega \right\} dt + \Lambda(M - M_0) \quad \dots\dots\dots (10)$$

領域変動を表す媒介変数 s に対する Lagrange 乗数の導関数 \dot{L} は、物質導関数の公式を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & \int_0^T \left\{ 2E(u(t) - a\bar{u}(t), \dot{u}(t)) - 2a'E(u(t) - a\bar{u}(t), \dot{u}(t)) \right. \\ & + \int_{\bar{\Gamma}_s(\Gamma_r)} \{ P_i(t) \delta u_i(t) + P_i(t) \delta u_i'(t) + (P_{i,j}(t) n_j \delta u_i(t) + P_i(t) \delta u_{i,j}(t) n_j + P_i(t) \delta u_i(t) \kappa) n_k V_k \} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_s} \{ \sigma'_{ij}(t) \delta \varepsilon_{ij}(u(t)) + \sigma_{ij}(t) \delta \varepsilon'_{ij}(u(t)) \} d\Omega - \int_{\Gamma_s} \{ \sigma_{ij}(t) \delta \varepsilon_{ij}(u(t)) n_m V_m d\Gamma \} dt + \dot{\Lambda}(M - M_0) \\ & \left. + \int_{\Gamma_s} \Lambda n_i V_i d\Gamma \right\} dt \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ただし、 $(\cdot)'$ は形状導関数、 (\cdot) は物質導関数を表し⁽⁹⁾⁽¹⁵⁾、 \bar{n} は外向きの単位法線ベクトル、 κ は $n=2$ の場合は曲率、 $n=3$ の場合は平均曲率を表す。また、 \bar{V} は領域変動速度である。簡単のため、表面力が零でない境界 $\Gamma_r \subset \Gamma_1$ は変動しないものとすれば、式(11)は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & \int_0^T \left\{ 2E(u(t) - a\bar{u}(t), \dot{u}(t)) - \int_{\Omega_s} C_{ijkl} \varepsilon'_{kl}(u(t)) \delta \varepsilon_{ij}(u(t)) d\Omega + \int_{\bar{\Gamma}_s(\Gamma_r)} P_i(t) \delta u_i(t) d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_s} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u(t)) \delta \varepsilon'_{ij}(u(t)) d\Omega - 2a'E(u(t) - a\bar{u}(t), \dot{u}(t)) \right\} dt + \dot{\Lambda}(M - M_0) + l_c(\bar{V}) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ただし、領域変動速度 \bar{V} に対する一次形式 $l_c(\bar{V})$ は次式で与えられる。

$$l_c(\bar{V}) = \int_{\Gamma_s} G_m V_m d\Gamma = \int_{\Gamma_s} G n_m V_m d\Gamma \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$G = - \int_0^T \sigma_{ij}(t) \delta \varepsilon_{ij}(u(t)) dt + \Lambda \quad \dots\dots\dots (14)$$

したがって、Lagrange 乗数 L の最適性の条件は不等式制約条件に対する Kuhn-Tucker 条件を考慮すると次のようになる。

$$\int_0^T \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_s(\Gamma_r)} P_i(t) \delta u_i(t) d\Gamma - \int_{\Omega_s} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u(t)) \delta \varepsilon'_{ij}(u(t)) d\Omega \right\} dt = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$M \leq M_0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 T は最終時間、 M は体積、 M_0 は体積の既定値であり、 E はホモログス指標を表す双一次形式として次式で表される。

$$E(\bar{u}, \bar{v}) = \int_{\Gamma_b} u_i v_i d\Gamma \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、 a は相似的な変位モードと変形経路を考慮するための実変数であり、その決定式は次章で示すが、この実変数は規定変位分布と変形経路を表すための定数として指定することも可能である。例えば $a=1.0$ に指定した場合、規定した変形経路自体を実現する問題になり、 $a=0.0$ に指定した場合、応答変位の二乗の時間積分を最小化する問題になる。

5.2 形状こう配関数の導出 この問題に Lagrange 乗数法と物質導関数法あるいは随伴変数法を適用して形状こう配関数を導出する。この問題の Lagrange 乗数 L は、 $\delta \bar{u}(t)$ と Λ をそれぞれ式(7)と式(8)に対する Lagrange 乗数として、次式のように与えられる。

$$\int_0^T \left\{ 2E(\bar{u}(t) - \alpha \bar{u}'(t), \bar{u}'(t)) - \int_{\Omega_s} C_{ijkl} \epsilon_{kl}(\bar{u}(t)) \delta \epsilon_{ij}(\bar{u}(t)) d\Omega \right\} dt = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\int_0^T E(\bar{u}(t), \bar{u}(t)) dt = \alpha \int_0^T E(\bar{u}(t), \bar{u}'(t)) dt \dots\dots\dots (17)$$

$$\Lambda \geq 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$M - M_0 \leq 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\Lambda(M - M_0) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここで、式(15)は制約条件に用いた平衡方程式(7)に相当する。したがって、 $\epsilon_{kl}(\bar{u}(t))$ はこの式によって解析可能である。式(16)はこの問題の随伴方程式と呼ばれ、随伴変位 $\delta u_i(t)$ の支配方程式に相当する。この式は、左辺の $2(\bar{u}(t) - \alpha \bar{u}'(t))$ を変位規定境界 Γ_D に負荷される荷重とみなせば解析可能であり、これにより $\delta \epsilon_{ij}(\bar{u}(t))$ は求められる。さらに、規定境界と荷重負荷境界が一致し、負荷方向と変位方向および規定変位方向が一致する仮定が導入できる場合には、準自己随伴問題として、随伴方程式を直接解くことなく、次の関係式から随伴変位を求めることが可能である。

$$\delta \epsilon_{ij}(\bar{u}(t)) = A(t) \epsilon_{ij}(\bar{u}(t)) \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 $A(t)$ は $2(\bar{u}(t) - \alpha \bar{u}'(t))$ と $\bar{P}(t)$ の比を表す。また、式(17)は変数 α の決定式、式(20)は領域の大きさ制約に対する Kuhn-Tucker 条件の一部である。これらの最適性の条件によって $\epsilon_{ij}(\bar{u}(t))$ 、 $\delta \epsilon_{ij}(\bar{u}(t))$ および Λ を決定できていれば、制約がすべ

て満たされることになる。したがって、次の関係が成立する。

$$\dot{L} = l_c(\bar{V}) \dots\dots\dots (22)$$

このとき、式(13)と式(14)で与えられる $G\bar{n}$ は、領域の微小変動を与える領域変動速度 \bar{V} の係数関数になっていることから、この問題における形状こう配関数、 G は形状こう配密度関数になる。

5.3 手法 手法は、領域変動速度 $\bar{V} \in D$ を次式で解きながら有限の増分 $\Delta s > 0$ を与えて、微小な領域変動 $\bar{V}\Delta s$ を繰返していく方法として提案されている⁽⁶⁾。

$$a(\bar{V}, \bar{y}) = -l_c(\bar{y}), \forall \bar{y} \in D \dots\dots\dots (23)$$

ここで、双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ は式(24)によって与える。一次形式 $l_c(\cdot)$ は式(13)で与える。

$$a(\bar{V}, \bar{y}) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} \epsilon_{kl}(\bar{V}) \epsilon_{ij}(\bar{y}) dx \dots\dots\dots (24)$$

5.4 解析システム 開発したシステムを図3に示す。本システムは有限要素法による汎用構造解析ソフトと独自に開発したプログラムを組合わせて構成される。汎用ソフトでは状態方程式(7)と速度解析と呼ばれる領域変動の支配方程式(23)の解析を行い、非自己随伴問題に対しては随伴方程式(16)の解析を実施する。開発プログラムは応力解析結果から目的汎関数と体積を評価し、形状こう配密度関数を計算するとともに、Lagrange 乗数の Λ 決定と形状の更新を実施している。ここでは、汎用構造解析ソフトに MSC/NASTRAN v. 70 を利用している。

6. 計算例

本論文で提案した方法の有効性を確認するために、球面構造の飛び移り座屈抑制問題を紹介する。ここで扱われる問題は、変位規定境界と負荷境界が一致し、負荷方向が変化しない準自己随伴問題とする。また、安定経路のみを対象とし、荷重に対して変位が一意的に決定できるものとする。

図4のような球面構造物の飛び移り座屈変形経路を線形な規定経路に近づけることにより、飛び移り座屈の抑制を試みた。本計算例は軸対称問題と仮定し、計算モデルは領域の内角 20 度の扇形に 8 節点六面体要素を板厚方向に二層配置した。境界 Γ_P は上下方向のみ変形可能とし、その境界力は $|\bar{P}| = 1.5 \times 10$ MPa、ヤング率 2.1×10^5 MPa、ポアソン比 0.3 とした。ただし、形状変動は球面の内側のみとした。また、変数

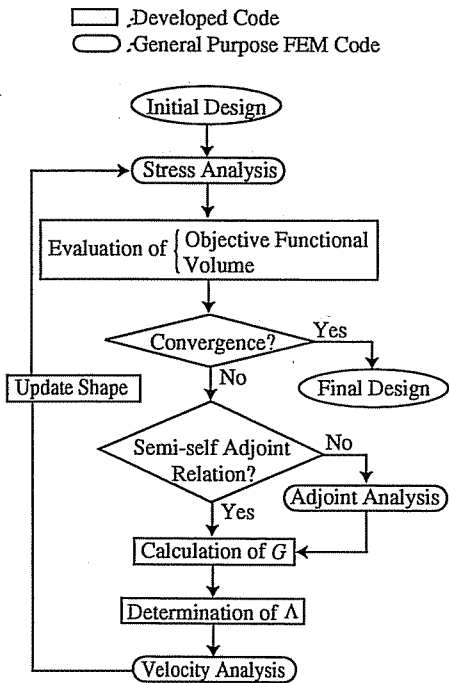


Fig. 3 Flow chart of developed system

α について、次の四つの場合で結果を比較した。

- CASE 1: α を式(17)によって決定した場合
- CASE 2: $\alpha=1.0$ に指定した場合
- CASE 3: $\alpha=0.5$ に指定した場合
- CASE 4: $\alpha=0.0$ に指定した場合

CASE 1 から CASE 4 の収束履歴を図 5 から図 8 に示す。すべての CASE において体積制約を満足しながら、目的汎関数が停留した。

初期形状と CASE 1 から CASE 4 の最適化形状の比較を図 9 に示し、各形状の変形図を図 10 から図 14

に示す。ただし、変形図は変形状態の観察と比較を容易にするため、変形量を 4 倍にしている。すべての CASE でほぼ同じ傾向の形状になり、狙いどおり飛び移り座屈の抑制に成功していることがわかる。

荷重-変位曲線の比較を図 15 に示す。ここでも、初期形状において荷重 $LOAD=1.08 \text{ kN}$ から $LOAD=1.20 \text{ kN}$ の間で起こっている飛び移り座屈が、最適化

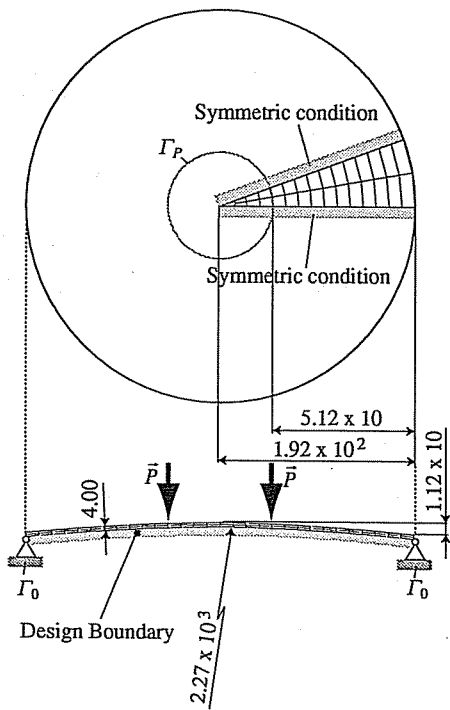


Fig. 4 Boundary condition

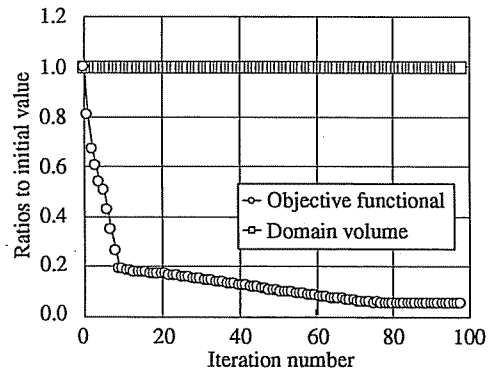


Fig. 6 Iteration histories for CASE 2

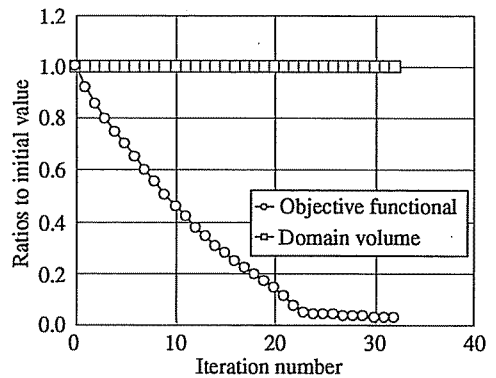


Fig. 7 Iteration histories for CASE 3

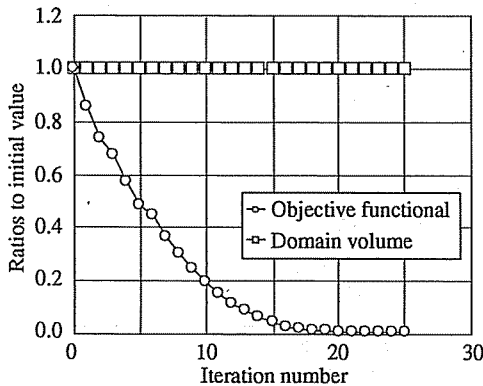


Fig. 5 Iteration histories for CASE 1

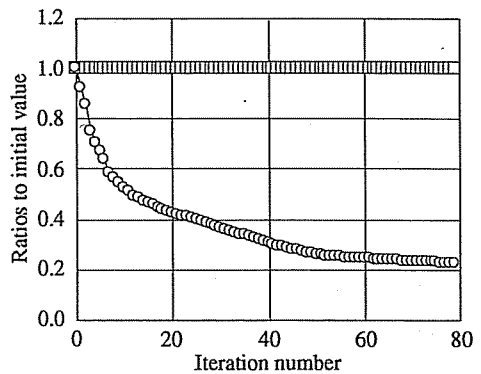


Fig. 8 Iteration histories for CASE 4

後の各形状では抑制されていることがわかる。また、 α を式(17)によって決定した CASE1 は変形経路がほぼ線形になり、CASE1 における α の最終値 $\alpha=0.52$ に最も近い $\alpha=0.5$ を指定した CASE3 の変形経路も、ほぼ規定経路どおり線形になった。これに対し、CASE2 における最適化形状では飛び移り座屈は抑制されているものの、 $\alpha=1.0$ を指定したにもかかわらず初期形状ほど変形しなかった。CASE4 の最適化形状でも、飛び移り座屈は抑制されているものの、指定した変形しない経路を実現することはできず、規定経路と変形経路は一致しなかった。また、CASE4 にお

いて、 $\alpha=0.0$ を指定することは負荷点変位の二乗の時間積分を最小化することになるが、最終荷重レベルでの負荷点変位量を最小化の問題ではないため、CASE1 や CASE3 よりも最終的な変形量が大きくなった。CASE2 と CASE4 の結果は、 α の設定値によって実現困難な変形経路が指定されたことを示しているが、このような場合においても、目的汎関数が停留していることから、算出された結果は、設定した制約条件の範囲内では規定変位と応答変位の二乗誤差を極小値に停留させる最良の形状であると考えられる。これは設定した変形経路が実現不可能であっても設定し

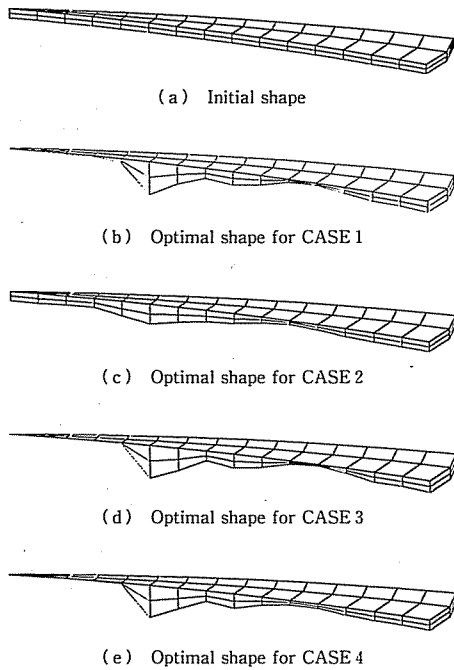


Fig. 9 Initial and optimal shapes

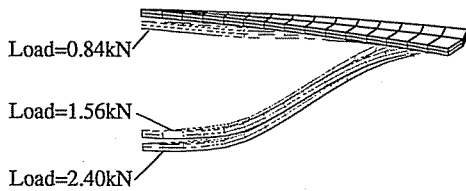


Fig. 10 Deformation for initial shape

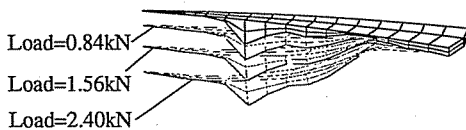


Fig. 11 Deformation for optimal shape (CASE 1)

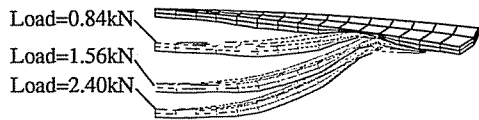


Fig. 12 Deformation for optimal shape (CASE 2)

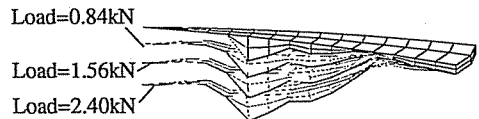


Fig. 13 Deformation for optimal shape (CASE 3)

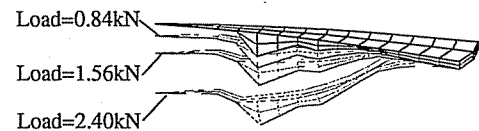


Fig. 14 Deformation for optimal shape (CASE 4)

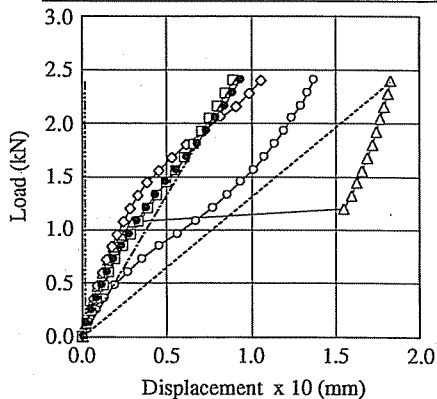
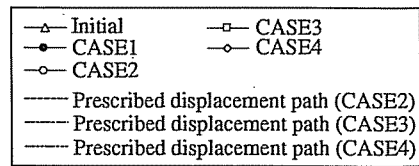


Fig. 15 Load-displacement curves

た経路に最も近い妥協解を算出可能であることを示しており、実際の構造設計に適用する際に極めて有用な情報を提供し得るものである。本計算結果から、提案した手法の有効性と実用性が確認された。

7. おわりに

幾何学的非線形性を考慮した変位規定問題の形状感度を導出するとともに、力法を導入した形状最適化手法を提案した。また、変位規定境界と荷重境界が一致し、荷重方向が変化しないとみなせる場合は随伴方程式を解くことなく、比較的簡単に感度を求めることが可能なことを示した。さらに、飛び移り座屈抑制に関する数値計算例から提案手法の有効性と実用性を確認した。

文 献

- (1) Hoener, S., Homologous deformation of tilttable telescopes, *Proc. ASME J. Struch. Div.*, 93-ST 3(1967), 461-485.
- (2) 半谷裕彦・関富玲, ホモロガス変形を制約条件とする立体トラス構造の形態解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 405(1989), 97-102.
- (3) 吉川鶴宏・中桐滋, ホモロガス変形を実現する構造決定, 機論, 59-560, A(1993), 286-290.
- (4) 尾田十八・松本徳之・王安麟, GA によるホモロガス構造の創生法, 第3回設計工学・システム部門講演論文集, No. 930-27(1993-6), 89-92.
- (5) 富田啓一・三井和男・登坂宣好, 遺伝的アルゴリズムの形態解析への応用, 日本機械学会第71期通常総会講演会講演論文集(I), No. 940-10(1994-3), 74-76.
- (6) 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, 機論, 60-574, A(1994), 1479-1486.
- (7) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 71(1988), 197-224.
- (8) 下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, ホモロガス変形を目的とする連続体の形状決定, 機論, 62-604, A(1996), 2831-2837.
- (9) 井原久・下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, 均質化理論に基づく位相最適化法による変位規定問題の数値解法, 機論, 63-606, A(1997), 385-391.
- (10) Hisada, T., Recent progress in nonlinear fembased sensitivity analysis, *JSME Int. J.*, 38(1995), 301-310.
- (11) 井原久・畔上秀幸・下田昌利・渡邊勝彦, 材料非線形性を考慮した形状最適化問題の解法, 機論, 66-646, A(2000), 1111-1118.
- (12) Cea, J. (Haug, E. J. and Cea, J. 編), Numerical methods of shape optimal design, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, 2(1981), 1049-1088, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- (13) Zolésio, J. P. (Haug, E. J. and Cea, J. 編), The material derivative (or speed) method for shape optimization, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, 2(1981), 1089-1151, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- (14) Zolésio, J. P. (Haug, E. J. and Cea, J. 編), Domain variational formulation for free boundary problems, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, 2(1981), 1152-1194, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- (15) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag, New York.