

汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法*
(手法によるアプローチ)下田 昌利*¹, 呉 志 強*²
畔上 秀幸*³, 桜井 俊明*¹Numerical Method for Domain Optimization Problems
Using a General Purpose FEM Code
(Traction Method Approach)Masatoshi SHIMODA, Zhi Chang WU,
Hideyuki AZEGAMI and Toshiaki SAKURAI

This paper describes the numerical method for domain optimization problems based on the traction method. The traction method was recently proposed as a solution to domain optimization problems. With the traction method, the domain variation is analyzed under a condition where the objective functional decreases. We propose a convenient numerical method using a general purpose FEM to apply the traction method to practical problems. The domain optimization problem treated here is a mean compliance minimization problem of linear elastic structures. The computed results of a multiply connected plate and a solid torsion bar are compared with those obtained by other authors. The practical application of the method is also demonstrated with a plane sample and a solid one. The results show sufficient validity of the proposed numerical method for practical domain optimization problems.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Finite Element Method, Structural Analysis, Domain Optimization, Traction Method

1. はじめに

弾性体や流れ場、電磁場などの境界値問題における境界形状を設計変数にした領域最適化問題は機械構造物を設計する際に頻出する工学上重要な問題である。

この問題の解法に対する基礎理論は 20 世紀初頭から明らかにされてきた。しかしより一般化された理論が紹介されたのは最近になってからである。1908 年に Hadamard⁽¹⁾ は領域変動を境界の法線方向への移動によって定式化し、領域最適化問題を境界上で定義された移動量を与える分布関数の最適化問題として定式化した。最適であるための必要条件は変分理論に基づいて解かれている。Hadamard の定式化では境界において法線ベクトルが定義されている必要があることから、境界形状の滑らかさが要求された。境界形状の滑らかさを区分的な滑らかさまで拡張する理論は Zolesio⁽²⁾ によって紹介された。Zolesio は領域変動を写像によって、領域の微小変動を写像の導関数で定義

される速度場によって定式化した。この定式化の方法を速度法(speed method)と呼んだ。写像を用いると境界における法線ベクトルの必要がなくなることから境界の滑らかさは不要となる。速度法に基づけば領域が自由に変動できる場合の感度に当たる形状こう配関数は理論的に導出される。最適な領域形状はこの形状こう配関数に基づいて目的汎関数を最適化する速度場を決定し、その速度場による領域変動を繰返していくことによって得られることになる。

速度法によって問題設定と領域が自由に変動できる場合の感度の理論を厳密に与えることが可能になった。しかし、工学上重要である領域変動に制約が課されている場合の速度場の一般的な解析方法は明らかにされてこなかった。著者の一人⁽³⁾⁽⁴⁾ は速度法に基づいたその方法として手法と称した解析方法を示した。手法は領域が自由に変動できる場合の形状こう配関数を用いて、領域変動の拘束を満たす速度場を解析するための方法である。手法では領域を弾性体とみなして、形状こう配関数を擬似的な力とみなした場合の変位場を速度場として解析する。この方法では、速度場の支配方程式を線形弾性問題の境界値問題に置き換えて解くために、有限要素法や境界要素法などが利用できるという点で実用的である。支配方程式に現れる形状こ

* 平成 5 年 11 月 10 日 第 6 回計算力学部門講演会において講演、原稿受付 平成 6 年 1 月 19 日。

¹ 正員、三菱自動車工業(株) (〒444 岡崎市橋目町中新切 1)。

² 正員、豊橋技術科学大学大学院 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1)。

³ 正員、豊橋技術科学大学工学部。

う配関数も有限要素法や境界要素法などを利用して解析することが可能である。

そこで、本論文はすでに定式化されている方法を適用に耐えるものにするために汎用 FEM コードを利用した解析方法について検討を加えること、およびその方法によって得られた解析結果を紹介することを目的とする。領域最適化問題としては線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題に注目する。

2. 領域最適化問題

領域最適化問題の定式化に利用する領域変動の表現方法、静的な線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題の定式化および最適性規準を簡単にまとめる。なお、その詳細については文献に譲る⁽³⁾⁽⁴⁾。

2.1 領域変動 設計変数である境界領域の微小変動は写像の考えを用い、その導関数で定義される速度場によって以下のように表現される。

図1のような変動が許されているすべての領域を含む固定された開領域を許容領域 D と定義する。許容領域の境界 ∂D は区分的に滑らかであると仮定し、開領域 D に境界 ∂D を含めた閉領域を \bar{D} と表す。領域の変動は初期領域 $\bar{\Omega}$ を含む \bar{D} を定義域とし、変動後の領域 $\bar{\Omega}_s$ を含む \bar{D} を値域とする1対1写像 $T_s(X)$ を用いて表現される。

$$T_s(X) : X \in \bar{D} \mapsto x(s) \in \bar{D} \quad (1)$$

ここで、 s は変動履歴を表す。また、 $X \in \bar{\Omega}$ は Lagrange 座標系あるいは物質座標系、 $x \in \bar{\Omega}_s$ は Euler 座標系あるいは実座標系と呼ばれる。 D を変動させないため、境界 ∂D 上の特異点は変動しないことを仮定し、この特異点を含めて変動を拘束する領域 Θ では次の恒等写像 $I(X)$ の関係を仮定する。

$$T_s(X) = I(X), \forall X \in \Theta \subset \bar{D} \quad (2)$$

写像 $T_s(X)$ を用いて領域の微小変動は次のように表される。

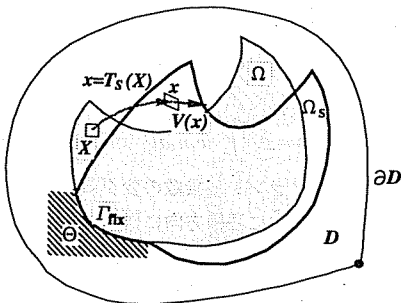


図1 領域変動

$$T_{s+\Delta s}(X) = T_s(X) + \Delta s V + O(|\Delta s|) \quad (3)$$

ここで、写像 $T_s(X)$ の Euler 導関数 V は速度場を表し、次のように定義される。

$$\frac{\partial T_s}{\partial s} \cdot T_s^{-1}(x) = V(x) \quad (4)$$

$$V \in V(\bar{D}; R^n) = \{V \in C^1(\bar{D}; R^n) \mid n_i V_i = 0 \text{ on } \partial D, V = 0 \text{ in } \Theta \subset \bar{D}\} \quad (5)$$

なお、 n は外向き単位法線ベクトルであり、 $z = y(x)$ は $x \mapsto y(x) \mapsto z(y(x))$ の関係を表し、 $C^k(\bar{D}; R^n)$ は \bar{D} を定義域として R^n を値域とした k 級の連続関数空間を表す。また、 $\Delta s O(|\Delta s|) \rightarrow 0 (\Delta s \rightarrow 0)$ の関係が仮定される。なお、 R は実数を表す。

2.2 平均コンプライアンス最小化問題 線形弾性体の初期領域 $\bar{\Omega} \subset R^n$ 、 $n=2,3$ の境界を $\Gamma \equiv \partial \Omega$ とし、領域 Ω 内に物体力 f 、その境界の一部 Γ_1 には表面力 P が作用し、体積(面積)および状態方程式を制約条件とする静的な線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題は次のように定式化される。

$$\text{Given } \bar{\Omega} \subset \bar{D}, f \text{ in } \bar{D}, P \text{ in } \bar{D}, e \text{ in } \bar{D}, M_0 \in R_+ \quad (6)$$

$$\text{find } \Omega_s \text{ or } T_s(X), X \in \bar{D} \quad (7)$$

$$\text{that minimize } l(v) \text{ for } v \quad (8)$$

$$\text{subject to } a(v, w) = l(w) \text{ for all } w \quad (9)$$

$$M - M_0 \leq 0 \quad (10)$$

ここで、ひずみエネルギーを与える双一次形式 $a(v, w)$ 、外力によるポテンシャルエネルギーを与える一次形式 $l(v)$ 、体積 M は次のように定義される。

$$a(v, w) = \int_{\Omega_s} e_{ijkl} v_{k,l} w_{i,j} d\Omega \quad (11)$$

$$l(w) = \int_{\Omega_s} f_i w_i d\Omega + \int_{\Gamma_{s1}} P_i w_i d\Gamma \quad (12)$$

$$M = \int_{\Omega_s} dx \quad (13)$$

なお、 v_i, w_i はそれぞれ変位、 e_{ijkl} は剛性、 R_+ は正の実数を表す。また、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。

2.3 最適性規準 この問題にラグランジュ乗数法を適用すると、停留化されるラグランジュ関数は次のように表される。

$$L(\Omega, v, w, \Lambda) = l(v) - a(v, w) + l(w) + \Lambda(M - M_0) \quad (14)$$

また、ラグランジュ関数 L の領域変動に対する Euler 導関数 \dot{L} は速度場 V を用いて次のように表される。

$$\dot{L} = -\{a(v, w') - l(w')\} - \{a(v', w) - l(v')\} + l_c(V) \quad (15)$$

ここで、 e, f, P が領域変動に対して一意に決定されれば、 $l_G(V)$ は次式のように G を係数関数とする速度場 V の一次形式で与えられる。

$$l_G(V) = \int_{\Omega} G_i V_i dx \quad \dots\dots\dots (16)$$

なお、 G は形状こう配関数と呼ばれ、次式で与えられる。

$$G = \gamma \bar{f}_s \{ f_i(v_i + w_i) - e_{ijk} v_{k,i} w_{j,i} + \Lambda \} n \\ + \{ f_i(v_i + w_i) - e'_{ijk} v_{k,i} w_{j,i} \} \\ + \gamma \bar{f}_s \{ P_i v_i + P_i' w_i + (P_i v_{i,j} n_j + P_i w_{i,j} n_j \\ + P_{i,j} n_j v_i + P_{i,j} n_j w_i + P_i v_i x + P_i w_i x) n \} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 $x = \nabla \cdot n$ は領域が二次元の場合曲率、三次元の場合平均曲率を表している。なお、 $\gamma r_s \in \mathcal{L}(D(\bar{D}; R^n); D(\Gamma; R^n))$ はトレース作用素、 $\gamma \bar{f}_s$ はその転置、 \mathcal{L} は線形作用素、 D は微分可能関数空間を表している。材料が均質不変であること ($e_{ijk} = e'_{ijk} = 0$)、物体力が作用しないこと ($f=0$)、および表面力の負荷境界 Γ_1 が接線方向にのみ変動可能であること ($n_i V_i = 0$ on Γ_1) を仮定した場合、形状こう配関数 G は次のように簡単になる。

$$G = (-e_{ijk} v_{k,i} w_{j,i} + \Lambda) n \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

G は境界 $\Gamma \setminus \Gamma_1$ 上だけに分布した法線方向ベクトル関数となる。なお、後述の計算例ではこれらを仮定して解析を行っている。

ラグランジュ関数 L の停留条件は式(15)に基づいて次のようになる。

$$a(v, w) = l(w) \text{ for all } w \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$a(v', w) = l(v) \text{ for all } v \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$l_G(V) = 0 \text{ for all } V \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\Lambda(M - M_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$M - M_0 \leq 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

この問題は式(19)の状態方程式と式(20)の随伴方程

式が一致した自己随伴問題になっており、次の関係が成立する。

$$v = w \quad \dots\dots\dots (24)$$

v は式(19)から求められ、 Λ は式(22)と式(23)から決定されるので、この問題の最適性規準は式(21)で与えられることになる。

3. 解 法

3.1 方法 速度場 V の解法として用いた方法の概要を簡単に紹介する。方法は速度法に基づき定式化され、速度場を求める領域変動の支配方程式を擬似弾性問題として解く方法である。具体的には擬似弾性体に形状こう配関数 G に比例した力を与え、その時の変形を領域変動とする方法である。領域変動を表す速度場 V は次の支配方程式に基づいて計算される⁽⁴⁾。

$$a(V, w) = -l_G(w) \text{ for all } w \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(25)によって決定された領域変動 V は凸性が保証されている問題に対して目的汎関数を必ず減少させることが保証されている⁽³⁾。式(25)は境界の法線方向に形状こう配関数に比例した力 G を負荷したときの変位分布として領域変動を与える速度場 V が解析されることを示している。すなわち速度場 V が力 G に対する擬似弾性問題として求められることを示している。式(25)の解析には有限要素法が利用される。得られた V に、式(3)に従って1回の領域変動量を調整する領域変動係数 Δs を乗じることにより形状を更新していくことができる。式(18)の場合、力 G は表面力となる。方法の概念図を図2に示す。

3.2 体積制約 体積制約に対する Kuhn-Tucker 条件は式(22)、(23)で与えられる。これらの条件を満足させるための方法として以下のような体積制御の方法を用いた。体積制約を満たすように決定されるラグランジュ乗数 Λ は荷重 G の中では一様な表面力と考えることができ、大きさ Λ の一様な表面力を制御することにより式(22)、(23)の条件を満足させることを考えることができる。図3にその模式図を、式(26)に一様な表面力による領域変動を求める方程式を示す。

$$a(\Delta V, w) = \Delta \Lambda \int_{\Gamma_s} w_i n_i d\Gamma \text{ for all } w \quad \dots\dots\dots (26)$$

式(26)はラグランジュ乗数の変更量に相当する $\Delta \Lambda$ なる表面力を一様に法線方向に作用させたときの領域変動量 ΔV を弾性変形問題として解くことを表している。そのときの体積の変化量 ΔM は式(27)のように領域変動量の境界積分で求められる。

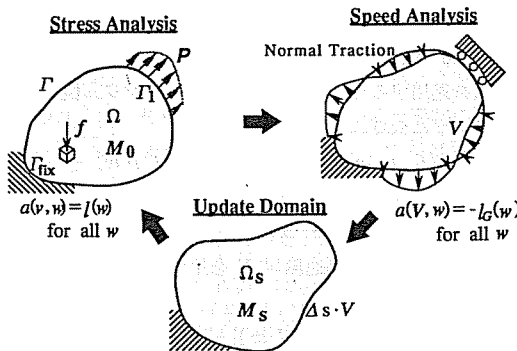


図2 方法の概念図

$$\Delta M = \int_{\Gamma_s} n \cdot \Delta V d\Gamma \quad \dots\dots\dots (27)$$

$\Delta\Lambda$ を調整し、式(25)と式(26)を次のように重ね合わせるにより、体積制約を満たし目的汎関数を最小化する領域変動量 V を求めることができる。

$$a(V, w) = -l_c(w) - \Delta\Lambda \int_{\Gamma_s} w_i n_i d\Gamma \text{ for all } w \quad \dots\dots\dots (28)$$

体積制約を満たす $\Delta\Lambda$ を調整する方法としては式(29)のようなPID制御の考えに基づく方法を用いている。その詳細は文献に譲る⁽⁵⁾。

$$\Delta\Lambda^{(n)} = K_P \frac{M^{(n-1)} - M_0}{M_0} + K_I \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M^{(k)} - M_0}{M_0} + K_D \frac{M^{(n-1)} - M^{(n-2)}}{M_0} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $\Delta\Lambda$, M , M_0 はそれぞれラグランジュ乗数の変更量、体積、体積制約量を表し、 $(\cdot)^{(n)}$ は繰返し数を表す。また、 K_P , K_I , K_D はそれぞれPID制御の比例定数を表す。

4. 汎用 FEM コードによる実行方法

4.1 法線方向荷重の設定 一般に、大規模な自由度となる自動車部品等の構造解析は汎用 FEM コードを利用して行われている。方法を自動車部品等の二次元、三次元の形状に適用し、自動繰返し計算を行う場合、種々の要素や複雑な境界に対する法線方向の計算が課題と考えられていた。しかし、図4のように汎用 FEM コードの一般機能である圧力荷重を表面力と

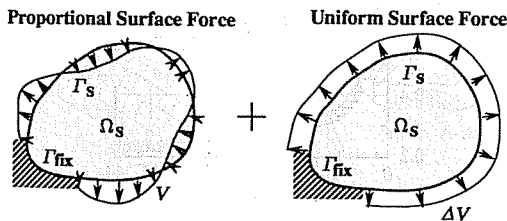


図3 体積制約を考慮した表面力

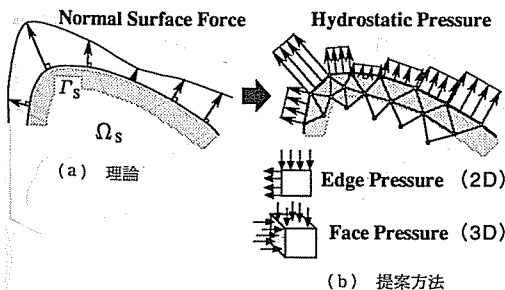


図4 汎用 FEM コードを利用した力法

して利用すれば、法線方向荷重は次式に従って内部で計算され、等価節点力に変換される。

$$\{P\} = \int_A [N]^T \{t\} dA, A \subset \Gamma \setminus \Gamma_i \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 $\{P\}$ は等価節点力ベクトル、 $[N]$ は形状関数マトリックス、 $\{t\}$ は分布荷重ベクトル、 A は要素面積、 $(\cdot)^T$ は転置を表す。

二次元領域に対する表面力としては線圧荷重が、三次元領域に対しては面圧荷重が利用できる。このことに着目し、方法を汎用 FEM コードを用いて簡便に実行できる領域最適化システムを開発した。これにより方法が簡単に実行可能となり、二次元および三次元の複雑な問題の解析も可能となった。

4.2 数値解析手順 本領域最適化システムの流れを図5に示す。

システムはEWS上でFEMコードと開発コードを組合せており、主構成要素である応力解析、形状こう配関数の評価、力法に基づく速度解析、領域変更を順に繰返すことにより領域最適化解析が実行される。実行に際しては1回の領域変動量の大きさを調整する領域変動係数 Δs を設定し、制約体積 M_0 の大きさ、設計境界 $\Gamma_{design} \equiv \Gamma \setminus \Gamma_{fix}$ を指定する。また、与えられた初期領域に対して応力解析と速度解析の境界条件をそれぞれ設定する。

5. 計算結果

提案する手法および開発したシステムの有効性を確認するため、最適解の明らかな二次元および三次元問題について計算を行った。二次元問題として多連結問題でもある六つの円孔を有する両端支持平板について

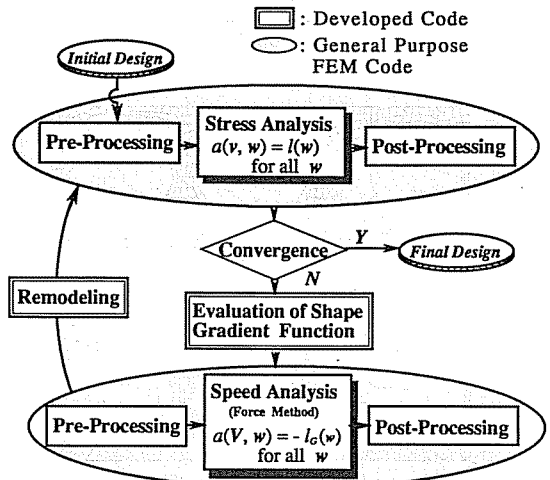


図5 領域最適化システム

計算を行った。得られた解をOlhoffらによって別法で計算されている結果⁽⁶⁾と比較した。また、三次元問題の基本的な問題として最適解が円形断面となることが知られているソリッド体のトーションバーを取り上げた。いずれの問題においても体積一定の制約を与えている。

5.1 有孔平板 対象は図6(a)に示すような初期領域とし、解析は図6(b), (c)に示すような応力解析の境界条件および速度解析の制約条件で行い、三つの孔の周囲を設計境界とした。なお、平面応力状態を仮定し、対称性を考慮した計算を行っている。数値解析には4節点定ひずみ要素を使用した。図7に計算

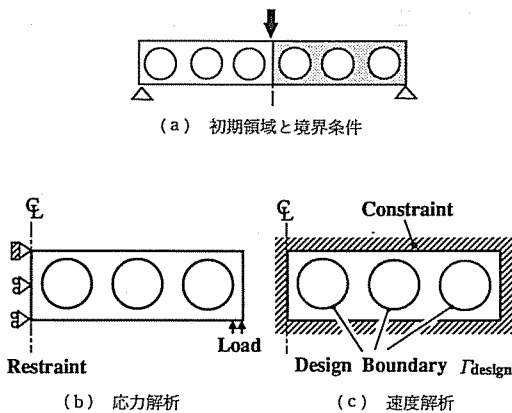


図6 有孔平板の問題設定

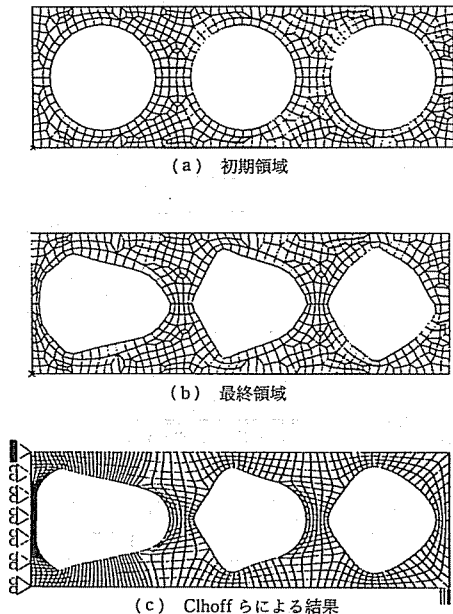


図7 有孔平板の計算結果

結果を示すが、(a), (b)はそれぞれ本解析での初期領域と最終領域であり、(c)はOlhoffらによる比較解である。この結果から(b)と(c)はメッシュ分割による若干の差異があるものの領域形状はほぼ一致していることが確認できる。図8はこの解析における体積、目的汎関数に対応する全ポテンシャルエネルギーおよび参考として最大ポテンシャルエネルギー密度の履歴を示している。体積は体積一定の制約を満たし、全ポテンシャルエネルギーの絶対値は最小化され、コンプライアンスは約20%減少していることがわかる。なお、収束までに要した領域変動回数は速度場に乗じる領域変動係数 Δs の大きさに依存するが、図8の場合は44回であった。また、設計境界における最大ポテンシャルエネルギー密度の絶対値も最小化されている。これらの結果からも本方法の有効性が確認できる。

5.2 ソリッドトーションバ 問題設定を図9に示す。応力解析では一端を完全拘束し、他端にトルクを与え、速度解析では長さ一定の制約条件を与え、両端面を滑り拘束した。また、設計境界は両端面を除く側面全周とした。数値解析には6節点および8節点のソリッド要素を使用した。図10は計算結果を示しているが、(a)は初期領域と代表断面での形状こう配関数

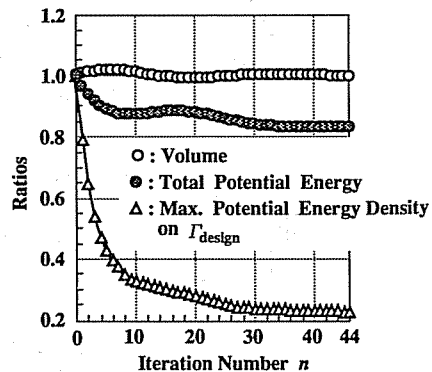


図8 有孔平板の最適化履歴

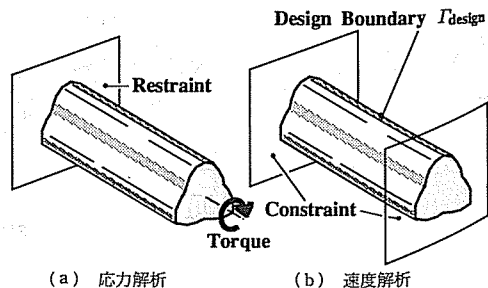


図9 トーションバの問題設定

となるひずみエネルギー密度分布、(b)は得られた最終領域と代表断面のひずみエネルギー密度分布を示している。なお、分布中の数字は最大値で無次元化し、七段階に表示したひずみエネルギー密度の大きさを示している。この解析によりびつな初期断面が理論どおり円形断面に変化していることがわかる。また、ひずみエネルギー密度分布も均一化していることが確認される。なお、端部で断面がやや細くなっているのは負荷の影響を受け、この表面が他の表面に比較してひずみエネルギー密度がやや小さくなっていることに起因している。図11にこの解析における体積、全ポテンシャルエネルギーおよび参考として最大ポテンシャルエネルギー密度の履歴を示す。体積制約を満たした状態で目的汎関数は最小化され(平均コンプライアンス約10%減少)、さらに最大ポテンシャルエネルギー密度の絶対値も最小化されていることがわかる。図10および図11の結果から本方法の三次元問題に対する有効性が確認できる。

6. 適用例

実用的な問題として自動車等の板金構造として用いられるブラケットおよびコンロッドへの適用例を示す。いずれの問題においても体積一定の制約を与えている。

6.1 ブラケット 図12にブラケットの問題設定

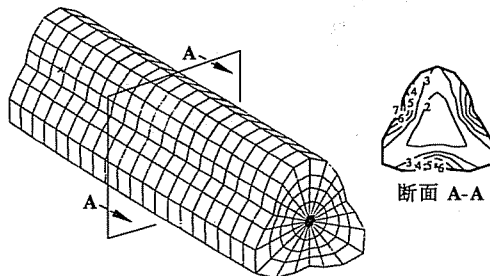


図10 トーションバの計算結果

を示す。応力解析は(a)のように端部を完全拘束し、他端の垂直面内45°方向に引張荷重を負荷している。速度解析は(b)のように完全拘束と滑り拘束を与え、R部を含む辺を設計境界とした。なお、計算は対称性を考慮し、2分の1の部分について行っている。また、数値解析には4節点シェル要素を使用した。計算結果および最適化履歴をそれぞれ図13、14に示す。5章の計算結果と同様の良好な結果が得られ、コンプライアンスは約70%減少している。

6.2 コンロッド 図15にコンロッドの問題設定を示す。応力解析は(a)のように穴部の右半分を滑り拘束し、他端に引張荷重を負荷している。速度解析は(b)のように端部および穴部を滑り拘束し、拘束面と対象面を除く領域を設計境界とした。なお、計算は対称性を考慮し、4分の1の部分について行っている。また、数値解析には6節点および8節点のソリッド要素を使用した。計算結果および最適化履歴をそれぞれ図16、17に示す。各断面は複雑に領域変更されていることがわかる。この問題においても良好な履歴が得られ、コンプライアンスは約20%減少している。

これらの適用結果から、本方法が実際の問題に対し

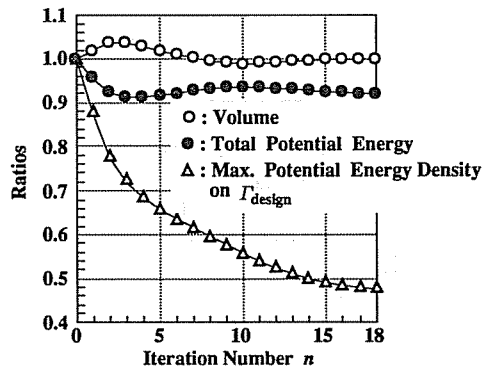


図11 トーションバの最適化履歴

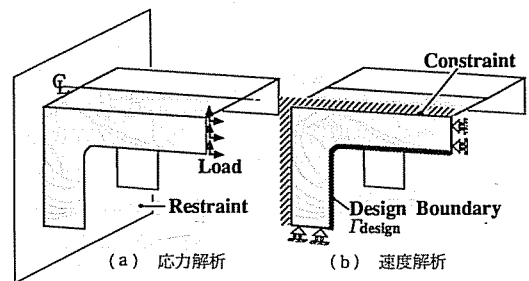


図12 ブラケットの問題設定

でも適用可能で実用性のあることが確認できる。また、本論文における一連の解析を通して、一般に形状最適化解析を有限要素法を利用して行う場合に問題とされる領域内部や境界の再メッシュ問題が、境界だけではなく領域内部の節点も移動する方法に基づく本方法では実用上大きな問題とならないことが確認できた。

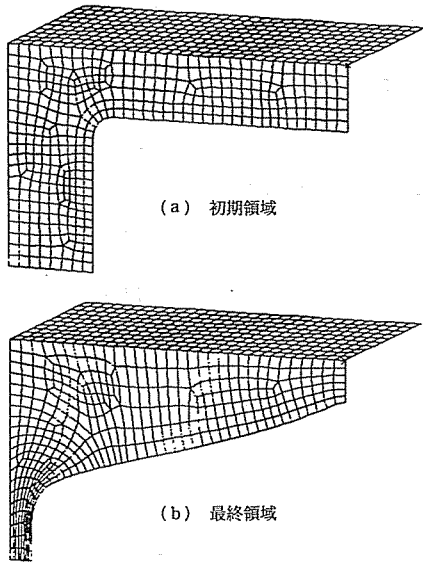


図 13 ブラケットの計算結果

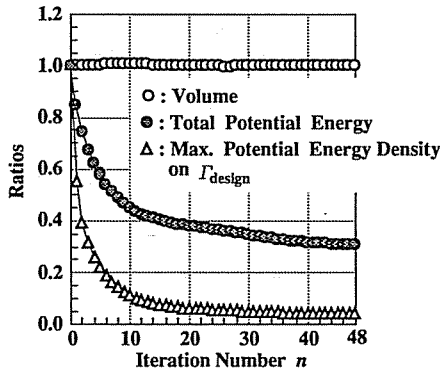


図 14 ブラケットの最適化履歴

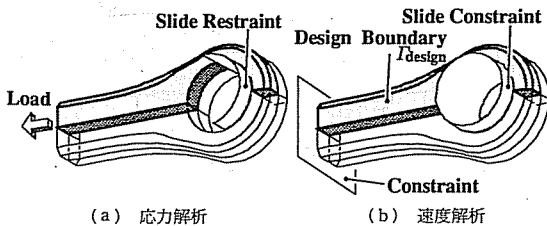


図 15 コンロッドの問題設定

7. おわりに

領域最適化問題の解法として提案されている方法を汎用 FEM コードを利用して実行する方法を提案し、基本的な問題に適用することによりその有効性を確認した。また、適用例を紹介し、実際の二次元および三次元

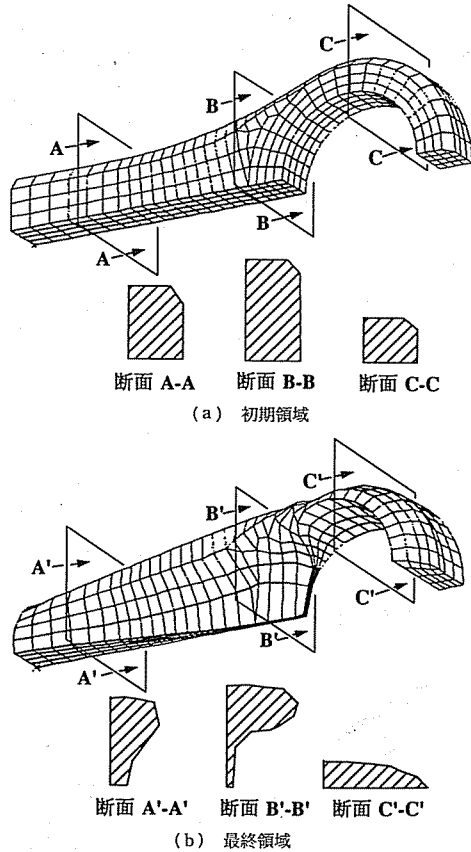


図 16 コンロッドの計算結果

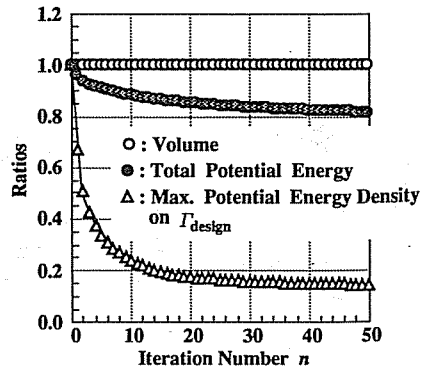


図 17 コンロッドの最適化履歴

の領域最適化問題に対する本方法の実用性を示した。

文 献

- (1) Hadamard, J., Mémoire sur un problème d'analyse relatif a l'équilibre des plaques élastiques encastrees, Mémoire des savants etrangers, *Oeuvres de J. Hadamard*, (1968), CNRS, Paris.
- (2) Zolesio, J. P. (Haug, E. J. and Cea, J. 編), *Optimization of Distributed Parameter Structures*, 2(1981), 1152, Sijthoff & Noordhoff.
- (3) 畔上, 機論, 60-574, A(1994), 1479.
- (4) 畔上・呉, 機論掲載予定, 60-578, A(1994).
- (5) 下田・畔上・桜井, 機論, 60-571, A(1994), 763.
- (6) Olhoff, N., Bendsoe, M. P. and Rasmussen, J., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 89(1991), 259.