

複数荷重を考慮した線形弾性体の多目的形状最適化* (平均コンプライアンス最小化問題を例として)

下田 昌利*¹, 畔上 秀幸*², 桜井 俊明*¹

Multiojective Shape Optimization of Linear Elastic Structures Considering Multiple Loading Conditions (Dealing with Mean Compliance Minimization Problems)

Masatoshi SHIMODA, Hideyuki AZEGAMI and Toshiaki SAKURAI

This paper describes a numerical analysis method for multiobjective shape optimization problems of linear elastic structures. For an example, we treat a multiloading mean compliance minimization problem with a volume constraint. The presented method is based on the traction method that was proposed as a solution to the domain optimization problems by one of the authors. The traction method is implemented to analyze the speed field, which represents the domain variation, with regard to the deformation field of the linear elastic continuum formed in the objective domain applying the force in proportion to the shape gradient function. To scalarize the multiobjective functionals we employ the weighted l_p -norm method with four types of norms. The shape gradient functions for each scalarized objective functional are obtained using the Lagrange multiplier method. For the numerical analyses we used a general-purpose finite-element code. Numerical results to a multiply connected plate problem and to a solid structure problem under the multiloading conditions show the validity of the present method to obtain practical Pareto solutions.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Finite-Element Method, Structural Analysis, Domain Optimization, Multiobjective Optimization, Pareto Solution, Traction Method, Multiply Connected Domain

1. はじめに

構造設計において、複数の荷重が作用する多目的構造物の形状決定を効率的かつ経済的に行うことは重要な課題である。ここで複数荷重とは多目的構造に対して独立に作用する荷重群を意味する。この種の最適化問題は多目的最適化問題となり、必ず各目的関数に対しての完全な最適解が得られるという保証はない。したがって、多目的最適化問題はいわゆるトレードオフの関係にある目的関数に関するパレート最適解を求める問題となる。

これまでこの形状最適化問題において、単一荷重に対する報告は数多く行われているが⁽¹⁾⁽²⁾、実際の構造設計で遭遇する複数荷重を考慮した形状最適化に関する報告は限られている。複数荷重を考慮した最適化問題に関する報告のほとんどはトラス等のはり構造に限定されており、いわゆる寸法最適化問題を扱ったものである⁽³⁾⁻⁽⁵⁾。

複数荷重を考慮した多目的形状最適化問題に関する

数少ない報告の一つは多田ら⁽⁶⁾による報告である。多田らは各負荷に対するポテンシャルエネルギー最小化問題に重み係数法を適用することによって目的関数をスカラ化し、エネルギー比法を用いることによって二次元の形状最適化問題のパレート解を求めている。また、菊池⁽⁷⁾はミニマックス法の近似によりトポロジー最適化問題のパレート最適解を求めている。

一方、著者らは形状最適化問題の解法として力法⁽⁸⁾に注目し、これまで単一荷重の問題に対して適用可能な形状最適化システムの開発を行ってきた⁽⁹⁾。力法は領域変動に対する形状感度(形状こう配関数)を利用したこう配法による領域変動の支配方程式を擬似弾性問題に置き換えて解く方法である。この場合、形状こう配関数は擬似的な力とみなされる。実際の数値解析には有限要素法や境界要素法を利用することができるという点で実用的である。また、目的汎関数として平均コンプライアンスのような力学的に単純な汎関数を選んだ場合は極めて容易になる。さらに、領域変動は領域全体の変動として解析されることから有限要素法を用いる場合の内部節点のリメッシュが実用上必要ないという有利な特徴がある。

本論文では複数荷重に対する多目的形状決定問題に対する力法の適用を検討する。目的汎関数には複数荷

* 平成6年8月18日 第72期全国大会において講演、原稿受付 平成6年5月27日。

¹ 正員、三菱自動車工業(株) (〒444 岡崎市橋目町中新切1)。

² 正員、豊橋技術科学大学工学部 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

重に対する線形弾性体の平均コンプライアンスを選び、多目的汎関数のスカラ化は重み付 l_p ノルム法で記述される4種類のノルムによって行う。この汎関数は複数の荷重ケースに対する平均的な剛性を表しており、重みにより各荷重ケースの考慮の度合を変えることができる。実際には初期形状に対して、各荷重ケースの剛性をともに向上させるような問題等に適用される。方法の複数荷重に対する多目的形状最適化問題への適用の有効性と実用性は二次元および三次元の多連結問題に適用した解析結果によって示す。

2. 多負荷平均コンプライアンス
最小化問題

図1のように、初期領域 $\Omega \subset R^n, n=2, 3$, 境界 $\Gamma = \partial\Omega$ の線形弾性体の変動して領域 Ω_s , 境界 $\Gamma_s = \partial\Omega_s$ となるものと仮定する。s は履歴を表す。物体力と表面力 $f^{(m)}, P^{(m)}, m=1, 2, \dots, N$ はそれぞれ Ω_s, Γ_1 に作用しているものとする。N 個の荷重ケースは独立に作用することを仮定とする。多目的汎関数のスカラ化には重み付 l_p ノルム法⁽¹⁰⁾ を用いることにする。荷重ケース m に対する変位を $v^{(m)}$, 平均コンプライアンスを $l(v^{(m)}) = l_m$ と表すことにすると平均コンプライアンスの l_p ノルム $\|l\|_p$ は式(1)で定義される。

$$\|l\|_p = \left\{ \sum_{m=1}^N (c^{(m)} l(v^{(m)}))^p \right\}^{1/p}, p \in [1, \infty] \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $c = (c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(N)})^T \geq 0$ は重み係数ベクトルを表す。

なお、領域変動を記述する速度法に関しては文献⁽⁸⁾に譲る。

2.1 重み係数法(方法1) 式(1)において $p=1$ を仮定した場合、重み係数法に従った定式化となる。この場合、状態方程式および体積を制約条件とする多負荷平均コンプライアンス最小化問題は次のように表される。

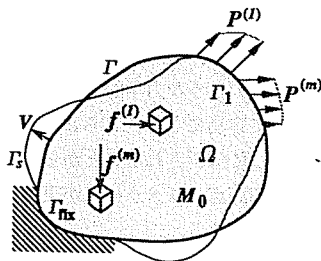


図1 弾性体の領域変動問題

Given $\Omega, f^{(m)}$ in $\Omega, P^{(m)}$ on Γ_1, e in Ω
 $M_0 \in R_+, c \in R_+^N, m=1, \dots, N$ (2)
 find Ω_s (3)
 that minimize $\|l\|_p$ (4)
 subject to $a(v^{(m)}, w^{(m)}) = l(w^{(m)})$
 for all $w^{(m)}, m=1, \dots, N$ (5)
 $M - M_0 \leq 0$ (6)

ここで、第 m 番めの荷重ケースに対して、ひずみエネルギーを与える双一次形式 $a(v^{(m)}, w^{(m)})$, 外力によるポテンシャルエネルギーあるいは平均コンプライアンスを与える一次形式 $l(w^{(m)})$, 体積 M を次のように定義する。

$$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = \int_{\Omega_s} e_{ijkl} v_{k,i}^{(m)} w_{l,j}^{(m)} d\Omega \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$l(w^{(m)}) = \int_{\Omega_s} f_i^{(m)} w_i^{(m)} d\Omega + \int_{\Gamma_1} P_i^{(m)} w_i^{(m)} d\Gamma \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$M = \int_{\Omega_s} dx \quad \dots\dots\dots (9)$$

なお、 v_i, w_i はそれぞれ変位、 e_{ijkl} は弾性テンソルを表す。 R_+ は正の実数を表す。また、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。

この問題に対するラグランジュ関数は次のように表される。

$$L(\Omega, v^{(1)}, \dots, v^{(N)}, w^{(1)}, \dots, w^{(N)}, \Lambda) = \sum_{m=1}^N \{c^{(m)} l(v^{(m)})\} + \sum_{m=1}^N \{l(w^{(m)}) - a(v^{(m)}, w^{(m)})\} + \Lambda(M - M_0) \quad \dots\dots\dots (10)$$

簡単のため表面力の作用する境界は法線方向には変動しないこと、 $n_i V_i = 0$ on Γ_1 , 材料は均質不変であること、 $e'_{ijkl} = \dot{e}_{ijkl} = 0$, 物体力は領域内で一定であること、 $f' = 0$, を仮定する⁽¹²⁾ と、ラグランジュ関数 L の領域変動に対する導関数 \dot{L} は、領域変動に対する速度場 V を用いて式(11)のように表される⁽⁸⁾。ただし、分布関数において、 $(\dot{\cdot})$ は物質導関数、 $(\cdot)'$ は形状導関数を表す⁽¹¹⁾。

$$\dot{L} = \sum_{m=1}^N \{c^{(m)} l(v^{(m)}) - a(v^{(m)}, w^{(m)})\} + \sum_{m=1}^N \{l(w^{(m)}) - a(v^{(m)}, w^{(m)})\} + \Lambda(M - M_0) + \int_{\Gamma_s} \left\{ \sum_{m=1}^N (c^{(m)} f_i^{(m)} v_i^{(m)} + f_i^{(m)} w_i^{(m)} - e_{ijkl} w_{k,i}^{(m)} w_{l,j}^{(m)}) + \Lambda \right\} n_i V_i d\Gamma \quad \dots\dots\dots (11)$$

ラグランジュ関数 L の停留条件は $\dot{L} = 0$ とおいて、不等式制約条件に対する停留条件を考慮すると次のようになる。

$$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = l(w^{(m)}) \text{ for all } w, m=1, \dots, N \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = c^{(m)} l(v^{(m)}) \text{ for all } v, m=1, \dots, N \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\int_{\Gamma_s} \left\{ \sum_{m=1}^N (e_{ijk} v_k^{(m)} w_{i,j}^{(m)} - c^{(m)} f_i^{(m)} v_i^{(m)} - f_i^{(m)} w_i^{(m)}) - \lambda \right\} n_i V_i d\Gamma = 0 \text{ for all } V \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\Lambda(M - M_0) = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$M - M_0 \leq 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで、式(12)は状態方程式と一致した v の支配方程式、式(13)は随伴変位 w に関する支配方程式である。式(15)と(16)は体積制約に対する Kuhn-Tucker 条件式である。 v および w はそれぞれ式(12)、式(13)により決定することができる。また、式(12)の支配方程式と式(13)の随伴方程式を比較すると次の関係式が得られる。

$$w^{(m)} = c^{(m)} v^{(m)}, m=1, \dots, N \quad \dots\dots\dots(17)$$

さらに、 Λ は式(15)と(16)により決定することができる。したがって、これらの条件で決定された v, w および Λ を用いることにすれば、ラグランジュ関数の導関数は次式で与えられることになる。

$$\dot{L} = l_c(V) \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここで、速度場 V の一次形式 $l_c(V)$ は次式で与えられる。

$$l_c(V) = \int_{\Gamma_s} G_i V_i d\Gamma \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$G = \left[\sum_{m=1}^N \{c^{(m)}(2f_i^{(m)} v_i^{(m)} - e_{ijk} v_k^{(m)} v_{i,j}^{(m)})\} + \Lambda \right] n \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_1 \quad \dots\dots\dots(20)$$

なお、 G は形状感度を与え、形状こう配関数と呼ばれる。

形状こう配関数が与えられれば方法を適用することが可能となる。

2.2 重み付ミニマックス法(方法2) 式(1)に

おいて $p \rightarrow \infty$ と仮定したときは重み付ミニマックス法による多目的最適化問題の定式化となる。このときの問題は式(1)を次式に書き換えることによって与えられる。

$$\minimize_{\Omega_s} \|l\|_{\infty} = \min_{\Omega_s} \max_{m=1, \dots, N} \{c^{(m)} l(v^{(m)})\} \text{ at each iteration} \quad \dots\dots\dots(21)$$

この方法では、各繰返しにおいて最大荷重ケース m に対する単一荷重の問題になるため、式(20)に対応する形状こう配関数 G は次のように与えられる。

$$G = \{c^{(m)}(2f_i^{(m)} v_i^{(m)} - e_{ijk} v_k^{(m)} v_{i,j}^{(m)}) + \Lambda\} n \text{ for max. load case } (m) \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_1 \quad \dots\dots\dots(22)$$

2.3 規準化重み付ミニマックス法(方法3) 目

的汎関数を次のように規準化した新たな目的汎関数を考える。

$$\bar{T}(v^{(m)}) = \frac{l(v^{(m)}) - l_{\min}(v^{(m)})}{l_{ini}(v^{(m)}) - l_{\min}(v^{(m)})} \quad \dots\dots\dots(23)$$

ただし、 $l_{ini}(v^{(m)})$ は荷重ケース m の初期形状に対する平均コンプライアンス、 $l_{\min}(v^{(m)})$ は荷重ケース m の単一荷重に対する最適形状の平均コンプライアンスである。式(21)を式(24)で置き換える方法を本論文では規準化重み付ミニマックス法と呼ぶことにする。

$$\minimize_{\Omega_s} \|l\|_{\infty} = \min_{\Omega_s} \max_{m=1, \dots, N} \{c^{(m)} \bar{T}(v^{(m)})\} \text{ at each iteration} \quad \dots\dots\dots(24)$$

この問題に対する形状こう配関数 G は方法2と同様の式(22)で与えられる。方法3は方法2と同様にミニマックス法であるが、各荷重ケースの平均コンプライアンスを理想点である完全最適解にできるだけ近づけることを目的とし、理想点からの距離の最大の荷重ケースの平均コンプライアンスを最小化する方法である。これは一種の妥協計画法による定式化となっている。また、方法2は各目的汎関数を絶対評価し、方法3は相対評価していると考えられる。

2.4 重み付ミニ局所マックス法(方法4) 重み

付ミニマックス法を用いた場合の最適性規準は式(22)で与えられた $G=0$ によって与えられる。この条件が満たされることを目標にした場合には次のような局所マックスの概念⁽⁷⁾に従った G を用いる方法を考えることができる。これは、局所的に各荷重ケースの形状こう配関数を評価し、その最大値をその部分の代表形状こう配関数とすることを表しており、式(22)と比較すると式(25)のような不等号が成立する。

$$G = \max_{m=1, \dots, N} [\{c^{(m)}(2f_i^{(m)} v_i^{(m)} - e_{ijk} v_k^{(m)} v_{i,j}^{(m)})\} + \Lambda] n \geq \{c^{(s)}(2f_i^{(s)} v_i^{(s)} - e_{ijk} v_k^{(s)} v_{i,j}^{(s)}) + \Lambda\} n \text{ for max. load case } (s) \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_1 \quad \dots\dots\dots(25)$$

この方法を本論文では重み付ミニ局所マックス法と呼ぶことにする。

3. 力 法

方法は速度場 V を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている⁽⁸⁾。

$$a(V, w) = -l_c(w) \text{ for all } w \quad \dots\dots\dots(26)$$

式(26)の速度場 V は負の形状こう配関数 $-G$ を外力として作用させたときの変位場に相当している。したがって、式(26)は通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことができる。本論文では有限要素法を用いる。得られた V に1回の領域変動量を調整する係数 Δs を乗じることにより形状更新が行われる。形状こう配

関数を求めるための応力解析と速度場を求めるための速度解析および形状更新を繰返すことにより、目的汎関数が最小化され、最適形状を得ることができる。方法の概念図を図2に示す。

体積制約に対する Kuhn-Tucker 条件は式(15), (16)で与えられる。これらの条件を満足させるための方法として制御の考えを用いている。体積制約を満たすように決定されるラグランジュ乗数 λ は力- G の中では一様な表面力と考えることができ、大きさ λ の一様表面力を制御することにより式(15), (16)の条件を満足させることができる。 λ を制御する方法としては PID 制御の考えに基づく方法を用いている。その詳細は文献⁽⁹⁾に譲る。

著者らはすでに方法を実設計での形状最適化に適用するため、汎用 FEM コードを利用した形状最適化システムを開発し、単一荷重の問題に適用してその有効性を確認している⁽⁹⁾。今回、このシステムに本論文の内容を追加した。

4. 計算例

開発したシステムを二次元および三次元の多連結問題に適用し、多目的形状最適化問題に対する方法を利用した本手法の有効性を確認する。さらに、二次元問題については方法1から方法4で定義した形状こう配関数を用いて得られたパレート最適形状の比較を行う。二次元問題としては三つの円孔を有する平板の孔形状の最適化問題、三次元問題としては半円孔を有す

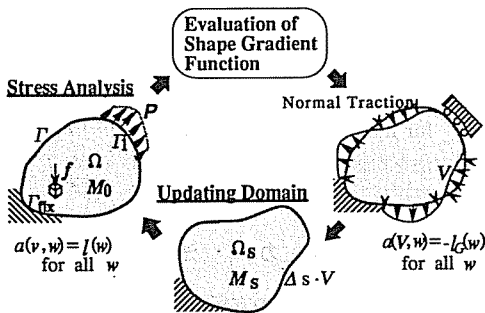


図2 方法の概念図

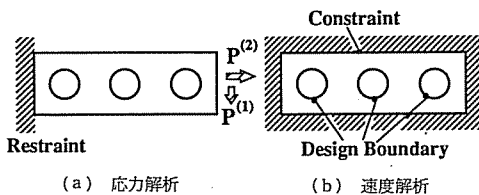


図3 平板の穴形状最適化問題

るブラケットの板厚最適化問題を例題とする。いずれの問題においても体積(面積)一定の制約を与える。

4.1 二次元問題 問題設定を図3に示す。応力解析では図3(a)に示すように端部を完全拘束し、他端に荷重ケース1としてせん断荷重 $P^{(1)}$ および荷重ケース2として引張荷重 $P^{(2)}$ の2種類の分布荷重を負荷した。速度解析では図3(b)に示すように平板の外周は変動しないものと仮定し、設計境界は三つの孔の周囲とした。また、重み係数 $c^{(1)}$ は0.2から0.8まで五段階に変化させ、 $c^{(2)}=1-c^{(1)}$ とした。なお、平面応力状態を仮定し、数値解析には4節点定ひずみ要素を使用した。

図4に初期形状および比較のために計算した単一荷重 $P^{(1)}$ および $P^{(2)}$ に対する最適形状を示す。図5に最適化履歴を示す。面積は荷重ケース1, 2とも一定になるように制御され、目的汎関数は初期形状と比較して荷重ケース1の場合は約5%, 荷重ケース2の場合は約27%減少した結果になっている。

図6に方法1から方法4で定義した形状こう配関数を用いて得られたパレート最適形状を示す。方法2を除いた他の方法は局部的にやや異なった部分もあるが全体的に非常に類似した形状が得られている。 $c^{(1)}$ が小さいときは荷重ケース2の影響を強く受け、増加するに従って次第に荷重ケース1の影響が現れた形状が

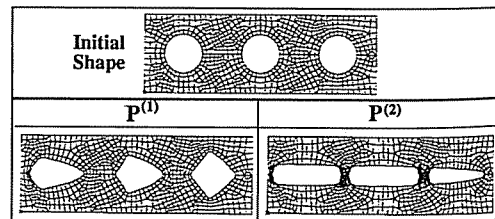


図4 初期形状と単一荷重に対する最適形状

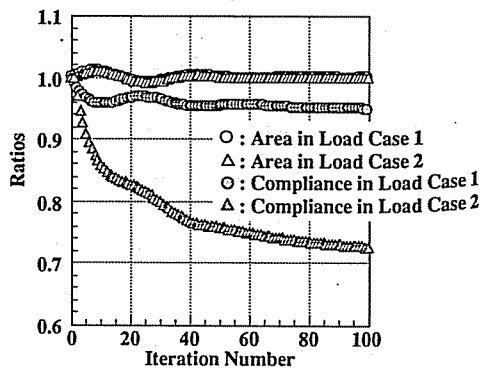


図5 単一荷重に対する最適化履歴

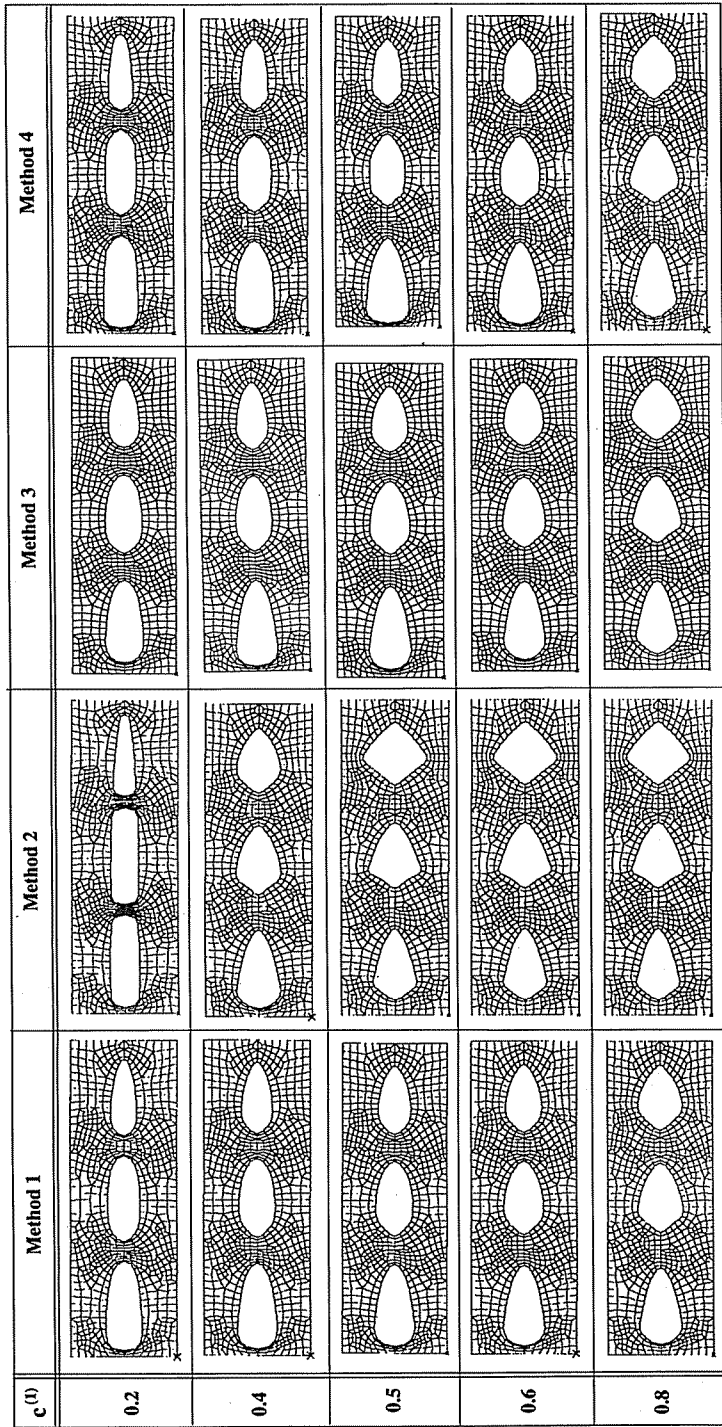


図 6 2 方向複数荷重に対するパレート最適形状

得られていることを確認することができる。それに対して方法2の場合、中間的な形状は得られ難くなっている。

図7から図10は方法1から方法4について、 $c^{(1)}=0.4$ の場合の複数荷重に対する最適化履歴を示す。い

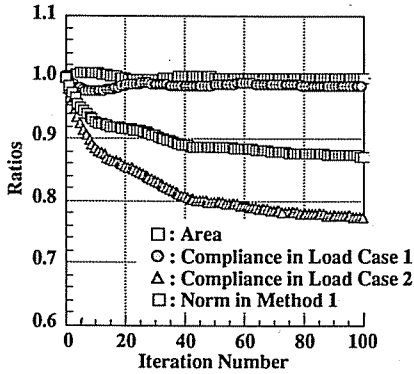


図7 方法1による2方向荷重に対する最適化履歴 ($c^{(1)}=0.4$)

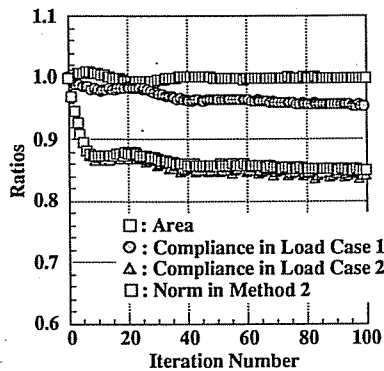


図8 方法2による2方向荷重に対する最適化履歴 ($c^{(1)}=0.4$)

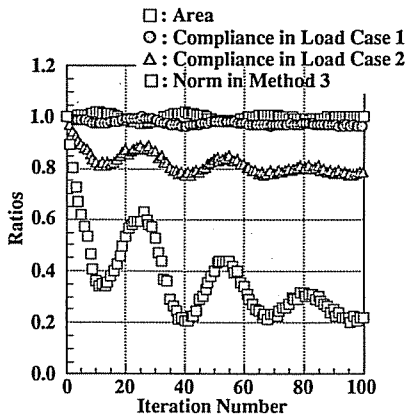


図9 方法3による2方向荷重に対する最適化履歴 ($c^{(1)}=0.4$)

れの方法も面積制約を満たしていることが確認できる。平均コンプライアンスおよび各方法で定義されたノルムの履歴はすべての方法とも最終的には最小化されているが、その過程は異なっている。特に、方法2と3はミニマックスの理論どおり、もぐらたたき現象が現れている。

図11に各方法、各重み係数に対する平均コンプライアンスの比較を示す。なお、図中の l_1 は荷重ケース1に対する平均コンプライアンス、 l_2 は荷重ケース2

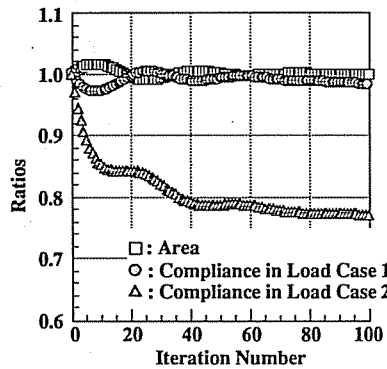


図10 方法4による2方向荷重に対する最適化履歴 ($c^{(1)}=0.4$)

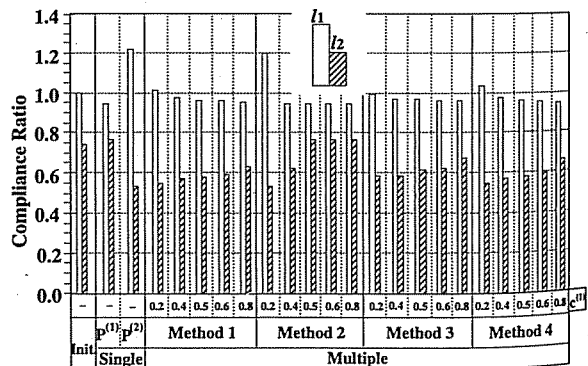


図11 平均コンプライアンスの比較

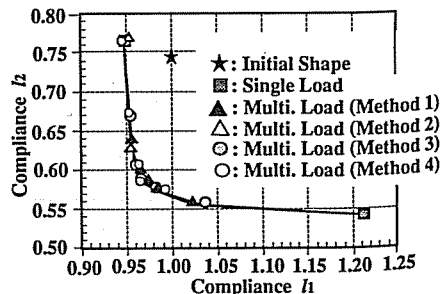


図12 目的関数空間

に対する平均コンプライアンスを示している。また、各値は初期形状の荷重ケース1の平均コンプライアンスで規準化している。方法4のノルムは図6の結果と同様、方法2を除いてほぼ一致した結果が得られている。また、 $c^{(1)}=0.4$ 以上の場合、初期形状の結果に対し



図 13 $P^{(3)}(=P^{(1)}+P^{(2)})$ に対する最適形状

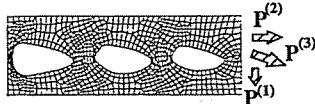


図 14 3方向荷重に対するパレート最適形状
($c^{(1)}=c^{(2)}=c^{(3)}=0.333$)

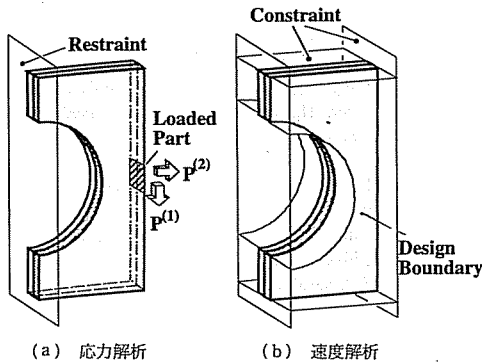


図 15 2方向荷重に対するブラケットの問題設定

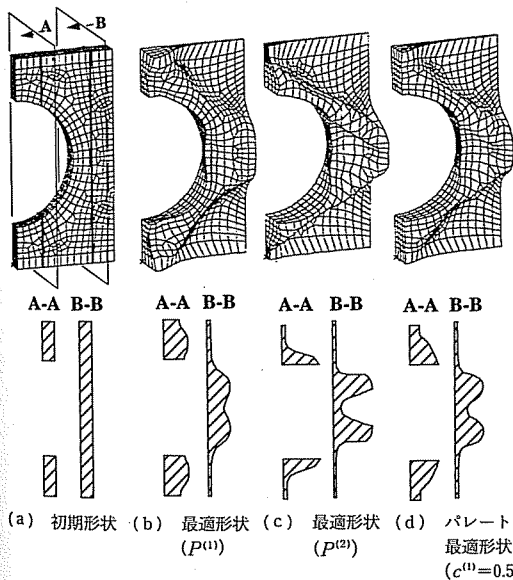


図 16 ブラケットの計算結果

て荷重ケース1, 荷重ケース2の両方ともに平均コンプライアンスは減少していることがわかる。

図12はこれまでの結果を二つの目的汎関数を座標とする目的汎関数空間上に示したものである。すべての方法による結果がほぼ同一曲線上にあることがわかる。方法2を除いて重み係数を変えることにより、全パレート最適形状の集合を求めることが可能であることが確認できる。方法2によりすべてのパレート最適

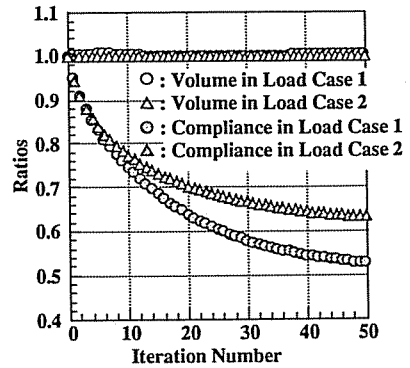


図 17 単一荷重に対する最適化履歴

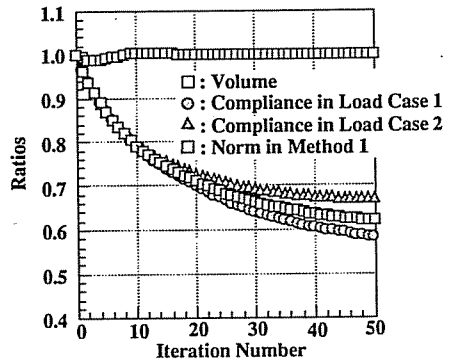


図 18 方法1による2方向荷重に対する最適化履歴
($c^{(1)}=0.5$)

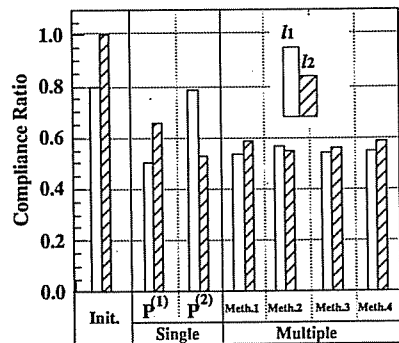


図 19 平均コンプライアンスの比較

形状を得ようとするためには、重み係数の細かな設定
 (この問題の場合、 $c^{(1)}=0.2\sim 0.4$ での微調整)が必要であり、実際的ではないと考えられる。

これらの結果から方法2を除く各方法は本二次元問題に対し、すべてのパレート最適形状を求めることができること、および重み係数に応じて各荷重ケースに対する平均コンプライアンスを減少させ得ることが確認できる。

また、参考として図13および図14に $P^{(1)}$ と $P^{(2)}$ が同時に作用した場合の $P^{(3)}$ に対する最適形状と $P^{(1)}$ 、 $P^{(2)}$ 、 $P^{(3)}$ が作用した場合の方法4によるパレート最適形状を示す。

4・2 三次元問題 三次元への適用例としてソリッド体のブラケットの問題設定を図15に示す。二次元問題と同様に応力解析では図15(a)に示すように端部を完全拘束し、他端にせん断荷重 $P^{(1)}$ および引張荷重 $P^{(2)}$ の2種類の分布荷重を負荷した。速度解析では図15(b)に示すように外周を滑り拘束し、厚さ方法に領域変動可能な制約を与えた。また、方法1を用い、重み係数 $c^{(1)}$ は0.5とした。数値解析は8節点ソリッド要素を使用し、二分の一対称モデルで行った。

図16に初期形状、単一荷重に対する最適形状およびパレート最適形状を示す。パレート最適形状は荷重ケース1と2に対する各最適形状の中間的な形状になっていることがわかる。

図17と図18にそれぞれ単一荷重に対する最適履歴と複数荷重に対する最適履歴を示す。

図19に図11と同様、方法1から方法4により得られた平均コンプライアンスの比較を示す。各値は初期形状の荷重ケース2の平均コンプライアンスで規準化

している。各方法の値はほぼ一致していることがわかる。

これらの結果から三次元問題についても本方法によりパレート最適形状が求められることが確認できる。

5. おわりに

多目的形状最適化問題となる線形弾性体の複数荷重に対する平均コンプライアンス最小化問題に対して、方法の適用方法を示した。多目的汎関数は代表的な4種類のノルムによってスカラ化した。提示した方法の有効性と実用性を基本的な問題に適用することにより示した。

文 献

- (1) Haftka, R. T. and Grandhi, R. V., Structural Shape Optimization-A Survey, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 57(1986), 91.
- (2) Ding, Y., Shape Optimization of Structures: A Literature Survey, *Comput. Struct.*, 24-6(1986), 985.
- (3) Stadler, W., Multicriteria Optimization in Mechanics (A Survey), *Appl. Mech. Rev.*, 37-3(1984), 277.
- (4) Eschenauer, H., ほか2名(編), *Multi-criteria Design Optimization*, (1990), Spriger-Verlag.
- (5) Kosky, J. and Silvennoinen, R., Norm Methods and Partial Weighting in Multicriterion Optimization of Structures, *Int. J. Num. Methods Eng.*, 24(1987), 1101.
- (6) 多田・瀬口・藪, 機論, 52-473, A(1986), 233.
- (7) 菊池, 応用数理, 3-1(1993), 2.
- (8) 畔上, 機論, 60-574, A(1994), 1479.
- (9) 下田・呉・畔上・桜井, 機論, 60-578, A(1994), 2418.
- (10) 例えば, 坂和, 非線形システムの最適化, (1987), 125, 森北出版.
- (11) Sokolowski, J. and Zolesio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), 7, Spriger-Verlag.
- (12) 畔上・呉, 機論, 60-578, A(1994), 2312.