

応力分布を規定した連続体の境界形状決定*

下田 昌利*¹, 畔上 秀幸*², 桜井 俊明*¹Boundary Shape Determination of Continua
with Desired Stress Distribution

Masatoshi SHIMODA, Hideyuki AZEGAMI and Toshiaki SAKURAI

In this paper we present a numerical analysis method for shape determination of continua based on a strength criterion to control the stress distribution to a desired one. As an objective functional, we introduce a squared stress error norm on the prescribed domains. Using the Lagrange multipliers, an optimization problem subjected to a volume constraint is formulated. The shape gradient function and the optimality condition are derived using the material derivative method and the adjoint method. With the traction method, the domain variation that minimizes the objective functional is numerically and iteratively determined. The shape determination system is developed using a general-purpose FEM code, which is used to solve the state equation and the adjoint equation. The calculated results show the effectiveness of the proposed method in controlling the stress distribution.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Finite-Element Method, Shape Identification, Shape Optimization, Stress Control, Traction Method, Adjoint Method, von Mises Stress, Uniform Stress, Material Derivative

1. はじめに

構造最適設計において、強度規準の問題は頻出する重要な問題である。本論文では疲労寿命等に影響を与える構造中に含まれるノッチ等の応力集中要素の形状決定を目的に、強度規準に基づく形状最適化問題を扱う。

強度規準の形状最適化問題に対する数値解析は Zienkiewicz and Campbell によって 1970 年代に始められている。彼らは有限要素の節点を設計変数に選んで形状最適化問題の感度解析法を示し、数理計画法で最適形状を求めている⁽¹⁾。以後、境界表現に多項式やスプライン関数を利用した解法が順に開発されてきた。これらは数理計画法や最適性規準法と組み合わせられ、離散系の形状最適化問題の解法として現在まで数多くの報告が行われている^{(2)~(7)}。しかしながら、強度規準に基づく分布系の形状最適化問題の解法に関する報告は数少ない⁽⁸⁾⁽⁹⁾。こうしたこれまでの形状最適化の研究の歴史はいくつかの Survey 論文で振り返ることが

できる^{(10)~(13)}。

一方、著者らはこれまで、領域最適化問題の一解法である方法⁽¹⁴⁾を用い、自己随伴問題である平均コンプライアンス規準の剛性問題について、多目的最適化問題や体積最小化問題の数値解法を提示してきた⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。方法は分布系の感度(形状こう配関数)を利用し、設計変数(境界形状)を分布関数のまま扱うため、自由度を縮小することなく多自由度な形状設計が可能、随伴変数法を用いるため形状こう配関数の計算が効率的、滑らかな境界形状が得られる等、離散系の解法では得難い長所を有した方法である。

本論文では自己随伴問題となる強度規準の形状最適化問題の一つとして、指定領域での応力のコントロールを目的に、応力が規定された分布をもつような形状決定問題に対して、方法に基づく一解法を提示する。任意の応力分布を実現する形状が存在する保証はないため、最小二乗法による近似解法を用いる。目的汎関数として応力のコントロール度合を表す規定応力分布からの二乗誤差を定義し、体積制約を必要に応じて付加する。

提示方法により、応力の均一化やヒューズ部の設定等、目標応力分布を実現する境界形状設計が可能となり、静的、動的強度や疲労寿命の向上、被損モードの

* 原稿受付 1996年2月29日。

¹ 正員, 三菱自動車工業(株) (〒444 岡崎市橋目町中新切1)。² 正員, 豊橋技術科学大学工学部 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

コントロール等への応用も可能になると考えられる。
 最初に、問題を定式化し、形状こう配関数を導出する。次に、随伴変数を含む形状こう配関数の汎用 FEM コードを利用した数値解析法を提示し、方法を適用する。最後に、例題の解析結果を示し、本形状決定問題に対する提案方法の有効性を示す。

2. 応力二乗誤差最小化問題

2.1 定式化 図1のように、初期領域 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 、境界 $\Gamma \equiv \partial\Omega$ の線形弾性体の変動して領域 Ω_s 、境界 $\Gamma_s \equiv \partial\Omega_s$ となるものと仮定する。物体力 f (テンソル表示では f_i , $i=1, 2, \dots, n$) と表面力 P (テンソル表示では P_i) はそれぞれ Ω_s, Γ_1 に作用しているものとする。体積および状態方程式(弱形式で表現)を制約条件とし、領域 Ω_c (変動後 Ω_{cs}) 内で定義される応力二乗誤差を最小化する問題は次のように表される。

$$\text{Given } \Omega, f \text{ in } \Omega, P \text{ on } \Gamma, e \text{ in } \Omega, M_0 \in \mathbb{R}_+ \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{find } \Omega_s \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{that minimize } \int_{\Omega_c} \{\sigma_M(v(x)) - \bar{\sigma}_M(x)\}^2 d\Omega \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{subject to } M - M_0 \leq 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$a(v, w) = l(w) \text{ for all } w \in U, v \in U \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\sigma_M(v(x))$ は式(6)で定義されるミーゼス応力、 $\bar{\sigma}_M(x)$ は規定された目標ミーゼス応力分布、 M, M_0 はそれぞれ体積とその制約値を表す。

$$\sigma_M^2(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)\} \dots\dots\dots (6)$$

また、変分ひずみエネルギーを与える双一次形式 $a(v, w)$ 、外力による変分ポテンシャルエネルギーを与える一次形式 $l(w)$ は式(7)、式(8)で定義される。 U は変位の拘束条件を満たす適当に滑らかな関数空間を表す。

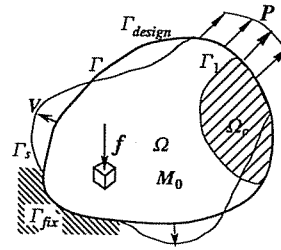


Fig.1 Domain variation of elastic continuum

$$a(v, w) = \int_{\Omega_s} e_{ijkl} v_{k,i} w_{l,j} d\Omega \dots\dots\dots (7)$$

$$l(w) = \int_{\Omega_s} f_i w_i d\Omega + \int_{\Gamma_1} P_i w_i d\Gamma \dots\dots\dots (8)$$

なお、 v (テンソル表示では v_i)、 w (テンソル表示では w_i) はそれぞれ変位、変分変位、 e (テンソル表示では e_{ijkl}) は弾性テンソルを表す。記号 \mathbb{R}_+ は正の実数の集合を表す。また、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。

2.2 最適性条件と形状こう配関数 この問題に対するラグランジュ汎関数 L は $w(x), \Lambda$ をそれぞれ状態方程式と体積制約に対するラグランジュ乗数として次のように表される。

$$L(\Omega, v, w, \Lambda) = \int_{\Omega_c} (\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M)^2 d\Omega + l(w) - a(v, w) + \Lambda(M - M_0) \dots\dots\dots (9)$$

簡単のため表面力の作用する境界は法線方向には変動しないこと ($n_i V_i = 0$ on Γ_1)、材料は均質不変であること ($e'_{ijkl} = \dot{e}_{ijkl} = 0$)、物体力は領域内で一定であること ($f' = 0$) を仮定すると、ラグランジュ汎関数の領域変動に対する導関数 \dot{L} は、領域変動に対する速度場 V を用いて次式のように表される。なお、 (\cdot) は形状導関数と呼ばれる領域変動に対して空間座標に固定した分布関数の導関数⁽¹⁷⁾を表し、 $(\dot{\cdot})$ は物質導関数を表す⁽¹⁷⁾。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & l(w') - a(v, w') + \int_{\Omega_c} 2(\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M) \frac{\partial \sigma_M}{\partial \sigma_{ij}} \sigma'_{ij} d\Omega - a(v', w) + \int_{\partial\Omega_c} \{(\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M)^2\} n_i V_i d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_s} \{-e_{ijkl} v_{k,i} w_{l,j} + f_i w_i + \Lambda\} n_i V_i d\Gamma + \Lambda'(M - M_0), \quad V \in C_\Theta \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで、 n は外向き単位法線ベクトルを表す。 C_Θ は領域変動の制約条件を満たす適当に導関数が連続な関数空間を表す。

ラグランジュ汎関数 L の v, w および Λ に関する最適性条件は不等式制約条件に対する停留条件を考慮すると次のようになる。

$$a(v, w') = l(w') \text{ for all } w' \in U \dots\dots\dots (11)$$

$$a(v', w) = \int_{\Omega_c} 2\{\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M\} \frac{\partial \sigma_M}{\partial \sigma_{ij}} \sigma'_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_c} 2\{\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M\} \frac{\partial \sigma_M}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial v_k} v'_k d\Omega \text{ for all } v' \in U \dots\dots\dots (12)$$

$$\Lambda(M - M_0) = 0 \dots\dots\dots(13)$$

$$M - M_0 \leq 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$\Lambda \geq 0 \dots\dots\dots(15)$$

ここで、式(11)は状態方程式と一致した v の支配方程式、式(12)は随伴変位 w に関する支配方程式(随伴方程式)である。また、式(13)から式(15)は体積に関する不等式制約条件であり、ラグランジュ乗数 Λ はこれらの関係を満たすように決定される。

これらの条件で決定された v, w および Λ を用いることにすれば、ラグランジュ汎関数の導関数は次式で与えられることになる。

$$\dot{L} = l_G(V) \dots\dots\dots(16)$$

ここで、速度場 V の一次形式 $l_G(V)$ は次式で与えられる。

$$l_G(V) = \int_{\partial\Omega_c} G_i^1 V_i d\Gamma + \int_{\Gamma_s} G_i^2 V_i d\Gamma \dots\dots\dots(17)$$

$$G^1 = (\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M)^2 n \dots\dots\dots(18)$$

$$G^2 = (-e_{ijk} v_{k,i} w_{i,j} + f_i w_i + \Lambda) n \dots\dots\dots(19)$$

なお、ベクトル分布関数 G^1, G^2 は領域変動に対する形状感度を与え、形状こう配関数と呼ばれる。

応力規定領域が全領域と一致する場合 ($\Omega_c = \Omega$)、すなわち領域全体の応力をコントロールする場合には式(17)から式(19)は次のように簡単になる。

$$l_G(V) = \int_{\Gamma_s} G_i V_i d\Gamma \dots\dots\dots(20)$$

$$G = \{(\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M)^2 - e_{ijk} v_{k,i} w_{i,j} + f_i w_i + \Lambda\} n \dots\dots\dots(21)$$

また、応力規定領域が固定されるとき ($V=0$ on $\partial\Omega_c$)、式(17)は式(20)に、式(18)と式(19)は式(22)のように単純化される。

$$G = (-e_{ijk} v_{k,i} w_{i,j} + f_i w_i + \Lambda) n \text{ on } \Gamma_{\text{design}} = \Gamma \setminus \Gamma_{\text{fix}} \dots\dots\dots(22)$$

形状こう配関数が与えられれば、方法を適用することが可能となる。

3. 力 法

方法はヒルベルト空間でのこう配法を利用し、目的汎関数が減少するような領域変動量を数値的に解析する方法として提案されている⁽¹⁴⁾。領域変動量を与える速度場 V の支配方程式は形状こう配関数を用いて式(23)のように表される。

$$a(V, w) = -l_G(w) \text{ for all } w \in C_\theta \dots\dots\dots(23)$$

この支配方程式は境界に負の形状こう配関数 $-G$ を外力として作用させたときの変位場として領域変動を与える速度場 V が解析されることを示している。言い替えると、力法により領域変動は形状こう配関数

を擬似弾性問題の外力として作用させたときの変位場として求められる。したがって、式(23)は通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことができる。本論文では有限要素法を用いる。速度場 V を求める解析を速度解析と呼ぶことにする。得られた微小領域変動量を用いて領域を更新する手続きを繰返すことにより、最適形状が得られる。

なお、この支配方程式で決定された領域変動 V はラグランジュ汎関数 L を減少させることは既報にて証明されている⁽¹⁴⁾。

4. 数 値 解 法

方法で必要な形状こう配関数は分布系の感度であるため、離散系の感度を求める際に必要とされる剛性マトリックスの微分等が不要であり、汎用 FEM コードの応力解析の結果を利用して求めることができる。また、領域変動量を求めるときに必要な法線方向の力も汎用 FEM コードに備えられている圧力荷重で代替できる。これらに注目し、これまで汎用 FEM コードをサブルーチンのように利用する形状最適化システムを開発してきた⁽¹⁶⁾。本論文で扱う問題の場合、通常の状態方程式(11)に加え、随伴方程式(12)を解く必要があり、随伴方程式を汎用 FEM コードの一般機能を利用して解く方法を検討した。

4.1 随伴変数の計算 弱形式で与えられる随伴方程式(12)をマトリックス表記すると式(24)のようになる。

$$\int_{\Omega_s} [B]^T [D] [B] d\Omega \{w\} = \int_{\Omega_s} [B]^T [D] \left\{ 2(\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M) \frac{\partial \sigma_M}{\partial \sigma_{ij}} \right\} d\Omega \dots\dots\dots(24)$$

ここで、 $[B]^T$ はひずみ-変位マトリックスの転置、 $[D]$ は弾性マトリックスを表す。式(24)は領域内に $\{2(\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M)(\partial \sigma_M / \partial \sigma_{ij})\}$ の初期ひずみベクトルを作用させたときの随伴変位 w を求める式となっている。

初期ひずみの入力可能な汎用 FEM コードを使用する場合、 $\{2(\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M)(\partial \sigma_M / \partial \sigma_{ij})\}$ を与えることにより直接 w を求めることができる。その機能がない場合、代替方法として熱ひずみを利用することが可能である。具体的には、まず、ひずみ $\{2(\sigma_M(v) - \bar{\sigma}_M)(\partial \sigma_M / \partial \sigma_{ij})\}$ を固有値解析により等価な主ひずみに変換する。次に主ひずみ方向に主ひずみの大きさに等しい線膨張係数を直交異方性材料カードを利用して設定する。最後に温度荷重 $\Delta T = 1$ を与えることにより、等価な初期ひずみを与えることが可能となる。本

研究では後者の代替法を用いている。

4.2 制約条件の考慮 著者らはこれまで方法の実行において制約条件を考慮する方法として、単一制約に対して有効な PID 制御の考えを用いる方法⁽¹⁸⁾ や複数制約にも対応できる方法⁽¹⁹⁾ を提示した。本研究では PID 制御の考えを用いる方法を用いた。その概要は次のとおりである。

体積制約に対する Kuhn-Tucker 条件は式(13)から式(15)で与えられた。体積制約を満たすように決定されるラグランジュ乗数 λ は力 $-G$ の中では一様な表面力と考えることができ、大きさ λ の一様な表面力を目標値へ制御することにより制約条件を満足させることができる。

4.3 形状決定システム 開発した形状決定システムは EWS 上で FEM コードと開発コードを組合わせて構成される。FEM における剛性方程式の数値解析に汎用 FEM コードを利用しており、複雑な問題に

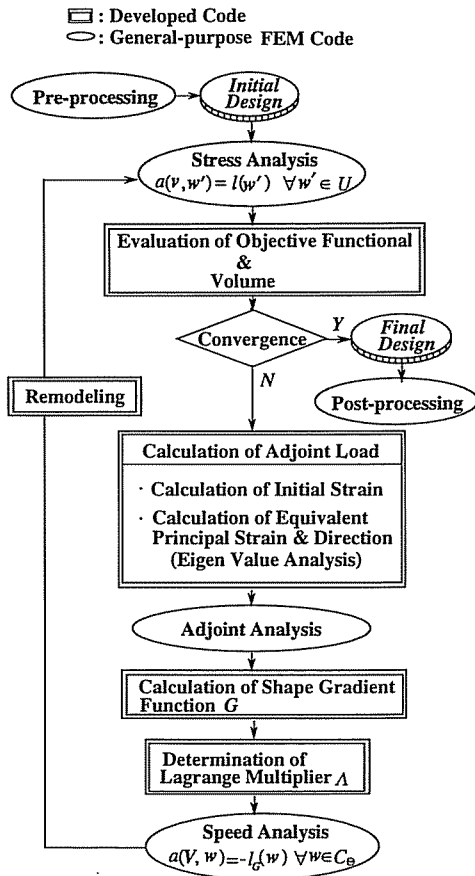


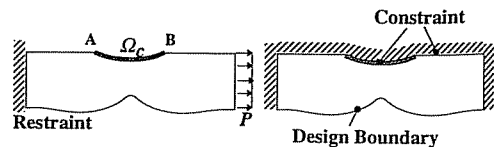
Fig. 2 Schematic flow chart of the shape determination system

対して適用することが可能である。提案方法に基づく本システムの流れを図2に示す。主な構成要素は目的汎関数と応力評価のための応力解析、随伴荷重の計算、随伴ひずみ評価のための随伴解析、形状こう配関数の計算、ラグランジュ乗数の計算、力法に基づく速度解析および形状更新であり、これらを順に繰返すことにより形状解析が実行される。実行に際しては1回の領域変動量の大きさを調整する領域変動係数 Δs_0 を設定し、体積の制約値、応力規定領域 Ω_c とそこでの目標応力分布 $\bar{\sigma}_M(x)$ 、設計境界 Γ_{design} を指定する。また、与えられた初期領域に対して応力解析と随伴解析は同一の拘束条件(荷重条件は異なる)を、速度解析ではそれと独立の側面制約に相当する領域変動の拘束条件を設定する。

5. 計算結果

開発したシステムを二次元のノッチを有する平板(切欠平板)およびコンロッドの例題に適用し、応力分布が規定された連続体の形状決定問題に対する本方法の有効性を検討する。切欠平板に対してはノッチ形状が変更できる場合とできない場合、および面積制約を考慮しない場合について応力規定問題(一定応力および任意応力分布)を解き、得られる形状と応力分布を比較する。なお、扱った五つの例題において平面応力状態を仮定し、有限要素解析には汎用 FEM コード I-DEAS の4節点要素を使用した。

5.1 切欠平板問題1(ノッチ形状が変更できない場合; 任意応力分布への制御) まず、本方法の検証のため、解の明らかな問題へ適用した。問題設定を図3に示す。ノッチ近傍の領域 Ω_c に目標応力分布 $\bar{\sigma}_M(x)$ を与え、下面を設計境界とした。与えた目標応力分布は図7(a)の形状について事前に求めたものであり、この形状を正解形状とした。応力解析では図3(a)に示すように左端部を完全拘束し、反対面に分布荷重を負荷した。速度解析では図3(b)に示すように応力規定領域、拘束、荷重境界および上辺は変動しないものとした。なお、面積一定の制約条件を付加した。この問



(a) Stress analysis (b) Speed analysis

Fig. 3 Notched plate problem 1 (controlling to arbitrary stress distribution)

題は応力集中部の形状が変更できない場合を想定しており、式(22)の形状こう配関数が適用される。

図4に初期形状および得られた収束形状を示す。図5に応力規定領域(AからB)での応力分布を示す。図6に初期値で基準化した最適化履歴を示す。これらの結果から面積は一定に保たれ、狙いどおり目的汎関数は零になり、応力分布も目標応力分布に一致していることがわかる。正解形状の図8(a)と比較するとやや波打っているが、目標とする応力分布を実現する形状が得られていることが確認できる。

5.2 切欠平板問題2(ノッチ形状が変更できない場合；一定応力への制御) 均一応力分布を狙い、目

標応力 $\bar{\sigma}_M(x)$ を一定値(=150 MPa)とした場合について、5.1節と同様の計算を行った。問題設定を図7に示す。

図8に初期形状および100回の繰返しまでの形状履歴を示す。図9に図8で示した繰返し回数における応力規定領域(AからB)での応力分布を示す。また、図

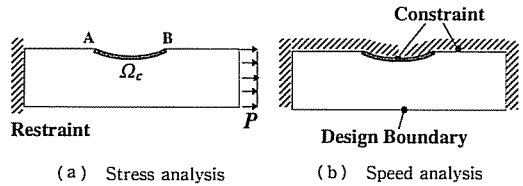


Fig. 7 Notched plate problem 2 (controlling to uniform stress distribution)

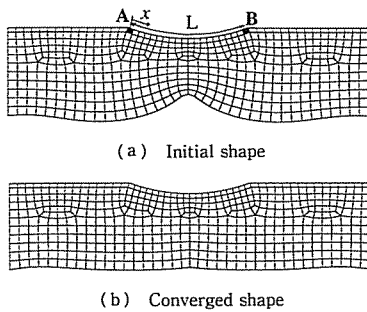


Fig. 4 Shape determination result

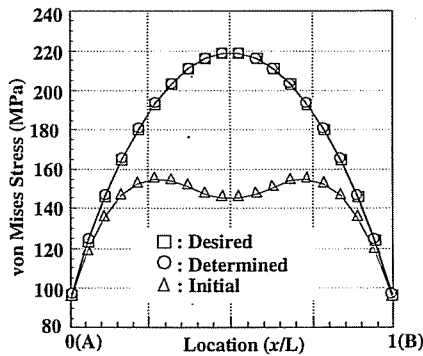


Fig. 5 Comparison of stress distribution along A-B

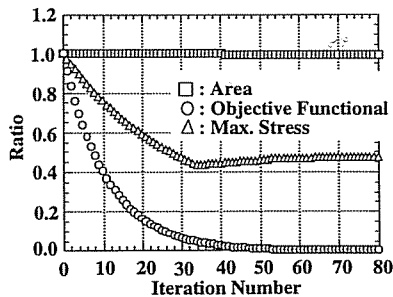


Fig. 6 Iteration histories

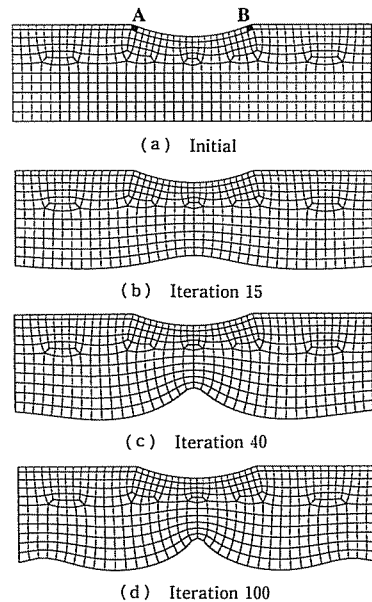


Fig. 8 Shape determination history

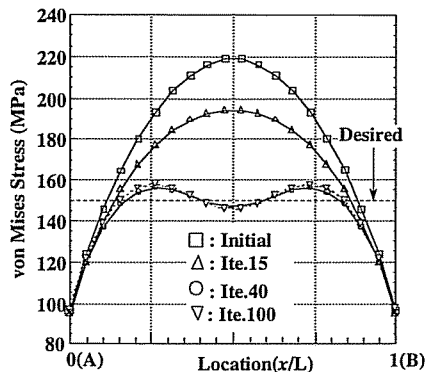


Fig. 9 Comparison of stress distribution along A-B

10に初期値で基準化した最適化履歴を示す。これらの結果から面積は一定に保たれ、ノッチ周辺の応力は目標値に近づいていることがわかる。目的汎関数は面積制約のため零にはなっていないが、最小化されている。領域全体での最大応力に注目すると、繰返し数16回めで最小値となった後、最大応力部が反対の境界に移り、増加している。領域全体で最大応力値を規定し

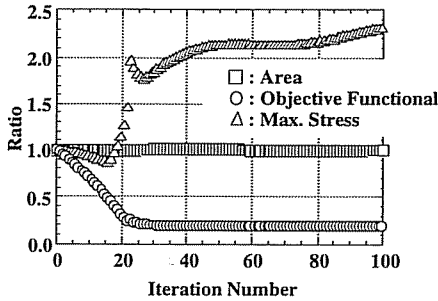


Fig. 10 Iteration histories

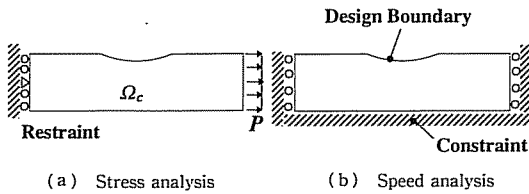
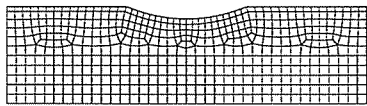
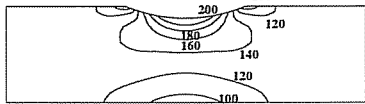


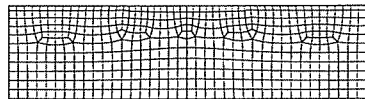
Fig. 11 Notched plate problem 3



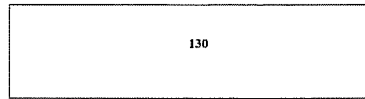
(a) Initial shape



(b) Stress distribution of initial shape [MPa]



(c) Converged shape



(d) Stress distribution of converged shape [MPa]

Fig. 12 Shape determination result

たい場合には応力規定領域を全領域に設定し、式(21)の形状こう配関数を用いることができる。

5・3 切欠平板問題3(ノッチ形状が変更できる場合；一定応力値への制御) 5・2節の問題において、応力規定領域 Ω_c を全域に設定し、目標応力 $\bar{\sigma}_M(x)$ を一定値(=150 MPa)とした。応力解析の境界条件を図11(a)に、速度解析の境界条件を図11(b)に示す。設計境界はノッチを含む上面と側面(ただし、接線方向のみ変動可能)とした。この問題は応力集中部の形状が変更できる場合を想定しており、式(21)の形状こう配関数が適用される。

図12に初期形状と収束形状、およびそのときのミーンズ応力の分布を示す。図13に初期値で基準化した最適化履歴を示す。これらの結果から目的汎関数は最

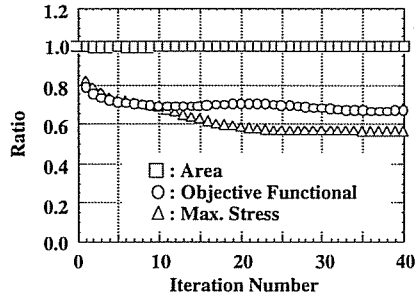
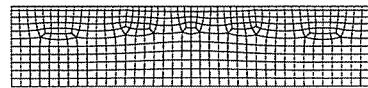
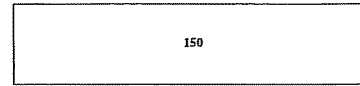


Fig. 13 Iteration histories



(a) Converged shape



(b) Stress distribution [MPa]

Fig. 14 Shape determination result (without area constraint)

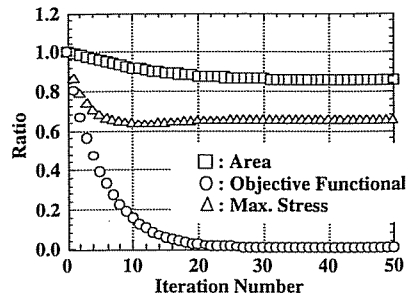


Fig. 15 Iteration histories (without area constraint)

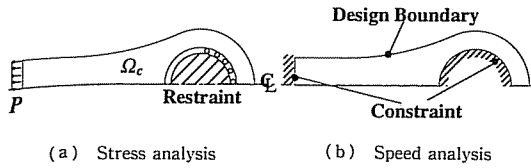


Fig. 16 Shape determination problem of connecting rod

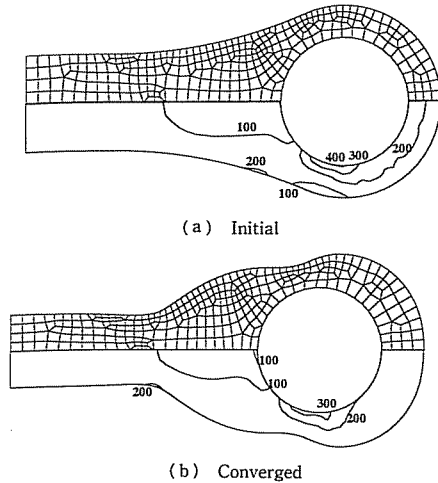


Fig. 17 Shape determination result [MPa]

小化され、面積も一定に保たれていることがわかる。面積制約のため、応力は 130 MPa と目標値より低く、目的汎関数は零になっていないが、狙いどおりノッチのない形状が得られていることがわかる。全領域での最大応力も最小化されている。

5.4 切欠平板問題 4(ノッチ形状が変更できる場合；一定応力値への制御、面積制約無) 5.3 節の問題において、面積制約を考慮せずに同様の計算を行った。

図 14 に収束形状とミーゼス応力の分布を示す。図 15 に初期値で基準化した最適化履歴を示す。面積制約を除くことにより、応力が目標値に一致した形状が得られた。面積は初期形状に比べ約 15% 減少している。解の存在する本問題のような場合、目的汎関数はほぼ零に収束する。

5.5 コンロッド問題(応力集中部の形状が変更できない場合；一定応力への制御) 問題設定を図 16 に示す。応力規定領域 Ω_c を全領域に設定し、目標応力 $\bar{\sigma}_M(x)$ を一定値 (=100 MPa) とした。応力解析では図 16(a) に示すように内面の一部を滑り拘束し、左端面に分布荷重を負荷した。速度解析では図 16(b) に示すように拘束、負荷境界は変動しないものとし、残りの境界を設計境界とした。また、面積一定の制約条件を

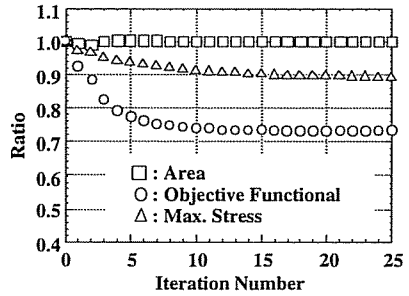


Fig. 18 Iteration histories

与えた。対称性を考慮し、上半分のみを解析対象とした。

図 17 に初期形状と得られた収束形状およびミーゼス応力の分布を示す。図 18 に初期値で基準化した最適化履歴を示す。これらの結果から面積は一定に保たれ、目的汎関数および最大応力は最小化されていることがわかる。

6. おわりに

連続体の応力のコントロールを目的に、応力分布が規定された連続体の形状決定問題に対して、著者らがこれまで開発してきた形状最適化の一手法である方法に基づく数値解法を提案した。

目的汎関数として規定応力分布からの二重誤差を定義し、体積制約を付加した問題を定式化した。ラグランジュ乗数法、物質導関数法と随伴変数法を利用し、分布系の形状感度を理論的に導出し、方法の適用方法を示した。汎用 FEM コードを利用した簡便な随伴方程式の解析方法も提示した。五つの例題の計算結果を通して、目標応力分布を実現する形状設計方法として提案方法が有効であることを示した。

文 献

- (1) Zienkiewicz, O. C. and Campbell, J. S. (Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C. 編), Shape Optimization and Sequential Linear Programming, In *Optimum Structural Design*, (1973), 109-126, John Wiley, New York.
- (2) Pedersen, P. and Laursen, C. L., Design for Minimum Stress Concentration by Finite Elements and Linear Programming, *J. Struct. Mech.*, 10(1983), 375-391.
- (3) Bhavikatti, S. S. and Ramakrishnan, C. V., Optimum Shape Design of Rotating Disks, *Comput. Struct.*, 11 (1980), 397-401.
- (4) Braibant, V. and Fleury, C., Shape Optimal Design Using B-spline, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 44 (1984), 247-267.
- (5) Tortorelli, D. A., A Geometric Representation Scheme Suitable for Shape Optimization, *Mech. Struct. & Mach.*, 21(1) (1993), 95-121.

- (6) Kristensen, E. S. and Madsen, N. F., On the Optimum Shape of Fillets in Plates Subjected to Multiple In-plane Loading Cases, *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, 10 (1976), 1007-1019.
- (7) Belegundu, A. D. and Rajan, S. D., A Shape Optimization Approach Based on Natural Design Variables and Shape Functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 66(1988), 87-106.
- (8) Haug, E. J. and Cea, J.編, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, (1981), 3, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands.
- (9) Yang, R. J., Choi, K. K. and Haug, E. J., Numerical Considerations in Structural Component Shape Optimization, *Trans. ASME, J. Mech.*, 107(1985), 334-339.
- (10) Ding, Y., Shape Optimization of Structures: A Literature Survey, *Computers & Structures*, 24-6(1986), 985-1004.
- (11) Haftka, R. T. and Grandhi, R. V., Structural Shape Optimization—A Survey, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 57(1986), 91-106.
- (12) Vanderplaats, G. N., Thirty Years of Modern Structural Optimization, *Advances in Engineering Software*, 16(1993), 81-88.
- (13) Olhoff, N. and Taylor, J. E., On Structural Optimization, *J. Appl. Mech.*, 50(1983), 1139-1151.
- (14) 畔上秀幸, 機論, 60-574, A(1994), 1479-1486.
- (15) 下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, 機論, 61-582, A(1995), 359-366.
- (16) 下田昌利・畔上秀幸・井原・桜井俊明, 機論, 61-587, A(1995), 1545-1552.
- (17) Sokolowski, J. and Zolesio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), 7, Springer-Verlag, New York.
- (18) 下田昌利・吳志強・畔上秀幸・桜井俊明, 機論, 60-578, A(1994), 2418-2425.