

ホモロガス変形を目的とする連続体の形状決定*

下田昌利*¹, 畔上秀幸*², 桜井俊明*¹

Shape Determination of Continua for Homologous Deformation

Masatoshi SHIMODA, Hideyuki AZEGAMI and Toshiaki SAKURAI

In this paper we present a numerical analysis method for the boundary design of continua in order to control the displacement mode to a prescribed mode, which is known as the homology design. As an objective functional, we introduce a squared displacement error norm on the prescribed boundaries. Using the Lagrange multiplier method, a shape identification problem subject to a volume constraint is formulated. The shape gradient function derived using the material derivative method and the adjoint variable method is used in the traction method. With the traction method, the domain variation that minimizes the objective functional is numerically and iteratively determined. The state equation and the adjoint equation are solved using a general-purpose FEM code to evaluate the objective functional and the shape gradient function. The calculated results of 2D and 3D problems show the effectiveness and practical utility of the proposed method to control the displacement mode.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Finite-Element Method, Structural Analysis, Shape Identification, Shape Optimization, Homologous Deformation, Homology Design Displacement Control, Traction Method, Adjoint Variable Method, Material Derivative

1. はじめに

機械構造設計においては、強度や剛性を確保するよりも構造の高機能化等のため、変位モードを規定することのほうが重要となる場合がある。自重を考慮し、大形パラボラアンテナの変位モードをパラボラ形状に保つための変位モード制御設計はその代表例である⁽¹⁾⁽²⁾。この設計にはホモロガス変形の概念が導入されている。ホモロガス変形は「あるモードの外力系のもとで変形前、変形中、変形後を通じて構造物あるいはその一部が指定された形状を保つこと」と定義され⁽¹⁾、それを実現するための構造逆設計はホモロジー設計と呼ばれている。

これまでホモロジー設計に関して、半谷らは一般逆行列の解の存在条件を利用する方法⁽³⁾を、また、吉川らは節点変位間の制約マトリックスを導入する方法⁽⁴⁾を提案している。いずれも厳密なホモロガス構造を得ることができる方法である。また、ホモロガス性を目的関数に用い、遺伝的アルゴリズムを利用した方法も

尾田ら⁽⁵⁾、富田ら⁽⁶⁾により提案されている。これらの報告はいずれも部材長、断面積が設計変数としたトラス、ラーメン等のはり構造に限られたものである。本論文ではこれまで報告されていない連続体の境界形状を設計変数にし、ホモロジー設計を含む変位制御のための一手法を提案する。この形状決定問題は形状最適化問題の一つとみなすことができ、提案する数値解法は著者らがこれまで開発してきた方法⁽⁷⁾に基づくものである。

方法は領域最適化問題の一解法として提案され⁽⁸⁾、種々の形状最適化問題への適用を通してその汎用性、実用性が示されてきた⁽⁹⁾⁻⁽¹¹⁾。方法は分布系の感度(形状こう配関数)とこう配法によって導出される領域変動の支配方程式を疑似弾性問題に置き換えて解く方法であり、多自由度な最適境界の効率的な決定が可能な方法である。

本論文では連続体の指定領域での変位モードまたは変位自体のコントロールを目的に、非自己随伴問題となる変位制御問題への方法の適用を試みる。具体的には規定境界上に任意の目標変位分布を規定し、変位モードのコントロールのためにホモロガス係数を導入する。目的汎関数としてホモロガス性を表す規定変位モードからの二乗誤差を定義し、体積制約を付加する。

* 原稿受付 1996年2月26日。

*¹ 正員, 三菱自動車工業(株) (〒444 岡崎市橋目町中新切1)。*² 正員, 豊橋技術科学大学工学部 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

まず、問題を定式化し、ラグランジュ乗数法、物質導関数法と随伴変数法を利用して力法に必要な形状こう配関数を理論的に導出する。次に、力法による数値解析法を提示する。最後に、二次元と三次元の例題の解析結果を示し、変位制御を目的とする形状決定問題に対する提案方法の有効性と実用性を示す。

2. ホモロガス形状決定問題

2.1 定式化 図1のように、初期領域 Ω 、境界 $\Gamma = \partial\Omega$ の線形弾性体の変動して領域 Ω_s 、境界 $\Gamma_s = \partial\Omega_s$ となるものと仮定する。表面力 P は Γ_1 に作用しているものとする。 s は領域変動履歴を表す。規定境界 Γ_b 上で定義される規定変位 \bar{v} と変位 v との二乗誤差をホモロガスの度合いを表すスカラー指標(ホモロガス指標)として導入し、目的汎関数とする。図2に弾性体のホモロガス変形概念図を示す。体積および状態方程式(弱形式で表現)を制約条件とするホモロガス指標の最小化問題は次のように表される。

Given $\Omega, P, e, M_0 \in \mathbb{R}_+$ (1)
 find Ω_s (2)
 that minimize $E(v - \alpha \bar{v}, v - \alpha \bar{v})$ (3)
 subject to $M - M_0 \leq 0$ (4)
 $a(v, w) = l(w)$ for all $w \in U$,
 $v \in U$ (5)

なお、ホモロガス指標を表す双一次形式 $E(\cdot, \cdot)$ 、変分ひずみエネルギーを与える双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ 、外力による変分ポテンシャルエネルギーを与える一次形式 $l(\cdot)$ はそれぞれ式(6)、式(7)、式(8)で定義される。 $\alpha \in \mathbb{R}$ は変位モードを表すために比例定数で、ホモロガス係数と呼ぶことにする。また、 M, M_0 はそれぞれ体積とその制約値を表す。 U は変位の拘束条件を満たす適当に滑らかな関数空間を表す。

$$E(y, z) = \int_{\Gamma_0} y_i z_i d\Gamma \dots\dots\dots (6)$$

$$a(v, w) = \int_{\Omega_s} e_{ijk} v_{k,i} w_{i,j} d\Omega \dots\dots\dots (7)$$

$$l(w) = \int_{\Gamma_1} P_i w_i d\Gamma \dots\dots\dots (8)$$

$$L(\Omega, v, w, \Lambda) = E(v - \alpha \bar{v}, v - \alpha \bar{v}) + l(w) - a(v, w) + \Lambda(M - M_0) \dots\dots\dots (9)$$

ラグランジュ関数の領域変動に対する導関数 \dot{L} は、領域変動に対する速度場 V を用いて次式のように表される。なお、 $(\cdot)'$ は形状導関数、 $(\cdot)^\cdot$ は物質導関数を表す⁽⁹⁾⁽¹²⁾。

$$\dot{L} = l(w') - a(v, w') + 2E(v - \alpha \bar{v}, v') - a(v', w) - 2\alpha' E(v - \alpha \bar{v}, \bar{v}) + \Lambda'(M - M_0) + l_c(V) \dots\dots\dots (10)$$

ここで、速度場 V の一次形式 $l_c(V)$ は

$$l_c(V) = \int_{\Gamma_s} G_i V_i d\Gamma = 2 \int_{\Gamma_0} \{ (v_i - \alpha \bar{v}_i)(v_{i,j} - \alpha \bar{v}_{i,j}) n_j + (v_i - \alpha \bar{v}_i)(v_i - \alpha \bar{v}_i) x_i \} n_i V_i d\Gamma$$

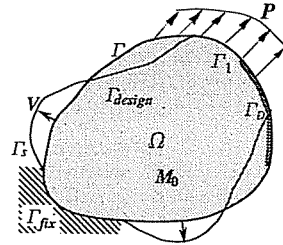


Fig. 1 Domain variation of continuum

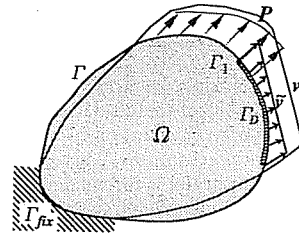


Fig. 2 Homologous deformation of continuum

なお、 v_i, w_i はそれぞれ変位、変分変位、 e_{ijkl} は弾性テンソルを表す。記号 \mathbb{R}_+ は正の実数の集合を表す。また、本論文のテンソル表示で Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。

本定式化において、目的汎関数であるホモロガス指標が零のとき、ホモロジー設計が実現されたことになる。

また、変位モードを規定するホモロジー設計では剛性低下の可能性を含むが、これを避けたい場合は、ホモロガス係数 α を適当な値に設定することも可能である。 α を $\alpha=1$ に固定した場合、本問題は規定変位分布自体を実現する問題になる。また、 $\alpha=0$ とした場合には負荷点の変位を最小化する問題になる。

2.2 最適性条件と形状こう配関数 この問題に対するラグランジュ汎関数 L は $w(x), \Lambda$ をそれぞれ状態方程式と体積制約に対するラグランジュ乗数として次のように表される。

$$+ \int_{\Gamma_1} (P_{i,j} w_{i,j} + P_i w_{i,j} n_j + P_i w_{i,j} x) n_i V_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (-e_{ijk} v_{k,i} w_{i,j} + \Lambda) n_i V_i d\Gamma, \quad V \in C_0 \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 n は外向き単位法線ベクトルを表す。 x は領域が二次元の場合は曲率、三次元の場合は平均曲率を表す。 C_0 は領域変動の制約条件を満たす適当に導関数が連続な関数空間を表す。

変位規定境界および表面力の作用する境界が法線方向に変動しないこと ($n_i V_i = 0$) を仮定すると、式(11)は式(12)のように簡単になる。

$$l_c(V) = \int_{\Gamma_2} G_i V_i d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_2} (-e_{ijk} v_{k,i} w_{i,j} + \Lambda) n_i V_i d\Gamma \dots\dots\dots (12)$$

ラグランジュ関数 L の v, w, α および Λ に対する最適性条件は不等式制約条件に対する停留条件を考慮すると次のようになる。

$$\alpha(v, w') = l(w') \quad \text{for all } w' \in U \dots\dots\dots (13)$$

$$\alpha(v', w) = 2E(v - \alpha \bar{v}, v') \quad \text{for all } v' \in U \\ \dots\dots\dots (14)$$

$$\alpha E(\bar{v}, \bar{v}) = E(v, \bar{v}) \dots\dots\dots (15)$$

$$\Lambda(M - M_0) = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$M - M_0 \leq 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$\Lambda \geq 0 \dots\dots\dots (18)$$

ここで、式(13)は状態方程式と一致した v の支配方程式、式(14)は随伴変位 w に関する支配方程式(随伴方程式)である。式(15)はホモロガス係数 α の決定式であり、ホモロガス指標 $E(v - \alpha \bar{v}, v - \alpha \bar{v})$ を最小化するように求められる。また、式(16)から式(18)は体積に関する不等式制約条件であり、ラグランジュ乗数 Λ はこれらの関係を満たすように決定される。これらの条件で決定された v, w, α および Λ を用いることにすれば、ラグランジュ関数の導関数は次式で与えられることになる。

$$\dot{L} = l_c(V) \dots\dots\dots (19)$$

ベクトル分布関数 G は領域変動に対する形状感度を与え、形状こう配関数と呼ばれる。形状こう配関数が与えられれば、法法を適用することが可能となる。

3. 数値解法

3.1 法法 法法は目的汎関数が減少するような領域変動量を解析するための方法である。領域変動量を与える速度場 V は次の支配方程式に基づいて解かれる。

$$\alpha(V, w) = -l_c(w) \quad \text{for all } w \in C_0 \dots\dots\dots (20)$$

この支配方程式は境界あるいは領域に負の形状こう配関数 $-G$ を外力として作用させたときの変位分布

として領域変動を与える速度場 V が解析されることを示している。言い替えると、法法により領域変動は形状こう配関数を擬弾性問題の外力として作用させたときの変位場として求められる。したがって、式(20)は通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことができる。本論文では有限要素法を用いる。速度場 V を求める解析を速度解析と呼ぶことにする。速度解析では変動を固定する境界 Γ_{nx} および設計境界 $\Gamma_{design} = \Gamma \setminus \Gamma_{nx}$ を設定し、解析を行う。得られた微小領域変動量を用いて領域を更新する手続きを繰返すことにより、最適形状が得られる。

なお、この支配方程式で決定された領域変動 V はラグランジュ関数 L を減少させることは既報⁽⁹⁾にて証明されている。

3.2 形状こう配関数の計算 式(11)、式(12)で与えられる形状こう配関数は状態方程式(13)を解くことにより得られる応力と随伴方程式(14)から得られるひずみ(随伴ひずみ)の成分ごとの積で表されている。随伴ひずみは変位モード規定境界 Γ_b 上に $2(v - \alpha \bar{v})$ なる仮想荷重を与えることにより求めることができ、汎用 FEM コードの応力解析を利用して形状こう配関数は容易に求められる。また、領域変動量を求めるときに必要な法線方向の力も汎用 FEM コードに備えられている圧力荷重で代替できる。

3.3 制約条件の考慮 著者らはこれまで法法の実行において制約条件を考慮する方法として、単一制約に対して有効な PID 制御の考えを用いる方法⁽⁷⁾や複数制約にも対応できる方法⁽⁸⁾を提示した。本研究では PID 制御の考えを用いる方法を用いた。その概要は次のとおりである。

体積制約に対する Kuhn-Tucker 条件は式(16)から式(18)で与えられた。体積制約を満たすように決定されるラグランジュ乗数 Λ は力 $-G$ の中では一様な表面力と考えることができ、大きさ Λ の一様な表面力を目標値へ制御することにより制約条件を満足させることができる。

3.4 ホモロジ設計システム 開発したホモロジ設計システムは EWS 上で FEM コードと開発コードを組み合わせて構成される。FEM における剛性方程式の数値解析に汎用 FEM コードを利用しており、二次元、三次元の複雑な問題に対して適用することが可能である。提案方法に基づく本システムの流れを図3に示す。おもな構成要素は目的汎関数と応力評価のための応力解析、ホモロガス係数の計算、随伴ひ

ずみ評価のための随伴解析, 形状こう配関数の計算, ラグランジュ乗数の計算, 法法に基づく速度解析および形状更新であり, これらを順に繰返すことによりホモロガス形状の解析が実行される. 実行に際しては1回の領域変動量の大きさを調整する領域変動係数 Δs_0 を設定し, 体積の制約値, 設計境界 Γ_{design} を指定する. 要すれば, ホモロガス係数 α も設定する. また, 与えられた初期領域に対して応力解析と随伴解析は同一の拘束条件(荷重条件は異なる)を, 速度解析ではそ

れと独立の領域変動の拘束条件を設定する.

4. 計算結果

開発したシステムを二次元平面保持問題と切欠平板問題, および三次元平面保持問題に適用し, 連続体の変位モード制御問題に対する本手法の有効性と汎用性を検討する. 二次元平面保持問題に対しては変位モード制御であるホモロジー設計, 変位制御設計 ($\alpha=1$), 最大剛性設計 ($\alpha=0$) および平均コンプライアンス最小設計を試み, 収束形状と剛性を比較する.

4.1 二次元平面保持問題

(1) ケース1; ホモロジー設計 問題設定を図4に示す. 変位モード規定境界 Γ_D を上面に設定し,

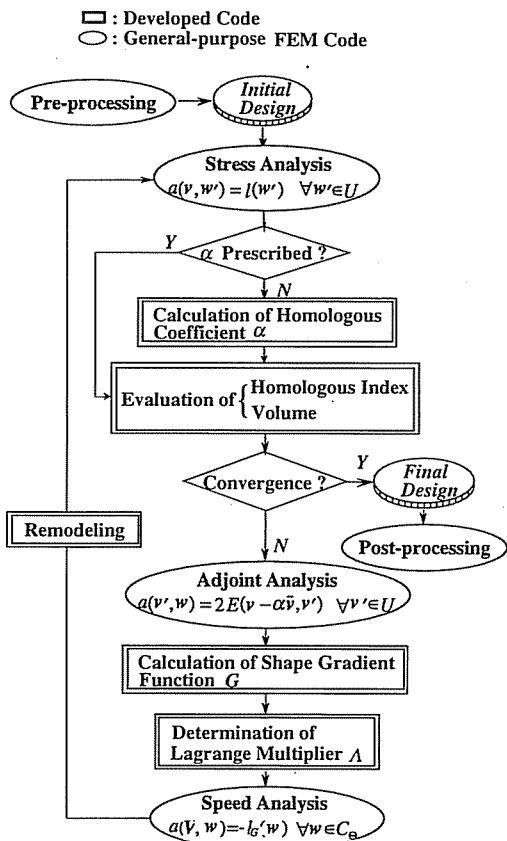
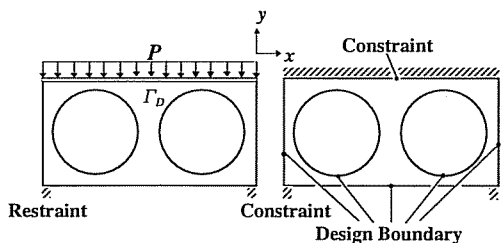
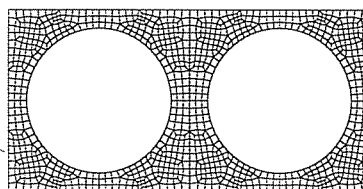


Fig. 3 Schematic flow chart of the homology design system

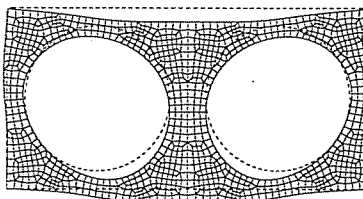


(a) Stress analysis (b) Speed analysis

Fig. 4 Table problem (2D)

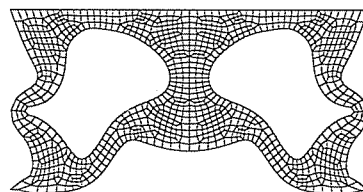


(a) Initial shape

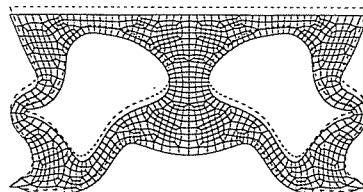


(b) Deformation mode (x3)

Fig. 5 Initial shape and deformation mode



(a) Convergent shape



(b) Deformation mode (x3)

Fig. 6 Homologous shape and deformation mode (Case 1)

平面保持, すなわち y 方向変位が一定となるホモロジー設計を目的とした。応力解析では図4(a)に示すように両下端部を完全拘束し, 上面に分布荷重を負荷した。負荷境界を変位モード規定境界とした。速度解析では図4(b)に示すように変位モード規定境界および荷重支持点は変動しないものとし, 残りの全境界を設計境界とした。また, 面積一定の条件を与えた。なお, 数値解析には4節点平面応力要素を使用した。

図5に初期形状と変形図を示す。なお, 変形図は拡大しており, カッコ内にその倍率を示す。図6に得られたホモロガス形状と変形図を, 図7に初期値で基準化した最適化履歴を示す。これらの結果から目的どおり変位規定境界の上面は一定に変位し, 目的汎関数もほぼ零になっており, ホモロジー設計が達成されていることがわかる。面積も一定に保たれ, 制約条件を満足している。

(2) ケース2; α 固定 ($\alpha=1$) ケース1の問題において, ホモロガス係数 α を $\alpha=1$ に固定し, 規定変位分布に一致する変位分布を実現することを目的

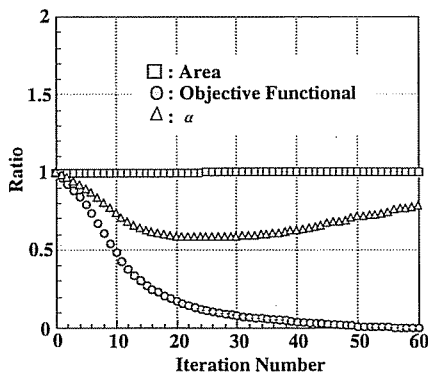


Fig. 7 Iteration histories

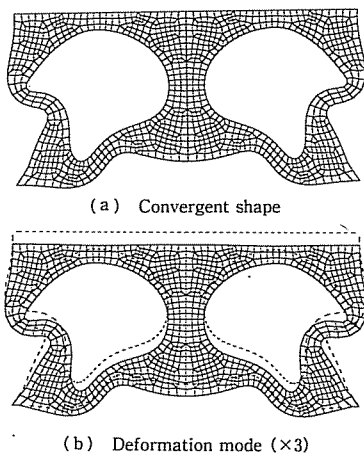


Fig. 8 Convergent shape (Case 2; $\alpha=1$)

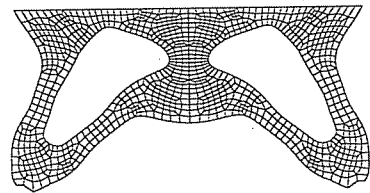
とし, 同様の計算を行った。

図8に得られた収束形状と3倍に拡大した変形図を示す。上面は狙いどおり一様に y 方向に変位し, 最大変位は初期形状とほぼ同一である。目的汎関数もほぼ零であった。

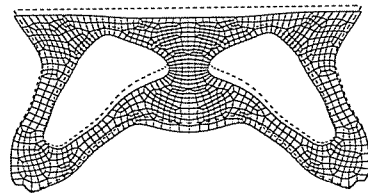
(3) ケース3; α 固定 ($\alpha=0$) ケース1の問題において, ホモロガス係数 α を $\alpha=0$ に固定し, 同様の計算を行った。この問題は負荷点変位を最小化する問題となる。

図9に得られた収束形状と10倍に拡大した変形図を示す。ケース1, 2に比べ, 上面は一様に変位していないことがわかる。ケース1, 2とは明らかに異なる高剛性形状となっている。

(4) ケース4; 平均コンプライアンス最小化⁽⁶⁾ ケース1からケース3と比較のため, 同様の問題にお

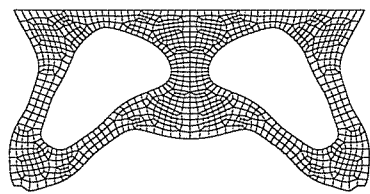


(a) Convergent shape

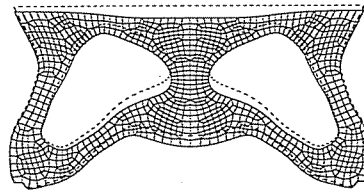


(b) Deformation mode ($\times 10$)

Fig. 9 Convergent shape (Case 3; $\alpha=0$)



(a) Convergent shape



(b) Deformation mode ($\times 10$)

Fig. 10 Convergent shape for mean compliance minimization (Case 4)

いて、自己随伴問題である平均コンプライアンス最小形状を求めた。図10に得られた収束形状と変形図を示す。最大変位は約0.3倍になっている。剛性向上を目的にしており、ケース3と比較的類似の形状である。

ケース1からケース4までの最大変位の比較を図11に示す。

4.2 切欠平板(ホモロジー設計) 問題設定を図12に示す。変位モード規定境界を左面に設定し、平面保持、すなわち x 方向変位が一定となるホモログス設計を求めた。応力解析では図12(a)に示すように左端を完全拘束し、右端に分布荷重を負荷した。速度解析では図12(b)に示すように下面以外は変動しないものとし、下面のみを設計境界とした。また、面積一定の条件を与えた。なお、平面応力状態を仮定し、数値解析には4節点要素を使用した。

図13に初期形状と変形図を示す。図14に得られたホモログス形状と変形図を示す。目的どおり変位規定

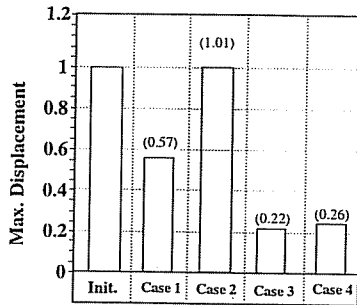


Fig. 11 Comparison of maximum displacement

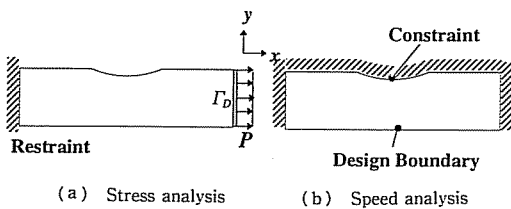


Fig. 12 Notched plate problem

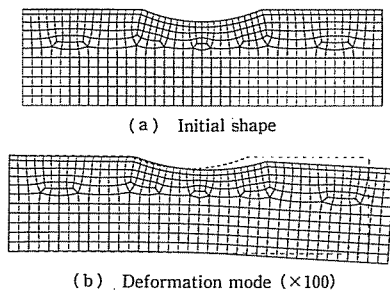


Fig. 13 Initial shape and deformation mode

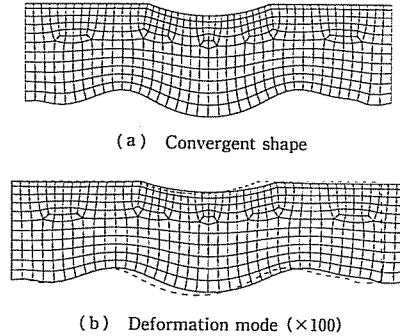


Fig. 14 Homologous shape and deformation mode

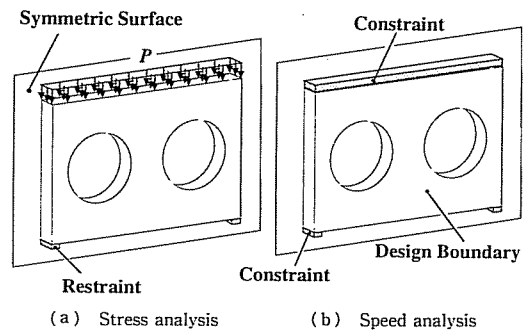


Fig. 15 Table problem (3D)

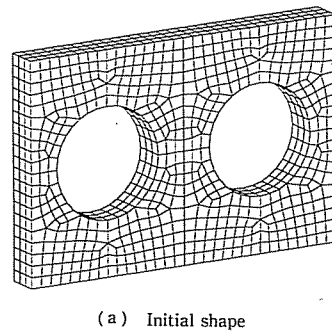


Fig. 16 Initial shape and deformation mode

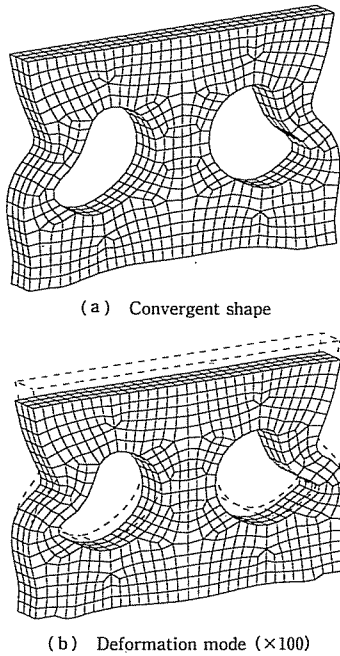


Fig. 17 Homologous shape and deformation mode

境界は一定に変位し、ホモロジー設計が達成されることがわかる。

4・3 三次元平面保持問題(ホモロジー設計) 三次元への適用例として、ソリッド体の平面保持問題の問題設定を図15に示す。二次元問題と同様に変位モード規定境界を上面に設定し、平面保持、すなわちy方向変位が一定となるホモロジー設計を目的とした。応力解析では図15(a)に示すように両下端部を完全拘束し、上面に分布荷重を負荷した。速度解析では図15(b)に示すように変位モード規定境界および荷重支持点の変動しないものとし、残りの全境界を設計境界とした。また、体積一定の制約条件を与えた。なお、数値解析には8節点要素を使用し、対称性を考慮した2分の1モデルで解析を行った。

図16に初期形状と変形図を示す。図17に得られたホモロガス形状と変形図を、図18に初期値で基準化した最適化履歴を示す。三次元問題においても、目的どおり変位規定境界は一定に変位し、目的汎関数もほぼ零になっており、ホモロジー設計が達成されることがわかる。図17からはわかり難いが、板厚方向にもわずかに設計境界は変動している。

これらの結果から二次元問題のみならず、三次元問題についても本方法によりホモロガス形状が得られることが確認できる。

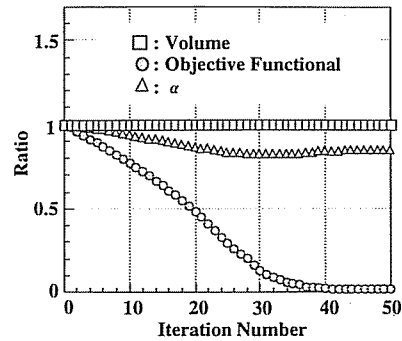


Fig. 18. Iteration histories

5. おわりに

著者らがこれまで開発してきた形状最適化の一手法である方法に基づき、ホモロジー設計を含む連続体の変位制御を目的とする形状最適化問題の数値解法を提案した。

目的汎関数としてホモロガス性を表す規定変位モードからの二乗誤差を定義し、体積制約を付加した問題の定式化を示した。ラグランジュ乗数法、物質導関数法と随伴変数法を利用し、非自己随伴となる本問題に対する分布系の形状感度を理論的に導出し、方法への適用方法を示した。

二次元、三次元の計算例を通して提案方法の有効性と実用性を示した。

最後に、本研究は豊橋技術科学大学エネルギー工学課程4年生の須貝康弘君の協力にて行われた。ここに謝意を表する。

文 献

- (1) Hoener, S., Homologous Deformation of Tilttable Telescopes, *Proc. ASCE J. Struct. Div.*, 93-ST3 (1967), 461-485.
- (2) 森本雅樹・ほか4名, 三菱電機技報, 56-7, (1982), 17-20.
- (3) 半谷裕彦・関富玲, 日本建築学会構造系論文報告集, 405 (1989), 97-102.
- (4) 吉川錫宏・中桐滋, 機論, 59-560, A (1993), 286-290.
- (5) 尾田十八・松本徳之・王安麟, 機講論, No. 930-27 (1993-6), 89-92.
- (6) 富田啓一・三井和男・登坂直好, 機講論, No. 940-10 (1994-3), 74-76.
- (7) 下田昌利・呉志強・畔上秀幸・桜井俊明, 機論, 60-578, A (1994), 2418-2425.
- (8) 畔上秀幸, 機論, 60-574, A (1994), 1479-1486.
- (9) 下田昌利・畔上秀幸・井原久・桜井俊明, 機論, 61-587, A (1995), 1545-1552.
- (10) 片峯英次・畔上秀幸, 機論, 61-581, B (1995), 103-108.
- (11) 呉志強・畔上秀幸, 機論, 61-583, C (1995), 930-937.
- (12) Sokolowski, J. and Zolesio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), 7, Springer-Verlag, New York.