

均質化理論に基づく位相最適化法による
ホモロガス変形問題の数値解法*井原 久^{*1}, 下田 昌利^{*1}
畔上 秀幸^{*2}, 桜井 俊明^{*1}Numerical Analysis Method for Homologous Deformation
Problem Using the Topology Optimization Technique
Based on the Homogenization TheoryHisashi IHARA, Masatoshi SHIMODA,
Hideyuki AZEGAMI and Toshiaki SAKURAI

The purpose of this study is to develop a topology optimization method to get a given deformation mode, such as a homologous structure. A minimization problem of a square error in relation to a given deformation and an active deformation is formulated for a linear elastic structure. To solve this problem the homogenized elastic constants are employed and a topology optimization is replaced with an optimal density distribution problem, using the similar method proposed by Bendsoe and Kikuchi. The homogenized elastic constants are calculated by the homogenization method for a microstructure having a rectangular hole. Using this method, a structural deformation is controlled to a given deformation. Simple examples are presented to confirm the validity of this optimization method.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Structural Analysis, Finite-Element Method, Topology Optimization, Homogenization Method, Homologous Deformation

1. はじめに

本論文では、ある荷重に対して構造物が狙いどおりの変形モードを生ずるようにその位相形態を決定する問題について検討する。

このような変位規定問題はホモロガス変形問題として知られている。Hoernerはホモロガス変形の概念を変形前、変形中、変形後の構造形状が指定した形状と同一になることと定義し、大口径電波望遠鏡のアンテナに適用した⁽¹⁾。森本らは実際の設計に適用した⁽²⁾。半谷らは位相と部材形状が与えられたトラス構造物に対してホモロガス変形を実現する節点位置を求めるための一般逆行列を用いた数値解析法を提案した⁽³⁾⁽⁴⁾。また、吉川らは制約行列を用いた定式化を提案し⁽⁵⁾、さらに、ホモロガス変形の概念を振動の分野に適用した⁽⁶⁾。最近では、遺伝的アルゴリズムを利用したホモロガス構造の創生法も提案されている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。しかし、これらはいずれも位相を固定したトラス構造物を対象にした手法であり、構造の位相創生を目的と

したホモロガス変形問題に対する数値解法はこれまでに提案されていない。

一方、Bendsoe-Kikuchiは、構造の位相最適化法として代表的な均質化理論に基づく手法を提案している⁽⁹⁾。この位相最適化法は、構造物内に仮定した周期的なマイクロ構造の均質化された弾性定数を均質化理論によって関連づけることで、構造の位相最適化問題を密度分布最適化の問題に置き換えて解く手法である。これまで、平均コンプライアンス最小化問題や基本固有振動数最大化問題等に適用され⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、最適な多連結構造の創生を実現している。

本論文では、この均質化理論に基づく位相最適化手法を利用してホモロガス変形問題の数値解法を提案する。また、基本的な例題を通して提案する手法の有効性を示す。

2. ホモロガス変形問題の定式化

領域 $\Omega \in R^n$ 、その境界 Γ で定義された静的な線形弾性体が境界 Γ_f で表面力 t を受けて変形する問題を考える。領域 Ω は図1に示すような無数の周期的なマイクロ構造で構成されていると仮定する。ここで、位相最適化手法で使われた定式化に従って、設計変数を^o基本セルの矩形孔サイズ $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$ と回転角

* 原稿受付 1996年2月20日。

^{*1} 正員、三菱自動車工業(株) (〒444 岡崎市橋目町中新切1)。^{*2} 正員、豊橋技術科学大学工学部 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

$\theta = \theta$ ($n=2$ のとき)あるいはオイラー角 $\theta = \{\theta, \varphi, \psi\}$ ($n=3$ のとき)とすれば、この線形弾性体の境界の一部においてホモロガス変形となるような位相形態最適化問題は、物体力を無視して、次のように定式化できる。

Find a, θ (1)

that minimize $E(u-aw, u-aw)$ (2)

subject to $a(u, v) = l(v)$

$\forall v \in U, u \in U$ (3)

$V \leq V_0$ (4)

ただし、 U は適当に滑らかな変位空間であり、双一次形式 $E(\bullet, \bullet)$, $a(\bullet, \bullet)$ と一次形式 $l(\bullet)$ はそれぞれ次のように表される。

$E(u, v) = \int_{\Omega} u_i v_i d\Gamma$ (5)

$a(u, v) = \int_{\Omega} E_{ijkl}^0(a, \theta) u_{k,i} v_{j,l} d\Omega$ (6)

$l(v) = \int_{\Gamma} t_i v_i d\Gamma$ (7)

ここで、 u は応答変位、 v は仮想変位、 w は規定変位であり V は体積、 V_0 は目標体積、 $E_{ijkl}^0(a, \theta)$ は均質化理論によって a, θ と関連づけられたマクロ弾性定数である。また、 a は応答変位が規定変位と相似な変位となる場合も許容するための変数であり、以後、相似調節変数と呼ぶ。なお、本論文のテンソル表示では Einstein の総和規約と偏微分表示 $(\bullet)_{,i} = \partial(\bullet)/\partial x_i$ を用いている。

回転を考えない均質化弾性定数 $E_{ijkl}^0(a, \theta)$ は、著者らが既報⁽¹²⁾で示した汎用コードの熱ひずみを計算す

る機能を利用した方法で求めた。

3. 最適性規準

式(1)~(4)で与えられた最適化問題の最適性規準はラグランジュ定数法により次のように導くことができる。

式(2)~(4)はラグランジュ定数 Λ を用いて式(8)のようなラグランジュ関数の停留化問題に置き換えられる。

$L(u, v, a, \theta, \Lambda, \alpha) = E(u-aw, u-aw) - a(u, v) + l(v) + \Lambda(V - V_0)$ (8)

このラグランジュ関数の設計変数に対する導関数 \dot{L} は式(9)のようになる。

$\dot{L} = 2E(u-aw, \dot{u}) - a(\dot{u}, v) - a(u, \dot{v}) + l(\dot{v}) + \dot{\Lambda}(M - M_0) - 2\dot{\alpha}E(u-aw, w) + l^c(\dot{\alpha}, \dot{\theta})$ (9)

ここで、 $l^c(\dot{\alpha}, \dot{\theta})$ は次で与えられる。

$l^c(\dot{\alpha}, \dot{\theta}) = \int_{\Omega} (G_a \dot{\alpha} + G_\theta \dot{\theta}) d\Omega$ (10)

ただし、 G_a, G_θ はそれぞれ設計変数 a, θ に対する感度であり、次で与えられる。

$G_a = \Lambda \frac{\partial \rho}{\partial a} \frac{\partial E_{ijkl}^0(a, \theta)}{\partial a} u_{k,i} v_{j,l}$ (11)

$G_\theta = - \frac{\partial E_{ijkl}^0(a, \theta)}{\partial \theta} u_{k,i} v_{j,l}$ (12)

また、 ρ は次で与えられるミクロ構造の密度である。

$\rho = 1 - a_1 a_2 \dots a_n$ (13)

ラグランジュ関数 L の停留条件は式(9)より、次のようになる。

$a(u, \dot{v}) = l(\dot{v})$ (14)

$a(\dot{u}, v) = 2E(u-aw, \dot{u})$ (15)

$aE(w, w) = E(u, w)$ (16)

$\dot{\Lambda}(V - V_0) = 0$ (17)

$\Lambda \geq 0$ (18)

$\int_{\Omega} G_a \dot{\alpha} d\Omega = 0$ (19)

$\int_{\Omega} G_\theta \dot{\theta} d\Omega = 0$ (20)

応答変位 u は、状態方程式に相当する式(14)を解くことによって決定され、ラグランジュ定数 Λ は、体積制約を満足するように決定される。相似調節変数 a は、式(16)から求めることができるが、あらかじめ指定した値にすることも可能である。 a を指定する場合、式(16)は不要となる。このようにして決定された u, a から、随伴方程式(15)を疑似弾性問題として解くことにより v を求めることができる。これらの結果を用いて式(19)に最適性規準法を適用すれば設計変数 a

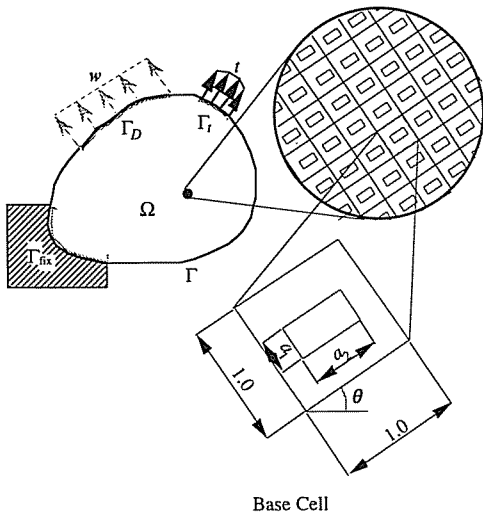


Fig. 1 Linear elastic structure

の更新則は次のようになる。

$$\mathbf{a}^{(t+1)} = \mathbf{D}^{(t)} \mathbf{a}^{(t)} \dots \dots \dots (21)$$

ただし、

$$\mathbf{D}^{(t)} = \left\{ \left(\Lambda^{(t)} \frac{\partial \rho^{(t)}}{\partial \mathbf{a}} \right)^{-1} \frac{\partial E_{ijkl}^G(\mathbf{a}, \boldsymbol{\theta})^{(t)}}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{u}_{k,i}^{(t)} \mathbf{v}_{l,j}^{(t)} \right\}^\eta \dots \dots \dots (22)$$

ここで、 t は繰返し計算回数、 η は収束を速め、かつ安定させるパラメータである。目的関数の感度の符号が変化しない場合、式(21)で設計変数を更新できるが、目的関数が式(2)のようなホモロガス変形問題の場合、上記の符号が変化するためラグランジュ定数の決定が困難になる。このため、本論文では Ma ら⁽¹¹⁾ と同様に式(22)をシフトパラメータ μ を用いて式(23)のように変更した更新則を用いる。

$$\mathbf{D}^{(t)} = \left[\frac{1}{\Lambda^{(t)}} \left\{ \mu^{(t)} - \left(\frac{\partial E_{ijkl}^G(\mathbf{a}, \boldsymbol{\theta})^{(t)}}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{u}_{k,i}^{(t)} \mathbf{v}_{l,j}^{(t)} \right) / \left(\frac{\partial \rho^{(t)}}{\partial \mathbf{a}} \right) \right\} \right]^\eta \dots \dots \dots (23)$$

ただし、 μ は式(24)により決定される。

$$\mu^{(t)} \geq \max \left\{ \left(\frac{\partial E_{ijkl}^G(\mathbf{a}, \boldsymbol{\theta})^{(t)}}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{u}_{k,i}^{(t)} \mathbf{v}_{l,j}^{(t)} \right) / \left(\frac{\partial \rho^{(t)}}{\partial \mathbf{a}} \right) \right\} \dots \dots \dots (24)$$

もう一つの設計変数 $\boldsymbol{\theta}$ に関しては応力解析結果を用いて主応力方向に回転させることで更新できることが知られている⁽¹³⁾。

全体のアルゴリズムを図2に示す。応力解析と随伴解析には汎用コードを用い、開発コードと効果的に

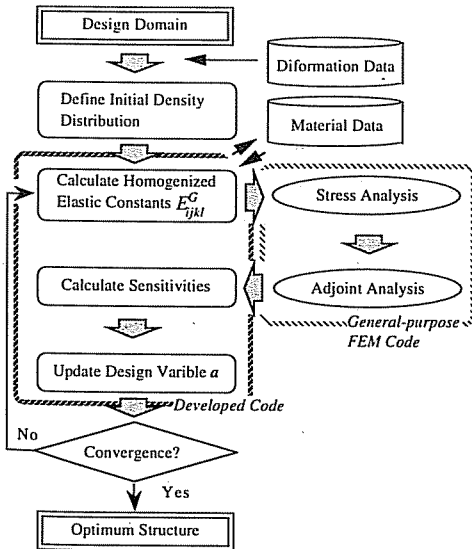


Fig. 2 Calculation procedure

リンクさせることにより、本手法を実用的なシステムとして構築している。

4. 数値解析例

4章では、二つの基本的な計算例により、提案手法の有効性を検討する。

4.1 計算例1 図3に示すような二次元平板の下端2点を拘束し、上面に三つの荷重が入力される境界条件に対して、平板上面の水平を維持するような変形モードを実現するホモロガス構造の創生を試みた。なお、計算モデルは対称条件を考慮して左側半分のみをモデル化した。体積制約は全設計領域の50%とし、初期の密度分布は図4のような等密度分布とした。ただし、平板上面の密度は50%以上に維持し、その他の領域の密度は自由に変動できるように設定した。また、相似調節変数 α は式(16)により求めることとした。

初期の等密度分布では、図5のように荷重入力部が大きく変形するモードであったが、本手法適用の結果、図6に示すような位相を表す密度分布が得られ、この

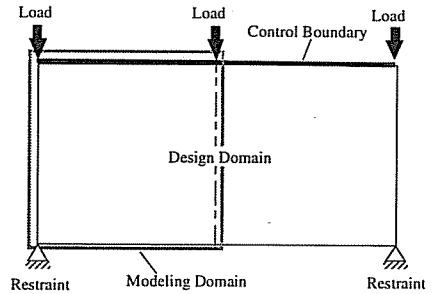


Fig. 3 Boundary condition

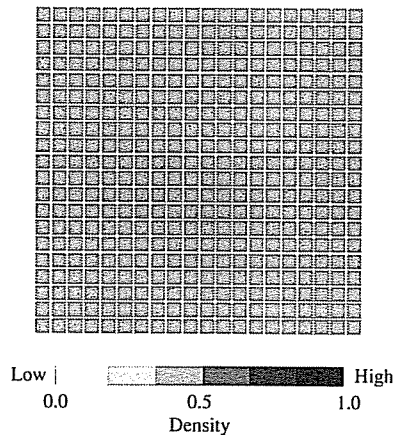


Fig. 4 Initial density distribution

ときの変形モード、狙いどおり図7に示すような平板上面の水平を維持するモードとなった。

4.2 計算例2 図8に示すような二次元平板の左右両端に分布荷重が入力される境界条件に対して、平板中央の円孔形状を維持するような変形モードを実現するホモログス構造の創生を試みた。なお、計算モデルは計算例1の場合と同様に対称条件を考慮して右上4分の1のみをモデル化した。体積制約は全設計領域の50%とし、初期は図9に示すように非設計領域を最大密度、設計領域を等密度分布に設定した。また、相似調節変数 α は式(16)により求めることとした。

初期の密度分布では、図10のように円孔形状がだ円に変形するモードであったが、本手法適用の結果、図11に示すような位相を表す密度分布が得られ、このときの変形モードは、狙いどおり図12に示すよう

な平板中央の円孔形状を維持するモードとなった。

以上の二つの計算例から、本手法の適用によりホモログス変形を実現する構造の位相を密度分布として創生可能であり、手法の有効性が確認された。

5. 考察

5章では、4章での結果と平均コンプライアンスを最小化した場合の結果との比較および、提案手法における相似調節変数を指定した場合について考察した。

5.1 平均コンプライアンス最小化との比較 構造の平均コンプライアンスを最小化し、構造の変形を抑制することにより変形モードのコントロールを狙った場合と、提案手法による計算結果とを比較してみた。なお、平均コンプライアンス最小化に関する詳細な考察は文献(12)に譲る。

図13は、計算例1の境界条件において平均コンプライアンスを最小化することにより得られた密度分布

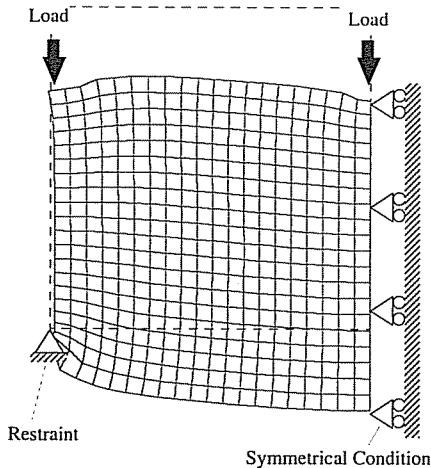


Fig. 5 Initial deformation mode

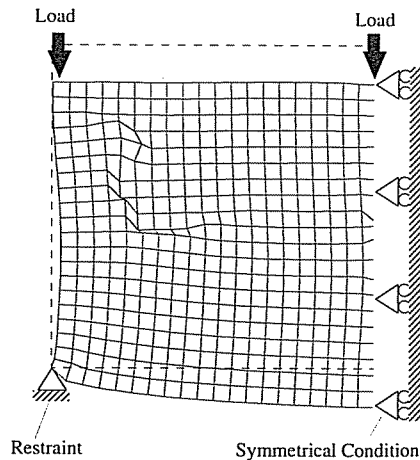


Fig. 7 Final deformation mode

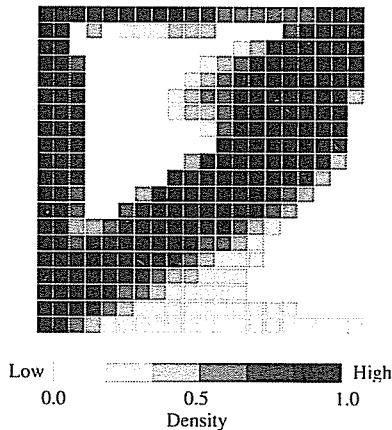


Fig. 6 Final density distribution

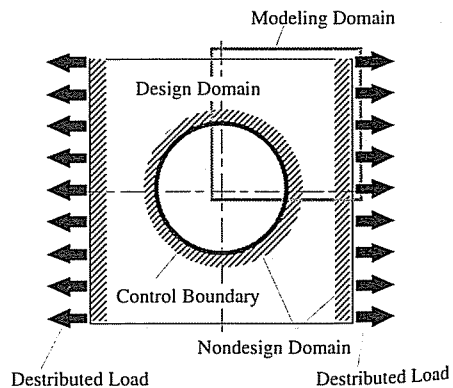


Fig. 8 Boundary condition

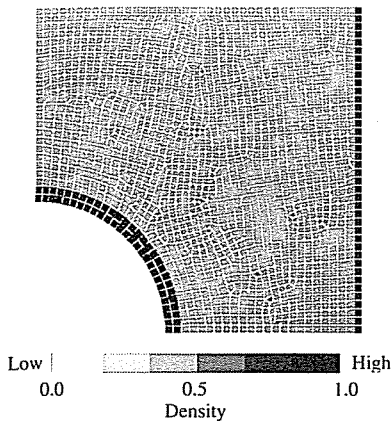


Fig. 9 Initial density distribution

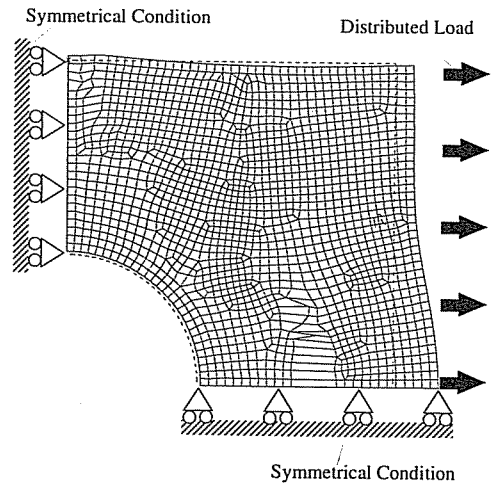


Fig. 12 Final deformation mode

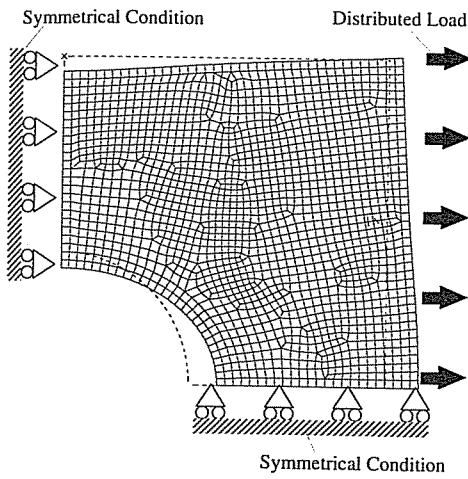


Fig. 10 Initial deformation mode

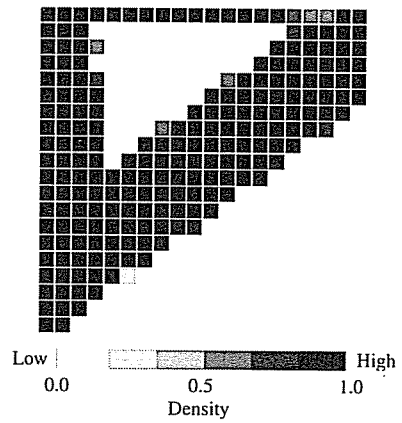


Fig. 13 Final density distribution (Mean compliance minimization)

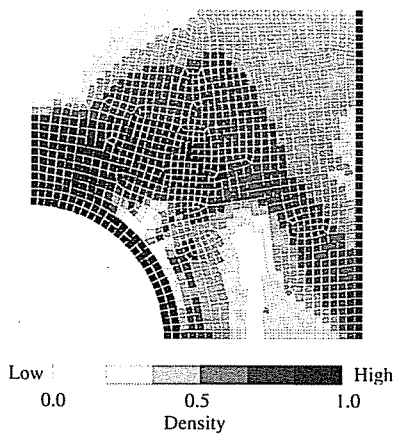


Fig. 11 Final density distribution

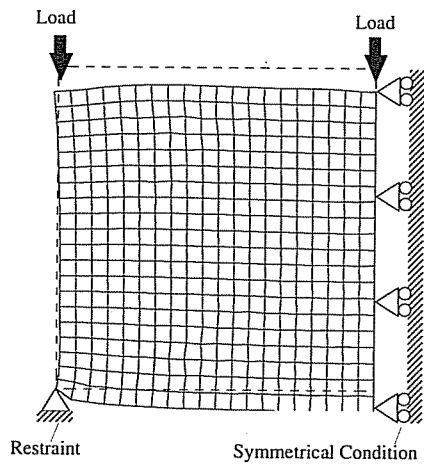


Fig. 14 Final deformation mode (Mean compliance minimization)

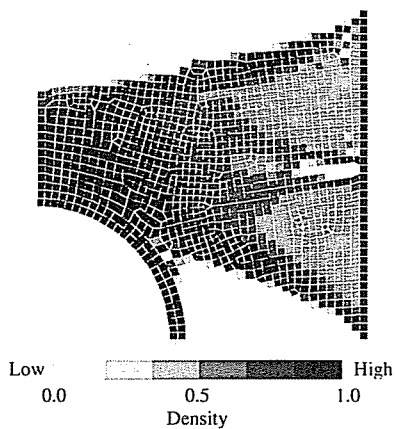


Fig. 15 Final density distribution (Mean compliance minimization)

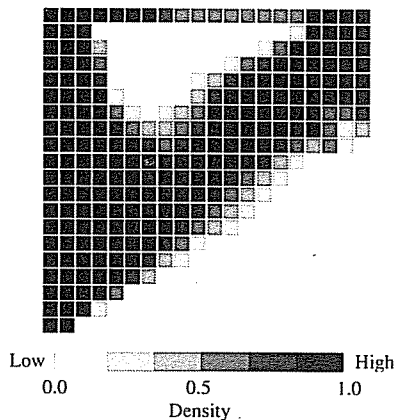


Fig. 18 Final density distribution ($\alpha=0.0$)

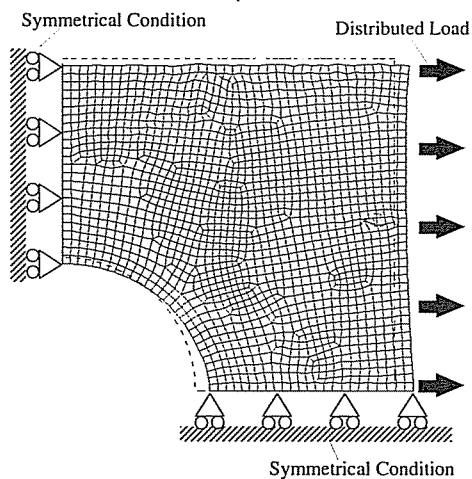


Fig. 16 Final deformation (Mean compliance minimization)

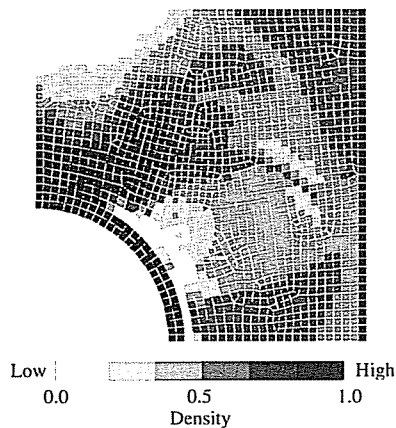


Fig. 19 Final density distribution ($\alpha=1.0$)

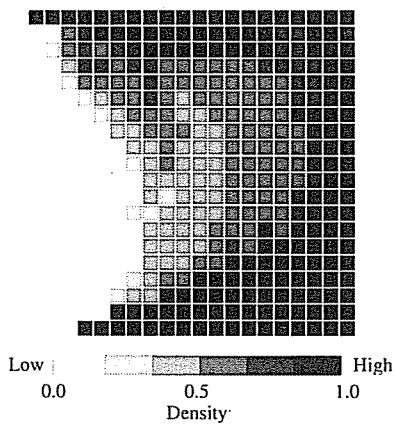


Fig. 17 Final density distribution ($\alpha=1.0$)

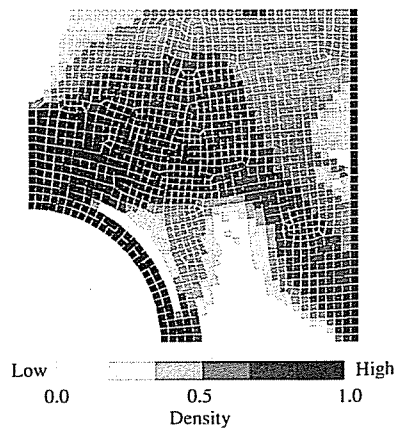


Fig. 20 Final density distribution ($\alpha=0.0$)

である。このときの変形モードは、図 14 に示すように初期に比べて平板上面の変形量は抑制されているものの、荷重入力部が変形するモードとなっている。

図 15 は、計算例 2 の境界条件において平均コンプライアンスを最小化することにより得られた密度分布である。計算例 2 の場合、図 16 に示すように初期の変形モードと同様に平板中央の円孔形状がだ円になる変形モードとなっている。

これらの結果から、平均コンプライアンス最小化によるホモログス構造の創生は困難であり、変形モードのコントロールには、本手法が有効であることがわかる。

5.2 相似調節変数の影響 計算例 1 において相似調節変数を 1.0 に指定した場合、支持点近傍の密度が低い図 17 のような密度分布になっており、相似調節変数を 0.0 に指定した場合、平均コンプライアンスを最小化した図 13 の密度分布に近い図 18 のような密度分布になっている。これは、相似調節変数が小さくなるにつれて規定変位の影響が少なくなり、計算例 1 の境界条件のように変位を規定する境界が荷重入力部を含む場合、得られる結果が荷重入力部の変位の最小化に相当する平均コンプライアンス最小化の結果に近くなることを示している。

これに対して、変位を規定する境界が荷重入力部を含まない計算例 2 の境界条件において、相似調節変数を 1.0 に指定した場合の密度分布と相似調節変数を 0.0 に指定した場合の密度分布は、図 19、図 20 のように平均コンプライアンスを最小化した場合の密度分布図 15 とは異なる結果となる。

6. おわりに

目的関数を応答変位と規定変位の二乗誤差最小化問題として定式化し、均質化理論に基づく位相最適化の解法に従って、その問題に対する新しい数値解法を提案した。

基本的な例題をとおして、本手法の有効性を示すとともに、平均コンプライアンスを最小化した場合と比較し、また相似調節変数の影響についても考察した。

文 献

- (1) Hoerner S., *Journal of the Structural Division*, ASCE, 93-ST5 (1967), 461-485.
- (2) 森本雅樹・ほか 4 名, 三菱電機技法, 56-7 (1982), 17.
- (3) 半谷裕彦・関富玲, 日本建築学会構造系論文報告集, 405 (1987), 97-102.
- (4) 原田和明・半谷裕彦, 構造工学における数値解析法シンポジウム, 18 (1994-7), 399-404.
- (5) 吉川鶴宏・中桐滋, 機論, 59-560, A (1993), 286-290.
- (6) 中桐滋・吉川鶴宏, 機論, 59-566, C (1993), 159-164.
- (7) 尾田十八・ほか 2 名, 第 3 回設計工学・システム部門講演論文集, (1993-6), 89-92.
- (8) 富田啓一・三井和男・登坂宣好, 日本機械学会第 71 期通常総会講演会講演論文集 (I), (1994), 74-76.
- (9) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N., *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 71 (1988), 197-224.
- (10) Suzuki, K. and Kikuchi, N., *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 93 (1991), 291-318.
- (11) Ma, Z. D., Kikuchi, N. and Hagiwara, I., *Comput. Mech.*, 13 (1993), 157-174.
- (12) 井原久・下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, 機論, 62-596, A (1996), 201-207.
- (13) Pedersen, P., *Structural Optimization*, 1 (1989), 101-106.