

固有振動問題における領域最適化解析\*  
(質量最小化問題)呉 志 強\*<sup>1</sup>, 畔 上 秀 幸\*<sup>1</sup>  
下 田 昌 利\*<sup>2</sup>, 桜 井 俊 明\*<sup>2</sup>Domain Optimization Analysis in Natural Vibration Problems  
(Mass Minimization Problems)Zhi Chang WU, Hideyuki AZEGAMI,  
Masatoshi SHIMODA and Toshiaki SAKURAI

We present a practical method of numerical analysis for optimization problems of domains in which natural vibration problems of linear elastic bodies are defined. In this paper, we apply the traction method that was proposed as a solution to the domain optimization problems to elliptic boundary value problems. The problems treated are those which determine the domain that minimizes a mass under constraints in specified vibration eigenvalues. Using the Lagrange multiplier method, we obtain the shape gradient functions for these domain optimization problems from the optimality criteria. A numerical analysis technique for the multiconstraint problems is also presented. We show the successful resolution of the problems of beamlike plates clamped at both ends.

**Key Words:** Optimum Design, Computer-Aided Design, Finite-Element Method, Vibration of Continuous System, Modal Analysis, Domain Optimization, Speed Method, Gradient Method, Traction Method

## 1 はじめに

機械構造物、取り分け自動車や航空機などの輸送機械、を設計する際に、いかに軽量化するかということが設計者の課題の一つになる。特に、振動特性が適切に調整された現存のモデルがある場合には、振動特性を低下させないように質量だけを取り去ることが要求される。

本論文では、振動固有値と周波数応答特性を目的汎関数に設定した領域最適化問題を扱った前報<sup>(1)(2)</sup>に続いて、この振動固有値を制約条件とする場合の質量最小化問題に対する実用的な数値解析法について検討を加えてみたい。

固有振動数を制約条件とする質量最小化に関する研究はTurner<sup>(3)</sup>によってはじめられた。Turnerは有限次元の棒の質量最小化問題を、Lagrange乗数法を用いて固有振動方程式を制約条件とする質量汎関数の停留問題に置き換え、変分法で必要条件を導出した。Taylor<sup>(4)</sup>は、同じく棒の縦振動に関して、Hamiltonの原理を

用いた質量を制約条件とする振動固有値最大化問題の定式化を示し、その双対問題との解の同一性を示した。また、山川と奥村<sup>(5)</sup>は、振動固有値感度の計算方法を示し、はり状構造の質量最小化問題に関して、最適化過程に傾斜投影法を用いた場合の数値解析結果を示した。さらに、浜田、瀬口と多田<sup>(6)</sup>は、逆変分原理から導出された基本振動数最大化問題の最適性規準を用いて、その双対問題に対する数値解析をはり状構造を対象にして行った。

このようなこれまでの研究を背景にして、本論文では、著者の一人によって提案された力法<sup>(7)-(9)</sup> (traction method) を用いた振動固有値を制約条件とする質量最小化問題に対する数値解法を示す。力法は、領域変動を写像関数で与える速度法<sup>(10)-(12)</sup> (speed method) に基いて領域最適化問題を定式化し、制約条件に対してLagrange乗数法を適用することによって導出される形状勾配関数を感度に用いた勾配法の一つとして位置付けることができる。Haug, Choi and Komkov<sup>(13)</sup> による直接微分法 (direct differentiation method) と随伴変数法 (adjoint variable method) の分類に従えば、制約条件に対してLagrange乗数法を適用する本

\* 原稿受付 1994年11月21日。

<sup>1</sup> 正員、豊橋技術科学大学 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。<sup>2</sup> 正員、三菱自動車工業(株) (〒444 豊橋市橋目町中新切1)。

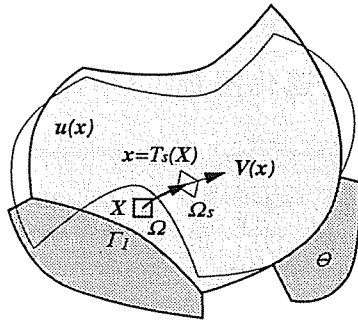


図1 変動する弾性連続体

手法は随伴変数法に分類される。随伴変数法の特徴は、1回の感度計算に際して解かなければならない方程式の数が設計変数の数に依存せず、制約条件の数に依存することである<sup>(13)</sup>。この特徴は、設計対象を無限の自由度を有する写像関数で与える領域最適化問題においては特に好都合である。さらに、制約条件に自己随伴性を有する振動固有値を選んだ場合には、感度に相当する形状勾配関数を計算するために、本来の固有振動方程式を除いて、付加的に解く必要がある方程式の数は零になる。

## 2 方法

領域変動を写像関数によって表現する速度法<sup>(12)</sup>を用いれば、設計空間を有限次元に落とすことなく、問題を定式化して、感度に相当する形状勾配関数を導出することが可能となる。方法は、その形状勾配関数が導出された問題に対して勾配法を適用した一つの方法である。

境界  $\Gamma$  を持つ領域  $\Omega$  が変動して、領域  $\Omega_s$  で境界  $\Gamma_s$  になることを仮定する (図1 参照)。このとき、領域変動を1対1写像  $T_s(X) : \Omega \ni X \mapsto x \in \Omega_s$  によって表現することにすれば、領域の微小変動は次のように表現することができる。

$$T_{s+\Delta s}(X) = T_s(X) + \Delta s V + O(|\Delta s|) \quad (1)$$

ただし、 $\Delta s O(|\Delta s|) \rightarrow 0$  ( $\Delta s \rightarrow 0$ ) の関係を表す。また、領域変動を拘束する領域あるいは境界  $\Theta$  では恒等写像  $T_s(\Theta) = \Theta$  となる。ここで、 $V$  を速度場と呼ぶ。媒介変数  $s$  は変動履歴を表す。形状勾配関数は速度場  $V$  に対する目的汎関数や制約汎関数の導関数を計算することによって導出される。

与えられた問題は、制約条件に対して Lagrange 乗数法を用いることにして、 $T_s$  に対する Lagrange 関数

$L$  の最小化問題に帰着するものと仮定する。このとき、 $L$  の  $s$  に対する導関数  $\dot{L}$  が次の形式で導出される。

$$\dot{L} = l_G(V) = \int_{\Gamma_s} G^T V \, d\Gamma = \int_{\Gamma_s} G n^T V \, d\Gamma \quad (2)$$

ここで、ベクトル関数  $G$  は形状勾配関数、スカラー関数  $G$  は形状勾配密度関数と呼ばれる。 $n$  は外向単位法線ベクトルを表す。なお、 $(\cdot)^T$  は転置を表す。

方法は、形状勾配関数  $G$  が与えられた問題に対して、次式によって速度場  $V$  を解く方法として提案されている<sup>(7)(8)</sup>。

$$a(V, w) = -l_G(w) \quad \forall w \in C_\Theta \quad (3)$$

ただし、双一次形式  $a(V, w)$  は次式の定義を用いる。

$$a(V, w) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} V_{k,l} w_{i,j} \, dx \quad (4)$$

$C_{ijkl}$  は Hooke 剛性、 $C_\Theta$  は領域変動の拘束条件を満たす適当に導関数が連続な関数の集合を表す。式 (3) は、速度場  $V$  が形状勾配関数  $G$  を負の外力として作用させたときの変位場として決定することを意味している。したがって、式 (3) は有限要素法や境界要素法などを用いた通常の線形弾性問題の数値解法を適用することによって、解析することが可能である。1回の領域変動は速度場の線形性が保たれる範囲の  $\Delta s$  を用いて  $\Delta s V$  によって与えられる。

式 (3) で決定された速度場  $V$  は Lagrange 関数  $L$  を減少させることは双一次形式  $a(\cdot, \cdot)$  の正定値性によって次式のように保証される。

$$\dot{L} = l_G(V) = -a(V, V) < 0 \quad (5)$$

なお、ベクトルとテンソルはボルト体表示と添え字によるテンソル表示を併用する。テンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表記法  $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$  を使用している。

## 3 単一の振動固有値制約問題

最初に、特定された単一の振動固有値に対して制約条件が設定されている質量最小化問題について考えてみよう。領域変動問題を定式化した後で、Lagrange 乗数法を用いて最適性規準を導出する。領域変動に対する形状勾配関数は最適性規準の結果を用いて導出する。

**3.1 定式化** 図1のように、領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n=2, 3$ 、境界  $\Gamma = \partial\Omega$  の線形弾性連続体が変動して、領域  $\Omega_s$ 、境界  $\Gamma_s = \partial\Omega_s$  になることを仮定する。境界  $\Gamma_s$  の一部  $\Gamma_1$  では弾性変位が拘束され、さらに領域変動も拘束されている状態を仮定する。

このような仮定の下で、ある  $r$  次の固有振動モード  $u_{(r)}$  に対する振動固有値  $\lambda_{(r)}$  を制約条件とする質量最小化問題は次のように定式化することができる。ただし、簡単のために多重モードの場合を排除する。

▷ 問題 1: 質量  $m$  が最小となる領域  $\Omega_s$ 、あるいは  $T_s$ 、を求めよ。ただし、 $r$  次の固有振動方程式

$$a(u_{(r)}, v) = \lambda_{(r)} b(u_{(r)}, v) \quad u_{(r)} \in U \quad \forall v \in U \quad (6)$$

と振動固有値  $\lambda_{(r)}$  の既定値  $\bar{\lambda}_{(r)}$  に対する制約式

$$\bar{\lambda}_{(r)} - \lambda_{(r)} = 0 \quad (7)$$

は満たしていなければならない。◁

ただし、 $a(\cdot, \cdot)$  は式 (4) の定義に従い、双一次形式  $b(\cdot, \cdot)$  と質量  $m$  は次のように定義する。

$$b(u, v) = \int_{\Omega_s} \rho u_i v_i dx \quad (8)$$

$$m = \int_{\Omega_s} \rho dx \quad (9)$$

また、 $U$  は変位の境界条件を満たす適当に滑らかな関数の集合を表す。簡単のために、Hook 剛性  $C_{ijkl}$  と密度  $\rho$  は領域と共に変動しない空間固定関数であると仮定する<sup>(8)</sup>。

3.2 最適性規準 問題 1 は、Lagrange 乗数法によって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる。この場合の Lagrange 関数  $L(\lambda_{(r)}, u_{(r)}, v, A, T_s)$  は次式で与えられる。

$$L = m - a(u_{(r)}, v) + \lambda_{(r)} b(u_{(r)}, v) + A(\bar{\lambda}_{(r)} - \lambda_{(r)}) \quad (10)$$

領域変動に対する  $L$  の  $s$  に対する導関数  $\dot{L}$  は、速度法に基く関係<sup>(7)(8)(12)</sup>を用いて次のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -\{a(u_{(r)}, v') - \lambda_{(r)} b(u_{(r)}, v')\} \\ & -\{a(u'_{(r)}, v) - \lambda_{(r)} b(u'_{(r)}, v)\} \\ & + \dot{\lambda}_{(r)} \{b(u_{(r)}, v) - A\} \\ & + \int_{\Gamma_s} (\rho - C_{ijkl} u_{(r)k,l} v_{i,j} + \lambda_{(r)} \rho u_{(r)i} v_i) v_n d\Gamma \\ & + \dot{A}(\bar{\lambda}_{(r)} - \lambda_{(r)}) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $v_n = n_i V_i$  を表している。また、形状導関数  $(\cdot)'$  は次式で定義される。

$$\phi'(s, x) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi(s + \Delta s, x) - \phi(s, x)) \quad (12)$$

したがって、Lagrange 関数  $L$  が停留するための必要条件は、次のように得られることになる。

$$a(u_{(r)}, v') = \lambda_{(r)} b(u_{(r)}, v') \quad \forall v' \in U \quad (13)$$

$$a(u'_{(r)}, v) = \lambda_{(r)} b(u'_{(r)}, v) \quad \forall u'_{(r)} \in U \quad (14)$$

$$b(u_{(r)}, v) = A \quad (15)$$

$$\int_{\Gamma_s} (\rho - C_{ijkl} u_{(r)k,l} v_{i,j} + \lambda_{(r)} \rho u_{(r)i} v_i) v_n d\Gamma = 0 \quad \forall v \in C_0 \quad (16)$$

$$\bar{\lambda}_{(r)} - \lambda_{(r)} = 0 \quad (17)$$

ここで、式 (13) は固有振動モード  $u_{(r)}$  を決定するための固有振動方程式 (6) を与え、式 (14) は随伴固有振動モード  $v$  を決定することができる随伴固有振動方程式を与えている。これら二つの式と式 (15) から、次の自己随伴関係が成立する。

$$v = \frac{A u_{(r)}}{b(u_{(r)}, u_{(r)})} = A \hat{u}_{(r)} \quad (18)$$

ただし、 $\hat{u}_{(r)}$  は正規固有振動モードを表す。また、式 (17) は振動固有値制約式 (7) を与え、 $A$  を決定するための支配方程式になっている。

3.3 形状勾配関数 そこで、式 (13) と (18) を満たす  $u_{(r)}$ 、 $v$  と、式 (17) を満たす  $A$  を用いることにすれば、与えられた問題は Lagrange 関数  $L(T_s)$  の最小化問題となり、その導関数  $\dot{L}(V)$  は次のように表すことができる。

$$\dot{L}(V) = l_G(V) \quad (19)$$

$$l_G(V) = \int_{\Gamma_s} G^T V d\Gamma \quad (20)$$

このとき、形状感度を与える形状勾配ベクトル関数  $G$  は次式で与えられる。

$$G = G n \quad (21)$$

$$G = G_{(0)} + A G_{(1)} \quad (22)$$

$$G_{(0)} = \rho \quad (23)$$

$$G_{(1)} = -C_{ijkl} u_{(r)k,l} u_{(r)i,j} + \lambda_{(r)} \rho u_{(r)i} u_{(r)i} \quad (24)$$

ここで、スカラー関数  $G$  は形状勾配密度関数と呼ぶ。また、 $G_{(0)}$  は質量汎関数に対する形状勾配密度関数、 $G_{(p)}$  は  $p$  番目の振動固有値汎関数に対する形状勾配密度関数になっている。ここでは  $p = 1$  である。

#### 4 複数の振動固有値制約問題

次に、特定した複数の振動固有値に制約を設けた質量最小化問題を考えてみよう。ここでも、形状勾配関数を導出することを目標とする。

4.1 定式化 変動する線形弾性連続体を3章と同様に仮定する。ただし、ここでは、特定した  $N$  個のモード次数  $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)$  の固有振動モード  $(\mathbf{u}_{(r_1)}, \mathbf{u}_{(r_2)}, \dots, \mathbf{u}_{(r_N)})$  に対する振動固有値  $\lambda = (\lambda_{(r_1)}, \lambda_{(r_2)}, \dots, \lambda_{(r_N)})$  を制約条件とする質量最小化問題を考える。ここでも、簡単のために多重モードの場合を排除して、問題を次のように定式化する。

▷ 問題2: 質量  $m$  が最小となる領域  $\Omega_s$ 、あるいは  $T_s$ 、を求めよ。ただし、固有振動方程式

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_{(r_p)}, \mathbf{v}_{(r_p)}) &= \lambda_{(r_p)} b(\mathbf{u}_{(r_p)}, \mathbf{v}_{(r_p)}) \\ \mathbf{u}_{(r_p)} \in U \quad \forall \mathbf{v}_{(r_p)} \in U \quad \forall p \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (25)$$

と振動固有値  $\lambda_{(r_p)}$  の既定値  $\bar{\lambda}_{(r_p)}$  に対する制約式

$$\bar{\lambda}_{(r_p)} - \lambda_{(r_p)} = 0 \quad \forall p \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (26)$$

は満たしていなければならない。◁

4.2 最適性規準 問題2に対してもLagrange乗数法を適用すると、Lagrange関数が停留するための必要条件として次の関係を得ることができる。

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_{(r_p)}, \mathbf{v}'_{(r_p)}) &= \lambda_{(r_p)} b(\mathbf{u}_{(r_p)}, \mathbf{v}'_{(r_p)}) \\ \forall \mathbf{v}'_{(r_p)} \in U \quad \forall p \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}'_{(r_p)}, \mathbf{v}_{(r_p)}) &= \lambda_{(r_p)} b(\mathbf{u}'_{(r_p)}, \mathbf{v}_{(r_p)}) \\ \forall \mathbf{u}'_{(r_p)} \in U \quad \forall p \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$b(\mathbf{u}_{(r_p)}, \mathbf{v}_{(r_p)}) = A_{(p)} \quad \forall p \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (29)$$

$$\int_{\Gamma_s} \left( \rho - \left( \sum_{m=1}^N C_{ijkl} u_{(r_p)k,i} v_{(r_p)j} - \lambda_{(r_p)} \rho u_{(r_p)i} v_{(r_p)i} \right) \right) v_n d\Gamma = 0 \quad \forall V \in C_\Theta \quad (30)$$

$$\bar{\lambda}_{(r_p)} - \lambda_{(r_p)} = 0 \quad (31)$$

ここでも、式(27)は固有振動モード  $\mathbf{u}_{(r_p)}$  を決定するための固有振動方程式(25)を与え、式(28)は随伴固有振動モード  $\mathbf{v}_{(r_p)}$  を決定することができる随伴固有振動方程式を与えている。これらの式と式(29)から、次の自己随伴関係が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{(r_p)} &= \frac{A_{(p)} \mathbf{u}_{(r_p)}}{b(\mathbf{u}_{(r_p)}, \mathbf{u}_{(r_p)})} = A_{(p)} \hat{\mathbf{u}}_{(r_p)} \\ \forall p \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{u}}_{(r_p)}$  は正規固有振動モードを表す。また、式(31)は振動固有値制約式(26)を与え、 $A_{(p)}$  を決定するための支配方程式になっている。

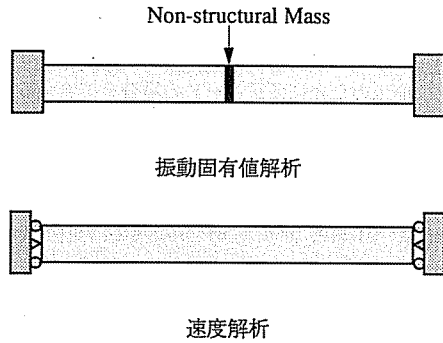


図2 両側完全固定平板問題

4.3 形状勾配関数 そこで、式(27)と(32)を満たす  $\mathbf{u}_{(r_p)}, \mathbf{v}_{(r_p)}$  と、式(31)を満たす  $A_{(p)}$  を用いることにすれば、与えられた問題はLagrange関数  $L(T_s)$  の最小化問題となり、その導関数  $\dot{L}(V)$  は次のように表すことができる。

$$\dot{L}(V) = l_G(V) \quad (33)$$

$$l_G(V) = \int_{\Gamma_s} G^T V d\Gamma \quad (34)$$

このとき、形状感度を与える形状勾配ベクトル関数  $G$  は次式で与えられる。

$$G = G_n \quad (35)$$

$$G = G_{(0)} + \sum_{p=1}^N A_{(p)} G_{(p)} \quad (36)$$

$$G_{(0)} = \rho \quad (37)$$

$$G_{(p)} = -C_{ijkl} u_{(r_p)k,i} u_{(r_p)j} + \lambda_{(r_p)} \rho u_{(r_p)i} u_{(r_p)i} \quad (38)$$

## 5 数値解析法

本章では、複数の制約条件を有する領域最適化問題に対して、我々が試みた数値解法を紹介する。

制約条件を  $g_{(p)} = \bar{\lambda}_{(r_p)} - \lambda_{(r_p)} = 0 \quad p \in \{1, 2, \dots, N\}$ 、それに対応する形状勾配密度関数を  $G_{(p)}$  で表し、全体の形状勾配密度関数  $G$  は3章と4章で得られたように次式で与えられるものと仮定する。

$$G = G_{(0)} + \sum_{p=1}^N A_{(p)} G_{(p)} \quad (39)$$

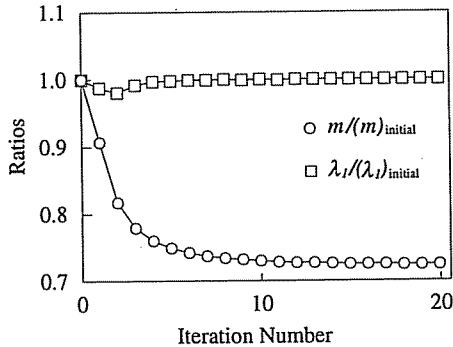
方法では、式(39)で与えられる  $G$  を用いて、大きさ  $-\Delta s G$  の外向き法線方向の表面力を設計境界  $\Gamma_s^{\text{design}}$  に作用させた場合の領域変動  $\Delta s V$  によって行う。ただし、このときの式(39)で与えられる  $A_{(p)}$  は制約



形状と  $G$  の等高線分布



1次モード



変動履歴

図3 解析結果 (両側完全固定平板の  $\lambda_1$  制約)

条件  $g(p) = 0$  が満たされるように決定されていなければならない。

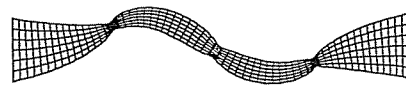
Lagrange 乗数  $\Lambda(p)$  の決定は次のように行った。目的汎関数と制約汎関数に対する線形性が保たれる程度の大きさ  $-\Delta s_{(0)}G_{(0)}, -\Delta s_{(1)}G_{(1)}, -\Delta s_{(2)}G_{(2)}, \dots, -\Delta s_{(N)}G_{(N)}$  を持った外向き法線方向表面力を作用させた場合の領域変動  $\Delta s_{(0)}V_{(0)}, \Delta s_{(1)}V_{(1)}, \Delta s_{(2)}V_{(2)}, \dots, \Delta s_{(N)}V_{(N)}$  を解析し、それらの領域変動  $\Delta s_{(p)}V_{(p)}$   $p \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$  に対する制約汎関数  $g(q)$   $q \in \{1, 2, \dots, N\}$  の変動  $\Delta_{(p)}g(q)$  を評価すれば、領域変動後において制約条件  $g(q) = 0$  が成立するための条件は次式ようになる。

$$\Delta_{(0)}g(q) + \sum_{p=1}^N \frac{\Delta_{(p)}g(q)}{\Delta s_{(p)}} \Lambda(p) = g(q)^{(-)} \quad \forall q \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (40)$$

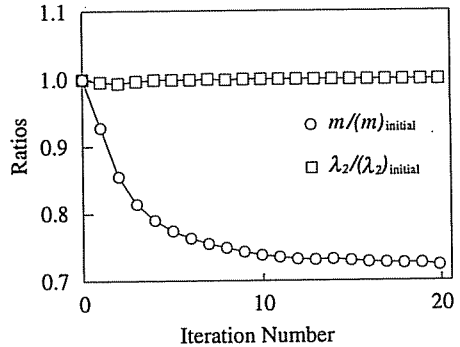
ただし、 $g(q)^{(-)}$  は前回の領域変動で残された制約汎関数  $g(q)$  の値を表す。Lagrange 乗数  $\Lambda(p)$   $p \in \{1, 2, \dots, N\}$  はこの連立方程式 (40) によって決定することができる。



形状と  $G$  の等高線分布



2次モード



変動履歴

図4 解析結果 (両側完全固定平板の  $\lambda_2$  制約)

本研究では、表面力の大きさを規定するパラメータ  $\Delta s_{(p)}$   $p \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$  は次の関係に基いて与えた。

$$\Delta s_{(p)} \max_{x \in \Gamma_{design}} |G_{(p)}(x)| = \varepsilon E \quad (41)$$

ただし、 $\varepsilon$  は 1 より十分小さい値、 $E$  はヤング率を表す。本論文の数値解析では  $\varepsilon = 0.01 \sim 0.1$  を採用した。また、1回の領域変動の大きさを規定する  $\Delta s$  は次式で与えた。

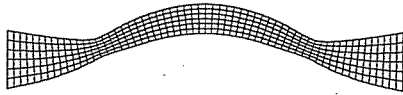
$$\Delta s = \frac{\Delta s_{(0)}}{\max[1, |A_{(1)}|, |A_{(2)}|, \dots, |A_{(N)}|]} = \frac{\Delta s_{(0)}}{A_{max}} \quad (42)$$

このとき、領域変動  $\Delta sV$  は次式で計算される。

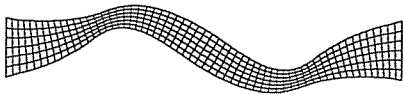
$$\Delta sV = \Delta sV_{(0)} + \sum_{p=1}^N \frac{\Delta s_{(p)}}{A_{max}} \Lambda(p)V_{(p)} \quad (43)$$

## 6 数値解析

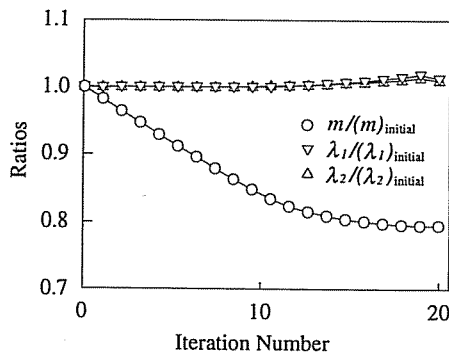
基本的な平面応力 2次元問題に対して、本論文で示した形状勾配関数および数値解析法が有効に機能する

形状と  $G$  の等高線分布

1次モード



2次モード



変動履歴

図5 解析結果 (両側完全固定平板の  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  制約)

ことを示す。式 (6) あるいは (25) の振動固有値解析や式 (3) の速度解析には 8 節点アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法を使用した。

問題設定を図 2 に示す。振動固有値解析では、長方形の左右両辺を完全拘束し、左右の中央断面に長方形構造質量の 10% に相当する非構造質量を一樣に分布させた。速度解析では、左右両辺の滑り拘束と左右両辺中央の点の完全拘束を仮定した。

この両側完全固定平板の 1 次の振動固有値を初期領域に対して得られた値に固定した場合の質量最小化問題に対する解析結果を図 3 に、2 次の場合の同様な質量最小化問題に対する解析結果を図 4 に示す。また、1 次の振動固有値と 2 次の振動固有値を共に初期領域に対して得られた値に固定した場合の質量最小化問題に対する解析結果を図 5 に示す。いずれの問題におい

ても、 $G$  の等高線分布は境界に向かって増加し、境界上ではほぼ一定値になる結果になっている。

これらの結果、振動固有値一定の下で質量が最小化されていることを確認することができた。

## 7 おわりに

本論文では、連続体の領域形状を設計対象とする場合の、振動固有値に対して制約を設けた場合の質量最小化問題に対して、形状勾配関数を理論的に導出した。それらの形状勾配関数を用いた方法をを用いた数値解法を示した。その方法が有効に機能することを、基本的なはり状構造問題に対する数値解析結果を通して示した。

なお、本研究は文部省科学研究費の援助を受けて実施されたことを記して感謝する。

## 文 献

- (1) 吳志強, 畔上秀幸: 固有振動問題における領域最適化解析 (方法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, (投稿中 No.93-0966).
- (2) 吳志強, 畔上秀幸: 周波数応答問題における領域最適化解析 (方法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, (投稿中 No.93-1213).
- (3) Turner, M. J.: Design of minimum mass structures with specified natural frequencies, *AIAA Journal*, Vol. 5 (1967), 406-412.
- (4) Taylor, J. E.: Minimum mass bar for axial vibration at specified natural frequency, *AIAA Journal*, Vol. 5 (1967), 1911-1913.
- (5) 山川宏, 奥村敦史: 振動を考慮した構造物の最適設計について (第 3 報, つり棒と片持ばりの形式-2 の問題と二つの形式の基本問題間の相反性の関係), 日本機械学会論文集, 42 巻, 第 1 部 (1976), 2060-2068.
- (6) 浜田実, 瀬口靖幸, 多田幸生: 逆変分法による構造物の形状決定問題 (第 2 報, 座屈問題と振動問題), 日本機械学会論文集, 46 巻, A 編 (1980), 187-196.
- (7) 畔上秀幸: 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集, 60 巻, A 編 (1994), 1479-1486.
- (8) 畔上秀幸, 吳志強: 線形弾性問題における領域最適化解析 (方法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, 578 号 (1994), 2312-2318.
- (9) 下田昌利, 吳志強, 畔上秀幸, 桜井俊明: 汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法 (方法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, 578 号 (1994), 2418-2425.
- (10) Zolésio, J. P.: The material derivative (or speed) method for shape optimization, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1981), 1089-1151.
- (11) Zolésio, J. P.: Domain variational formulation for free boundary problems, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1981), 1152-1194.
- (12) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag.
- (13) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V.: *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press (1986).