

形状最適化におけるミニマックス問題の数値解法* (最大応力と最大変位の最小設計)

下田 昌利*¹, 畔上 秀幸*², 桜井 俊明*¹

Numerical Solution for Min-Max Problems in Shape Optimization (Minimum Design of Max. Stress and Max. Displacement)

Masatoshi SHIMODA, Hideyuki AZEGAMI and Toshiaki SAKURAI

We describe a numerical shape optimization method of continua that minimizes maximum local measure such as stress and displacement. A solution to this min-max problem subject to volume constraint is proposed. To avoid impossibility of differentiation, local functionals are transposed to global integral functionals using the Kreisselmeier-Steinhauser function. With this function, a multiple loading problem is also transposed to a single loading problem. The shape gradient functions which are applied to the traction method are theoretically derived using the Lagrange multipliers and the material derivative method. Using the traction method, the optimum domain variation to decrease the objective functional is numerically and iteratively determined that maintaining the smoothness of the boundaries. The calculated results of 2D and 3D examples show the effectiveness and practical utility of the proposed method for min-max problems in shape designs.

Key Words: Optimum Design, Finite-Element Method, Shape Optimization, Min-Max Problem, Kreisselmeier-Steinhauser Function, Traction Method, Material Derivative Method, Adjoint Method, Multiple Loading

1. はじめに

構造設計において、与えられた材料で強度を最大化する最適な形状がしばしば要求される。これは使用材料の強度規準に対応する測度(例えば、ミーゼス応力)の最大値を最小化することにより達成される。また、変位を評価測度とし、その最大値を剛性の指標として最小化するような剛性最大化も設計要求の一アイテムである。これらは局所的な状態変数またはその関数(本論文では局所測度と呼ぶ)の最大値を最小化する問題であり、ミニマックス問題と呼ばれる。本論文では、局所測度としてミーゼス応力と変位ノルムをとりあげ、境界形状を設計変数とした形状最適化におけるミニマックス問題を扱う。

一般に、このミニマックス問題は次のような困難さを含んでいる。目的関数である最大測度は局所的な値であるため汎関数に含まれる関数が滑らかな関数でないこと、飛び移りの可能性があることにより、領域変動に対して微分不可能を生じることがある。また、随

伴変数法を用いて感度を求める場合には仮想荷重がデルタ関数になり特異問題となる。これらの問題を回避するため、Banichuk⁽¹⁾は l_p ノルムを用いる方法により局所汎関数を積分汎関数に変換している。また、TaylorとBendsøe⁽²⁾はBound Formulationまたは β 法と称した最大応力の制約値を目的関数にする方法を用いている。Trompett⁽³⁾やKristensen⁽⁴⁾も同様の方法を用い、フィレットや孔の形状最適化問題に適用している。可解な問題への交換により、ミニマックス問題を通常の最小化問題として扱うことが可能になる。

一方、著者らはこれまで領域最適化問題の一解法である方法⁽⁵⁾を用い、応力二乗誤差最小化問題⁽⁶⁾、ホモロガス変形問題⁽⁷⁾等に対して境界形状最適化問題の解法を提示してきた。方法は変分法や最適制御に基礎を置き、ヒルベルト空間でのこの配法を利用して目的汎関数を最小化する領域変動を数値的に解析する方法として提案されている。感度関数(形状こう配関数)を導出し、設計変数(境界形状)を関数のまま扱うため、自由度を制限することなく多自由度な境界形状設計が可能である。

本論文では最大局所測度を目的汎関数とする境界形状最適化問題として、報告の少ない多目的構造を想定

* 原稿受付 1996年7月22日。

¹ 正員、三菱自動車工業(株)(〒444 岡崎市橋目町中新切1)。

² 正員、豊橋技術科学大学工学部(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

した複数の負荷に対して最大応力最小化問題と最大変位最小化問題を取り上げ、方法に基づく解法を提示する。局所測度(ミーゼス応力, 変位ノルム)の積分汎関数への交換とベクトル目的関数のスカラー化には最適制御問題で提案された Kreisselmeier-Steinhauser 関数(KS 関数)⁽⁶⁾を用いる。提示方法により, 最大応力や最大変位を最小化する形状設計が可能になる。

まず, 問題を定式化し, ラグランジュ乗数法あるいは随伴変数法および物質導関数法を利用して形状こう配関数を導出する。次に, 随伴変数を含む形状こう配関数および方法による領域変動量の解析方法を示す。最後に, 二次元および三次元の例題の解析結果を示すことにより, 境界形状を設計変数とした最大応力や最大変位の最小化問題に代表される局所測度のミニマックス問題に対する提案方法の有効性を示す。

2. 最大測度最小化問題

複数の荷重負荷に対して, 体積制約条件のもとで局所測度を最小化する問題を考える。局所測度として, ミーゼス応力(強度最大化問題)と変位ノルム(剛性最大化問題)を取り上げ, それぞれの問題に対する形状こう配関数を理論的に導出する。

2.1 問題設定 図1のように, 初期領域 Ω , 境界 $\Gamma \equiv \partial\Omega$ の線形弾性体の変動して(変動 V により)領域 Ω_s , 境界 $\Gamma_s \equiv \partial\Omega_s$ となるものと仮定する。 Γ_{design} は変動可能な設計境界を表す。複数の物体力 $f^{(m)}$ と表面力 $P^{(m)}$ ($m=1, 2, \dots, N$) はそれぞれ Ω_s, Γ_1 に作用しているものとする。 N 個の荷重ケースは独立に作用することを仮定する。 s は領域の変動履歴を表す。

前述のように最大測度の局所性による微分不可能と特異性の問題を回避するため, および方法の適用を考慮して分布系の最適化問題として定式化するためには目的汎関数を積分形式で表す必要がある。また, 複数の負荷に対する最適化問題はベクトル最適化問題となるが, 取扱いを容易にするためには単一目的の最適化問題にスカラー変換する必要もある。これらの問題を解決するため, KS 関数を導入する。

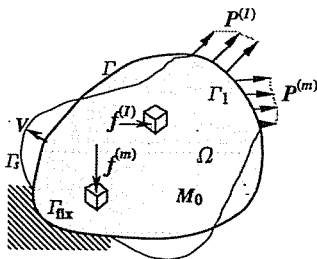


Fig.1 Domain variation of continuum

2.2 KS 関数 KS 関数は式(1)のように定義される。

$$KS_1(\phi^{(m)}(x)) = \frac{1}{\rho} \ln \sum_{m=1}^N \exp(\phi^{(m)}(x) \cdot \rho) \quad (1)$$

これは N 個の測度関数 $\phi^{(m)}(x)$ に対して, 図2のように ρ が十分大きな値をとるとき, 最大値を包絡する十分滑らかな関数となる。実際には $\rho=5$ から 200 程度が適用される⁽⁹⁾。

また, 一つの関数について式(2)のように積分形で表すと ρ が十分大きな値をとるとき, 関数 $\phi(x)$ の最大値を強調(抽出)することができる。

$$KS_2(\phi(x)) = \frac{1}{\rho} \ln \int_{\Omega} \exp(\phi(x) \cdot \rho) dx \quad (2)$$

2.3 目的汎関数 複数の負荷に対する最大測度の最小化問題の目的汎関数は一般に式(3)のように表される。

$$\max_{m=1, \dots, N} \max_{x \in \Omega_s} \left[\frac{\phi^{(m)}(x)}{\phi_a} \right] = \max_{x \in \Omega_s} \max_{m=1, \dots, N} \left[\frac{\phi^{(m)}(x)}{\phi_a} \right] \quad (3)$$

この局所汎関数は前述のような問題を含むため, 本論文では式(1)と式(2)のKS関数を組み合わせることにより, 式(4)のような可解な単一目的の積分汎関数に変換する。

$$\frac{1}{\rho} \ln \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{m=1}^N \exp\left(\frac{\phi^{(m)}(x)}{\phi_a} \cdot \rho\right) \right\} dx \quad (4)$$

ここで, ϕ_a は規準化のための定数を表す。

2.4 最大応力最小化問題 測度としてミーゼス応力を考えた場合, 体積および各荷重ケースでの状態方程式を制約条件とする最大応力最小化問題は式(4)を用いて次のように表される。

$$\text{Given } \Omega, f^{(m)} \text{ in } \Omega, P^{(m)} \text{ on } \Gamma_1, e \text{ in } \Omega, M_0 \in \mathbb{R}_+ \quad (5)$$

$$\text{find } \Omega_s \text{ (or } V) \quad (6)$$

$$\text{that minimize } \frac{1}{\rho} \ln \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{m=1}^N \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \right\} dx \quad (7)$$

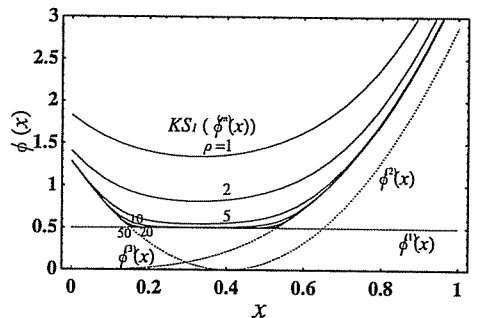


Fig.2 KS Function

subject to $M - M_0 \leq 0$ (8)

$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = l(w^{(m)})$, for all $w^{(m)} \in U$,

$v^{(m)} \in U, m=1, \dots, N$ (9)

ここで、 σ_M は式(10)で定義されるミーゼス応力を表す。

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2} \{ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \} \dots\dots\dots (10)$$

また、第 m 番めの荷重ケースに対して、変分ひずみエネルギーを与える双一次形式 $a(v^{(m)}, w^{(m)})$ 、外力による変分ポテンシャルエネルギーを与える一次形式 $l(w^{(m)})$ は式(11)、式(12)で定義される。 $v^{(m)}, w^{(m)}$ はそれぞれ荷重ケース m に対する変位と変分変位を表

す。 U は変位の拘束条件を満たす適当に滑らかな関数空間を表す。 M, M_0 はそれぞれ体積とその制約値を、 R_+ は正の実数の集合を表す。

$$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = \int_{\Omega_s} e_{ijkl} v_{k,l}^{(m)} w_{i,j}^{(m)} dx \dots\dots\dots (11)$$

$$l(w^{(m)}) = \int_{\Omega_s} f_i^{(m)} w_i^{(m)} dx + \int_{\Gamma_1} P_i^{(m)} w_i^{(m)} d\Gamma \dots\dots\dots (12)$$

なお、 e (テンソル表示では e_{ijkl}) はフック剛性を表す。また、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。

この問題に対するラグランジュ汎関数 L は状態方程式に関して $w^{(m)}$ を、体積に関して Λ をそれぞれラグランジュ乗数として次のように表される。

$$L(\Omega, v^{(1)}, \dots, v^{(N)}, w^{(1)}, \dots, w^{(N)}, \Lambda) = \frac{1}{\rho} \ln \int_{\Omega_s} \left\{ \prod_{m=1}^N \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \right\} dx + \sum_{m=1}^N \{ l(w^{(m)}) - a(v^{(m)}, w^{(m)}) \} + \Lambda(M - M_0) \dots\dots\dots (13)$$

簡単のため表面力の作用する境界は法線方向には変動しないこと ($n_i V_i = 0$ on Γ_1)、材料は均質不変であること ($e_{ijkl} = \dot{e}_{ijkl} = 0$)、物体力は領域内で一定であること ($f' = 0$) を仮定すると、ラグランジュ汎関数の領域変動に対する導関数 \dot{L} は、物質導関数法により領域変動を表す速度場 V を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & \sum_{m=1}^N \{ l(w^{(m)}) - a(v^{(m)}, w^{(m)}) \} + \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{1}{\sigma_a A} \cdot \int_{\Omega_s} \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \cdot \frac{\partial \sigma_M^{(m)}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} dx - a(v^{(m)}, w^{(m)}) \right\} \\ & + \int_{\Gamma_s} \left\{ \sum_{m=1}^N \left(-e_{ijkl} v_{k,l}^{(m)} w_{i,j}^{(m)} + f_i^{(m)} w_i^{(m)} + \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \right) + \Lambda \right\} \cdot n_i V_i d\Gamma + \Lambda'(M - M_0), V \in C_\theta \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

$$A = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{m=1}^N \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \right\} dx \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 (\cdot) は形状導関数、 $(\dot{\cdot})$ は物質導関数を表す⁽⁵⁾。また、 n は外向き単位法線ベクトルを表す。 C_θ は領域変動の制約条件を満たす適当に滑らかな関数空間を表す。

ラグランジュ汎関数 L の v, w および Λ に関する最適性条件は不等式制約条件に対する停留条件を考慮すると次のようになる。

$$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = l(w^{(m)}) \text{ for all } w^{(m)} \in U, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (16)$$

$$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = \frac{1}{\sigma_a A} \cdot \int_{\Omega_s} \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \cdot \frac{\partial \sigma_M^{(m)}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} dx = \frac{1}{\sigma_a A} \cdot \int_{\Omega_s} \exp\left(\frac{\sigma_M^{(m)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \cdot \frac{\partial \sigma_M^{(m)}}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial v_k} \cdot v_k dx \text{ for all } v^{(m)} \in U, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (17)$$

$$\Lambda(M - M_0) = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$M - M_0 \leq 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\Lambda \geq 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここで、式(16)は状態方程式と一致した $v^{(m)}$ の支配方程式、式(17)は変分変位と等価な随伴変位 $w^{(m)}$ に関する支配方程式(随伴方程式)である。また、式(18)から式(20)は体積制約に関するラグランジュ乗数 Λ の決定式である。

これらの条件で決定された $v^{(m)}, w^{(m)}$ および Λ を用いるとすれば、ラグランジュ汎関数の導関数は次式で与えられることになる。

$$\dot{L} = l_c(V) \dots\dots\dots (21)$$

ここで、速度場 V の一次形式 $l_c(V)$ は次式で与えられる。

$$l_c(V) = \int_{\Gamma_s} G_i V_i d\Gamma \dots\dots\dots (22)$$

$$G = \left\{ \sum_{m=1}^N \left(-e_{ijk} v_{k,l}^{(m)} w_{i,j}^{(m)} + f_i^{(m)} w_i^{(m)} + \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \exp\left(\frac{\sigma_A^{(m)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \right) + \Lambda \right\} \cdot n \text{ on } \Gamma_{design} \equiv \Gamma \setminus \Gamma_{fix} \dots\dots\dots (23)$$

なお、 G は形状こう配関数と呼ばれ、設計境界上で与えられる。

2.5 最大変位最小化問題 測度として式(24)で表される変位ノルム $\|v_R\|$ を考えた場合、目的汎関数は式(25)のように定義される。

$$\|v_R(x)\| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{1}{\rho} \ln \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{m=1}^N \exp\left(\frac{\|v_k^{(m)}(x)\|}{v_a} \cdot \rho\right) \right\} dx \dots\dots\dots (25)$$

強度最大化問題と同様にして、式(17)に相当する随伴方程式(26)と式(23)に相当する形状こう配関数 [式(28)] を導出することができる。

$$a(v^{(m)}, w^{(m)}) = \frac{1}{v_a A} \cdot \int_{\Omega_s} \exp\left(\frac{\|v_k^{(m)}\|}{v_a} \cdot \rho\right) \cdot \frac{\partial \|v_k^{(m)}\|}{\partial v_k} v_k' dx$$

for all $v^{(m)} \in U, m=1, \dots, N \dots\dots\dots (26)$

$$A = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{m=1}^N \exp\left(\frac{\|v_k^{(m)}\|}{v_a} \cdot \rho\right) \right\} dx \dots\dots\dots (27)$$

$$G = \left\{ \sum_{m=1}^N \left(-e_{ijk} v_{k,l}^{(m)} w_{i,j}^{(m)} + f_i^{(m)} w_i^{(m)} \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \exp\left(\frac{\|v_k^{(m)}\|}{v_a} \cdot \rho\right) + \Lambda \right\} \cdot n$$

on $\Gamma_{design} \equiv \Gamma \setminus \Gamma_{fix} \dots\dots\dots (28)$

形状こう配関数が理論的に導出されれば法法による領域変動量の解析が可能になる。

3. 数値解法

3.1 法法 法法は分布系の最適制御問題などでも用いられるヒルベルト空間でのこう配法を利用して目的汎関数が減少するような領域変動量(速度場 V) を支配方程式(29)に基づいて解く方法である。

$$a(V, w) = -l_c(w) \text{ for all } w \in C_0 \dots\dots\dots (29)$$

式(29)の支配方程式は境界あるいは領域に負の形状こう配関数 $-G$ を外力として作用させたときの変位場として速度場 V を解析することを示している。すなわち、法法では領域変動が形状こう配関数を擬似弾性問題の外力として作用させたときの変位場として求められる。したがって、式(29)は通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことができ、汎用性のある方法である。本論文では有限要素法を用いる。さらに、リメッシュが実用上不要であり、また変動後の境界が滑らかさを保持できる⁽¹⁰⁾ といった長所も有している。

著者らはこれまで法法を汎用化、実用化するため、汎用 FEM コードを利用したシステムを開発してきた。本論文でも汎用 FEM コード(本論文では I-DEAS を使用)を一種のサブルーチンとして式(16)、(17)および式(29)を解いている。目的汎関数の評価および形状こう配関数を求めるための応力解析 [式(16)] と随伴解析 [式(17)、(26)]、速度場 V を求めるための速度解析 [式(29)] および形状更新を繰返すことにより、目的汎関数が最小化され、最適形状を得ることができる。なお、速度解析では応力解析で設定される変位境界条件とは異なる領域変動の境界条件(側面制約条件と随伴荷重)を独立に設定する。本解法の流れを図3に示す。

3.2 随伴変数の計算 ここでは本論文で扱った問題固有の随伴方程式(17)、(26)の具体的な解析方法を示す。

式(17)の随伴方程式をマトリックス表記すると式(30)のようになる。

$$\int_{\Omega_s} [B^{(m)}]^T [D] [B^{(m)}] dx \{w^{(m)}\} = \int_{\Omega_s} [B^{(m)}]^T [D] \left\{ \frac{1}{\sigma_a A} \exp\left(\frac{\sigma_A^{(m)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \right\}$$

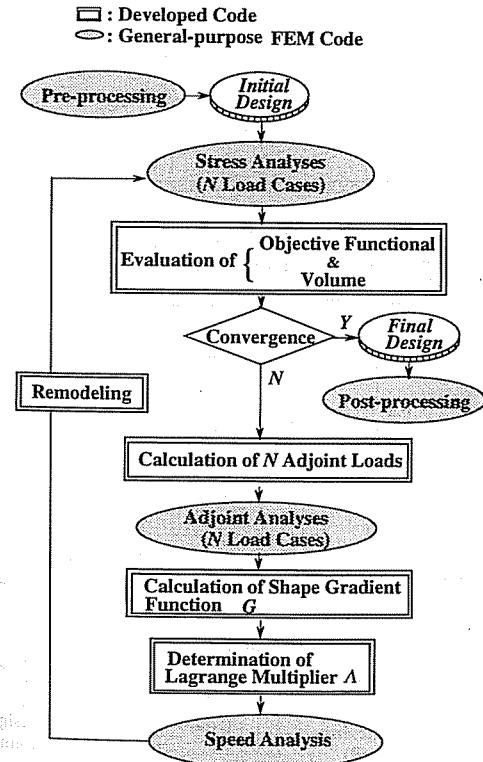


Fig. 3 Schematic flow chart of shape optimization system

$$\times \frac{\partial \sigma_i^{(n)}}{\partial \sigma_{ij}} dx \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 $[B]^T$ はひずみ-変位マトリックスの転置、 $[D]$ は弾性マトリックスを表す。領域内に

$$\left\{ \frac{1}{\sigma_a A} \exp\left(\frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_a} \cdot \rho\right) \cdot \frac{\partial \sigma_i^{(n)}}{\partial \sigma_{ij}} \right\}$$

の分布した初期ひずみを外力として与えることにより随伴変位 w は求められる。また、初期ひずみを熱ひずみに変換して与えることも可能である⁽⁷⁾。

また、随伴方程式(26)の場合は領域内に

$$\left\{ \frac{1}{v_a A} \cdot \exp\left(\frac{\|v_k^{(n)}\|}{v_a} \cdot \rho\right) \cdot \frac{\partial \|v_k^{(n)}\|}{\partial v_k} \right\}$$

の分布した荷重を外力として与えることにより随伴変位 w は求められる。

3.3 制約条件の考慮 著者らはこれまで方法の実行において制約条件を考慮する方法として、単一の等式制約に対して有効なPID制御の考えを用いる方法や複数制約にも対応できる方法を提示した。本論文ではPID制御の考えを用いる方法⁽¹¹⁾を用いた。具体的には、体積制約を満たすように決定されるラグランジュ乗数 λ は力 $-G$ の中では一様な表面力とみなすことができ、大きさ λ の一様表面力を制御することにより体積制約条件を満足させることができる。

4. 計算結果

開発したシステムを最大応力最小化問題と最大変位最小化問題へ適用し、提案手法の有効性と実用性を確認した。最大応力最小化問題では二次元問題として基

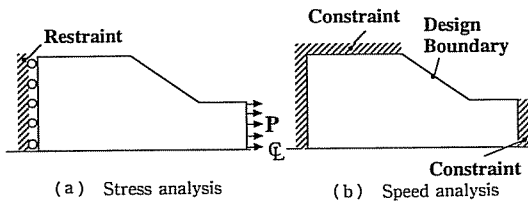


Fig. 4 Fillet problem

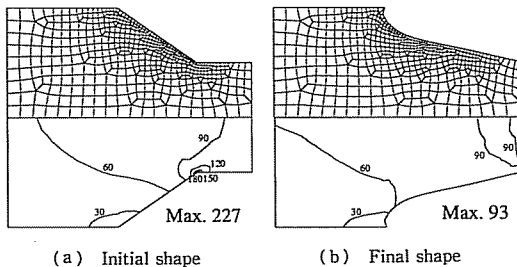


Fig. 5 Initial and optimal shape and stress distributions [MPa]

本的なフィレット問題とトーションアーム、三次元問題としてソリッドアームの問題を解析した。最大変位最小化問題では二次元曲りばり、および最適形状の比較のために最大応力最小化問題と同様のフィレット問題とトーションアームを例題とした。なお、いずれの問題も初期の体積(面積)を制約値とした。基準化のための定数 σ_a または v_a は各問題において初期形状の最大値を用いた。また、二次元問題の解析は平面応力状態を仮定し、数値解析には4節点要素を使用した。KS関数において $\rho=30$ とした。

4.1 最大応力最小化問題

4.1.1 フィレット問題(二次元, 単一荷重) 最大応力最小化を目的としたフィレットの形状設計の問題設定を図4に示す。応力解析では図4(a)に示すように端部を滑り拘束し、他端に引張分布荷重 P を負荷した。速度解析では図4(b)に示すようにフィレット部のみを設計境界とし、残りの境界は固定境界とした。なお、対称性を考慮した二分の一モデルで解析を行った。

図5に初期形状と得られた最適形状をミーゼス応力分布とともに示す。また、初期形状での値で基準化した最適化履歴を図6に示す。最大応力は約60%減少し、固定境界近傍を除きフィレット部の応力分布は均一になっていることがわかる。目的汎関数と最大応力

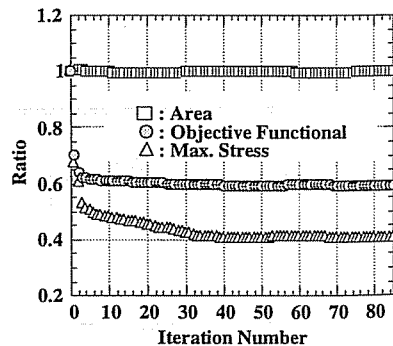


Fig. 6 Iteration histories

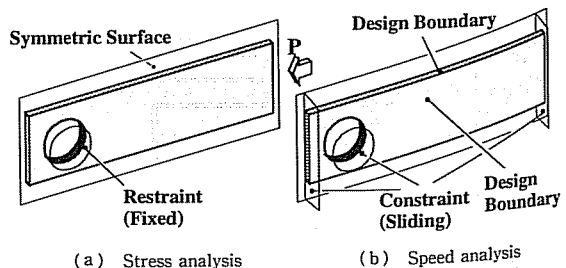


Fig. 7 Solid arm problem

は最小化されていることも確認できる。

4.1.2 ソリッドアーム問題(三次元, 単一荷重)

三次元への適用例として圧縮荷重を受けるソリッドアームの最大応力最小化問題の設定を図7に示す。応力解析の境界条件は図7(a)に示すように円孔周辺を完全拘束し、他端に圧縮分布荷重 P を負荷した。速度解析の制約条件は図7(b)に示すように円孔周辺および長手方向を滑り拘束し、幅方向と厚さ方向に領域変動可能な制約を与えた。また、数値解析は8節点ソリッド要素を使用し、対称性を考慮した二分の一モデルで解析を行った。

図8に初期形状と得られた最適形状、および各ミーンズ応力分布を示す。図9に初期値で基準化した最適

化履歴を示す。最大応力は約30%減少し、円孔の一部周辺を除きほぼ全域で均一応力分布になっていることがわかる。二次元問題同様、目的汎関数と最大応力は最小化されていることも確認できる。これらの結果から三次元問題についても本方法により最適形状が求められることが検証される。

4.1.3 トーションアーム問題(二次元, 複数荷重)

図10にトーションアームの最大応力最小化設計の問題設定を示す。応力解析では図10(a)に示すように円孔周辺を完全拘束し、他端に $P^{(1)}$ および $P^{(2)}$ の2種類の分布荷重を負荷した。速度解析では図10(b)に示すように円孔周辺を固定し、両端を滑り拘束した。

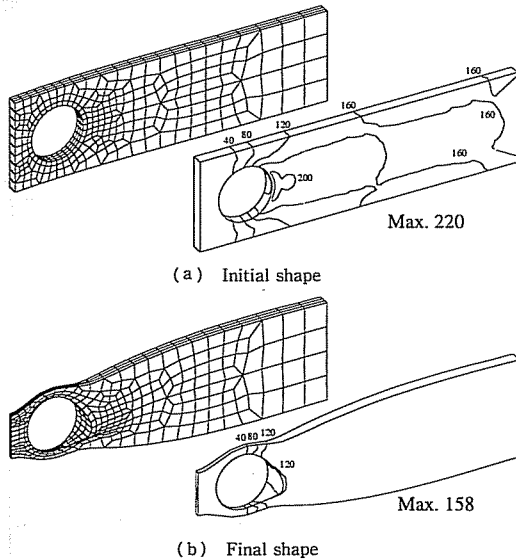


Fig. 8 Initial and optimal shape and stress distributions [MPa]

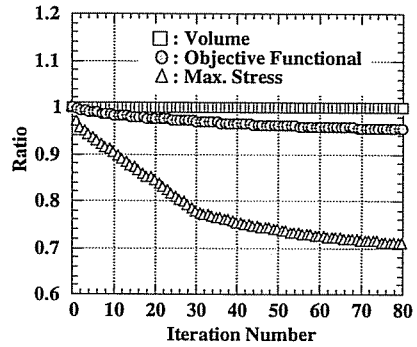


Fig. 9 Iteration histories

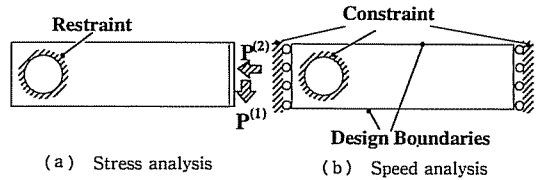


Fig. 10 Torsion arm problem

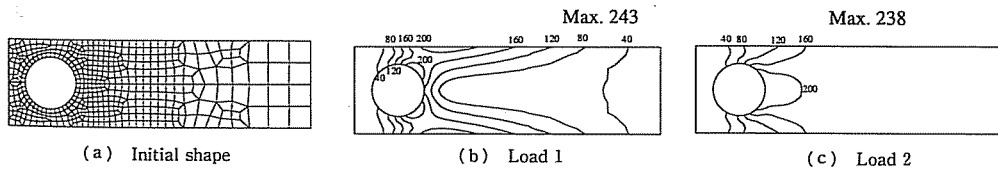


Fig. 11 Initial shape and stress distributions [MPa]

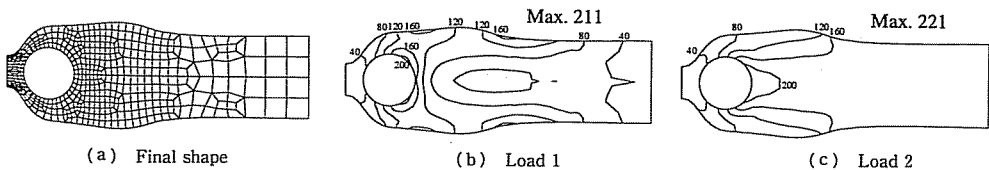


Fig. 12 Optimal shape and stress distributions for multiple loads [MPa]

図 11 と図 12 に初期形状と得られた最適形状、および二つの荷重ケースでのミーゼス応力分布を示す。図 13 に初期値で基準化した最適化履歴を示す。目的汎関数と最大応力は最小化されており、複数荷重が作用する問題においても、本解法が有効に機能していることが確認できる。また、図 14 と図 15 に比較のために計算した各単一荷重に対する最適形状を示す。

4・2 最大変位最小化問題

4・2・1 曲りばり問題(二次元、複数荷重) 最大変位最小化問題の例として、図 16 に曲りばりの問題設定を示す。応力解析では図 16(a) に示すように一端を完全拘束し、他端に $P^{(1)}$ および $P^{(2)}$ の 2 種類の

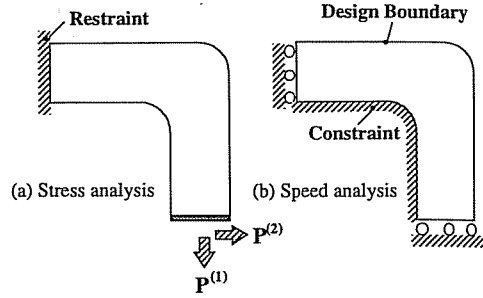


Fig. 16 Bending plate problem

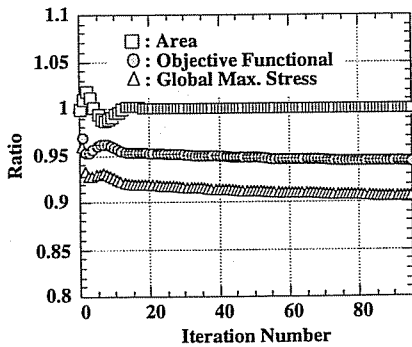


Fig. 13 Iteration histories (Load 1 and Load 2)

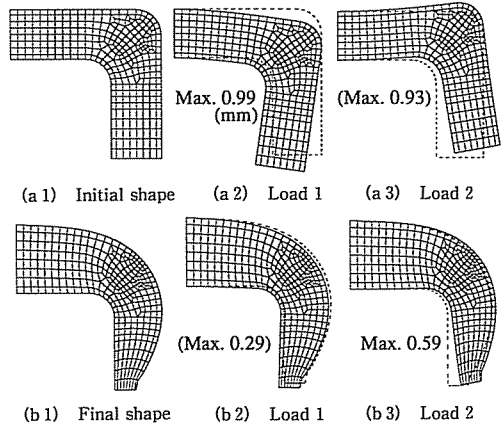


Fig. 17 Initial and optimal shape and deformation modes

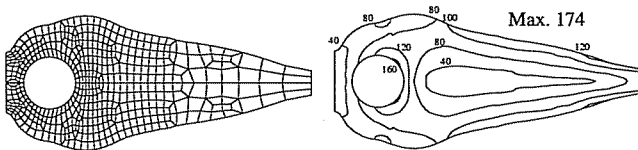


Fig. 14 Optimal shape and stress distribution for load 1 [MPa]

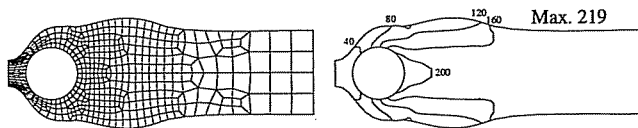


Fig. 15 Optimal shape and stress distribution for load 2 [MPa]

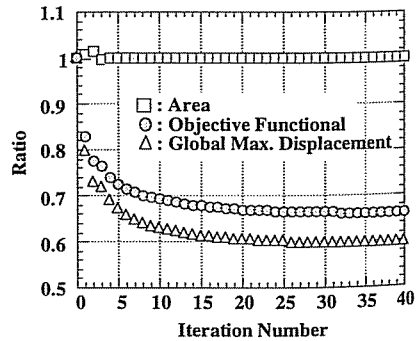


Fig. 18 Iteration histories

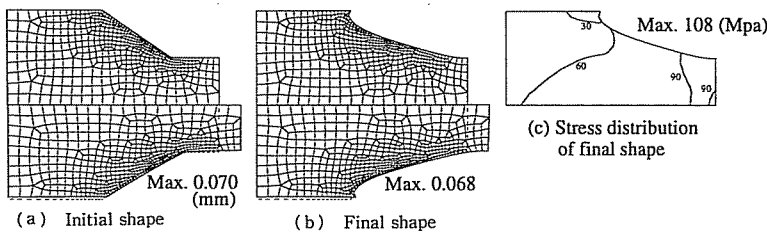


Fig. 19 Initial and optimal shape

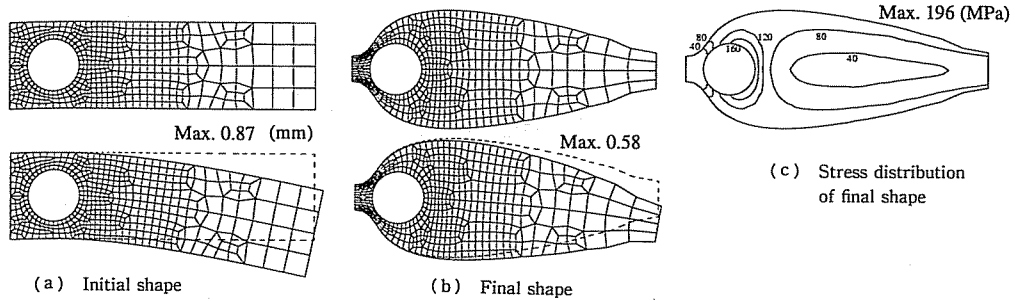


Fig. 20 Initial and optimal shape

分布荷重を負荷した。速度解析では図 16(b)に示すように外形を設計領域に設定した。

図 17 に初期形状と得られた最適形状、および二つの荷重ケースでの変形モードを示す。図 18 に初期値で基準化した最適化履歴を示す。目的汎関数と最大変位は最小化されており、最大変位最小化問題に対して本解法が有効であることが確認できる。

4・2・2 フィレット問題(二次元, 単一荷重)

4・1・1 項と同様の条件で最大変位最小化の計算を行った。得られた最適形状を図 19 に示す。負荷点近傍の形状が随伴荷重の影響で最大応力最小形状(図 5)とはやや異なっているが、類似した形状であることがわかる。

4・2・3 トーションアーム問題(二次元, 単一荷重)

4・1・3 項において荷重 $P^{(1)}$ のみを作用させ、最大変位最小化の計算を行った。得られた最適形状を図 20 に示す。最大変位は 34%減少している。最大応力最小形状(図 14)と比較すると最大応力は約 13%高く、形状も明らかに異なっていることがわかる。

これらの結果から最大変位最小形状と最大応力最小形状とは必ずしも一致しないことが確認できる。これは随伴問題のひずみ場の相違に起因する。

5. おわりに

複数の負荷を考慮し、最大局所変位の最小化を目的とする境界形状最適化問題の数値解析法を提示した。局所変位としてはミーゼス応力と変位ノルムを用いた。具体的には次のような手続きからなる。

(1) KS 関数を用いて問題を可解、簡単化(単一目的化)して定式化する。

(2) 物質導関数法、随伴変数法を利用して本問題

に対する形状こう配関数を理論的に導出する。

(3) 形状こう配関数を力法に適用し、目的汎関数を最小化する領域変動量を数値的に解析する。

提示した方法の有効性を二次元と三次元の計算例を通して示した。本方法により、最大応力や最大変位の最小化を目的とする最適形状設計が可能となる。

文 献

- (1) Banichuk, N. V., *Introduction to Optimization of Structures*, (1990), 32-35, Springer-Verlag, New York.
- (2) Taylor, J. E. and Bendsøe, M. P., An Interpretation for Min-max Structural Design Problems Including a Method for Relaxing Constraints, *Int. J. Solids Struct.*, 20-4 (1984), 301-314.
- (3) Trompette, P. and Marcelin, J. L., On the Choice of Objectives in Shape Optimization, *Eng. Opt.*, 11 (1987), 89-102.
- (4) Kristensen, E. S. and Madsen, N. F., On the Optimum Shape of Fillets in Plates Subjected to Multiple in-plane Loading Cases, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10 (1976), 1007-1019.
- (5) 畔上秀幸, 機論, 60-574, A (1994), 165.
- (6) 下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, 機論, 62-602, A (1996), 2393-2400.
- (7) 下田昌利・畔上秀幸・桜井俊明, 機論, 62-604, A (1996), 2831-2837.
- (8) Kreisselmeier, G. and Steinhauser, R., Systematic Control Design by Optimizing a Vector Performance Index, *International Federation of Active Control Symposium on Computer-Aided Design of Control Systems*, (1979-8), 113-117, Zurich, Switzerland.
- (9) Wrenn, G. A., An Indirect Method for Numerical Optimization Using the Kreisselmeier-Steinhauser Function, *NASA Contractor Report 4220*, (1989).
- (10) 畔上秀幸・海津聡・下田昌利・片峯英次, 第 1 回計算工学会講演会論文集, 1 (1996-5), 625-628.
- (11) 下田昌利・畔上秀幸・井原久・桜井俊明, 機論, 61-587, A (1995), 1545-1552.