

粘性流れ場領域最適化問題の解法\*  
(力法によるアプローチ)片 峯 英 次\*<sup>1</sup>, 畔 上 秀 幸\*<sup>2</sup>Solution to Viscous Flow Field Domain Optimization Problems  
(Approach by the Traction Method)

Eiji KATAMINE and Hideyuki AZEGAMI

For solution of dissipation energy minimization problems in a steady-state viscous flow field domain we applied the traction method that was proposed as a solution to domain optimization problems including a variation-constrained boundary in elliptic boundary value problems. Comparing this method to the mathematical programming method directly using the shape gradient function we can easily apply this method to domain optimization problems including the variation-constrained natural boundary. Also, we can easily implement this method with general-purpose FEM programs or BEM programs. We show the successful results of two-dimensional Stokes flow problems of a bending channel and a channel in which an isolated body exists.

**Key Words:** Optimum Design, Numerical Analysis, Computational Fluid Dynamics, Finite Element Method, Domain Optimization, Traction Method

## 1 はじめに

流れ場の形状を設計対象にした最適化問題は領域最適化問題の一つとして位置付けることができる。さらに粘性流体の流れ場を対象とした場合、散逸エネルギーの最小化問題はエネルギーの利用効率を高める観点から工学的に重要な問題となる。粘性流体の輸送を目的にした流路の設計では散逸エネルギーの最小化は輸送に要するエネルギーの最小化を意味する。また、静止した十分広い粘性流体中を移動する孤立物体の抵抗動力最小化問題も、静止孤立物体まわりの一様流れ場を設計対象とした散逸エネルギー最小化問題に置き換えることができる。

本論文では、粘性流体の定常流れ場を設計対象として、散逸エネルギーを目的汎関数にした流れ場最適化問題を解くための実用的な数値解法について検討する。

連続体あるいは場の領域形状を設計対象にした最適化理論は、1970年代から80年代前半にかけて、ヨーロッパの数学者達によってまとめられてきた<sup>(1)</sup>。

その中で、流れ場の領域最適化問題に対する解法はPironneau<sup>(2)-(5)</sup>がまとめている。Pironneau<sup>(2)</sup>は物体表面近傍での一様流れを仮定した孤立物体の抵抗動力

最小化問題に対して Stokes 流れを仮定した場合の最適性規準が物体表面上における法線方向速度勾配ノルムの一定条件になることを示した。また、Pironneau<sup>(2)(4)(5)</sup>は有限個の境界上節点座標を設計変数に選んだ場合の感度解析法を示している。その後、軸対称 Stokes 流れを仮定した孤立物体問題に対して Bourot<sup>(6)</sup>は極座標表示した物体形状関数の Fourier 級数を設計変数にした最適化問題を解析することによって数値解を得ている。佐野ら<sup>(7)</sup>は有限要素モデルを用いた Pironneau のアルゴリズム<sup>(2)</sup>に基づいて孤立物体問題の数値解を得ている。また、別所ら<sup>(8)(9)</sup>は最適性規準として物体表面における渦度の絶対値一定条件を設定し、流れ関数を用いた孤立物体の形状最適化解析を行っている。

これまで行われてきた数値解析法を振り返ると、適用対象とされた問題はいずれも孤立物体の問題に限られていた。この問題はすべての境界で流速が固定され、さらに境界変動が拘束されていないという特徴をもっていた。

一方、著者の一人<sup>(1)(10)</sup>は先に変動拘束された境界を含む領域最適化問題に対しても適用可能な領域最適化解析法を提案した。この方法を力法 (traction method) と呼んだ。この方法では、まず Zolésio<sup>(11)-(13)</sup>がまとめた速度法 (speed method) によって与えられた問題に対する形状勾配関数を理論的に導出する。力法はこの形状勾配関数を用いた勾配法によって導出される領域変動の支配方程式を線形弾性問題に対する変位場の

\* 平成5年10月4日 第71期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成6年3月22日。

<sup>1</sup> 正員、岐阜工業高等専門学校(〒501-04 岐阜県本巣郡真正町上真桑)。

<sup>2</sup> 正員、豊橋技術科学大学(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

支配方程式に置き換えて解く方法である。置き換えられた線形弾性問題は有限要素法や境界要素法などを利用して解析することができる。

本論文では、力法を用いることによって形状拘束された自然境界を含んだ粘性流れ場領域に対しても適用可能な領域形状最適化解析法を示すことを目的にする。本解析法の有効性は曲がり管と孤立物体が置かれた流路の2次元定常 Stokes 流れ場問題に対する解析例を通して検討する。

2 領域変動

粘性流れ場の領域最適化問題を定式化する前に、速度法による領域変動の表現方法を簡単にまとめておく(1)(13)。

領域変動が許されている開領域を許容領域  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  と定義する。領域の変動は初期開領域  $\bar{\Omega}$  を含む  $\bar{D}$  を定義域とし、変動後の領域  $\bar{\Omega}_s$  を含む  $\bar{D}$  を値域とする次のような1対1写像  $T_s(X)$  を用いて表現することができる。

$$T_s(X) : \bar{D} \ni X \mapsto x(s) \in \bar{D} \quad (1)$$

ただし、変動を拘束する領域  $\theta$  では次の関係を仮定する。

$$T_s(X) = I(X) \quad \forall X \in \theta \subset \bar{D} \quad (2)$$

ここで、 $s$  は変動の履歴を表す。 $X \in \bar{\Omega}$  は Lagrange 座標系あるいは物質座標系、 $x \in \bar{\Omega}_s$  は Euler 座標系あるいは実座標系と呼ばれる。なお、 $\mathbb{R}$  は実数を表す。

領域の微小変動は次のように表すことができる。

$$T_{s+\Delta s}(X) = T_s(X) + \Delta s V + O(|\Delta s|) \quad (3)$$

ただし、写像  $T_s(X)$  の Euler 導関数を与える速度場  $V$  は次のように定義される。

$$\frac{\partial T_s}{\partial s} \circ T_s^{-1}(x) = V(x) \quad (4)$$

$$V \in C_\theta = \{V \in C^1(\bar{D}; \mathbb{R}^n) \mid n_i V_i = 0 \text{ on } \partial D, V = \mathbf{0} \text{ in } \theta \subset \bar{D}\} \quad (5)$$

なお、 $z \circ y(x)$  は  $x \mapsto y(x) \mapsto z(y(x))$  の関係を表す。 $C^k(\bar{D}; \mathbb{R}^n)$  は  $\bar{D}$  を定義域、 $\mathbb{R}^n$  を値域とする  $k$  級の連続関数空間を表す。 $\Delta s O(|\Delta s|) \rightarrow 0 (\Delta s \rightarrow 0)$  の関係を仮定する。 $n$  は外向単位法線ベクトルを表す。また、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約を使用する。

領域変動に伴う分布関数の導関数について考えてみよう。領域が変動することを仮定すると、分布関数は

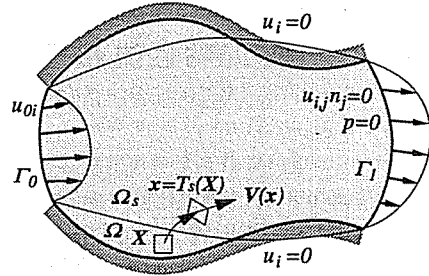


図1 流れ場の領域変動問題

Lagrange 表示  $\phi^s(X), X \in \Omega$  と Euler 表示  $\phi_s(x), x \in \Omega_s$  を持つことになる。両者は写像  $T_s(X)$  を用いて次式で関連づけられる。

$$\phi^s(X) = \phi_s \circ T_s(X) \quad \forall X \in \Omega \quad (6)$$

式(3)の関係をを用いると、Euler 導関数あるいは物質導関数  $\dot{\phi}_s$  と形状導関数  $\phi'_s$  の間に次の関係が成立する。

$$\dot{\phi}_s = \phi'_s + \phi_{s,i} V_i \quad (7)$$

ただし、 $\dot{\phi}_s$  と  $\phi'_s$  は次式で定義される。

$$\dot{\phi}_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi^{s+\Delta s} - \phi^s) \quad (8)$$

$$\phi'_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi_{s+\Delta s} - \phi_s) \quad (9)$$

なお、本論文のテンソル表示では偏微分表示  $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$  を使用する。

汎関数の導関数は次のように得られる。汎関数  $J$  が分布関数  $\phi_s$  の領域積分

$$J = \int_{\Omega_s} \phi_s dx \quad (10)$$

で与えられている場合、導関数  $\dot{J}$  は式(7)の関係をを用いて次式で与えられる。

$$\dot{J} = \int_{\Omega_s} \dot{\phi}_s dx + \int_{\Gamma_s} \phi_s v_n d\Gamma \quad (11)$$

ただし、 $v_n = n_i V_i$  を表している。

3 散逸エネルギー最小化問題

粘性流れ場領域に対する散逸エネルギー最小化問題を具体的に考えてみよう。最初に問題を定式化し、その後で Lagrange 乗数法を用いることによってこの問題に対する最適性規準を導出する。

3.1 定式化 粘性流れ場の境界値問題とその領域変動問題を図1のように定義する。ただし、簡単のため

に定常非圧縮性 Newton 粘性流体を仮定する。粘性流体は閉領域  $\bar{\Omega} \subset \bar{D}$  に境界  $\Gamma_0$  から流速  $u_0$  で流入し、境界  $\Gamma_1$  から流出すると仮定する。境界  $\Gamma_1$  では法線方向流速勾配  $u_{i,j}n_j = 0$  と 圧力  $p = 0$  を同時に満たす自然境界条件を仮定する。領域変動を拘束する領域  $\Theta$  は、ここでも簡単のために、 $\Gamma_0$  と  $\Gamma_1$  を含めた境界  $\Theta \supseteq \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  で与えられると仮定する。したがって、設計境界  $\Gamma_{\text{design}}$  は領域  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  から変動拘束境界  $\Theta$  を除いた流速拘束境界の部分境界で与えられる。

このように流れ場と領域変動を定義し、流れ場領域の大きさ

$$m = \int_{\Omega_s} dx \tag{12}$$

に対して制約を設けた場合、散逸エネルギー最小化問題は物体力を無視すると次のように定式化される。

▷ 問題： 既定流速  $u_0 \in U_0$ 、粘性係数  $\mu \in \mathbb{R}_+$ 、密度  $\rho \in \mathbb{R}_+$  と領域の大きさに対する上限値  $M \in \mathbb{R}_+$  が与えられているとき、式(4)と(5)において  $\Theta \supseteq \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  を仮定した領域変動に対して、

$$\text{散逸エネルギー } D(\nabla u, (\nabla u)^T) \tag{13}$$

が最小となる領域  $\Omega_s$  を求めよ。ただし、Navier-Stokes 方程式と連続方程式の変形式

$$b(\nabla u u, w) + a(\nabla u, \nabla w) - \langle p, w_{i,i} \rangle = 0 \tag{14}$$

$$u \in U \quad \forall w \in W$$

$$\langle q, u_{i,i} \rangle = 0 \quad \forall q \in Q \tag{15}$$

と領域の大きさ制約

$$m - M = 0 \tag{16}$$

は満たしていなければならない。◁

$\mathbb{R}_+$  は正の実数を表す。対流項  $b(\nabla u u, w)$ 、粘性項  $a(\nabla u, \nabla w)$ 、圧力項  $\langle p, w_{i,i} \rangle$  は次のように定義する。

$$b(\nabla u u, w) = \int_{\Omega_s} \rho w_i u_{i,j} u_j dx \tag{17}$$

$$a(\nabla u, \nabla w) = \int_{\Omega_s} \mu u_{i,j} w_{i,j} dx \tag{18}$$

$$\langle p, w_{i,i} \rangle = \int_{\Omega_s} p w_{i,i} dx \tag{19}$$

散逸エネルギー  $D(\nabla u, (\nabla u)^T)$  は次のように与えられる。

$$D(\nabla u, (\nabla u)^T) = 2\mu \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} dx = \mu \int_{\Omega_s} u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) dx = a(\nabla u, \nabla u) + a(\nabla u, (\nabla u)^T) \tag{20}$$

また、流速  $u$ 、随伴流速  $w$ 、圧力  $p$  はそれぞれ次の関数空間の要素とする<sup>(14)</sup>。

$$U_0 = \{u_0 \in H^1(\bar{\Gamma}_0; \mathbb{R}^n)\} \tag{21}$$

$$U = \{u \in H^1(\bar{\Omega}_s; \mathbb{R}^n) \mid u = u_0 \text{ on } \Gamma_0, u_{i,j}n_j = 0 \text{ on } \Gamma_1, u = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_1\} \tag{22}$$

$$W = \{w \in H^1(\bar{\Omega}_s; \mathbb{R}^n) \mid w = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_1\} \tag{23}$$

$$Q = \{p \mid \langle p, q \rangle \in \mathbb{R}, q \in Q' = L^2(\Omega_s)/\mathbb{R}, p = 0 \text{ on } \Gamma_1\} \tag{24}$$

なお、 $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  は  $\Omega$  を定義域、 $\mathbb{R}^n$  を値域とする  $p$  乗可積分な Lebesgue 関数空間を表す。また、 $H^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$  は  $m$  階までの導関数が  $2$  乗可積分な Sobolev 関数空間を表す。

3.2 最適性規準 この問題に Lagrange 乗数法を適用して、最適性規準を導出してみよう。

式(14)と(15)における  $w$  と  $q$  を Lagrange 乗数として用いることにして、式(16)の Lagrange 乗数を  $\Lambda$  で表すことにすると、この散逸エネルギー  $D(\nabla u, (\nabla u)^T)$  の最小化問題は次の Lagrange 関数  $L(u, p, w, q, \Lambda, \Omega_s)$  の停留化問題に置き換えられる。

$$L = D(\nabla u, (\nabla u)^T) - b(\nabla u u, w) - a(\nabla u, \nabla w) + \langle p, w_{i,i} \rangle + \langle q, u_{i,i} \rangle + \Lambda(m - M) \tag{25}$$

領域変動に対する  $L$  の導関数  $\dot{L}$  は、式(11)に従って次のように計算される。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -\{b(\nabla u u, w') + a(\nabla u, \nabla w') - \langle p, w'_{i,i} \rangle\} \\ & + \langle q', u_{i,i} \rangle \\ & - \{b(\nabla u' u, w) + b(\nabla u u', w) + a(\nabla u', \nabla w) \\ & - 2D(\nabla u', (\nabla u')^T) - \langle q, u'_{i,i} \rangle\} \\ & + \langle p', w_{i,i} \rangle \\ & + \int_{\Gamma_s} \{-\rho w_i u_{i,j} u_j - \mu w_{i,j} u_{i,j} + p w_{i,i} \\ & + q u_{i,i} + \mu u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda\} v_n d\Gamma \\ & + \dot{\Lambda}(m - M) \end{aligned} \tag{26}$$

したがって、散逸エネルギー最小化問題の最適性規準は次式で与えられることになる。

$$b(\nabla u u, w') + a(\nabla u, \nabla w') - \langle p, w'_{i,i} \rangle = 0 \tag{27}$$

$$\forall w' \in W$$

$$\langle q', u_{i,i} \rangle = 0 \quad \forall q' \in Q \tag{28}$$

$$b(\nabla u' u, w) + b(\nabla u u', w) + a(\nabla u', \nabla w) - 2D(\nabla u', (\nabla u')^T) - \langle q, u'_{i,i} \rangle = 0 \quad \forall u' \in U(29)$$

$$\langle p', w_{i,i} \rangle = 0 \quad \forall p' \in Q \tag{30}$$

$$\int_{\Gamma_s} \{-\rho w_i u_{i,j} u_j - \mu w_{i,j} u_{i,j} + p w_{i,i} + q u_{i,i} + \mu u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda\} v_n d\Gamma = 0 \tag{31}$$

$$\forall V \in C_\Theta$$

$$m - M = 0 \tag{32}$$

ここで、式 (27) と (28) はそれぞれ式 (14) と (15) の Navier-Stokes 方程式と連続方程式を表している。一方、式 (29) と (30) はそれぞれ随伴流速  $w$  と随伴圧力  $q$  に対する随伴系方程式を表している。式 (32) は式 (16) の制約条件である。これらの関係を用いれば、式 (27) と (28) によって  $u$  と  $p$  を解き、式 (29) と (30) から  $w$  と  $q$  を解くことができる。さらに、式 (32) の条件を用いれば  $\Lambda$  を決定することができる。このように決定された  $u, p, w, q, \Lambda$  を用いれば、Lagrange 関数  $L$  は  $V$  だけの関数となり、その導関数  $\dot{L}$  は次のように表すことができる。

$$\dot{L} = l_G(V) \tag{33}$$

このとき、散逸エネルギー最小化問題は  $L$  の最小化問題となる。ただし、 $l_G(V)$  は次のような  $G$  on  $\Gamma_s$  を係数関数とする速度場  $V$  の一次形式である。

$$l_G(V) = \int_{\Gamma_{design}} G \cdot V \, d\Gamma \tag{34}$$

$$G = \{-\mu w_{i,j} u_{i,j} + \mu u_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda\} n \tag{35}$$

ここで  $G$  は形状勾配関数と呼ばれる。なお、式 (31) から式 (35) を得るときに、 $V = 0$  on  $\Omega \supseteq \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 、 $w = 0$  on  $\Gamma_s \setminus \Gamma_1$ 、 $w_{i,i} = u_{i,i} = 0$  in  $\bar{\Omega}$  の関係を用いた。

**3.3 Stokes 流れ** Stokes 流れの運動方程式は式 (14) から対流項  $b(\nabla u u, w)$  を除いた式で与えられる。その式に基づけば、次の関係が成立する。

$$2D(\nabla u', (\nabla u)^T) = 4a(\nabla u', \nabla u) = 2(p, u'_{i,i}) \tag{36}$$

したがって、Stokes 流れの場合の最適性規準は次のようになる。

$$a(\nabla u, \nabla w') - (p, w'_{i,i}) = 0 \quad \forall w' \in W \tag{37}$$

$$(q', u_{i,i}) = 0 \quad \forall q' \in Q \tag{38}$$

$$a(\nabla u', \nabla w) - ((2p + q), u'_{i,i}) = 0 \quad \forall u' \in U \tag{39}$$

$$(p', w_{i,i}) = 0 \quad \forall p' \in Q \tag{40}$$

$$\int_{\Gamma} \{-\mu w_{i,j} u_{i,j} + \mu u_{i,i} + \mu u_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda\} v_n \, d\Gamma = 0 \quad \forall V \in C_\theta \tag{41}$$

$$m - M = 0 \tag{42}$$

ここで、随伴系方程式 (39) と (40) の解  $w$  と  $q$  について考えてみよう。式 (23) と (24) で与えられた境界条件  $w_i = 0$  on  $\Gamma \setminus \Gamma_1$  および  $p = q = 0$  in  $\Gamma_1$  に注目すると、解は  $w_i = q = 0$  on  $\Omega$  となる。したがって Stokes 流れの場合の形状勾配関数  $G$  は次のように与えられることになる。

$$G = \{\mu u_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda\} n \tag{43}$$

4 方法

Lagrange 関数の導関数  $\dot{L}$  が形状勾配関数  $G$  を係数関数とする速度場  $V$  の一次形式で与えられたので、方法を用いて領域変動を解析することができる。方法を簡単にまとめておこう<sup>(1)</sup>。

初期領域  $\Omega$  から  $m$  回目の領域変動を行うことを考える。方法はそのときの領域変動を表す速度場  $V^{(k)}$  を次の支配方程式に基づいて解析する方法である。

$$a^E(\nabla V^{(k)}, \nabla w) = -l_G^{(k)}(w) \tag{44}$$

$$V^{(k)} \in C_\theta \quad \forall w \in C_\theta$$

ただし、 $a^E(\nabla V^{(k)}, \nabla w)$  は  $V^{(k)}$  を変位、 $w$  を仮想変位とみなしたときの仮想ひずみエネルギーを与える次のような双1次形式である。

$$a^E(\nabla V^{(k)}, \nabla w) = \int_{\Omega} A_{ijkl} V_{k,i}^{(k)} w_{i,j} \, dx \tag{45}$$

この支配方程式で決定された領域変動  $V^{(k)}$  は Lagrange 関数  $L$  を減少させることを確認してみよう。Navier-Stokes 方程式あるいは Stokes 方程式と連続の方程式および随伴系の方程式と領域の大きさ制約が満たされているとき、Lagrange 関数  $L$  の  $k$  回目写像  $T_{j,k}(X)$  周りでの摂動展開は次のように表すことができる。

$$\Delta L^{(k)} = l_G^{(k)}(\Delta s V^{(k)}) + O(|\Delta s|) \tag{46}$$

ここで、式 (44) を式 (46) に代入して、剛性テンソル  $A_{ijkl}$  の正定値性に基づく  $a^E(\cdot, \cdot)$  の正定値性

$$\exists \alpha > 0 : a^E(\nabla \xi, \nabla \xi) \geq \alpha \xi_{i,j} \xi_{i,j} \tag{47}$$

$$\forall \xi \in H^1(\Omega_s; \mathbb{R}^n)$$

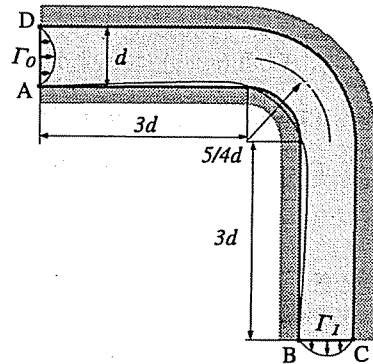


図2 二次元曲がり管

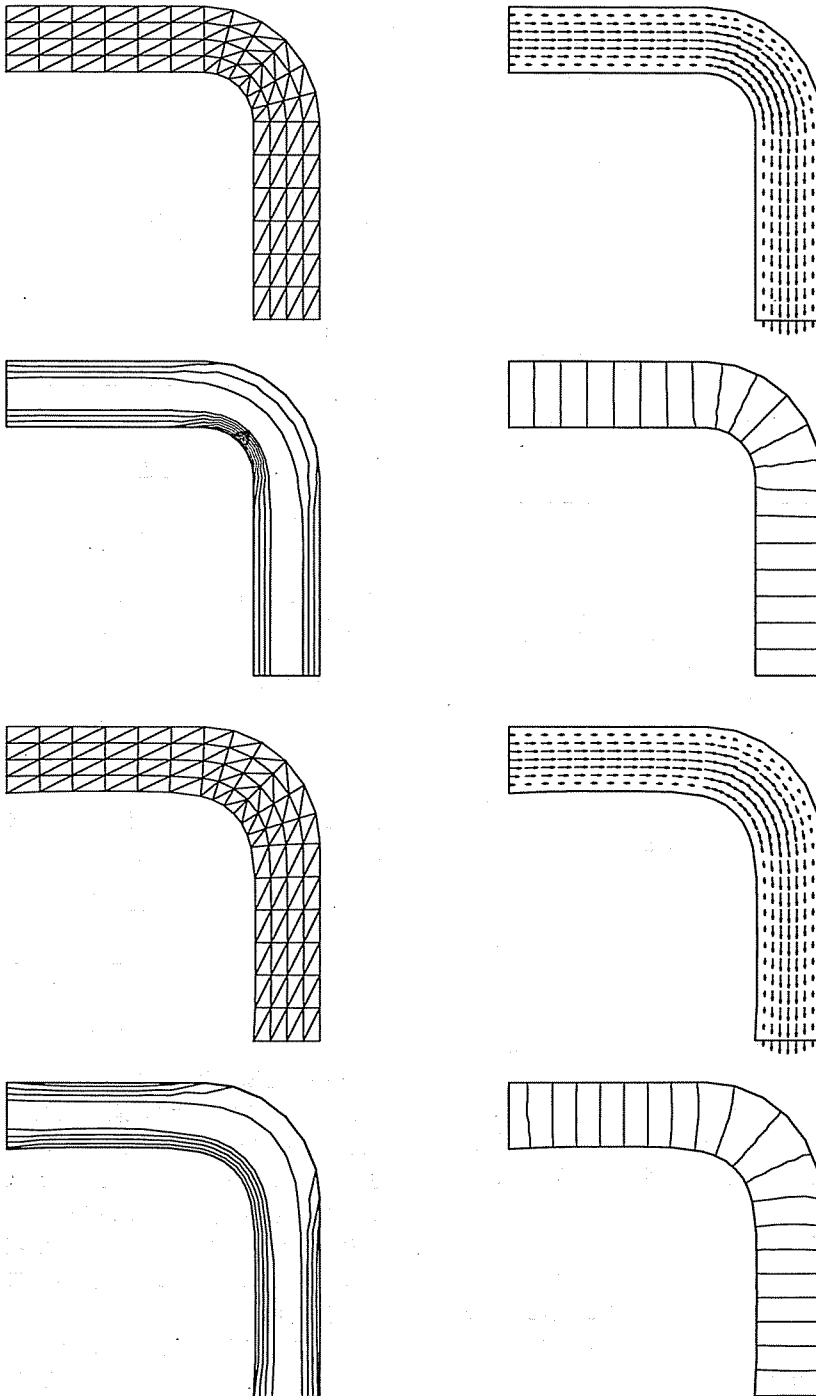


図3 二次元曲がり管の解析結果：初期領域（上側）と収束領域（下側），有限要素分割（左上），流速分布（右上），散逸エネルギー密度分布（左下），圧力分布（右下）

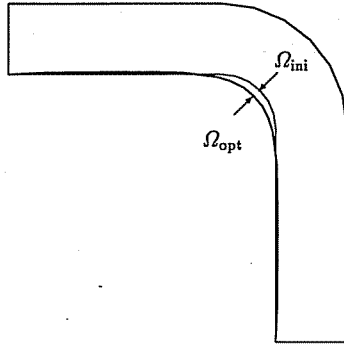


図4 二次元曲がり管の解析結果：形状比較

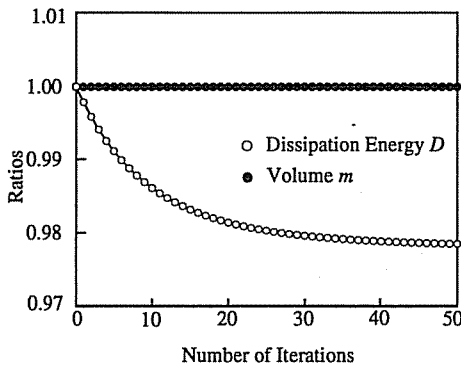


図5 二次元曲がり管の解析結果：収束履歴

を考慮すると、次の関係が得られることになる。

$$\Delta L^{(k)} = -a^E(\Delta s \nabla V^{(k)}, \Delta s \nabla V^{(k)}) < 0 \quad (48)$$

この関係は式(44)で決定された速度場  $V^{(k)}$  を用いて領域を変形していけば、凸性が保証されている問題において、Lagrange 関数  $L$  は必ず減少する関係を与えている。

領域変動解析の支配方程式(44)は、境界あるいは領域に力  $-G$  を作用させたときの変位分布として領域変動を与える速度場  $V$  が解析されることを示している。したがって、速度場  $V^{(k)}$  の数値解析法は式(44)の解法になっていれば任意の方法を適用できることになる。本論文では、有限要素法を用いて式(44)を解くことにする。

領域の大きさ制約式(16)を満たすような Lagrange 乗数  $\Lambda$  は次のように決定することができる。力  $-G$  の中で  $\Delta n$  は一様な表面力として含まれている。この一

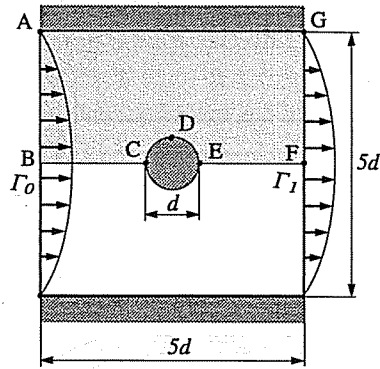


図6 二次元流路内の孤立物体

様な表面力の変化  $\Delta \Lambda n$  による速度場  $V$  の変化  $\Delta V$  と領域の大きさ  $m$  の変化  $\Delta m$  は、次のような境界に一様な大きさ  $\Delta \Lambda n$  の表面力を作用させたときの弾性変形解析によって得られることになる。

$$a^E(\nabla(\Delta V), \nabla w) = \Delta \Lambda \int_{\Gamma_i} n_i w_i d\Gamma \quad \Delta V \in C_\theta \quad \forall w \in C_\theta \quad (49)$$

$$\Delta m = \int_{\Gamma_i} n \cdot V d\Gamma \quad (50)$$

$\Delta V$  と  $\Delta m$  の線形性に着目すれば、次のような  $\Lambda$  と  $V$  の更新方法を考えることができる。

$$\Lambda_{(new)} = -\Delta \Lambda \frac{m_{(old)} - M}{\Delta m} \quad (51)$$

$$V_{(new)} = V_{(old)} \frac{\Lambda_{(new)} - \Lambda_{(old)}}{\Delta \Lambda} \quad (52)$$

## 5 解析例

曲がり管と孤立物体が置かれた流路の2次元定常 Stokes 流れ場問題に対する解析例を紹介する。

5.1 曲がり管 初期領域を図2に示す。流体は図中左側境界  $\Gamma_0$  から Poiseuille 流れの流速分布で流入して、右下側境界  $\Gamma_1$  から3.1節で示した自然境界条件の下で流出する流れ場を仮定した。設計境界  $\Gamma_{design}$  は図中境界 A-B である。領域の大きさは初期領域の大きさに制限した。

流れ場の流速分布と圧力分布は有限要素法によって解析した。使用した要素は流速に対しては二次、圧力に対しては一次の形状関数をもつ Hood-Taylor 型の三角形要素<sup>(14)</sup>である。領域変動解析では定ひずみ三角形要素を用いた。

曲がり管の解析結果を図3, 4, 5に示す。図3から収束領域では散逸エネルギー密度分布が流路内側の  $\Gamma_{design}$

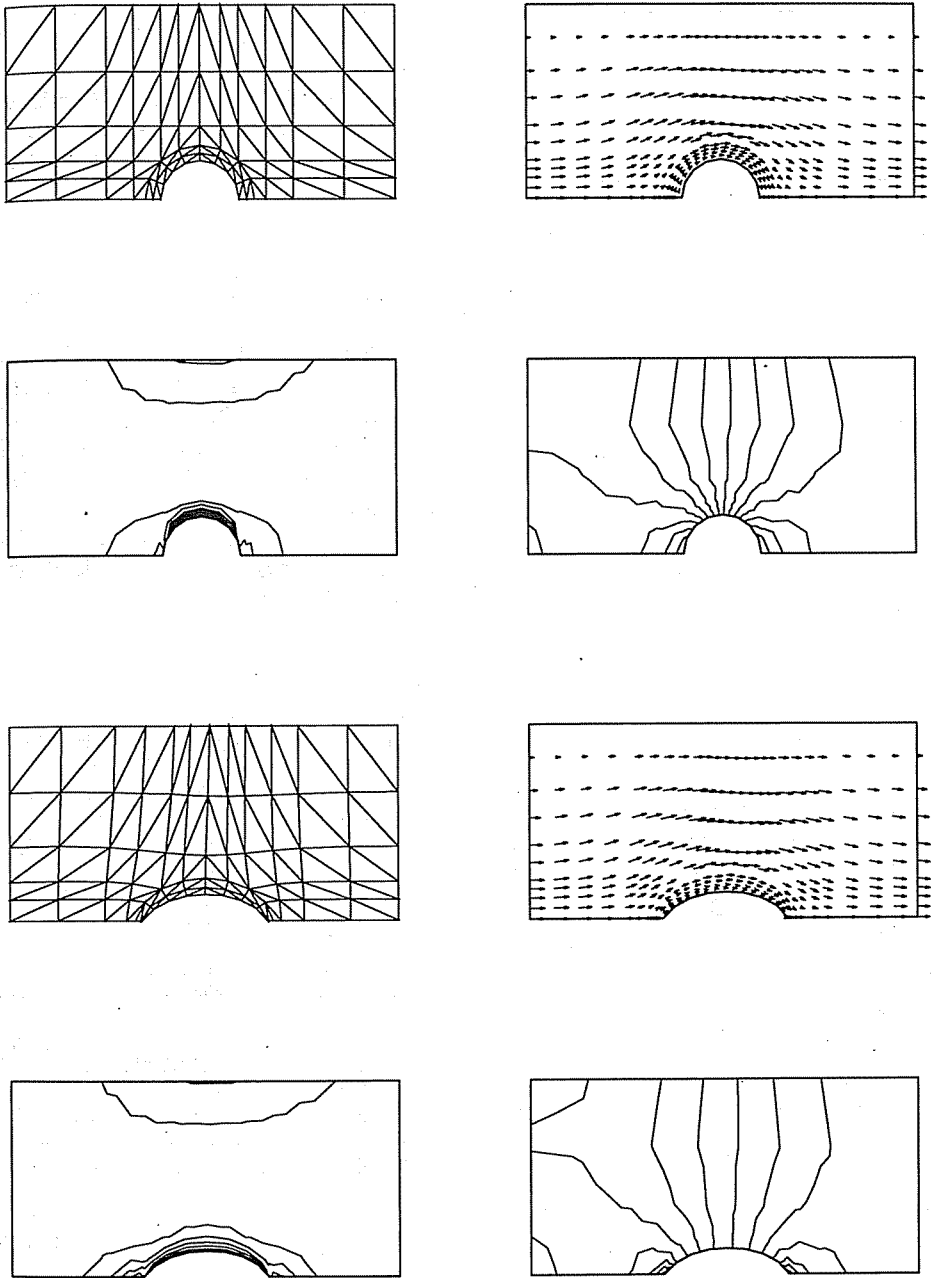


図7 二次元流路内孤立物体の解析結果：初期領域(上側)と収束領域(下側)，有限要素分割(左上)，流速分布(右上)，散逸エネルギー密度分布(左下)，圧力分布(右下)

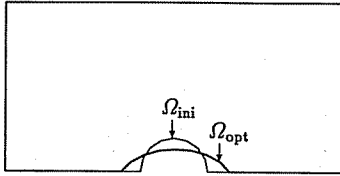


図8 二次元流路内孤立物体の解析結果：形状比較

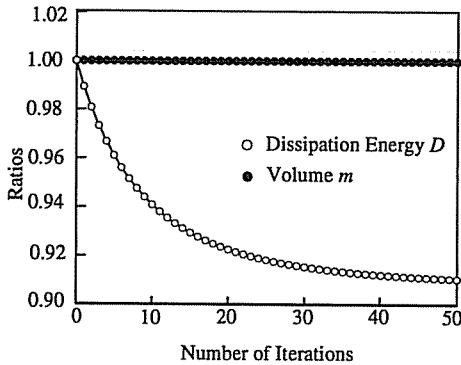


図9 二次元流路内孤立物体の解析結果：収束履歴

で均一化している様子が観察される。図4の詳細な形状比較によって、曲がり部が拡張し、その前後で収縮している様子が分かる。収束履歴を示す図5からは領域の大きさ  $m$  が一定の下で散逸エネルギー  $D$  が単調に減少して収束している様子を確認することができる。その結果、収束領域では散逸エネルギーで約2%の改善が見られた。

**5.2 孤立物体 初期領域**を図6に示す。ここでも流体は図中左側境界  $\Gamma_0$  から Poiseuille 流れの流速分布で流入して、右側境界  $\Gamma_1$  から3.1節で示した自然境界条件の下で流出する流れ場を仮定した。対称性を考慮して、図中上半分について解析を行った。設計境界  $\Gamma_{\text{design}}$  は境界 C-D-E として、境界 B-C および E-F では滑り拘束を仮定した。ここでも領域の大きさは初期領域の大きさに制限した。使用した要素は曲がり管の問題と同様である。

孤立物体問題の解析結果を図7, 8, 9に示す。収束領域では孤立物体表面上の散逸エネルギー密度分布が均一化し、散逸エネルギーで約9%の改善が見られた。また、そのときの孤立物体の先端、後端の開き角は約100°、縦横比は約0.44であった。

この結果を佐野ら<sup>(7)</sup>の結果と比較してみよう。佐野らの解析では先端での開き角は約80°、縦横比は約0.42

であった。本解析の流れ場領域が円直径  $d$  に対して  $5d \times 5d$  であったことの違いを考慮すると、ほぼ同様な形状が得られたことになる。

さらに、別所ら<sup>(9)</sup>による渦度の絶対値一定条件から得られた厳密解では先端での開き角は約103°であった。本解析結果はこの結果とほぼ一致した結果になっている。

## 6 まとめ

本論文では、変動拘束された境界を含む楕円型境界値問題における領域最適化問題の解法として提案されている方法を粘性流体定常流れ場領域の散逸エネルギー最小化問題に適用した。形状勾配関数を直接利用した数値計画法による従来の方法と比較して、形状拘束された自然境界を含んだ問題に対しても容易に適用可能である。領域変動解析では有限要素法や境界要素法などを利用できる点で実用的である。

提示した方法の有効性は曲がり管と孤立物体が置かれた流路の2次元定常 Stokes 流れ場問題に対する解析例によって示した。

## 文 献

- (1) 畔上秀幸：領域最適化問題の一解法，日本機械学会論文集，A編，60巻，574号，(1994)，165.
- (2) Pironneau, O.: On Optimum Profiles in Stokes Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 59, Part 1 (1973), 117.
- (3) Pironneau, O.: On Optimum Design in Fluid Mechanics, *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, Part 1 (1974), 97.
- (4) Pironneau, O.: *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, (1984), Springer-Verlag.
- (5) Pironneau, O.: *Shape Optimization and Free Boundaries*, edited by Delfour, M. C., (1992), Kluwer Academic Publishers, 211.
- (6) Bourot, J.-M.: On the numerical computation of the optimum profile in Stokes Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 65, Part 3 (1975), 513.
- (7) 佐野学, 酒井浩：Stokes 流中における最小抗力物体形状の数値的決定（二次元有限領域で断面積一定の場合），日本航空宇宙学会誌，30巻，339号（1982），207.
- (8) 別所正利, 姫野洋司：2次元 Stokes 流れにおける最適形状について，関西造船協会誌，No.193 (1985)，115.
- (9) 別所正利, 姫野洋司：軸対称 Stokes 流れにおける最適形状について，関西造船協会誌，No.196 (1985)，127.
- (10) 畔上秀幸, 吳志強：線形弾性問題における領域最適化解析（力法によるアプローチ），日本機械学会論文集，投稿中（No.93-1798）.
- (11) Zolésio, J. P., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1089.
- (12) Zolésio, J. P., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1152.
- (13) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag.
- (14) 菊地文雄：有限要素近似と数学的理論，数理学，No. 236 (1983)，7.