

ポテンシャル流れ場の領域最適化解析*

片峯英次*¹, 畔上秀幸*²

Domain Optimization Analysis of Potential Flow Field

Eiji KATAMINE and Hideyuki AZEGAMI

We present a numerical analysis method for optimization problems of domains in which incompressible potential flow problems are defined. Our idea is to apply the traction method that was proposed as a solution to the domain optimization problems in which elliptic boundary value problems are defined. The traction method is implemented to analyze the speed field, which represents the domain variation, with regard to the deformation field of the linear elastic continuum formed in the objective domain applying the force in proportion to the shape gradient function. In the previous paper, we applied the numerical analysis method based on the traction method to the viscous flow problems in which we chose the total dissipation energy for the objective functional. In the case of potential flow problems, we select the velocity square error norm that is defined to a prescribed velocity in an indicated sub region of the design region, as the objective functional. Using the Lagrange multiplier method we obtain the shape gradient function for these problems. For the numerical analyses we employ the finite-element method. The successful results to two-dimensional problems of a straight channel and a nozzle show the validity of the presented method.

Key Words: Optimum Design, Computer-Aided Design, Numerical Analysis, Computational Mechanics, Computational Fluid Dynamics, Finite-Element Method, Domain Optimization, Potential Flow, Inverse Problem, Traction Method

1 はじめに

著者ら⁽¹⁾は、前報において粘性流れ場の領域最適化問題に対する一つの数値解析法を提案し、ストークス流れの解析例を通してその有効性を確認した。その場合の最適化目標は、流れ場領域全体での散逸エネルギーを最小化することであった。また、そのときに用いた最適化手法は、領域最適化手法の一つとして著者の一人⁽²⁾⁽³⁾によって提案された方法であった。

本研究の目的は、ポテンシャル流れ場の領域最適化問題に対して、方法の適用を試みることである。ポテンシャル流れ場の場合、粘性によって散逸するエネルギーが存在しないことから、粘性流れ場と同一の目的汎関数を用いることは意味を成さない。そこで本論文では、流れ場領域内に流速を規定する領域を設けて、その領域内での流速二乗誤差を最小化する問題を扱うことにする。この問題は流速を規定した逆問題の一つになっている。

ポテンシャル流れ場の領域最適化に関する研究を振り返ると、Angrand⁽⁴⁾とPironneau⁽⁵⁾⁽⁶⁾の研究に注目する必要がある。彼らは、流速規定領域内での流速二

乗誤差を目的汎関数にした領域最適化問題に対して、領域変動に対する厳密な分布系の感度、すなわち形状勾配関数を理論的に導出している。しかし、彼らが提案した数値解析法は、その形状勾配関数を直接用いずに、有限要素モデルの節点自由度を基にした離散系の最適化問題から導出される感度ベクトルを用いる方法であった。この感度ベクトルを用いれば、数値計画法を用いた最適化プログラムを利用して最適化過程の計算を行うことが可能である⁽⁶⁾。しかし、この数値解析法では感度ベクトルの計算と最適化過程の計算を必要とする点でこの数値解析法を実行することは必ずしも容易ではない。また、彼らは、一次の形状関数を仮定した有限要素を用いた場合についてだけ、感度ベクトルの計算法を示しているが、高次要素を用いる場合は再度その計算法を導出する必要がある。

一方、方法は、形状勾配関数を直接用いた分布系の勾配法によって導出される領域変動の支配方程式を、線形弾性問題の境界値問題に置き換えて解く方法として提案されている。したがって、この方法は形状勾配関数が理論的に導出される流速二乗誤差最小化問題に対しても適用可能である。この方法では、形状勾配関数を評価して、領域変動の支配方程式を解くことだけを提示しているために、数値解析法は任意に選択できることになる。便利さを考慮して、流れ場解析には差

* 原稿受付 平成6年6月3日。

¹ 正員、岐阜工業高等専門学校 (〒501-04 岐阜県本巣郡真正町上真桑)。² 正員、豊橋技術科学大学 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

分法や有限要素法を用い、領域変動解析には有限要素法や境界要素法を用いることが考えられる。この場合、当然要素の選択にも任意性がある。汎用の有限要素法解析プログラムなどを利用すれば、より実用的な解析も可能となる。

本論文では、まず流速二乗誤差最小化問題に対する形状勾配関数が導出されるまでを紹介して、その後で方法を簡潔に示すことにする。提案する方法の妥当性は直管とノズルの2次元問題に対する解析例を通して確認する。

2 速度法

領域最適化問題の定式化に先立って、速度法による領域変動の表現方法を簡単にまとめておく⁽²⁾⁽⁷⁾。

領域変動は初期領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ を定義域とした1対1写像 $T_s(X)$, $X \in \Omega$ を用いて表現することができる。 s は変動の履歴を表すことにする。このとき、領域 $\theta \subset \Omega$ における変動拘束を仮定すると、領域の微小変動は次のように表すことができる。

$$T_{s+\Delta s}(X) = T_s(X) + \Delta s V + O(|\Delta s|) \quad (1)$$

ただし、 $\Delta s O(|\Delta s|) \rightarrow 0$ ($\Delta s \rightarrow 0$) の関係を仮定する。ここで、速度場 V は、 $T_s(X)$ の Euler 導関数を与えており、次のような連続関数として定義することができる。

$$V \in C_\theta = \{V \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid V = \mathbf{0} \text{ in } \theta\} \quad (2)$$

また、汎関数の導関数は次のように得られる。汎関数 J が分布関数 ϕ_s の領域積分

$$J = \int_{\Omega_s} \phi_s dx \quad (3)$$

で与えられている場合、導関数 j は式(1)の関係をを用いて次式で与えられる。

$$j = \int_{\Omega_s} \phi'_s dx + \int_{\Gamma_s} \phi_s v_n d\Gamma \quad (4)$$

ただし、 $v_n = n_i V_i$ を表している。 n は外向単位法線ベクトルを表す。また、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約を使用する。

3 流速二乗誤差最小化問題

ポテンシャル流れ場領域内の指定された部分領域において規定された流速との二乗誤差を最小化問題を定式化する。その後で、Lagrange 乗数法を用いることによって最適性規準を導出する。形状勾配関数は最適性規準の結果を用いて定義することができる。

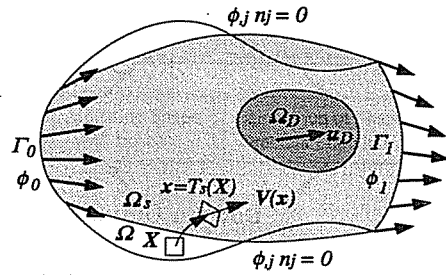


図1 流速規定問題

3.1 定式化 領域 Ω の内部に、規定流速分布 u_D が与えられている領域 $\Omega_D \subset \Omega$ が存在するポテンシャル流れ場の境界値問題と領域変動問題を図1のように定義する。図中、非圧縮性渦無し理想流体が境界 Γ_0 から流入して、境界 Γ_1 から流出するように、それぞれの境界において速度ポテンシャル ϕ_0 と ϕ_1 が規定されている。

この流れ場領域 Ω は変動して Ω_s になると仮定する。ただし、簡単のために、領域変動を拘束する領域 θ に領域 Ω_D と境界 Γ_0 , Γ_1 が含まれると仮定する。したがって、設計境界 Γ_{design} は境界 Γ から変動拘束領域 θ を除いた境界で与えられる。このとき、簡単のために、物体力を無視すると、流速二乗誤差最小化問題は次のように定式化される。

▷ 問題: 領域 Ω_D と既定流速 $u_D \in U_D$ が与えられているとき、式(2)において $\theta \supseteq \Omega_D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ を仮定した領域変動に対して、

$$\text{流速二乗誤差 } (\nabla \phi - u_D, \nabla \phi - u_D)_{\Omega_D} \quad (5)$$

が最小となる領域 Ω_s を求めよ。ただし、ポテンシャル流れ場の支配方程式

$$(\nabla \phi, \nabla w)_{\Omega_s} = 0 \quad \phi \in \Phi \quad \forall w \in W \quad (6)$$

は満たしていなければならない。◁

ここで、速度ベクトル u_D 、速度ポテンシャル ϕ 、随伴速度ポテンシャル w はそれぞれ次の関数空間とする。

$$U_D = H^0(\Omega_D; \mathbb{R}^n) \quad (7)$$

$$\Phi = \{\phi \in H^1(\Omega_s; \mathbb{R}) \mid \phi = \phi_0 \text{ on } \Gamma_0, \phi = \phi_1 \text{ on } \Gamma_1, \phi_j n_j = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_1\} \quad (8)$$

$$W = \{w \in H^1(\Omega_s; \mathbb{R}) \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_0 \cup \Gamma_1\} \quad (9)$$

なお、本論文では次のような記述法を用いることにする。領域 Ω で定義された分布ベクトル関数 u, v の内積 $(u, v)_\Omega$ を次式で定義する。

$$(u, v)_\Omega = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad (10)$$

また、テンソル表示では偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。 $H^m(\cdot; \cdot)$ は Sobolev 関数空間を表す。

3.2 最適性規準 この問題は Lagrange 乗数法によって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる。この場合の Lagrange 関数 $L(\phi, w, \Omega_s)$ は次式で与えられる。

$$L = (\nabla\phi - u_D, \nabla\phi - u_D)_{\Omega_D} - (\nabla\phi, \nabla w)_{\Omega_s} \quad (11)$$

境界変動に対する L の導関数 \dot{L} は、式 (4) を用いて、次のように得られる。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -(\nabla\phi, \nabla w')_{\Omega_s} \\ & + \{2(\nabla\phi' - u_D, \nabla\phi - u_D)_{\Omega_D} - (\nabla\phi', \nabla w)_{\Omega_s}\} \\ & + \int_{\Gamma_D} (\phi_j - u_{Dj})(\phi_j - u_{Dj})v_n d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_s} \phi_j w_j v_n d\Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、領域 Ω_D では $V = 0$ となることを考慮して、Lagrange 関数 L が停留するための必要条件は、 $\dot{L} = 0$ と置くことにより次のように得られる。

$$(\nabla\phi, \nabla w')_{\Omega_s} = 0 \quad \forall w' \in W \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 2(\nabla\phi' - u_D, \nabla\phi - u_D)_{\Omega_D} &= (\nabla\phi', \nabla w)_{\Omega_s} \\ \nabla\phi' &\in \Phi \end{aligned} \quad (14)$$

$$\int_{\Gamma_s} \phi_j w_j v_n d\Gamma = 0 \quad \forall V \in C_\theta \quad (15)$$

式 (13) はポテンシャル ϕ に対する支配方程式、式 (14) は随伴速度ポテンシャル w に対する随伴方程式を表している。これらの関係を用いれば、式 (13) より ϕ を解き、式 (14) から w を解くことができる。これらの結果を用いれば、目的関数 L の導関数 \dot{L} は次のようになる。

$$\dot{L} = l_G(V) \quad \forall V \in C_\theta \quad (16)$$

ここで、 $l_G(V)$ は次式で表される。

$$l_G(V) = \int_{\Gamma_{\text{design}}} G \cdot V d\Gamma \quad (17)$$

$$G = \phi_j w_j n \quad (18)$$

このベクトル分布関数 G は形状勾配関数と呼ばれる。

4 手法

手法は速度場 V を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている⁽²⁾⁽³⁾。

$$\begin{aligned} a(V, w) &= -l_G(w) \\ V &\in C_\theta \quad \forall w \in C_\theta \end{aligned} \quad (19)$$

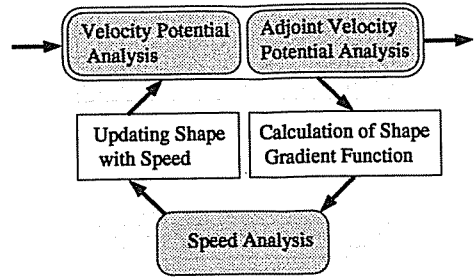


図2 解析手順

ただし、 $a(V, w)$ は線形弾性体のひずみエネルギーを与える双一次形式で、分布ベクトル関数 u, v に対し次式で定義される。

$$a(u, v) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad (20)$$

C_{ijkl} は正定値性を有する剛性テンソルである。式 (19) は、速度場 V が負の形状勾配関数 $-G$ を外力として作用させたときの変位場として解析されることを示している。

本研究では、簡単のために、剛性テンソルを次式で与えることにする。

$$C_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (21)$$

このとき双一次形式 $a(V, w)$ は式 (6) で使われた内積を用いて $(V, w)_{\Omega_s}$ で与えられることになる。 δ_{ij} は Kronecker デルタである。

本研究で用いた解析手順を図2に示す。式 (13) に基づく速度ポテンシャル場 ϕ の解析と、式 (14) に基づく随伴速度ポテンシャル場 w の解析、式 (19) に基づく速度場の解析のすべてにおいて有限要素法を用いたプログラムを作成した。

5 解析例

提示した方法の妥当性を確認するために、直管とノズルの二次元問題に対する数値解析を行った。なお、ノ

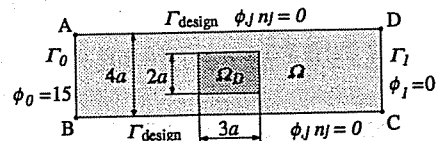


図3 二次元直管問題

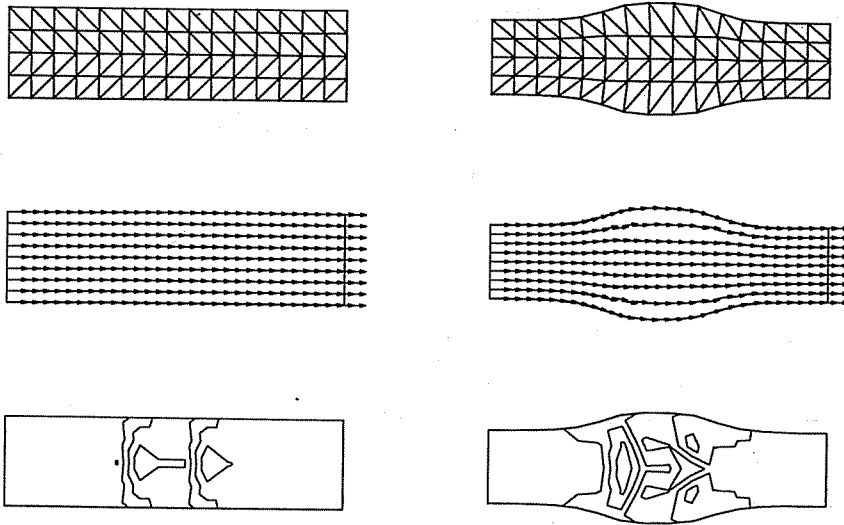


図4 二次元直管の解析結果：初期領域（左側）と収束領域（右側），有限要素分割（上），流速分布（中），形状勾配関数分布（下）

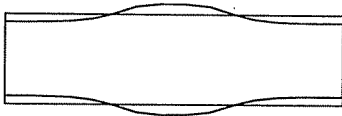


図5 二次元直管の解析結果：形状比較

ズルの問題は、Angrand⁽⁴⁾ が 1 章で紹介した方法で数値解を得ている問題と同一にした。

5.1 直管 問題設定を図3に示す。流体は図中左側境界 Γ_0 から流入して右側境界 Γ_1 から流出する。速度ポテンシャルは Γ_0 において $\phi_0 = 15$ 、 Γ_1 において $\phi_1 = 0$ と仮定した。流速規定領域 Ω_D は図のように領域 Ω の中央に配置し、規定流速 u_D は初期形状のときの一樣流速の 80% で一定と仮定した。速度場解析では、設計境界 Γ_{design} を境界 A-D, B-C として、境界 Γ_0 と Γ_1 を滑り拘束、領域 Ω_D を完全拘束した。

速度ポテンシャル解析および随伴速度ポテンシャル解析では、速度ポテンシャルおよび随伴速度ポテンシャルに対して二次の形状関数をもつ三角形要素を用いた。

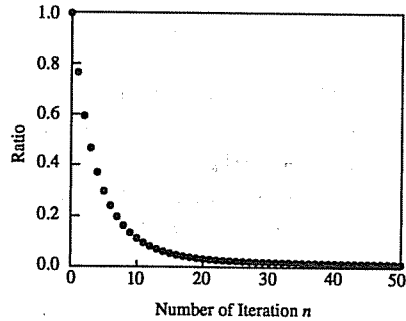


図6 二次元直管の解析結果：目的汎関数の収束履歴

速度場解析では、変位に対して一次の形状関数をもつ三角形要素を用いた。

この問題に対する本手法による解析結果を図4, 5, 6に示す。

図4は、有限要素分割、流速分布、形状勾配関数分布について、初期形状と最適形状の結果を比較している。なお、形状勾配関数の分布は設計境界における平均値によって無次元化されている。最適形状では、形

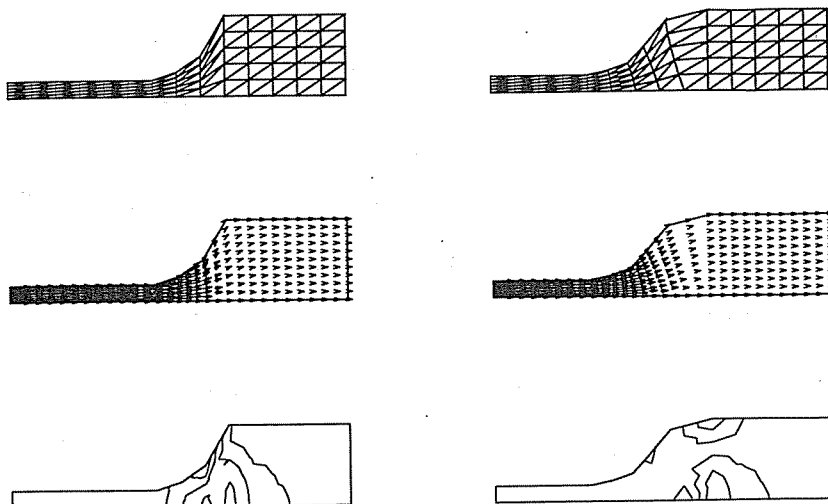


図 8 二次元ノズルの解析結果：初期領域 (左側) と収束領域 (右側), 有限要素分割 (上), 流速分布 (中), 形状勾配関数分布 (下)

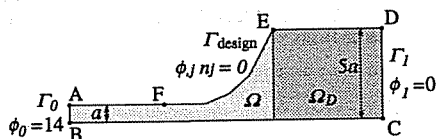


図 7 二次元ノズル問題

形状勾配関数の分布が設計境界で緩和されている様子が観察される。

図 5 は両者の形状について詳細に比較している。最適化後では、流速規定領域での条件を満たすために中央部が膨らみ、両端側で収縮している様子がわかる。

図 6 は形状修正繰り返し数に対する目的汎関数の履歴を示している。この結果、最適化後では目的汎関数の値は目的値のゼロに収束している様子がわかる。

これらの結果から本論文で提示した方法の妥当性を確認することができた。

5.2 ノズル さらに、Angrand⁽⁴⁾ が数値解を得ているノズル問題に対して提示した方法を適用した。問題設定を図 7 に示す。流速規定領域 Ω_D は、図のよう



図 9 二次元ノズルの解析結果：形状比較

に、流れ場出口に設定した。規定流速 u_D は初期形状のときの Ω_D 内の平均流速値の 120% で一定と仮定した。速度場解析では、設計境界 Γ_{design} は流路拡大部境界 E-F として、境界 A-B, C-D, F-A は滑り拘束、境界 B-C および領域 Ω_D は完全拘束した。有限要素には、直管の場合と同様の速度ポテンシャルおよび随伴速度ポテンシャルに対して二次の形状関数をもつ三角形要素を用いた場合と Angrand⁽⁴⁾ と同一の一次の形状関数をもつ三角形要素を用いた場合の解析を行った。速度場解析では、変位に対して一次の形状関数をもつ三角形要素を用いた。

二次要素を用いた場合の解析結果を、直管の問題と同様に図 8, 9, 10 に示す。最適形状では、形状勾配関数の分布が設計境界付近で均一化されている様子が観

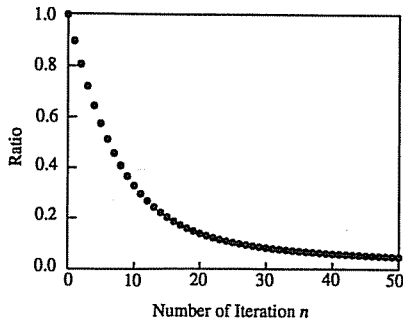


図 10 二次元ノズルの解析結果：目的汎関数の収束履歴

察される。また、図 10 の結果から、目的汎関数は単調に減少収束している様子がわかる。収束値がゼロでないのは無理な問題設定によるものと考えられる。

また、一次要素を用いた場合の結果は Angrand⁽⁴⁾ の解析結果とはほぼ一致した。

これらの結果からも提示した方法の妥当性を確認することができた。

6 まとめ

本論文では、ポテンシャル流れ場領域内の指定された一部領域での流速を規定した場合の流れ場領域最適化

問題を取り上げて、形状勾配関数を導出し、それを用いた法による解法を示した。この解法の有効性を二次元の直管とノズル問題に適用した解析結果を通して確認した。

なお、本研究は、文部省科学研究費の援助を受けて行われた。また数値解析では豊橋技術科学大学エネルギー工学課程 4 年生・山口正太郎君の協力を受けた。記して謝意を表する。

文 献

- (1) 片峯英次, 畔上秀幸: 粘性流れ場の領域最適化問題の解法 (法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, 投稿中 (No. 94-0443), (掲載予定).
- (2) 畔上秀幸: 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, 574 号 (1994), 165.
- (3) 畔上秀幸, 吳志強: 線形弾性問題における領域最適化 (法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, 投稿中 (No.93-1798), (掲載予定).
- (4) Angrand, F.: Optimum Design for Potential Flows, *Int. J. for Numerical Method in Fluids*, Vol. 3 (1983), 265-282.
- (5) Pironneau, O.: *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, (1984), Springer-Verlag.
- (6) Pironneau, O.: *Optimal Shape Design with Applications to Aerodynamics, Shape Optimization and Free Boundaries*, Edited by Michel C. Delfour, NATO ASI Series, Series C, Vol.380, (1992), Kluwer Academic Publishers, 211-251.
- (7) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag.