

粘性流れ場の領域最適化解析\*  
(対流項を考慮した場合)片 峯 英 次\*<sup>1</sup>, 畔 上 秀 幸\*<sup>2</sup>Domain Optimization Analysis of Viscous Flow Field  
(In the Case of Considering Convective Term)

Eiji KATAMINE and Hideyuki AZEGAMI

We present a numerical analysis method for optimization problems of domains in which incompressible steady-state viscous flow field problems are defined. Reshaping was accomplished by the traction method that was proposed as a solution to domain optimization problems in which elliptic boundary value problems were defined. In the previous paper, to total dissipation energy minimization problems we applied the traction method to the Stokes flow field problems ignoring the convective terms. The present paper describes an application of the traction method to the viscous flow field problems including convective terms. For the numerical analyses we employ the finite-element method. The successful results to two-dimensional low-Reynolds-number problems of a bending channel and a channel in which an isolated body exists show the validity of the present method.

**Key Words:** Optimum Design, Numerical Analysis, Computational Fluid Dynamics, Finite-Element Method, Domain Optimization, Speed Method, Traction Method

## 1 はじめに

著者ら<sup>(1)</sup>は、前報において、粘性流れ場の領域形状を設計対象にした散逸エネルギー最小化問題に対して、力法 (traction method) を適用した一つの数値解析法を提案し、対流項を無視したストークス流れの場合の解析例を通してその妥当性を確認した。力法は著者の一人<sup>(2)</sup>によって提案された実用的な領域最適化解析法である。

本研究の目的は、対流項を含んだ粘性流れ場の散逸エネルギー最小化問題に対する解析方法を示し、解析例を通してその妥当性を確認することである。

対流項を考慮した粘性流れ場の領域最適化理論は、Pironneau<sup>(3)-(5)</sup>によってまとめられている。彼は、一様流中に置かれた孤立物体の抵抗動力最小化問題に対して、領域変動に対する感度、すなわち形状勾配関数、を理論的に導出した。静止した十分広い粘性流体中を移動する孤立物体の抵抗動力最小化問題は、静止した孤立物体周りの一様流れ場を設計対象にした散逸エネルギー最小化問題に置き換えることができる。その後、Glowinski ら<sup>(6)</sup>は、孤立物体周り近傍の境界層方程式

を利用して、差分法によって形状勾配関数を解析する方法を示した。この解析法は、高 Reynolds 数の十分広い流れ場に置かれた孤立物体の形状を決定する特殊な問題に対しては適用可能であるが、外側一様流が存在しない一般的な問題に対しては適用不可能である。

また、田辺ら<sup>(7)</sup>は孤立物体の抵抗力最小化問題に対して数値解析を試みている。彼らは、物体形状をべき関数によって近似して、その未定係数を設計変数にした最適化問題に対して非線形数値計画法を適用した。感度は再解析に基く有限差分によって評価された。しかし、この数値解析法では、有限差分によって評価される感度についての精度の問題と併せて、設計変数の個数を増加させることは、設計空間の次元を増加させることに繋がることから、複雑な問題に対しては必ずしも有利な方法にはなっていない。

これまで行われてきた数値解析法を振り返ると、適用対象とされた問題はいずれも一様流中に置かれた孤立物体の問題に限られていた。この問題はすべての境界で流速が固定され、さらに境界変動が拘束されていないという特徴をもっていた。

一方、著者ら<sup>(1)</sup>の提案した力法を用いた粘性流れ場の領域最適化手法は、形状拘束された自然境界を含んだ一般的な流れ場に対して適用可能である。この方法では、まず Zolésio<sup>(8)-(10)</sup>がまとめた速度法 (speed method)

\* 原稿受付 平成6年7月18日。

<sup>1</sup> 正員、岐阜工業高等専門学校 (〒501-04 岐阜県本巣郡真正町上真桑)。<sup>2</sup> 正員、豊橋技術科学大学 (〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1)。

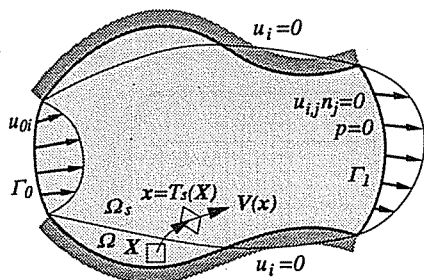


図1 流れ場の領域変動問題

によって、領域変動を表す速度場に対する形状勾配関数を理論的に導出する。方法はこの形状勾配関数を用いた勾配法によって導出される速度場の支配方程式を線形弾性問題に対する変位場の支配方程式に置き換えて解く方法である。この方法では、形状勾配関数を評価して、速度場の支配方程式を解くことだけを提示しているために、数値解析法は任意に選択できることになる。便利さを考慮して、流れ場解析には差分法や有限要素法を用い、速度場解析には有限要素法や境界要素法を用いることが考えられる。

本論文では、最初に、散逸エネルギー最小化問題に対する前報の結果と方法を簡単にまとめる。その後で、有限要素法を用いた数値解析法を示す。最後に、流れ場が比較的安定な低 Reynolds 数の 2 次元定常流れ場問題に対する解析例を通して、提示する数値解析法の妥当性を確認する。

## 2 散逸エネルギー最小化問題

粘性流れ場領域に対する散逸エネルギー最小化問題について簡単にまとめておこう<sup>(1)</sup>。速度法<sup>(2)(10)</sup>によって領域変動問題を定式化した後、Lagrange 乗数法によって求められる最適性規準を用いて形状勾配関数を導出する。

2.1 速度法 粘性流れ場の境界値問題とその領域変動問題を図 1 のように定義する。ただし、簡単のために定常非圧縮性 Newton 粘性流体を仮定する。

粘性流体は領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , に境界  $\Gamma_0$  から既定流速  $u_0$  で流入し、境界  $\Gamma_1$  から流出すると仮定する。有限要素流れ場解析を行った場合、自然境界条件の与え方によって解がいくぶん異なることは知られている<sup>(11)(12)</sup>が、本研究では最適化問題定式化の簡単化のために法線方向流速勾配  $u_{i,j}n_j = 0$  と圧力  $p = 0$  を同時に満たす自然境界条件を仮定する。

領域変動は初期領域  $\Omega$  を定義域とした履歴  $s$  に対する 1 対 1 写像  $T_s(X)$ ,  $X \in \Omega$ , を用いて表現することができる。このとき、領域  $\theta \subset \Omega$  において変動を拘束することを仮定すると、領域の微小変動は次のように表すことができる。

$$T_{s+\Delta s}(X) = T_s(X) + \Delta s V + O(|\Delta s|) \quad (1)$$

ここで、速度場  $V$  は、 $T_s(X)$  の Euler 導関数を与えており、次のような連続関数として定義することができる。

$$V \in C_\theta = \{V \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid V = \mathbf{0} \text{ in } \theta\} \quad (2)$$

また、汎関数の  $s$  に対する導関数は次のように得られる。汎関数  $J$  が分布関数  $\phi_s$  の領域積分

$$J = \int_{\Omega_s} \phi_s dx \quad (3)$$

で与えられている場合、 $s$  に対する導関数  $\dot{J}$  は式 (1) の関係に基づく次式で与えられる。

$$\dot{J} = \int_{\Omega_s} \dot{\phi}_s dx + \int_{\Gamma_s} \phi_s v_n d\Gamma \quad (4)$$

ただし、 $v_n = n_i V_i$  を表している。ここで、 $n$  は外向単位法線ベクトルを表す。なお、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約を使用する。また、 $C^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$  は連続関数空間を表す。 $\mathbb{R}$  は実数を表す。

2.2 定式化 速度法を用いて、図 1 に示す粘性流れ場の散逸エネルギー最小化問題を定式化しよう。

領域変動を拘束する領域  $\theta$  は、簡単のために、 $\Gamma_0$  と  $\Gamma_1$  を含めた境界  $\theta \supseteq \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  で与えられると仮定する。したがって、設計境界  $\Gamma_{\text{design}}$  は領域  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  から変動拘束境界  $\theta$  を除いた流速拘束境界の部分境界で与えられる。

このように流れ場と領域変動を定義し、流れ場領域の大きさ

$$m = \int_{\Omega_s} dx \quad (5)$$

に対して制約を設けた場合、散逸エネルギー最小化問題は物体力を無視すると次のように定式化される。

▷ 問題：既定流速  $u_0 \in U_0$ 、粘性係数  $\mu \in \mathbb{R}_+$ 、密度  $\rho \in \mathbb{R}_+$  と領域の大きさに対する上限値  $M \in \mathbb{R}_+$  が与えられているとき、 $\theta \supseteq \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  を仮定した領域変動に対して、

$$\text{散逸エネルギー } D(\nabla u, (\nabla u)^T) \quad (6)$$

が最小となる領域  $\Omega_s$  を求めよ。ただし、Navier-Stokes 方程式と連続方程式の変分形式

$$\begin{aligned}
 b(\nabla u u, w) + a(\nabla u, \nabla w) - \langle p, w_{i,i} \rangle &= 0 \\
 u \in U \quad \forall w \in W \quad (7) \\
 \langle q, u_{i,i} \rangle &= 0 \quad \forall q \in Q \quad (8)
 \end{aligned}$$

と領域の大きさ制約

$$m - M = 0 \quad (9)$$

は満たしていなければならない。◁

$\mathbb{R}_+$  は正の実数を表す。対流項  $b(\nabla u u, w)$ 、粘性項  $a(\nabla u, \nabla w)$ 、圧力項  $\langle p, w_{i,i} \rangle$  は次のように定義する。

$$b(\nabla u u, w) = \int_{\Omega_s} \rho w_i u_{i,j} u_j dx \quad (10)$$

$$a(\nabla u, \nabla w) = \int_{\Omega_s} \mu u_{i,j} w_{i,j} dx \quad (11)$$

$$\langle p, w_{i,i} \rangle = \int_{\Omega_s} p w_{i,i} dx \quad (12)$$

散逸エネルギー  $D(\nabla u)$  は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 D(\nabla u, (\nabla u)^T) &= 2\mu \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} dx \\
 &= \mu \int_{\Omega_s} u_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) dx \\
 &= a(\nabla u, \nabla u) + a(\nabla u, (\nabla u)^T) \quad (13)
 \end{aligned}$$

また、流速  $u$ 、随伴流速  $w$ 、圧力  $p$  はそれぞれ次の関数空間の要素と仮定する<sup>(13)</sup>。

$$U_0 = \{u_0 \in H^1(\Gamma_0; \mathbb{R}^n)\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 U &= \{u \in H^1(\Omega_s; \mathbb{R}^n) \mid \\
 &u = u_0 \in U_0 \text{ on } \Gamma_0, u_{i,j} n_j = 0 \text{ on } \Gamma_1, \\
 &u = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_1\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$W = \{w \in H^1(\Omega_s; \mathbb{R}^n) \mid w = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_1\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 Q &= \{p \mid \langle p, q \rangle \in \mathbb{R}, q \in Q' = L^2(\Omega_s)/\mathbb{R}, \\
 &p = 0 \text{ on } \Gamma_1\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

なお、 $(\cdot) \setminus (\cdot)$  は差集合を表す。また、 $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  は Lebesgue 空間、 $H^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$  は Sobolev 空間を表す。

2.3 最適性規準 この問題に Lagrange 乗数法を適用すると、次式の最適性規準を得る<sup>(1)</sup>。

$$b(\nabla u u, w') + a(\nabla u, \nabla w') - \langle p, w'_{i,i} \rangle = 0 \quad \forall w' \in W \quad (18)$$

$$\langle q', u_{i,i} \rangle = 0 \quad \forall q' \in Q \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 b(\nabla u' u, w) + b(\nabla u u', w) + a(\nabla u', \nabla w) \\
 - 2D(\nabla u', (\nabla u)^T) - \langle q, u'_{i,i} \rangle = 0 \quad \forall u' \in U \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\langle p', w_{i,i} \rangle = 0 \quad \forall p' \in Q \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_s} \{-\rho w_i u_{i,j} u_j - \mu w_{i,j} u_{i,j} + p w_{i,i} \\
 + q u_{i,i} + \mu u_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda\} v_n d\Gamma = 0 \\
 \forall V \in C_\Theta \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$m - M = 0 \quad (23)$$

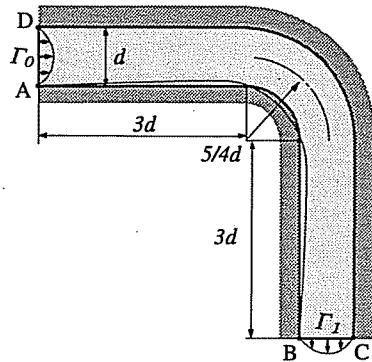


図2 二次元曲がり管

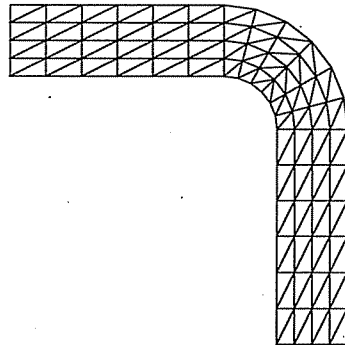


図3 二次元曲がり管の有限要素分割

ここで、式 (18) と (19) はそれぞれ Navier-Stokes 方程式 (7) と連続方程式 (8) に対応した原系の支配方程式を表している。一方、式 (20) と (21) はそれぞれ随伴流速  $w$  と随伴圧力  $q$  に対する随伴系の支配方程式を表している。また、式 (23) は式 (9) の制約条件を表している。

2.4 形状勾配関数 そこで、最適性規準の中から、式 (18) と (19) を満たす  $u$  と  $p$  を決定し、式 (20) と (21) を満たす  $w$  と  $q$  を決定し、さらに、式 (23) を満たすように  $\Lambda$  を決定することができた場合を仮定すると、Lagrange 関数  $L$  の  $s$  に対する導関数  $\dot{L}$  は次のような速度場  $V$  の一次形式で表すことができる。

$$\dot{L} = l_G(V) \quad (24)$$

$$l_G(V) = \int_{\Gamma_{\text{design}}} G \cdot V d\Gamma \quad (25)$$

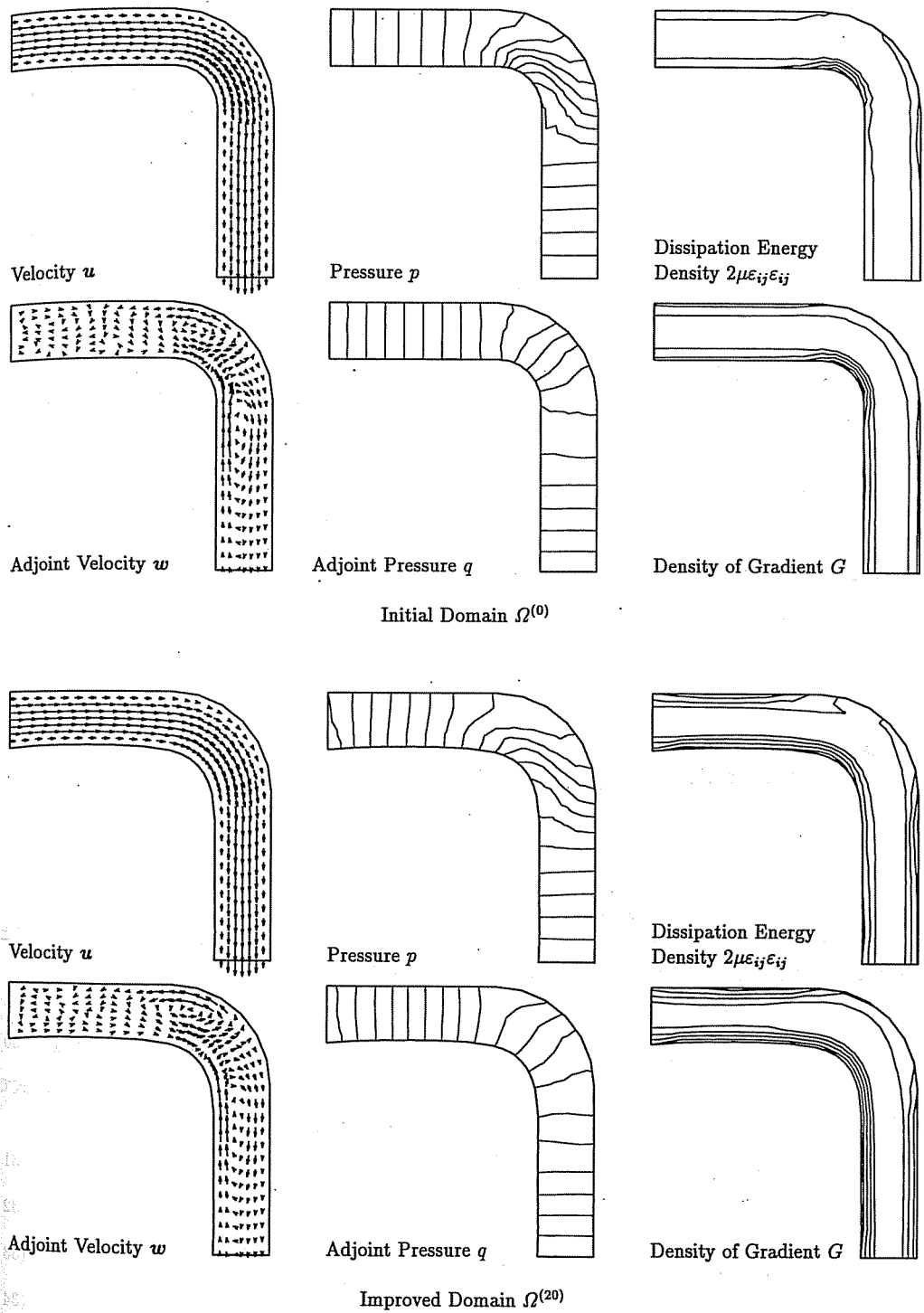


図4 二次元曲がり管の解析結果：分布関数

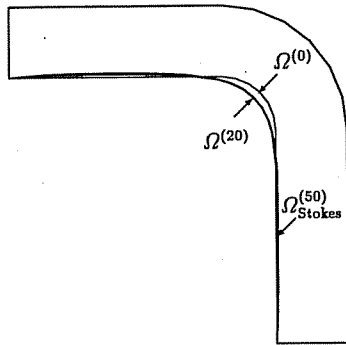


図5 二次元曲がり管の解析結果：形状比較

このとき、 $V = \mathbf{0}$  on  $\Theta \supseteq \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ,  $w = \mathbf{0}$  on  $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ ,  $w_{i,i} = u_{i,i} = 0$  in  $\Omega$  の関係を用いると、形状感度を与える形状勾配ベクトル関数  $G$  は次式で与えられる。

$$G = Gn$$

$$G = -\mu w_{i,j} u_{i,j} + \mu u_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) + A \quad (26)$$

ここで、スカラー関数  $G$  は形状勾配密度関数と呼ぶことにする。

また、散逸エネルギーが全領域の積分値によって評価されるために領域の大きさを初期領域の大きさに限定した定式化を行ってきたが、初期領域の大きさ以外の制約条件を設定することも可能である<sup>(2)</sup>。

### 3 有限要素法による数値解法

前報<sup>(1)</sup>の数値解析では、Stokes 流れの場合を扱った。Stokes 流れの場合は、対流項が省略されるために、式(26)の第一項が省略され、随伴流速  $w$  を評価する必要がなかった。本報では、対流項を考慮するために、 $w$  を評価する必要がある。そこで本章では、有限要素法を用いた  $w$  の数値解法を示すことにする。

最初に原系方程式(18)と(19)の解析法をまとめてから、 $w$  を含む随伴系方程式(20)と(21)の数値解析法を示すことにする。

**3.1 原系方程式** 有限要素法の手続きに従うと、有限要素内の流速  $u_i$  と圧力  $p$  は  $\alpha$  節点における流速  $u_{\alpha i}$  と圧力  $p_\lambda$  によって次のように記述される。

$$u_i = \bar{\Phi}_\alpha u_{\alpha i} \quad (27)$$

$$p = \Psi_\lambda p_\lambda \quad (28)$$

ここで、流速の形状関数  $\bar{\Phi}_\alpha$  は、解の安定性のために、圧力の形状関数  $\Psi_\lambda$  よりも高次の微分可能関数によって与えられる。これらの関係を式(18)と(19)に代入

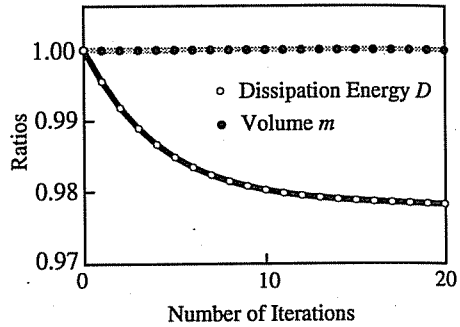


図6 二次元曲がり管の解析結果：収束履歴

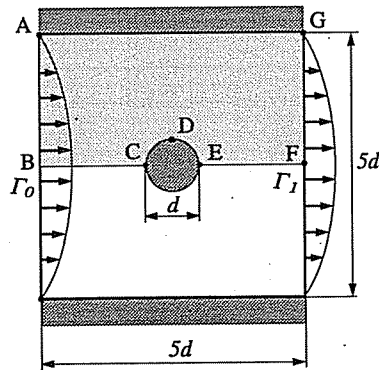


図7 二次元流路内の孤立物体

すれば、次のような原系の有限要素方程式を得ることができる。

$$L_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} + K_{\alpha i \beta j} u_{\beta j} + H_{\alpha i \lambda} p_\lambda = 0 \quad (29)$$

$$H_{\alpha i \lambda} u_{\alpha i} = \eta_\lambda \quad (30)$$

ただし、 $L_{\alpha\beta\gamma j}$ 、 $K_{\alpha i \beta j}$ 、 $H_{\alpha i \lambda}$ 、 $\eta_\lambda$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$L_{\alpha\beta\gamma j} = \int_{\Omega_s} \rho \bar{\Phi}_\alpha \bar{\Phi}_\beta \bar{\Phi}_\gamma \tau_{j,j} dx \quad (31)$$

$$K_{\alpha i \beta j} = \int_{\Omega_s} \mu \bar{\Phi}_{\alpha,k} \bar{\Phi}_{\beta,k} \delta_{ij} dx \quad (32)$$

$$H_{\alpha i \lambda} = \int_{\Omega_s} \bar{\Phi}_\alpha \Psi_{\lambda,i} dx \quad (33)$$

$$\eta_\lambda = \int_{\Gamma_0} \Psi_\lambda u_{0i} n_i d\Gamma \quad (34)$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma$  は節点指標である。また、式(29)と(30)を導く過程で、 $p \in H^1(\Omega_s; \mathbb{R})$  の仮定を設けている<sup>(13)</sup>。

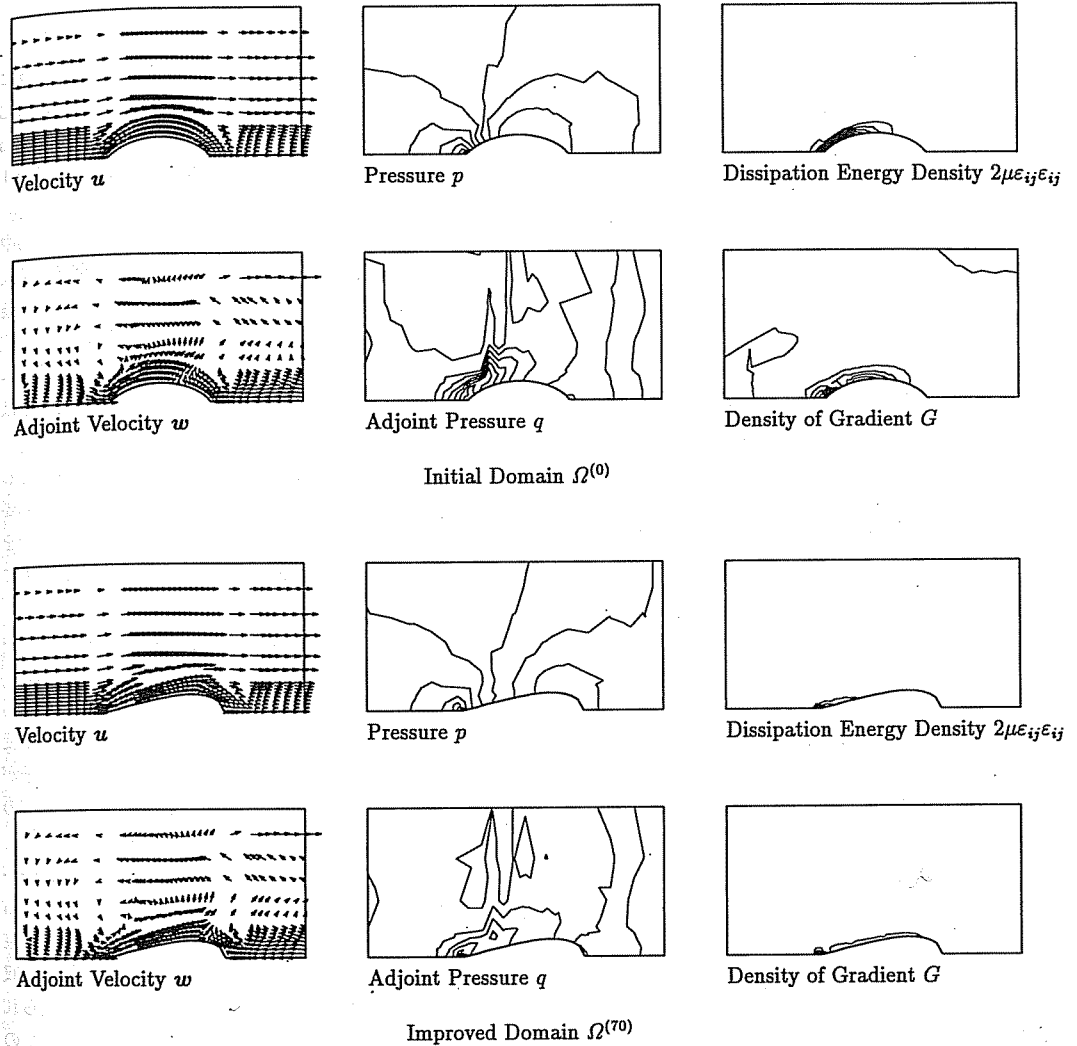


図9 二次元流路内孤立物体の解析結果：分布関数

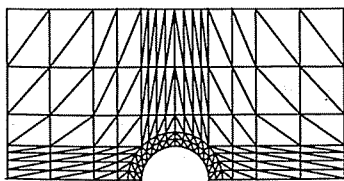


図8 二次元流路内の孤立物体の有限要素分割

全節点に対する支配方程式は、式(29)と(30)を全要素について重ね合わせることによって得られる。全節点

に対する非線形の支配方程式は、増分ごとの Newton-Raphson 法などによって解析可能である。

3.2 随伴系方程式 それに対して、随伴系方程式の有限要素方程式は次のように得ることができる。

有限要素内の随伴流速  $w_i$  と随伴圧力  $q$  は、原系方程式で用いた形状関数  $\phi_\alpha$  と  $\psi_\lambda$  を利用して、次のように記述される。

$$w_i = \phi_\alpha w_{\alpha i} \quad (35)$$

$$q = \psi_\lambda q_\lambda \quad (36)$$

これらの関係を式(20)と(21)に代入すれば、次のような随伴系の有限要素方程式を得ることができる。

$$L_{\alpha\beta\gamma j} u_{\gamma i} w_{\alpha i} + L_{\alpha\gamma\beta i} u_{\gamma i} w_{\alpha j} + K_{\alpha i \beta j} w_{\alpha i} + H_{\alpha i \lambda} q_\lambda$$

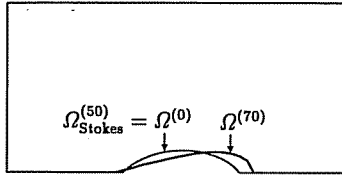


図 10 二次元流路内孤立物体の解析結果：形状比較

$$= 2K_{\alpha i \beta j} u_{\alpha i} \quad (37)$$

$$H_{\alpha i \lambda} w_{\alpha i} = 0 \quad (38)$$

全節点に対する支配方程式は、これらの式を全要素について重ね合わせることで得られる。ここで、原系の有限要素方程式が解かれていれば  $u_{\gamma i}$  は既知であり、式 (37) と (38) は線形であることが分かる。したがって、線形連立方程式の解法を用いれば解が得られることになる。

4 手法

凸性の保証された最適化問題に対して形状勾配関数  $G$  が評価されれば、方法を適用することによって、目的汎関数を最適化することが保証された速度場  $V$  を解析することが可能となる<sup>(2)</sup>。

手法は速度場  $V$  を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている。

$$a^E(V, w) = -l_G(w) \quad \forall w \in C_\theta \quad (39)$$

ただし、 $a^E(V, w)$  は線形弾性体のひずみエネルギーを与える双一次形式で、分布ベクトル関数  $u, v$  に対して次式で定義される。

$$a^E(u, v) = \int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad (40)$$

$C_{ijkl}$  は正定値性を有する剛性テンソルである。式 (39) は、速度場  $V$  が負の形状勾配関数  $-G$  を外力として作用させたときの変位場として解析されることを示している。

本研究では、簡単のために、剛性テンソルを次式で与えることにする。

$$C_{ijkl} = \mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (41)$$

この仮定は、式 (40) の双一次形式  $a^E(\cdot, \cdot)$  を式 (11) の双一次形式  $a(\cdot, \cdot)$  で代用することを意味している。

5 解析例

前章までに示した数値解析法の妥当性を確認するために、流れ場が比較的安定な低 Reynolds 数の 2 次元定常流れ場問題に本解法を適用した。本報では、Stokes 流れの場合との比較のために、前報<sup>(1)</sup>と同一の曲がり管問題と孤立物体が置かれた流路問題を解析した。

5.1 曲がり管 問題設定を図 2 に示す。流体は図中の左側境界  $\Gamma_0$  から Poiseuille 流れの流速分布で流入して、右下側境界  $\Gamma_1$  から 2.1 節で示した自然境界条件の下で流出する流れ場を仮定した。入口の平均流速は Reynolds 数が 20 となるように与えた。設計境界  $\Gamma_{design}$  は、図中の境界 A-B である。領域の大きさは初期領域の大きさに制限した。

使用した要素は、流速に対しては二次、圧力に対しては一次の形状関数をもつ Hood-Taylor 型の三角形要素<sup>(13)</sup>である。速度場解析では、定ひずみ三角形要素を用いた。使用した有限要素モデルの要素分割を図 3 に示す。要素数は 144、節点数は 333 である。

曲がり管の解析結果を図 4, 5, 6 に示す。なお、図中  $\Omega^{(k)}$  は領域変動  $k$  回後の領域を表す。また、 $\Omega_{Stokes}^{(k)}$  は前報<sup>(1)</sup>で示した Stokes 流れの場合の領域変動  $k$  回後の領域を表す。図 4 から収束領域では形状勾配密度関数分布が流路内側の  $\Gamma_{design}$  で均一化している様子が観察される。図 5 の詳細な形状比較から、曲がり部の前後で対称形状を成した Stokes 流れの解析結果<sup>(1)</sup>と比較して、曲がり部の前方でより収縮している様子が分かる。収束履歴を示す図 6 からは、領域の大きさ  $m$  が一定の下で散逸エネルギー  $D$  が単調に減少して収束している様子を確認することができる。その結果、収束領域では散逸エネルギーで約 2% の改善が見られた。また、流入境界  $\Gamma_0$  での平均圧力と流出境界  $\Gamma_1$  の圧力値から評価した圧力損失は、収束形状において約 1.6% 改善されていた。

5.2 孤立物体 問題設定を図 7 に示す。ただし、実際の解析においては、収束を早めるために、初期領域を前報<sup>(1)</sup>の方法で得た Stokes 流れの場合の収束形状に設定した。ここでも流体は図中の左側境界  $\Gamma_0$  から Poiseuille 流れの流速分布で流入して、右側境界  $\Gamma_1$  から 2.1 節で示した自然境界条件の下で流出する流れ場を仮定した。入口平均流速は、初期の円形孤立物体直径に対して Reynolds 数が 20 となるように設定した。対称性を考慮して、図中の上半分について解析を行った。設計境界  $\Gamma_{design}$  は図中の境界 C-D-E として、境界 B-C および E-F では滑り拘束を仮定した。ここでも領域の大きさは初期領域の大きさに制限した。使用した要素は曲がり管の場合と同一である。前報<sup>(1)</sup>で示

## 6 まとめ

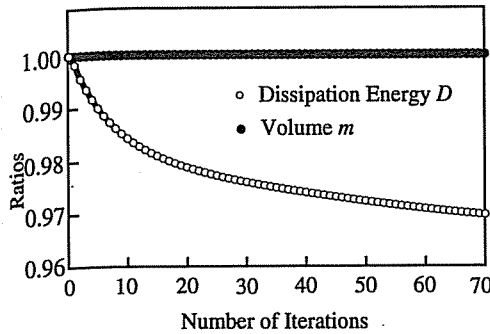


図 11 二次元流路内孤立物体の解析結果：収束履歴

した要素数 136、節点数 315 の有限要素モデルを用いて解析した結果、形状修正によるメッシュの潰れなどの問題が生じた。そこで、図 8 に示す要素数 224、節点数 507 の細かい有限要素分割を行い、要素の潰れを防止するためにメッシュのための簡単なプログラムを使用して解析を行った。

孤立物体問題の解析結果を図 9, 10, 11 に示す。図 9 から、収束領域の形状勾配密度関数分布は、先端に集中が見られるが、それを除く孤立物体表面では均一化している様子が観察される。また、圧力分布も先端部で集中が見られる。収束履歴を示す図 11 からは、領域の大きさ  $m$  が一定の下で散逸エネルギー  $D$  が単調に減少してほぼ収束している様子を確認することができる。その結果、収束領域では孤立物体表面上の散逸エネルギー密度分布が減少し、散逸エネルギーで約 3% の改善が見られた。この孤立物体問題での圧力損失履歴は、形状修正回数 16 回まで減少し約 1.5% 改善され、その後 70 回まで少しずつ悪化して最終的には約 0.3% 改善していた。

これらの結果から、本報で提示した数値解析法の妥当性を確認することができた。

本論文では、対流項を含んだ粘性流れ場の散逸エネルギー最小化問題に対して、前報<sup>(1)</sup>で提示した方法に基づく解法を、有限要素法を用いて実行する方法を示した。その数値解析法の妥当性は曲がり管と孤立物体が置かれた流路の低 Reynolds 数の 2 次元定常流れ場問題に対する解析例を通して確認した。

## 文 献

- (1) 片峯英次, 畔上秀幸: 粘性流れ場の領域最適化問題の解法(方法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, B 編, 60 巻, 579 号 (1994), (掲載決定).
- (2) 畔上秀幸: 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, 574 号 (1994), 165.
- (3) Pironneau, O.: On Optimum Design in Fluid Mechanics, *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, (1974), Part 1, 97-110.
- (4) Pironneau, O.: *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, (1984), Springer-Verlag.
- (5) Pironneau, O.: *Optimal Shape Design with Applications to Aerodynamics, Shape Optimization and Free Boundaries*, Edited by Michel C. Delfour, NATO ASI Series, Series C, Vol.380, (1992), Kluwer Academic Publishers, 211-251.
- (6) Glowinski, R., Pironneau, O.: On the numerical computation of minimum-grag profile in laminar flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 72, (1975), Part 2, 385-389.
- (7) 田辺尚紀, 姫野洋司, 馬場信弘, 上原昇: ナビエ・ストークス方程式の数値解を用いた非線形計画法による物体形状の最適化(第 1 報)-2 次元物体の粘性抵抗の最小化-, 関西造船協会誌, No.214 (1990), 27-37.
- (8) Zolésio, J. P., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1089.
- (9) Zolésio, J. P., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1152.
- (10) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag.
- (11) 江口譲, 矢川元基: ペナルティ有限要素法における圧力自然境界と応力自然境界条件の比較, 日本機械学会論文集, B 編, 51 巻, 467 号, (1985), 2338.
- (12) 志村正幸: 流入流出を伴う流れと外部流れの有限要素法に基づく数値解析-流出側の圧力境界条件に関する新しい提案-, 日本建築学会計画系論文報告集, 397 号, (1989), 1.
- (13) 菊地文雄: 有限要素近似と数学的理論, 数理学, No. 236, (1983), 7-13.