

ポテンシャル流れ場の形状同定解析*
(圧力分布規定問題と力法による解法)片峯英次*¹, 畔上秀幸*², 山口正太郎*³Shape Identification Analyses of Potential Flow Field
(Prescribed Problems of Pressure Distribution and Solution
by the Traction Method)

Eiji KATAMINE, Hideyuki AZEGAMI and Syohtaroh YAMAGUCHI

This paper describes numerical analyses method for shape identification problems of domains in which incompressible potential flow fields problems are defined. Reshaping was accomplished by the traction method that was proposed by one of the authors as a solution to domain optimization problems in which elliptic boundary value problems were defined. In previous paper, we applied the numerical analysis method based on the traction method to velocity prescribed problems in potential flow fields in which we chose the velocity square error norm between specified distribution and actual distribution for the objective functional. In this paper, we formulated a square error norm minimization problem of pressure distribution in stead of the velocity distribution based on Bernoulli's theorem and theoretically derived the shape gradient function. The validity of this numerical method was confirmed by the numerical results.

Key Words: Optimum Design, Numerical Analysis, Computational Fluid Dynamics, Finite-Element Method, Domain Optimization, Shape Identification, Speed Method, Potential Flow, Inverse Problem, Traction Method.

1 はじめに

流れ場の形状を設計対象にした形状決定問題は、流体機械などの構造物を設計する際に現われる重要な問題である。その中でも、指定した境界あるいは領域において、流速あるいは圧力などの状態関数を規定した分布を持つように境界形状を同定する問題(形状同定問題)は、形状逆問題の一つであり設計に直結した問題となる。この問題は、指定境界あるいは領域での実状態関数分布と規定状態関数分布との誤差を最小化させる問題として捉えれば、一つの最適化問題として取り上げることができる。本論文では、基本的なポテンシャル流れ場問題に対して圧力分布を規定する形状同定問題を扱う。

流れ場の形状決定問題の数値解析は1970年代に、Vanderplaatsら⁽¹⁾のグループによって始められている。彼らは、最大揚力、最小抵抗の翼形状決定問題を

設定し、翼形状を多項式によって近似して、その未定係数を設計変数にした最適化問題から導出される離散系感度を計算している。その感度を用いれば、非線形計画法を利用した最適化プログラムによって問題を解析することができる。その後、形状境界をスプライン関数で近似する方法⁽¹⁾や、異なる複数の形状を重ね合わせてその未定係数を設計変数にしたベシスベクトル法⁽²⁾など、設計変数を極力少なくした最適化手法が開発されてきた。さらに最近では、形状境界をスプライン関数で近似して、最適化問題の解法には遺伝的アルゴリズムを利用する方法が大林ら⁽³⁾によって提案されている。

これに対して、Pironneauら⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾やJamesonら⁽⁷⁾は形状決定問題の解法に、随伴変数を用いて分布系感度を計算している。Pironneauら⁽⁶⁾は、流速や圧力分布規定の形状同定問題に対して、領域変動に対する分布系の感度(形状勾配関数)を導出している。しかしながら、実際の数値解析においては、その厳密な形状勾配関数を直接用いずに、有限要素モデルの節点自由度を基にした最適化問題から導出される離散系感度ベクトルを再度導出して、その離散系感度を用いて非線形最適化プログラムによって問題を解いている。

* 1997年3月21日 関西支部第72期定時総会講演会において講演、原稿受付1997年6月23日。

¹ 正員、岐阜工業高等専門学校(☎501-0495 岐阜県本巣郡真正町上真桑)。

² 正員、豊橋技術科学大学(☎441-8122 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

³ フジユニバース(株)(☎431-0431 湖西市鷺津2418)。

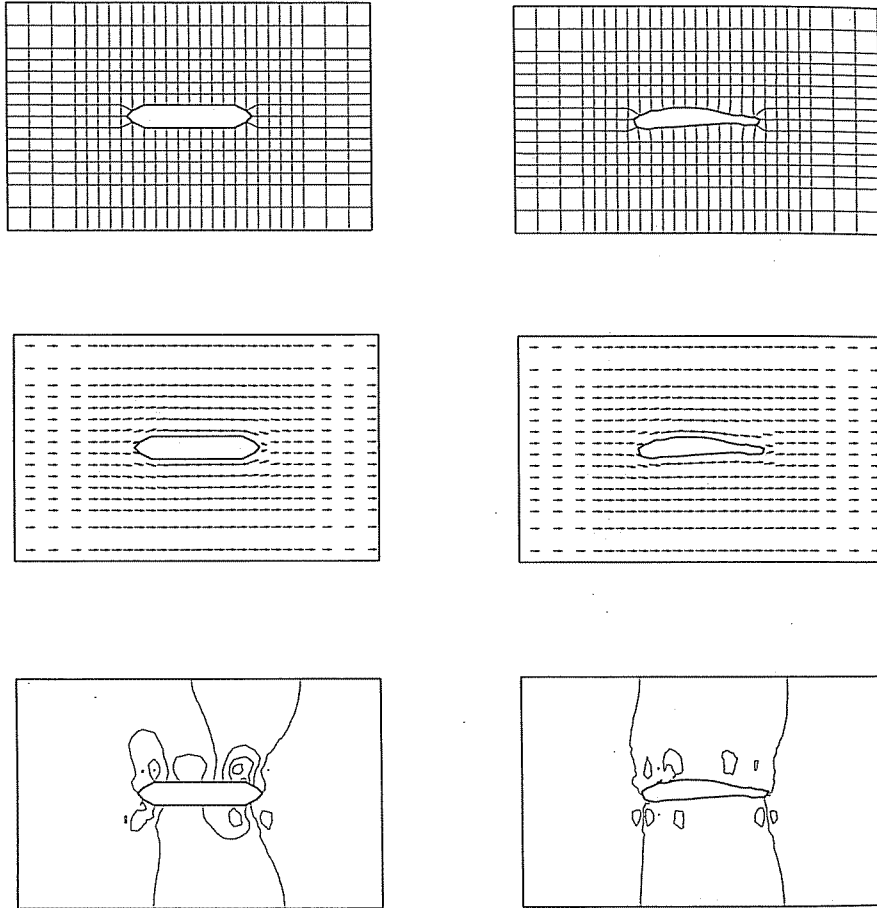


Fig. 5 Results for simple wing : Comparison between finite-element meshes (upper), flow velocity maps (middle) and distributions of shape gradient density function (lower) at initial state (left) and at converged state (right)

によって決定されたとき、Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して、次の関係が成立する。

$$\dot{L}|_{\phi,w} = \dot{E}_{\Omega_D}|_{\phi,w} = (G_s \bar{n}, \bar{V})_{(H^0(\Gamma_s))^n} \quad (16)$$

式(12)で与えられる $G_s \bar{n}$ は、評価関数の導関数において、領域の微小変動を与える速度場 \bar{V} の係数関数になっていることから、この問題における感度関数あるいは形状勾配関数になっている。またスカラー関数 G_s を形状勾配密度関数と呼ぶことにする。式(14)と(15)はそれぞれポテンシャル流れ場の状態方程式と随伴系方程式の変分形式を表わしている。

形状勾配関数が与えられれば、方法を適用することが可能となる。

2.2 流れ場境界での規定問題 次に流れ場境界において圧力分布を規定する問題を考える。ここでは、先ほどの場合と同様な手順によって、この問題の形状勾配関数が導出されるまでを簡単に紹介する。問題を図2のように定義する。圧力規定境界 Γ_D は全境界から境界 Γ_0 と Γ_1 を除いた境界 $\Gamma \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ に含まれると仮定する。先の問題と同様に領域変動を拘束する領域 Θ に境界 Γ_0 、 Γ_1 が含まれと仮定する。このとき、圧力二乗誤差最小化問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \text{Problem(2):} \quad & \text{Given } \Omega, \phi_0, \phi_1 \in \Phi \quad (17) \\ & \text{find } \Omega_s \text{ or } \bar{T}_s(\Omega) \in D \quad (18) \\ & \text{that minimize } E_{\Gamma_D} \quad (19) \\ & \text{subject to } (\bar{\nabla} \phi, \bar{\nabla} w)_{(H^0(\Omega_s))^n} = 0 \\ & \quad \quad \quad \forall w \in W \quad (20) \end{aligned}$$

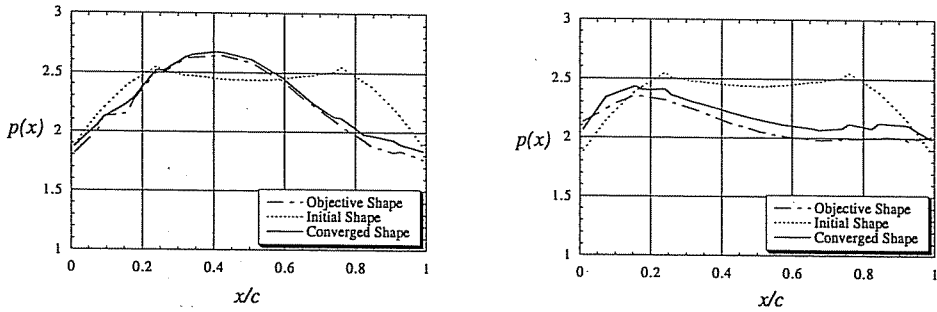


Fig. 6 Results for simple wing : Comparison of pressure distributions on upper-sub region Ω_D (left) and lower-sub region Ω_D (right)

ただし、圧力分布二乗誤差 E_{Γ_D} は次のように与えられる。

$$E_{\Gamma_D} = E \left(\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi - p_D, \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi - p_D \right)_{H^0(\Gamma_D)} \quad (21)$$

この場合の Lagrange 汎関数 $L(\phi, w, \vec{T}_s)$ を与えて領域変動に対する \dot{L} の導関数 \dot{L} を計算すると次のように得られる⁽¹¹⁾。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -(\vec{\nabla} \phi, \vec{\nabla} w')_{(H^0(\Omega_s))^n} \\ & - \left\{ (\vec{\nabla} \phi', \vec{\nabla} w)_{(H^0(\Omega_s))^n} \right. \\ & \left. - 2E \left(\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi - p_D, (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi' \right)_{H^0(\Gamma_D)} \right\} \\ & + (G_s \vec{n}, \vec{V})_{(H^0(\Gamma_s))^n} \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、

$$\begin{aligned} (G_s \vec{n}, \vec{V})_{(H^0(\Gamma_s))^n} = & \int_{\Gamma_s \setminus \Gamma_{D_s}} G_s \vec{n} \cdot \vec{V} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{D_s}} (G_s + G_{D_s}) \vec{n} \cdot \vec{V} d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

$$G_s = -\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} w \quad (24)$$

$$\begin{aligned} G_{D_s} = & 2 \left\{ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi - p_D \right\} \nabla_n \left\{ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi - p_D \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi - p_D \right\}^2 \kappa \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $\nabla_n \{ \cdot \} = \vec{\nabla} \{ \cdot \} \cdot \vec{n}$ 、 κ は 2 次元の場合曲率、3 次元の場合平均曲率を表わしている。 ϕ, w が次の条件

$$(\vec{\nabla} \phi, \vec{\nabla} w')_{(H^0(\Omega_s))^n} = 0 \quad \forall w' \in W \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & (\vec{\nabla} \phi', \vec{\nabla} w)_{(H^0(\Omega_s))^n} = \\ & \left(\left\{ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi - 2p_D \right\} (\vec{\nabla} \phi), \vec{\nabla} \phi' \right)_{(H^0(\Gamma_D))^n} \quad \forall \phi' \in \Phi \end{aligned} \quad (27)$$

によって決定されたとき、Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して、次の関係が成立する。

$$\dot{L}|_{\phi, w} = \dot{E}_{\Gamma_D}|_{\phi, w} = (G_s \vec{n}, \vec{V})_{(H^0(\Gamma_s))^n} \quad (28)$$

式 (23) で与えられる G_s および G_{D_s} はこの問題の形状勾配密度関数である。この流れ場境界における圧力分布規定問題の形状勾配密度関数の計算では、ポテンシャル値 ϕ や w の勾配を評価することに加えて、 $\left\{ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi - p_D \right\}$ の勾配、設計境界の曲率 κ の計算が含まれる。この場合の形状勾配関数は、 $\left\{ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^T \vec{\nabla} \phi - p_D \right\}$ の勾配を計算する必要があるために、式 (13) の形状勾配関数と比較して滑らかさが低下することになる。したがって、この流れ場境界で圧力分布を規定する問題に対して、方法を適用してもあまり効果が期待できないことになる⁽¹²⁾。

3 解法

方法は速度場 \vec{V} を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている⁽¹¹⁾。

$$a(\vec{V}, \vec{y})_{(H^1(\Omega_s))^n} = -(G_s \vec{n}, \vec{y})_{(H^0(\Gamma_s))^n}, \quad \forall \vec{y} \in D \quad (29)$$

ただし、 $a(\vec{V}, \vec{y})_{(H^1(\Omega_s))^n}$ は線形弾性体のひずみエネルギーを与える双一次形式で、分布ベクトル関数 \vec{u}, \vec{v} に対して次式で定義される。

$$a(\vec{u}, \vec{v})_{(H^1(\Omega_s))^n} = \int_{\Omega_s} A_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad (30)$$

A_{ijkl} は正定値性を有する剛性テンソルである。式 (29) は、速度場 \vec{V} が負の形状勾配関数 $-G_s \vec{n}$ を外力として作用させたときの変位場として解析されることを示している。

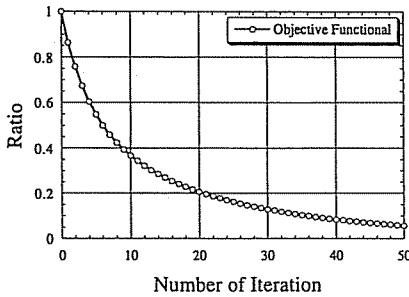


Fig. 7 Results for simple wing : Iteration history of objective functional

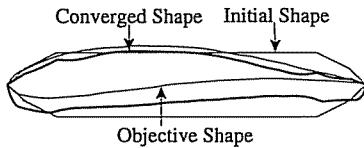


Fig. 8 Results for simple wing : Comparison of shapes at initial, converged and objective states

本研究では、簡単のために、剛性テンソルを次式で与えることにする。

$$A_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad (31)$$

ただし、 δ_{ij} は Kronecker デルタである。

本研究で用いた解析手順を図 3 に示す。まず、初期形状を与え、速度ポテンシャル ϕ 、随伴速度ポテンシャル w を解析する。その結果から形状勾配関数を計算する。さらに、その結果を用いて式 (29) から速度場 \vec{v} を計算し、 $\Delta s \vec{v}$ により形状を更新する。解析は目的汎関数が停留したと判断されたときに終了する。本解析では、速度ポテンシャル場 ϕ の解析、随伴速度ポテンシャル場 w の解析および速度場 \vec{v} の解析、すべてにおいて有限要素法を利用した。

4 解析例

提示した方法の妥当性を確認するために、流れ場領域内部において圧力分布を規定する問題に対して、簡単な翼形状と流体機械などで使用されている NACA 0012 翼の二つの形状同定問題を設定した。

4.1 解析例 1 : 簡単な翼 問題設定を図 4 に示す。一様流中に置かれた翼の上部と下部にそれぞれ圧力分布規定領域が設定されている。この問題では、図の上

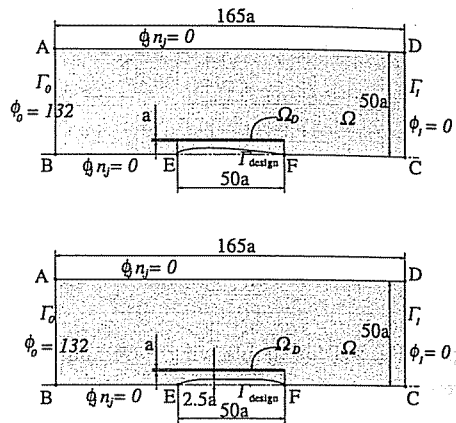


Fig. 9 NACA 0012 wing : Problem (upper), initial shape (lower)

側の形状を目標形状として設定し、下側の形状を初期形状として仮定して解析を行った。速度場解析 (形状修正解析) では、翼の左端 E および右端 F を拘束した。有限要素解析には、8 節点アイソパラメトリック 2 次要素を用いた。要素数 396、節点数 1296 である。

本問題の解析結果を図 5 から図 8 に示す。図 5 に初期形状と収束形状を比較してそれぞれ有限要素分割、流速分布、形状勾配密度関数分布を示している。収束形状では、形状勾配密度関数の分布が設計境界で緩和されている様子が観察される。また、図 6, 7, 8 に翼の上部および下部の圧力分布 (流速二乗分布)、形状修正の繰り返しに対する目的汎関数の収束履歴、形状比較を示している。図 6 は規定領域 Ω_D の流れ方向長さ x に対する圧力分布 $p(x) = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^T \vec{\nabla}\phi$ を示している。図 7 の目的汎関数の値は初期値によって規準化されている。図 7 の結果から、目的汎関数の値が目的値のゼロに近づいていることが観察される。しかしながら、図 8 の結果から、十分に滑らかな収束形状が得られず目標形状にあまりよく一致していない様子がわかる。その相違は、図 6, 8 の結果から特に翼の両端部と下側で顕著である。この翼両端部の形状の相違は、境界形状かど部の影響によるものと考えられる。また翼下側における形状相違の原因は、有限要素分割メッシュが比較的粗かったことと、初期形状の設定に少し無理があったと考えられる。

この解析結果から目的汎関数を最小化させるという本手法の基本的な妥当性が理解できる。

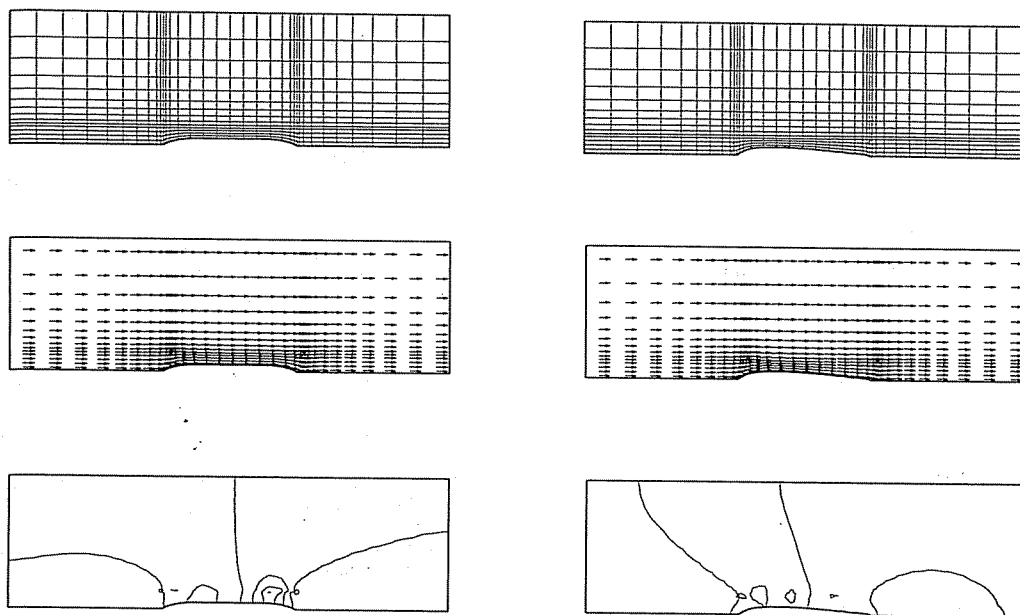


Fig. 10 Results for NACA0012 wing : Comparison between finite-element meshes (upper), flow velocity maps (middle) and distributions of shape gradient density function (lower) at initial state (left) and at converged state (right)

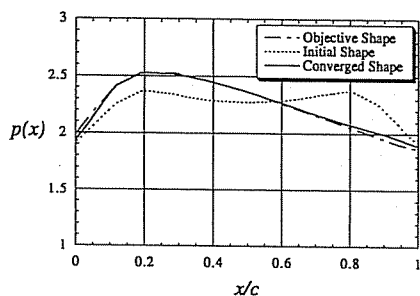


Fig. 11 Results for NACA0012 wing : Comparison of pressure distributions on upper-sub region Ω_D

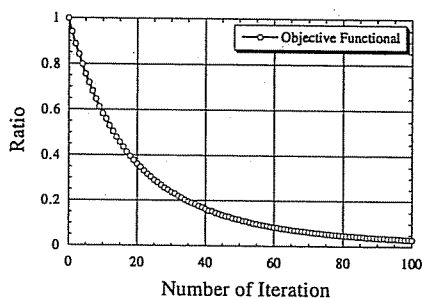


Fig. 12 Results for NACA 0012 wing : Iteration history of objective functional

4.2 解析例 2 : NACA 0012 翼 流体機械などで使用されている NACA 0012 翼の形状を同定する問題を取り上げる。

問題設定を図 9 に示す。本解析では解析対象領域の有限要素分割を十分に細かくするために、流れ場領域の解析対象を上側半分を設定し、翼形状の上下に同一の圧力分布を規定する問題を想定して解析を行った。使用した有限要素は 8 節点アイソパラメトリック 2 次要素で、要素数 476、節点数 1525 である。問題で

は、一様流中に置かれた翼の上部に一つの流線に近似できるくらいの細長い領域として圧力分布規定領域が設定されている。図中、上側が目標形状、下側が初期形状である。初期形状には左右対称の形状を設定した。速度場解析(形状修正解析)では、翼の左端 E および右端 F を拘束した。

本問題の解析結果を解析例 1 の場合と同様に図 10 から図 13 に示す。図 13 の形状比較では上下対称の結果を示している。翼両端かど部の影響がいくぶん残

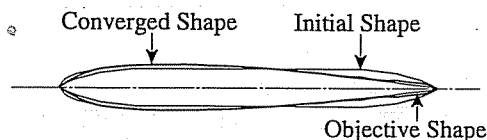


Fig. 13 Results for NACA0012 wing : Comparison of shapes at initial, converged and objective states

るものの、目標形状に非常に良く一致した滑らかな収束形状が得られていることが観察できる。さらに、図 11, 12 の結果からも目的を果たしている様子が確認できる。

これらの結果からも提示した方法の妥当性を確認することができた。

5 まとめ

本論文では、定常非圧縮性ポテンシャル流れ場において圧力分布を規定する形状同定問題を取り上げた。流れ場において指定された領域あるいは境界での圧力分布二乗誤差最小化問題を定式化し、その最適化問題に対する形状勾配関数を理論的に導出した。方法をこの形状同定問題に適用し、簡単な 2 次元の翼形状同定問題の解析例から提示した方法の妥当性を示した。

今後の主な課題は、(1) 圧縮性を考慮したポテンシャル流れ場に対する圧力規定逆問題の定式化および数値解析、(2) 設計の効率化を目指した汎用 FEM コードを利用した数値解析法の開発などを考えている。

なお本研究は、財団法人機械工業振興助成財団の援助を受けて行われた。記して深く謝意を表する。

文 献

- (1) G. N. Vanderplaats : *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design With Applications*, (1984), 284, McGraw-Hill.
- (2) G. N. Vanderplaats and R. M. Hicks : *Numerical Optimization Using a Reduced Number of Design Coordinates*, NASA TM X-73, (1976), 151.
- (3) 大林茂 : 空力設計と逆問題, 計算工学, 1 巻, 3 号, (1996), 136-142.
- (4) Angrand, F. : *Optimum Design for Potential Flows*, *Int. J. for Numerical Method in Fluids*, Vol. 3 (1983), 265-282.
- (5) Pironneau, O. : *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, (1984), Springer-Verlag.
- (6) Pironneau, O. : *Optimal Shape Design with Applications to Aerodynamics, Shape Optimization and Free Boundaries*, Edited by Michel C. Delfour, NATO ASI Series, Series C, Vol.380, (1992), 211-251, Kluwer Academic Publishers.
- (7) Jameson, A. : *Optimum Aerodynamic Design Using Control Theory*, *Computational Fluid Dynamics Review 1995*, Edited by Hafez, M. and Oshima, K., (1995), 495-528, John Wiley Sons.
- (8) 片峯英次, 畔上秀幸 : 粘性流れ場の領域最適化問題の解法 (方法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, B 編, 60 巻, 579 号 (1994), 3859-3866.
- (9) 片峯英次, 畔上秀幸 : ポテンシャル流れ場の領域最適化解析, 日本機械学会論文集, B 編, 61 巻, 581 号 (1995), 103-108.
- (10) 片峯英次, 畔上秀幸 : 粘性流れ場の領域最適化解析 (対流項を考慮した場合), 日本機械学会論文集, B 編, 61 巻, 585 号 (1995), 1646-1653.
- (11) 畔上秀幸 : 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, 574 号 (1994), 1479-1486.
- (12) 畔上秀幸, 海津 聡, 下田昌利, 片峯英次 : 形状最適化問題における正則性の不足とその回復法, 日本機械学会第 2 回最適化シンポジウム講演論文集, No.96-7, (1996), 123-128.